JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. POINCARÉ

Sur les périodes des intégrales doubles

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 2 (1906), p. 135-189.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1906_6_2__135_0>

Sur les périodes des intégrales doubles;

Par M. H. POINCARÉ.

§ 1. — Introduction.

La détermination du nombre des périodes cycliques d'une intégrale double exige une grande attention, comme toutes les questions d'*Analysis situs*, dès que le nombre des dimensions dépasse 3. M. Picard a abordé la question dans son Ouvrage sur les fonctions algébriques de deux variables, que je citerai souvent.

Je m'en suis occupé moi-même dans un Mémoire intitulé : *Sur les cycles des surfaces algébriques*, et inséré au *Journal de Liouville* en 1902. C'est à ce Mémoire que je renverrai quand je parlerai sans autre explication du *Mémoire cité*.

L'application des règles posées dans ce Mémoire présente quelquefois quelques difficultés; la question du nombre des cycles ne se pose pas d'une façon aussi simple que dans le cas des courbes algébriques, puisqu'il y a plusieurs manières d'envisager les points à l'infini et que le nombre des cycles ne reste pas le même quelle que soit la convention adoptée. D'autre part, il peut arriver que ce nombre ne soit pas le même pour deux surfaces, bien que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une transformation birationnelle. C'est ce qu'a montré M. Picard.

Si l'on ne fait pas attention à ces circonstances, il peut arriver qu'on soit conduit à d'apparentes contradictions et que le nombre des cycles d'une surface, tel que le donnent les règles, ne demeure pas le même quand on change d'axes de coordonnées.

C'est ce qui m'a déterminé à revenir encore une fois sur la question et d'ailleurs sans l'épuiser. J'ai modifié la convention relative aux points à l'infini, de façon que tout devienne projectif et que les résultats se présentent sous une forme plus simple.

J'ai obtenu ainsi une formule générale et je l'ai appliquée aux surfaces du troisième degré.

Ces surfaces présentent, au point de vue qui nous occupe, des propriétés qui semblent paradoxales, sur lesquelles M. Picard a déjà attiré l'attention. C'est ce qui m'a engagé à les étudier en détail.

Il faudrait, pour aller plus loin, étudier les cas où la surface présente d'autres singularités que les singularités ordinaires qui caractérisent les surfaces auxquelles toutes les autres peuvent être ramenées par une transformation birationnelle; c'est-à-dire les cas où la variété à quatre dimensions correspondante présente un point singulier. Mais je n'ai pas abordé ce problème. Je me suis contenté de dire quelques mots au sujet du point conique ordinaire, et sans épuiser la question.

§ 2. — Intégrales doubles relatives à une surface.

Soit

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

une surface algébrique quelconque, et soit

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F'_x} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F'_y} \tag{2}$$

une intégrale double relative à cette surface; P étant une fonction rationnelle de x, y, z. Nous supposerons cette intégrale prise le long d'un domaine à deux dimensions que j'appellerai K et qui sera généralement un cycle fermé.

Soit maintenant

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \tag{3}$$

un plan variable quelconque, et soit C l'intersection de ce plan variable avec la surface (1). Nous pourrons supposer que le domaine d'intégration K est engendré de la façon suivante : le plan (3) variera d'une manière continue ; en même temps, nous envisagerons, sur la surface de Riemann correspondant à la courbe algébrique C, un cycle fermé k ; quand le plan (3) variera d'une manière continue, ce cycle k variera également d'une manière continue, et ce sont les positions successives du cycle à une dimension k qui engendreront le cycle à deux dimensions K. Que devient dans ces conditions notre intégrale double?

Posons

$$(4) \qquad \begin{cases} X = \beta F'_z - \gamma F'_y, \\ Y = \gamma F'_x - \alpha F'_z, \\ Z = \alpha F'_y - \beta F'_x. \end{cases}$$

Posons encore

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z,$$

λ, μ et ν étant des constantes quelconques; supposons que les coefficients variables α, β, γ de l'équation (3) soient des fonctions d'une certaine variable t et prenons u et t pour nouvelles variables indépendantes. Il s'agit de calculer le déterminant fonctionnel des anciennes variables x et y par rapport aux nouvelles u et t.

Pour cela, nous avons les équations suivantes :

$$(5) \qquad \begin{cases} du = \lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz, \\ -dt \sum x \dfrac{d\alpha}{dt} = \alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz, \\ dF = F'_x\, dx + F'_y\, dy + F'_z\, dz. \end{cases}$$

Si donc nous posons

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \\ F'_x & F'_y & F'_z \end{vmatrix} = \lambda X + \mu Y + \nu Z,$$

nous trouverons

$$\frac{\partial(u, t, F)}{\partial(x, y, z)} = -\frac{D}{\sum x \dfrac{d\alpha}{dt}}.$$

D'autre part

$$\frac{d(u, t, F)}{\partial(x, y, z)} = \frac{\partial(u, t, F)}{\partial(u, t, z)} \frac{\partial(u, t, z)}{\partial(x, y, z)} = F'_z \frac{\partial(u, t)}{\partial(x, y)},$$

d'où enfin

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, t)} = -\frac{F'_z \sum x \frac{d\alpha}{dt}}{D},$$

de sorte que notre intégrale double devient

$$J = -\int\int \frac{P \sum x \frac{d\alpha}{dt} du\, dt}{D},$$

ou bien

$$(6) \qquad J = \int (A\, d\alpha + B\, d\beta + C\, d\gamma)$$

avec

$$(7) \qquad A = \int \frac{Px\, du}{D}, \qquad B = \int \frac{Py\, du}{D}, \qquad C = \int \frac{Pz\, du}{D}.$$

On peut annuler deux des trois coefficients arbitraires λ, μ, ν, en faisant l'autre égal à 1; on trouve ainsi, par exemple,

$$(7\ bis) \qquad A = \int \frac{Px\, dx}{X} = \int \frac{Px\, dy}{Y} = \int \frac{Px\, dz}{Z}.$$

Les intégrales (7) et (7 *bis*) sont des intégrales abéliennes *simples* relatives à la courbe algébrique C; et si, comme nous l'avons supposé, le chemin d'intégration k est un cycle fermé, ce sont des périodes de ces intégrales abéliennes.

Nous devons nous attendre à ce que

$$A\, d\alpha + B\, d\beta + C\, d\gamma$$

soit une différentielle exacte, et c'est en effet ce qui arrive Vérifions que

$$(8) \qquad \frac{dA}{d\beta} = \frac{dB}{d\alpha}.$$

Quand nous allons parcourir le cycle k, le point u va décrire dans son plan une certaine courbe fermée; nous pourrons toujours supposer que cette courbe ne varie pas quand on donne à β, par exemple, un accroissement très petit.

En effet, par hypothèse, notre cycle k est fermé et varie d'une manière continue. Si donc k' est la courbe fermée décrite par u dans son plan, si k'' est ce que devient cette même courbe quand β se change en $\beta + d\beta$, ces deux courbes fermées k' et k'' différeront infiniment peu. On aura toujours pu choisir k' de façon que cette courbe passe à distance finie de tous les points singuliers. Il n'y aura pas alors de point singulier entre k' et k''. L'intégrale le long de k'' est donc égale à l'intégrale le long de k'; on peut remplacer la courbe k'' par la courbe k', c'est-à-dire supposer que la courbe k' n'a pas varié. Cela nous permet de calculer $\frac{dA}{d\beta}$ par différentiation sous le signe $\int$ en regardant le chemin d'intégration comme invariable. On trouve ainsi

$$\frac{dA}{d\beta} = \int \frac{d}{d\beta}\left(\frac{Px}{D}\right) du,$$

en remarquant que

$$\frac{d}{d\beta} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d\beta} + \frac{d}{dy}\frac{dy}{d\beta} + \frac{d}{dz}\frac{dz}{d\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta},$$

en représentant par $\frac{\partial}{\partial\beta}$ avec des ∂ ronds la dérivée prise par rapport à β en tant que cette variable figure explicitement dans $\frac{Px}{D}$, mais en regardant x, y, z comme des constantes.

Nous observerons que, dans le numérateur Px, la lettre β ne figure pas explicitement, mais qu'elle figure dans D et que l'on a

$$\frac{\partial D}{\partial\beta} = (\lambda F'_z - \nu F'_x).$$

Maintenant, pour calculer $\frac{dx}{d\beta}, \frac{dy}{d\beta}, \frac{dz}{d\beta}$, il faut dans les équations (5) faire $du = 0$, puisque notre chemin d'intégration est invariable; $dF = 0$, puisque l'équation (1) a toujours lieu; $d\alpha = d\gamma = 0$, puisque pour chercher la dérivée partielle par rapport à β il faut regarder les deux autres variables α et γ comme des constantes. On trouve ainsi

$$
(5\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} 0 &= \sum \lambda\, dx, \\ -y\, d\beta &= \sum \alpha\, dx, \\ 0 &= \sum F'_x\, dx. \end{aligned}\right.
$$

Nous y adjoignons l'identité

$$
(9)\qquad d\left(\frac{Px}{D}\right) = x\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) + \frac{P}{D}dx - \frac{Px}{D^2}\frac{\partial D}{\partial \beta}d\beta,
$$

en posant

$$
Q = \frac{P}{D}.
$$

Les équations (5 *bis*) nous donnent d'abord

$$
D\left(\frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{dQ}{dz}dz\right) = y\, d\beta \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ F'_x & F'_y & F'_z \\ Q'_x & Q'_y & Q'_z \end{vmatrix} = y\Delta\, d\beta,
$$

et d'autre part

$$
D\frac{dx}{d\beta} = y(\mu F'_z - \nu F'_y).
$$

Si donc dans l'équation (9) nous remplaçons $\sum \frac{dQ}{dx}dx$, dx et $\frac{\partial D}{\partial \beta}$ par leurs valeurs, nous trouverons

$$
\frac{d}{d\beta}\left(\frac{Px}{D}\right) = \frac{xy\Delta}{D} + \frac{D}{D^2}[y(\mu F'_z - \nu F'_y) - x(\lambda F'_z - \nu F'_x)].
$$

On trouverait de même

$$
\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{Py}{D}\right) = \frac{xy\Delta}{D} + \frac{D}{D^2}[-x(\lambda F'_z + \nu F'_x) + y(\mu F'_z - \nu F'_y)],
$$

et l'identité des deux expressions suffit pour démontrer l'égalité (8).

Donc $A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma$ est une différentielle exacte.

C. Q. F. D.

Afin de ne pas exclure le cas où le plan (3) passe par l'origine, il convient de rendre l'équation de ce plan homogène en l'écrivant

$$(3\ bis) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon.$$

Il vient alors

$$dJ = A_1\,d\frac{\alpha}{\varepsilon} + B_1\,d\frac{\beta}{\varepsilon} + C_1\,d\frac{\gamma}{\varepsilon},$$

A_1, B_1, C_1 étant ce que deviennent A, B, C quand on y remplace α, β, γ par $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$, $\frac{\gamma}{\varepsilon}$, dans ces conditions, le déterminant D se change en

$$D_1 = \frac{D}{\varepsilon}.$$

Il vient ainsi

$$A_1 = \int \frac{Px\,du}{D_1} = \varepsilon \int \frac{Px\,du}{D} = A\varepsilon,$$

d'où

$$A_1\,d\frac{\alpha}{\varepsilon} = A\,d\alpha - \frac{A\alpha\,d\varepsilon}{\varepsilon},$$

d'où enfin

$$(6\ bis) \qquad dJ = A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma - E\,d\varepsilon,$$

où

$$E = \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{\varepsilon} = \int \frac{P(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,du}{D\varepsilon},$$

ou en vertu de l'équation (3 *bis*) :

$$(10) \qquad E = \int \frac{P\,du}{D}.$$

Considérons alors J comme fonction de α, β, γ, ε; nous partirons de certaines valeurs initiales de ces variables, par exemple les valeurs 1, 0, 0, 1 (c'est-à-dire le plan $x = 1$), et nous les ferons varier d'une manière continue et par un chemin quelconque jusqu'à leurs valeurs finales α, β, γ, ε; le cycle à une dimension k variera aussi d'une manière continue et engendrera une variété à deux dimensions K qui ne sera pas fermée, mais qui aura une frontière formée du cycle initial (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan initial $x = 1$) et du cycle final (c'est-à-dire du cycle k de la surface de Riemann correspondant au plan final $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$). C'est le long de cette variété K que sera prise l'intégrale double J.

L'intégrale J est une fonction multiforme des variables α, β, γ, ε; parce que les cycles k s'échangent entre eux lorsque ces variables tournent autour d'un point singulier, et parce que l'intégrale J prend deux valeurs différentes, quand les variables vont de leurs valeurs initiales à leurs valeurs finales par deux chemins différents, si entre ces deux chemins il y a un point singulier.

Quels sont ces points singuliers; ce sont ceux qui correspondent au cas où le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1).

Considérons d'abord le cycle k et les valeurs correspondantes des intégrales A, B, C, E comme des fonctions des variables α, β, γ, ε; quand les variables ayant tourné autour d'un point singulier reviendront à leurs valeurs initiales, le cycle k se transformera en un autre cycle de la même surface de Riemann. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ les cycles fondamentaux de cette surface de Riemann (que je suppose de genre p). Après une rotation autour du point singulier, ils se transformeront en d'autres cycles de la même surface, qui devront être eux-mêmes des combinaisons des cycles fondamentaux $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$.

Soient alors $A_1, A_2, \ldots, A_{2p}$ les valeurs de l'intégrale A correspondant à ces $2p$ cycles; ce sont les périodes fondamentales de l'intégrale abélienne indéfinie A. Elles se transformeront en $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{2p}$ et les A'_i ne seront autre chose que des combinaisons linéaires des A_i, à coefficients constants et entiers.

Donc A, considéré comme fonction de l'une des variables α, β, γ, ε, satisfait à une équation différentielle linéaire d'ordre $2p$, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε; plus généralement, entre $2p+1$ dérivées partielles de A par rapport aux quatre variables (parmi lesquelles la fonction A elle-même pourra être comprise), il y a toujours une relation dont les coefficients seront des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε.

Il en sera de même en ce qui concerne B, C et E. Mais il y a quelque chose de plus. Quand les variables tournent autour d'un point singulier, B, C et E subissent *la même* transformation linéaire que A. Il en résulte que nous aurons encore une relation de même forme, non seulement entre $2p+1$ dérivées de A, mais entre $2p+1$ dérivées quelconques, appartenant les unes à A, les autres à B, C ou E, les fonctions A, B, C et E elles-mêmes n'étant pas exclues.

Mais A, B, C, E sont les dérivées du premier ordre de J; et les dérivées de ces quatre fonctions sont aussi des dérivées partielles de J, de sorte que nous arrivons finalement au résultat suivant :

Entre $2p+1$ dérivées partielles quelconques de J (*la fonction* J *étant exclue*) *il y a toujours une relation linéaire dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de* α, β, γ, ε.

Prenons un nombre suffisant de semblables relations, en assez grand nombre pour que toutes les autres n'en soient plus que des conséquences; nous aurons un système de relations que j'appellerai le système (S). Il suffira, par exemple, pour cela de prendre les quatre équations

$$(\mathrm{S})\qquad \left\{\begin{array}{ll} \sum Q_i \dfrac{d^i J}{d\alpha^i} = 0, & \dfrac{dJ}{d\beta} = \sum R_i^1 \dfrac{d^i J}{d\alpha^i}, \\ \dfrac{dJ}{d\gamma} = \sum R_i^2 \dfrac{d^i J}{d\alpha^i}, & \dfrac{dJ}{d\varepsilon} = \sum R_i^3 \dfrac{d^i J}{d\alpha^i}; \end{array}\right.$$

Q_i, R_i^1, R_i^2, R_i^3 sont des fonctions rationnelles de α, β, γ, ε; dans la première équation (S) l'indice i peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, 2p+1$; dans les trois autres il peut prendre les valeurs $1, 2, \ldots, 2p$. Qu'arrive-t-il maintenant de J quand les variables tournent autour d'un point singulier? Considérons par exemple les $2p$ déterminations de A :

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_{2p}$$

définies plus haut et soient

$$J_1, \quad J_2, \quad \ldots, \quad J_{2p}$$

les déterminations correspondantes de J. Supposons que, quand on tourne autour du point singulier, A_i se change en

$$\sum \lambda_{ik} A_k,$$

les λ_{ik} étant des coefficients constants et entiers comme on l'a expliqué plus haut; alors J_i se changera en

$$\sum \lambda_{ik} J_k + H_i,$$

H_i étant une constante.

Une combinaison quelconque $\sum \lambda_k J_k$, où les λ_k sont entiers, se changera donc en $\sum \mu_k J_k + H$ où les μ_k sont des entiers et où H est une constante. Cela posé considérons q points singuliers M_1, M_2, ..., M_q. Imaginons que, quand on tourne autour de M_1, une certaine combinaison

$$\sum \lambda_{1k} J_k$$

se change en $\sum \mu_{1k} J_k + H_1$; et que plus généralement, quand on tourne autour de M_i, une certaine combinaison $\sum \lambda_{ik} J_k$ se change en

$$\sum \mu_{ik} J_k + H_i.$$

Les λ_{ik} et les μ_{ik} sont des coefficients entiers, les H_i sont des constantes.

Soit d'ailleurs K_i un contour à deux dimensions défini de la façon suivante :

Soit C_i un contour à une dimension; pour les valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ des quatre variables, il est choisi dans le plan $(x = 1)$ de façon que la période correspondante de l'intégrale A soit $\sum \lambda_{ik} A_k$. Supposons ensuite que les variables α, β, γ, ε tournent au point singulier M_i en partant des valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ pour revenir aux mêmes valeurs finales, et que le cycle C_i varie avec elles d'une manière continue; il engendrera le cycle à deux dimensions K_i.

Nous pouvons supposer que J_1, J_2, ..., J_{2p} (qui ne sont définies jusqu'ici qu'à une constante près) s'annulent pour les valeurs initiales. Alors H_i sera l'intégrale double prise le long du contour K_i.

Soient maintenant

$$\nu_1, \quad \nu_2, \quad \ldots, \quad \nu_q$$

q coefficients entiers, choisis de telle sorte que

$$(11) \quad \sum \nu_i(\lambda_{i1} - \mu_{i1}) = \sum \nu_i(\lambda_{i2} - \mu_{i2}) = \ldots = \sum \nu_i(\lambda_{i2p} - \mu_{i2p}) = 0.$$

Alors, l'expression

$$\sum \nu_i H_i$$

représentera une des *périodes de l'intégrale double;* ce sera la valeur de cette intégrale double, prise le long du cycle *fermé* à deux dimensions

$$\sum \nu_i K_i.$$

Je dis, en effet, que ce cycle est fermé. En effet le cycle K_i n'est pas fermé, mais il admet pour frontière, d'une part, le cycle C_i dans sa position initiale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \lambda_{ik} k_k;$$

d'autre part, ce même cycle dans sa position finale, c'est-à-dire

$$C_i = \sum \mu_{ik} k_k,$$

de sorte que sa frontière complète sera

$$\sum (\lambda_{ik} - \mu_{ik}) k_k.$$

Donc la frontière complète du cycle $\sum \nu_i K_i$ sera

$$\sum\sum \nu_i(\lambda_{ik} - \mu_{ik})k_k$$

et elle se réduira à rien en vertu des relations (11).

C. Q. F. D.

Supposons, d'autre part, que nous changions l'origine, je veux dire qu'au lieu de faire varier $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ depuis les valeurs initiales $(1, 0, 0, 1)$ jusqu'aux mêmes valeurs finales nous fassions varier $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ depuis d'autres valeurs initiales $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon_0)$ auxquelles nous les ferons finalement revenir. La définition des cycles K_i se trouvera modifiée; nous n'aurons plus le droit de considérer J_k comme nul à l'origine et l'intégrale double prise le long du cycle K_i ne sera plus H_i, mais

$$\sum(\mu_{ik} - \lambda_{ik})J_k + H_i.$$

Elle dépendra donc du choix de l'origine $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \varepsilon_0)$. Considérons, au contraire, l'intégrale double prise le long du cycle $\sum \nu_i K_i$; elle sera

$$\sum\sum \nu_i(\mu_{ik} - \lambda_{ik})J_k + \sum \nu_i H_i,$$

expression qui se réduira à $\sum \nu_i H_i$ en vertu des relations (11). Elle sera donc indépendante du choix de l'origine.

§ 3. — Lacets rectilignes.

M. Picard a démontré que, par une transformation birationnelle convenable, une surface quelconque peut être ramenée à une surface *normale*, c'est-à-dire à une surface n'ayant d'autres singularités que des courbes formées par l'intersection de deux nappes sans point singulier, ou des points triples formés par l'intersection de trois nappes sans point singulier. Néanmoins la courbe double pourra présenter des *pinch-points*, c'est-à-dire des points où les deux nappes se touchent, de telle façon que l'intersection de la surface par un plan quelconque passant par ce point présente non plus un point double à tangentes séparées, mais un point de rebroussement ordinaire.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons donc en général que la surface

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

est normale; cependant, dans certains cas, nous serons amenés à considérer des surfaces qui, outre les singularités des surfaces normales, présentent des points coniques isolés; nous supposerons qu'en ces points coniques le cône des tangentes est un cône du deuxième degré ne se décomposant pas en deux plans.

Nous avons envisagé dans le paragraphe précédent les quatre variables homogènes α, β, γ, ε et nous avons considéré en particulier le cas où ces variables prenaient des valeurs correspondant à un *point singulier;* et nous entendions par là des valeurs telles que le genre de la section de la surface (1) avec le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon, \tag{3 bis}$$

que le genre, dis-je, s'abaisse d'une ou plusieurs unités.

C'est ce qui arrivera :

1° Si le plan (3 *bis*) est tangent à la surface (1);

2° Si la surface (1) admet des points coniques, et si le plan (3 *bis*) passe par un de ces points coniques.

Je ne reviendrai pas sur la discussion par laquelle M. Picard a démontré que ces deux cas sont les seuls. Pour une surface normale, on n'a à considérer que le premier, et alors les points singuliers seront définis par l'équation

$$\Phi(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon) = 0 \tag{2}$$

qui est l'équation de la surface (1) en coordonnées tangentielles homogènes ou, si l'on aime mieux, l'équation de la dualistique de la surface (1).

On est ainsi amené à se préoccuper des singularités *tangentielles* de la surface (1). Mais, par un raisonnement tout à fait pareil à celui de M. Picard, on verrait que l'on peut toujours supposer que la surface (2), dualistique de (1), est une surface normale.

Nous supposerons donc en général dans ce qui va suivre que les deux surfaces sont toutes deux normales, de sorte que les seules singularités tangentielles de la surface (1) seront :

1° Des plans tangents doubles en nombre simplement infini;

2° Des plans tangents triples en nombre fini;

3° Des plans tangents d'*inflexion* correspondant au pinch-points.

Considérons d'abord un point singulier M_i correspondant à un plan tangent simple ordinaire. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_{2p}$ les $2p$ cycles fondamentaux de la courbe algébrique, intersection de (1) et de (3 *bis*); supposons que le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ parte d'une position initiale quelconque que j'appellerai o, et qui correspondra par exemple à (o, 1, o, o), c'est-à-dire au plan $y = 0$; que ce point analytique tourne autour du point singulier M_i et revienne enfin en o; que seront devenus les $2p$ cycles fondamentaux?

Il résulte d'un raisonnement de M. Picard (*Théorie des fonctions algébriques,* t. I, p. 96), que, si l'on a choisi convenablement les $2p$ cycles fondamentaux

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_{2p},$$

ils se changeront en

$$k_1, \quad k_2 + k_1, \quad k_3, \quad \ldots, \quad k_{2p}.$$

Il va sans dire que le choix des cycles fondamentaux qui permet d'énoncer le résultat sous cette forme simple n'est pas le même pour les différents points singuliers M_i.

Lorsque le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ vient en M_i, le plan (3 *bis*) devient tangent à la surface (1), coupe cette surface suivant une courbe qui n'est plus que de genre $p - 1$ et qui par conséquent n'a plus que $2p - 2$ cycles fondamentaux; ces cycles sont

$$k_3, \quad k_4, \quad \ldots, \quad k_{2p}.$$

Considérons alors le cycle

$$k = \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_{2p} k_{2p},$$

les λ étant des coefficients entiers; quand le point analytique $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon)$ partant de O, reviendra en O après avoir tourné autour de M_i, en décrivant le chemin fermé C, le cycle à une dimension k engendrera un cycle à deux dimensions K; reprenons l'intégrale J du paragraphe précédent et prenons cette intégrale double le long de K. Le chemin C peut être remplacé par un *lacet*, c'est-à-dire par un chemin allant d'abord de O en N_i, point infiniment voisin de M_i le long de la ligne L_i, allant ensuite de N_i en N_i en décrivant autour de M_i le contour infiniment petit C'_i et revenant enfin de N_i en O par la ligne L_i.

Je remarque d'abord que l'intégrale J correspondant au contour infiniment petit C'_i est infiniment petite. En effet, cette intégrale peut s'écrire, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent,

$$J = \int\int \frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int \frac{P\,dy\,dz}{F'_x} = \int\int \frac{P\,dz\,dx}{F'_y}.$$

Les trois dénominateurs F'_x, F'_y, F'_z ne sont pas nuls à la fois, si le point singulier n'est pas un point conique; de sorte que nous pouvons toujours supposer que la fonction sous le signe $\int\int$ reste finie; et le contour d'intégration est infiniment petit.

Nous excluons ainsi le cas où le point singulier serait un point conique et aussi celui où P *deviendrait précisément infini au point singulier* M_i.

Mais le premier cas ne se présentera pas si la surface (1) est normale, et si l'autre se présentait, c'est-à-dire si le plan tangent $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$ correspondant au point M_i touchait la surface (1) en un point où P serait infini, il suffirait de remplacer ce plan par un plan tangent infiniment voisin pour que la difficulté ne se présentât plus.

Il reste donc

$$J = \int\int + \int\int_{L_i}, \tag{3}$$

la première intégrale étant prise en parcourant la ligne L_i dans le sens direct, et la seconde en parcourant cette même ligne dans le sens inverse, mais après que le cycle k_2 se serait changé dans le cycle

$k_2 + k_1$ et le cycle k dans le cycle

$$k + \lambda_2 k_1.$$

On a donc simplement

$$J = -\lambda_2 \int\int_{L_i},$$

l'intégrale étant prise depuis O jusqu'à M_i en suivant la ligne L_i et en remplaçant le cycle à une dimension k par le cycle k_1. Nous aurons donc

$$(4) \qquad J = -\lambda_2 j(L_i),$$

où

$$j(L_i) = \int_0^{M_i} (A\,d\alpha + B\,d\beta + C\,d\gamma - E\,d\varepsilon),$$

l'intégrale étant prise le long de la ligne L_i; les intégrales A, B, C, E ont le même sens que dans le paragraphe précédent; elles sont supposées prises le long du cycle k_1; le cycle k_1 est choisi parce que c'est celui qui s'évanouit au point singulier M_i; c'est, pour prendre le langage du Mémoire cité (*Journal de Liouville*, 5e série, t. VIII, 1902, p. 191), le cycle *évanouissant* relatif à M_i.

Les périodes de l'intégrale double J sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers des intégrales $j(L_i)$. D'autre part, quand la ligne L_i allant de O en M_i se déforme d'une manière continue en même temps que se déplace le point M_i et de telle façon qu'elle ne passe jamais par aucun point singulier, son extrémité M_i exceptée; dans ces conditions, dis-je, l'expression $j(L_i)$ est une constante.

Si le point M_i correspond à un plan tangent double ou triple, il y aura deux ou trois cycles évanouissants correspondant aux deux ou trois points de contact de ce plan avec la surface; l'intégrale $j(L_i)$ sera donc susceptible de deux ou trois valeurs entre lesquelles il faudra distinguer. Il en sera de même si le point M_i correspond à un plan tangent d'inflexion; seulement les deux cycles évanouissants correspondront alors à un même point de contact. A part cela, aucune différence avec ce qui se passe pour un plan tangent ordinaire.

Supposons maintenant que l'on prenne $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$, de telle sorte que le plan (3 *bis*) se réduise au plan $y = \varepsilon$; on étudie ainsi les sections successives de la surface par des plans parallèles à $y = 0$; c'est le procédé qu'a employé M. Picard dans son Ouvrage et j'ai suivi son exemple dans le Mémoire cité.

Marquons dans le plan des y l'origine O correspondant au plan initial $y = 0$, et les points singuliers M_1, M_2, ..., M_q correspondant aux plans $y = y_1$, $y = y_2$, ..., $y = y_q$ qui touchent la surface (1). Joignons OM_1, OM_2, ..., OM_q par des droites. Je considère une ligne L_i dont tous les points satisfont aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$; dans ce cas ε est seul variable et, comme notre plan (3 *bis*) a précisément pour équation $y = \varepsilon$, nous pouvons représenter la ligne L_i sur le plan des y. Je dis que l'intégrale $j(L_i)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers des intégrales

$$j(OM_1),\quad j(OM_2),\quad \ldots,\quad j(OM_q)$$

correspondant aux droites OM_i.

En effet, prolongeons les droites OM_1, OM_2, ..., OM_q jusqu'à l'infini; nous pourrons considérer les prolongements $M_i\infty$ des droites OM_i comme des coupures.

Cela posé, la ligne L_i, tracée dans le plan des y, ira du point O au point M_i en coupant un certain nombre de coupures; supposons pour fixer les idées qu'elle traverse successivement les coupures $M_1\infty$ et $M_2\infty$; il faut en outre préciser le sens dans lequel elle les traverse; je supposerai, par exemple, que ce soit dans le sens direct, c'est-à-dire dans le même sens qu'un mobile qui décrirait un cercle de rayon très grand dans le sens opposé à celui des aiguilles d'une montre. Alors un mobile qui décrirait le *lacet* tout entier, c'est-à-dire L_i, puis le contour infiniment petit C'_i, puis de nouveau L_i en sens contraire, coupera successivement les coupures $M_1\infty$, $M_2\infty$, $M_i\infty$ dans le sens direct, puis $M_2\infty$ et $M_1\infty$ dans le sens rétrograde. Le lacet primitif pourra donc être remplacé par cinq lacets rectilignes consécutifs, enveloppant respectivement les points singuliers M_1, M_2, M_i, M_2, M_1 et décrits les trois premiers dans le sens direct, les deux autres dans le sens rétrograde. Les intégrales correspondant à ces cinq lacets seront respectivement égales à

$$j(OM_1)\quad j(OM_2),\quad j(OM_i),\quad j(OM_2),\quad j(OM_1)$$

multipliées par des coefficients entiers convenables. La détermination de ces coefficients, dont quelques-uns d'ailleurs peuvent être nuls, dépend de la façon dont se transforment les cycles fondamentaux k_1, k_2, ..., k_{2p} quand on tourne autour des points singuliers.

Nous verrons plus loin comment on peut faire une réduction analogue, dans le cas où la ligne L_i n'est pas telle que tous ses points satisfassent aux conditions $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$. Mais pour le moment nous remarquerons que, dans le Mémoire cité du *Journal de Liouville,* j'ai démontré au paragraphe 5 que, sous certaines hypothèses, toutes les périodes de l'intégrale double J sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers des expressions $j(OM_i)$; les points M_i correspondent en effet aux points A_i du Mémoire cité et les chemins rectilignes OM_i aux coupures OA_i.

Les combinaisons linéaires qui correspondent aux périodes de l'intégrale double sont les suivantes. Soit k'_i le cycle évanouissant correspondant à OM_i; toute combinaison

$$\sum \nu_i j(OM_i)$$

où les ν_i sont des entiers tels que

$$\sum \nu_i k'_i = 0 \tag{5}$$

correspondra à une période.

Dans ce même Mémoire, à la fin du même paragraphe, j'ai montré que quelques-unes de ces combinaisons sont nulles; ce sont celles qui sont engendrées de la façon suivante : je suppose qu'on décrive successivement les différents lacets

$$OM_1,\quad OM_2,\quad \ldots,\quad OM_q$$

dans le sens direct et dans l'ordre où ces différents segments rectilignes se succèdent autour de O; de telle façon que le contour total se compose d'une ligne fermée qui enveloppe tous les points singuliers M_i sans couper aucun des segments OM_i. On part d'ailleurs du point initial avec un cycle à une dimension quelconque k, et l'on revient, par conséquent, au point final avec ce même cycle. La combinaison correspondant à ce chemin sera nulle.

Mais il est nécessaire de revenir sur ce point; car, dans le Mémoire cité, j'ai supposé entre autres hypothèses, qu'aucun des points singuliers A_i n'est rejeté à l'infini. Or, si l'on considère une surface

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

qui soit la plus générale de son degré; puis la section de cette surface par le plan (3 *bis*) $y = \varepsilon$ qui est la courbe plane C,

$$F(x, \varepsilon, z) = 0.$$

On peut dire que pour $\varepsilon = \infty$ cette courbe présente des singularités, et l'on pourrait, par conséquent, se demander si les résultats ne s'en trouvent pas modifiés.

Or le contour que nous venons de définir peut être remplacé par le suivant : la variable y décrit dans son plan un cercle de rayon très grand; en même temps la surface de Riemann correspondant à la courbe plane C se déforme d'une manière continue; nous avons sur cette surface un cycle fermé qui varie également d'une manière continue et revient à sa position initiale en même temps que la variable y; les variables x et z sont assujetties à rester sur ce cycle.

Supposons d'abord que P soit un polynome entier de degré $m - 3$ en x, y, z, de telle façon que l'intégrale simple

$$\int \frac{P\,dx}{F'_z} \tag{6}$$

soit une intégrale abélienne de première espèce.

Posons

$$x = uy, \qquad x = vy.$$

Nous voyons que P deviendra un polynome d'ordre $m - 3$ et F'_z un polynome d'ordre $m - 1$ en y de telle sorte que $\frac{P}{F'_z}$ pourra se développer suivant les puissances décroissantes de y et que le premier terme sera un terme en $\frac{1}{y^2}$. Le coefficient de ce terme sera d'ailleurs

$$\frac{P_0(u, 1, v)}{F'_{0v}(u, 1, v)}$$

en désignant par $P_0(x, y, z)$, $F_0(x, y, z)$, $F'_{0v}(x, y, z)$ les termes du degré le plus élevé de $P(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$. J'écrirai simplement $\frac{P_0}{F'_0}$ en supprimant l'indice v.

Nous avons d'autre part

$$dx\,dy = y\,du\,dy,$$

d'où

$$\int\int\frac{P\,dx\,dy}{F'_z} = \int\int du\,dy\left(\frac{1}{y}\frac{P_0}{F'_0} + \ldots\right).$$

Le premier terme est seul sensible; il reste donc

$$\int\int\frac{dy}{y}\frac{P_0\,du}{F'_0} = 2i\pi\int\frac{P_0\,du}{F'_0}, \tag{7}$$

$\int\frac{P_0\,du}{F'_0}$ est une intégrale abélienne relative à la courbe algébrique

$$F_0(u, 1, v) = 0. \tag{8}$$

Ainsi, notre période, qui est égale à l'expression (7), n'est pas nulle dans le cas qui nous occupe, mais elle a le caractère d'une période polaire et non d'une période cyclique.

Il en sera encore de même si P est de la forme $\frac{Q}{x - a}$, Q étant un polynome d'ordre $m - 2$, c'est-à-dire si l'intégrale (6) a la forme d'une intégrale abélienne de troisième espèce ayant tous ses infinis à distance finie. Nous laisserons de côté, pour le moment, les cas où cette intégrale abélienne (6) aurait des infinis à distance infinie.

§ 4. — Théorie générale.

J'ai cité plusieurs fois le travail que j'ai fait insérer dans le *Journal de Liouville,* comme 4^e Complément à l'*Analysis situs;* je crois devoir non seulement en rappeler ici les résultats, mais les présenter sous une forme nouvelle, les différences portant non seulement sur le mode d'exposition, mais sur une convention fondamentale que je crois préférable de modifier. Quand on s'occupe des propriétés d'une surface algébrique au point de vue de l'*Analysis situs,* on s'aperçoit promptement que la question peut avoir un sens très différent selon la convention que l'on adoptera au sujet des points à l'infini. A l'égard d'une surface $F(x, y, z) = 0$, nous pouvons envisager plusieurs sortes de points à l'infini; nous avons d'abord ceux où x, y et z sont infinis à la fois, et ceux où deux seulement de ces trois coordonnées sont infinies. Je néglige ceux où deux coordonnées sont finies et une infinie; ils n'existeraient en effet que, si la surface étant de degré m, par exemple, le polynome F ne contenait pas de terme en z^m, et ce cas, évidemment, ne se présentera pas en général.

On peut ne pas considérer comme distincts deux points x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 toutes les fois que les six coordonnées de ces deux points sont infinies, et alors même que l'on n'aurait pas $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$; on regarderait, au contraire, ces deux points comme distincts si, par exemple, x_1, y_1, x_2, y_2 étaient infinis, z_1 et z_2 finis et z_1 différent de z_2. C'est le premier point de vue.

Au second point de vue, on regardera deux points à l'infini comme distincts toutes les fois que l'on n'aura pas

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Si, au contraire, z_1 et z_2 sont finis, le rapport $\frac{x_1}{y_1}$ sera égal au rapport $\frac{x_2}{y_2}$ puisqu'on l'obtiendra en égalant à zéro l'ensemble des termes de F qui sont de degré m en x et y; d'autre part, les rapports $\frac{z_1}{y_1}$ et $\frac{z_2}{y_2}$ seront égaux entre eux et égaux à zéro, et les deux points devront être regardés comme non distincts, contrairement au premier point de vue, alors même que z_1 ne serait pas égal à z_2.

Dans le Mémoire cité, je m'étais placé au premier point de vue, et c'est également ce que M. Picard avait fait le plus souvent. Ce premier point de vue peut être le plus avantageux dans certains cas, mais il a l'inconvénient de n'être pas *projectif*, ce qui m'empêcherait d'appliquer les principes des deux paragraphes précédents et j'adopterai le second.

Si nous considérons y comme une constante, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

définira une courbe algébrique et par conséquent une surface de Riemann que j'appelle $S(y)$. J'observe d'abord que deux surfaces de Riemann $S(y_1)$ et $S(y_2)$ ont un certain nombre de points communs.

Soit, en effet, $F_m(x, 0, z)$ l'ensemble des termes de F qui sont d'ordre m en x et en z; l'équation $F_m(x, 0, z) = 0$ définira m valeurs du rapport $\frac{x}{z}$, qui correspondront aux directions asymptotiques de la courbe algébrique

$$F(x, y_1, z) = 0,$$

directions qui seront d'ailleurs les mêmes que celles de la courbe $F(x, y_2, z) = 0$; à ces m directions asymptotiques correspondront m points à l'infini sur la surface $S(y_1)$ et de même m points à l'infini sur la surface $S(y_2)$. D'après la convention que nous venons de faire, *les m points à l'infini de* $S(y_1)$ *ne différeront pas de ceux de* $S(y_2)$.

Pour $y = \infty$, nous avons la surface de Riemann $S(\infty)$ dont les différents points correspondent aux différents systèmes de valeurs des rapports de x, y et z satisfaisant à l'équation

$$F_m(x, y, z) = 0,$$

où F_m est l'ensemble des termes de F de degré m en x, y et z; ou, en d'autres termes, aux différents points à l'infini de la surface $F = 0$. Parmi les points de la surface $S(\infty)$ nous distinguerons ceux qui sont donnés par

$$F_m(x, 0, z) = 0,$$

et qui lui sont communs avec les autres surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$, ...

Pour certaines valeurs de y, le genre de la surface $S(y)$ s'abaisse, ce sont celles qui correspondent à un plan $y =$ const. tangent à la surface $F = 0$. Soient

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_k$$

ces valeurs singulières de y.

Il faut maintenant que je définisse ce que j'appelle la *projection* d'une surface $S(y_1)$ sur une autre surface $S(y_2)$ *quand je suppose que* y_1 et y_2 *ont même argument*. A chaque point de $S(y_1)$ je ferai correspondre un point de $S(y_2)$ et inversement, et cela d'une façon biunivoque, et je dirai que l'un de ces points est la projection de l'autre. Je m'arrangerai de façon que deux points infiniment voisins aient pour projections deux points infiniment voisins et, par conséquent, qu'une courbe continue se projette suivant une courbe continue et une courbe fermée suivant une courbe fermée. De plus je m'arrangerai de façon que les m points à l'infini qui sont communs aux deux surfaces soient leur propre projection. Il est clair que toutes ces conditions peuvent être remplies.

Imposons-nous maintenant une condition de plus. Soient y_1, y_2, y'_1, y'_2 quatre valeurs de y; y_1 et y_2 d'une part, y'_1 et y'_2 d'autre part ont même argument; d'ailleurs y_1 diffère très peu de y'_1 et y_2 de y'_2. Je considérerai alors deux points M_1 et M'_1 des deux surfaces $S(y_1)$ et $S(y'_1)$ et leurs projections M_2 et M'_2 sur $S(y_2)$ et $S(y'_2)$, et *je supposerai que, si* M_1 *et* M'_1 *sont infiniment voisins, il en est de même de* M_2 *et* M'_2.

Cette condition ne peut pas toujours être remplie. Traçons dans le plan des y le quadrilatère rectiligne $y_1 y'_1 y'_2 y_2$, dont deux côtés $y_1 y'_1$ et $y'_2 y_2$ sont infiniment petits. Si à l'intérieur de ce quadrilatère se trouve l'un des points singuliers ε_1, ε_2, ..., ε_k, la condition ne pourra être remplie. Nous joindrons donc dans le plan des y l'origine O aux différents points singuliers ε_i; les droites ainsi tracées partageront le plan en secteurs et la condition devra être remplie à l'intérieur de chacun des secteurs. Si maintenant y_1 et y'_1, et, par conséquent, y_2 et y'_2 n'appartiennent pas à un même secteur la condition pourra ne pas être remplie; elle le sera si $|y_1|$ et $|y_2|$ (et par conséquent $|y'_1|$ et $|y'_2|$) sont tous deux plus grands ou tous deux plus petits que $|\varepsilon_i|$ (ε_i étant le point singulier qui se trouve entre les deux rayons infiniment voisins Oy_2y_1 et $Oy'_2y'_1$); elle ne le sera pas dans le cas contraire.

Cela posé, envisageons un cycle fermé à deux dimensions quelconque de la variété V à quatre dimensions dont les différents points réels correspondent aux différents points réels et imaginaires *regardés comme distincts* de la surface $F = 0$. (Pour expliquer ce qu'on entend par regardés comme distincts, je rappellerai la convention que nous venons de faire au sujet des points à l'infini et, d'autre part, que si la surface a une courbe double, aux deux nappes qui se coupent en un point de cette courbe doivent correspondre deux points distincts de V.) Soit K ce cycle fermé à deux dimensions.

Considérons un point de ce cycle, et marquons sur le plan des y la valeur correspondante de y; à chaque point de K correspondra donc ainsi un point du plan des y, et inversement à certains points de ce plan pourront correspondre un ou plusieurs points du plan de K. Nous sommes ainsi conduits à partager le plan des y en régions diverses, les régions R_0 aux points desquelles ne correspond aucun point y, les régions R_1 aux points desquelles correspond un seul point y, les régions R_2 aux points desquelles correspondent deux points y, etc.

Cela suppose toutefois que le cycle K ne passe par aucun des m points à l'infini communs à toutes les surfaces $S(y)$, sans quoi la valeur correspondante de y serait indéterminée. S'il en était autrement, on déformerait légèrement le cycle K de façon qu'il cesse de passer par ces points.

Ce n'est pas tout, ce cycle K est tel que, dans le voisinage de chacun de ces points, les parties réelles et imaginaires de x, y, z peuvent s'exprimer en fonctions holomorphes de deux paramètres u et v; si nous considérons donc deux domaines à deux dimensions faisant partie de ce cycle, et de telle façon que dans le premier tout s'exprime en fonction de u et v, et dans le second en fonction de deux autres paramètres u' et v'; si ces deux domaines ont une partie commune, le signe du déterminant fonctionnel de u et v par rapport à u' et v' sera constant dans toute cette partie commune.

Si nous supposons, comme il convient, que le cycle K *est bilatère,* nous pourrons supposer sans restreindre la généralité que ces paramètres u, v, u', v' ont été choisis dans chaque domaine de telle façon que ce déterminant fonctionnel soit toujours positif.

Soit alors Δ le déterminant fonctionnel de u et v par rapport à y_1 et y_2, en désignant pour un instant par y_1 et y_2 les parties réelle et imaginaire de y. Le signe de ce déterminant ne changera pas, d'après la convention que nous venons de faire, quand on passera de u et v à deux autres paramètres u' et v'. Soit alors un point de l'une des régions R_n dont nous venons de parler; à ce point correspondront n points du cycle K; je suppose qu'il y en ait p pour lesquels Δ soit positif et $n-p$ pour lesquels Δ soit négatif. Eh bien, *l'excès $2p-n$ sera constant pour tous les points du plan des y et pour toutes les régions* $R_0, R_1, \ldots$.

D'où l'on peut conclure que le nombre n relatif aux diverses régions R_n est constamment de même parité. S'il y a des régions R_0, l'excès $2p-n$ est constamment nul.

Nous examinerons d'abord le cas où le point $y=0$ et le point $y=\infty$ appartiennent l'un et l'autre à une région R_0. Coupons notre cycle K par la variété

$$\arg y = \text{const.}$$

Cette variété sera représentée sur le plan des y par une demi-droite allant de l'origine à l'infini. Nous remarquerons que cette demi-droite, partant de l'intérieur d'une région R_0, traverse des régions R_n $(n>0)$ et aboutit finalement à l'intérieur d'une région R_0. Si donc nous envisageons les points qui appartiennent à la fois à cette variété et au cycle K, le module de y variera pour ces points entre un certain minimum et un certain maximum. *Il en résulte que l'intersection de cette variété et de* K *sera un cycle fermé à une dimension* que j'appelle (K, ω), ω étant l'argument constant de y.

Tous les points de (K, ω) appartiennent à une surface de Riemann $S(y)$, où $y=\rho e^{i\omega}$ a un argument constant ω; nous pouvons donc les *projeter* sur l'une quelconque d'entre elles $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et, par exemple, sur $S(o)$; j'appellerai (K, ω, o) la projection du cycle (K, ω) sur $S(o)$. Comparons maintenant (K, ω, o) à (K, ω', o); si ω diffère très peu de ω', il résulte des conventions faites plus haut que (K, ω, o) différera très peu de (K, ω', o) *à moins que l'argument de l'un des points singuliers ε_k ne soit compris entre ω et ω'*. Si nous adoptons la notion de l'homologie, nous aurons donc, sur la surface $S(o)$, l'homologie

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o)$$

et elle subsistera quand même ω et ω' différeront d'une quantité finie (puisque cette homologie signifie précisément que l'on peut passer d'un cycle à l'autre par déformation continue); elle subsistera, dis-je, à moins que l'argument de l'un des points singuliers ε_k ne soit compris entre ω et ω'; ou en d'autres termes toutes les fois que les demi-droites correspondant aux arguments ω et ω' appartiennent à un même secteur (si l'on suppose le plan divisé en secteurs par les droites $O\varepsilon_k$ et leurs prolongements).

Comparons maintenant les cycles (K, ω, o), (K, ω', o) en admettant qu'il y ait un point ε_k dont l'argument soit compris entre ω et ω'. Projetons les deux cycles (K, ω) et (K, ω') non plus sur $S(o)$, mais sur les deux surfaces de Riemann $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$ qui diffèrent très peu l'une de l'autre; soient Π et Π' ces deux projections; ce sont deux cycles appartenant respectivement aux deux surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$ et $S(\rho_0 e^{i\omega'})$. Soit Π'' un cycle de la première surface qui diffère infiniment peu du cycle Π' lequel appartient à la deuxième surface, infiniment peu différente de la première. Quand ρ_0 décroîtra d'une manière continue de ∞ à o, Π et Π' et par conséquent Π'' et $\Pi - \Pi''$ varieront d'une manière continue. Pour $\rho_0 = o$, nous aurons

$$(K, \omega, o) \sim (K, \omega', o) + \Pi - \Pi''.$$

Faisons maintenant $\rho_0 = |\varepsilon_k|$; je dis que pour cette valeur de ρ_0 les cycles Π, Π' et Π'' différeront infiniment peu l'un de l'autre. En effet, dans le cycle (K, ω) nous distinguerons deux parties, que nous appellerons H et H_1; la première comprendra les points tels que $|y| < |\varepsilon_k|$, et la seconde les points tels que $|y| > |\varepsilon_k|$. De même dans le cycle (L, ω') nous distinguerons deux parties H' et H'_1. Alors H différera infiniment peu de H' et H_1 de H'_1. Projetons H et H' sur les surfaces $S(\rho_0 e^{i\omega})$, $S(\rho_0 e^{i\omega'})$ où $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$, δ étant infiniment petit et positif; les projections seront infiniment peu différentes. Si nous considérons en effet deux points très peu différents de H et H' pour lesquels y a respectivement pour valeur $\rho e^{i\omega}$, $\rho e^{i\omega'}$, $(\rho < |\varepsilon_k|)$ et leurs projections pour lesquelles y a pour module $|\varepsilon_k| - \delta$, le quadrilatère rectiligne formé par ces quatre valeurs de y ne contient pas ε_k à son intérieur.

Donc les projections de ces deux points différeront très peu d'après les conventions faites plus haut; les projections de H et de H' sur les surfaces $\rho_0 = |\varepsilon_k| - \delta$ et par conséquent sur les surfaces infiniment voisines $\rho_0 = |\varepsilon_k|$ différeront donc très peu. On le démontrerait de même pour les projections de H_1 et de H'_1.

Donc, pour $\rho_0 = |\varepsilon_k|$, H et H' diffèrent très peu; le cycle $H - H''$ est infiniment petit, c'est un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante :

Si ω et ω' n'appartiennent pas à un même secteur, mais à deux secteurs continus séparés par la droite $O\varepsilon_k$, les cycles

$$(K, \omega, 0), \quad (K, \omega', 0)$$

ne sont plus homologues en général, mais leur différence est homologue à un cycle évanouissant relatif au point singulier ε_k.

Pour aller plus loin, précisons davantage la notion de *projection*. Nous joignons l'origine O par des segments de droite $O\varepsilon_k$ aux différents points singuliers ε_k et nous regardons ces segments comme des coupures. Tant que y ne franchira pas ces coupures la surface $S(y)$ restera homéomorphe à elle-même; nous pouvons donc établir entre les points des deux surfaces $S(y_1)$, $S(y_2)$ quelconques une correspondance biunivoque telle que, lorsqu'un point M variera d'une manière continue sur une surface $S(y_1)$ et qu'en même temps y variera d'une façon continue mais *sans franchir les coupures,* le point M' de $S(y)$ qui correspond à M variera d'une façon continue. Seulement, si l'on a deux points y_1 et y_2 infiniment voisins l'un de l'autre, mais de part et d'autre d'une coupure, et deux points M et M se correspondant sur $S(y_1)$ et $S(y_2)$, ces deux points ne seront pas, en général, infiniment voisins. C'est cette correspondance qui servira à définir la *projection* en se restreignant alors aux cas où y_1 et y_2 ont même argument.

Considérons maintenant une coupure $O\varepsilon_k$ et le point singulier correspondant ε_k. Soient y_1 et y_2, y'_1 et y'_2 deux couples de points; je suppose que y_1 et y_2 soient infiniment voisins et de part et d'autre de la coupure et qu'il en soit de même pour le second couple. Soit M_1 un point de $S(y_1)$ et M_2 un point de $S(y_2)$, infiniment voisin de M. D'après ce que nous venons de voir, M_1 et M_2 ne peuvent être correspondants. Soit maintenant M'_1 le point de $S(y'_1)$ correspondant de M_1, et M'_2 le point de $S(y'_2)$ correspondant de M_2. Les deux points M'_1 et M'_2 seront infiniment voisins, il est toujours possible de le supposer. En revanche il y a une chose que nous ne pourrions supposer sans nous lancer dans de grosses difficultés. Soit η un point de la coupure; considérons la surface de Riemann correspondante, nous l'appellerons $S(\eta)$ si y a atteint η par l'une des lèvres de la coupure, et $S(\eta')$ si y a atteint η par l'autre lèvre. Les deux surfaces $S(\eta)$ et $S(\eta')$ sont identiques; mais le point de cette surface qui correspond à un point donné d'une autre surface $S(y)$ ne sera pas le même selon qu'il sera regardé comme appartenant à $S(\eta)$ ou à $S(\eta')$. Il en résulte qu'il y a une correspondance entre les points de $S(\eta)$ et ceux de $S(\eta')$; on peut se demander si cette correspondance est réciproque; mais on voit bientôt qu'il n'est pas permis en général de supposer cette réciprocité.

Différents cas sont à distinguer; suivant la nature du point singulier ε_k, le plus simple est celui où le plan $y=\varepsilon_k$ est tangent à la surface $F=0$ et la coupe suivant une courbe présentant un point double ordinaire à tangentes séparées. Que pouvons-nous dire alors de la correspondance entre les points de $S(\eta)$ et de $S(\eta')$; soit p le genre de la surface $S(\eta)$; soient $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{2p}$ un système de cycles fondamentaux de $S(\eta)$; soient $\Omega'_1, \Omega'_2, \ldots, \Omega'_{2p}$ les cycles correspondants de $S(\eta')$; on verrait qu'on aurait pu choisir les cycles fondamentaux de telle façon que l'o n ai

$$\Omega'_1=\Omega_1+\Omega_2 \qquad \Omega_2=\Omega'_2, \qquad \Omega_3=\Omega'_3, \qquad \ldots$$

Alors Ω_2 est un cycle *évanouissant* relatif au point singulier ε_k.

Pour nous rendre compte de la correspondance entre les points de η) et de $S(\eta')$, nous pouvons supposer que dans un espace E à six dimensions, par exemple, on construise la variété V à quatre dimensions, et qu'on se soit arrangé pour que cette variété n'ait pas de point double et que tous ses points soient à distance finie. Les points de V qui correspondent à une valeur donnée de y formeront alors une surface *fermée* à deux dimensions de l'espace E qui n'aura en général aucun point singulier et qui sera notre $S(y)$. Cependant la surface $S(\varepsilon_k)$ admettra un point conique P. Si η est très voisin de ε_k, la surface $S(\eta)$, identique à $S(\eta')$, présentera donc un *étranglement* dans le voisinage du point P. Nous pourrons tracer sur $S(\eta)$ une petite ligne fermée qui embrasse la partie la plus étroite de cet étranglement (tel le cercle de gorge sur un hyperboloïde de révolution à une nappe). Ce sera notre cycle évanouissant Ω_2; nous pourrons tracer dans le voisinage du point P une série de cycles fermés analogues sur $S(\eta)$ tels que seraient les différents parallèles sur un hyperboloïde de révolution; nous pouvons ensuite définir un point quelconque de $S(\eta)$, *au moins dans la partie étranglée voisine du point* P, par deux coordonnées ρ et ω, choisies de telle sorte que ρ soit constant tout le long de chacun de ces cycles fermés, et que ω augmente de 2π quand on fait le tour d'un de ces cycles. Nous pourrons alors admettre la loi de correspondance suivante : dans la partie non voisine du point P, ou toutes les fois que ρ ne sera pas compris entre ρ_0 et ρ_1, chaque point de $S(\eta)$ sera son propre correspondant. Si ρ est compris entre ρ_0 et ρ_1, nous ferons correspondre au point ρ, ω de $S(\eta)$ le point ρ, $\omega + \varphi(\rho)$ de $S(\eta')$; et $\varphi(\rho)$ sera une fonction continue de ρ constamment croissante, égale à o pour $\rho = \rho_0$ et à 2π pour $\rho = \rho_1$. En d'autres termes nous ferons subir à la partie étranglée comprise entre les cycles $\rho = \rho_0$ et $\rho = \rho_1$ une torsion progressivement croissante d'un cycle à l'autre, de telle façon que cette torsion, nulle pour $\rho = \rho_0$, atteigne un tour complet pour $\rho = \rho_1$, ce qui permet le raccordement avec la partie non étranglée, supposée non déformée.

A mesure que η s'éloignera de ε_k, l'étranglement sera de moins en moins prononcé et nous serons conduits à étendre la déformation à une partie de plus en plus étendue de la surface; cette loi de correspondance restera néanmoins arbitraire dans une très large mesure.

Ces conventions faites, projetons maintenant le cycle (K, ω) sur la surface $S(\eta)$ en supposant que ω soit l'argument de ε_k; nous obtiendrons deux projections différentes, selon que l'on supposera que cet argument ω a été atteint par l'une ou par l'autre lèvre de la coupure, c'est-à-dire selon que l'on projettera sur $S(\eta)$ ou sur $S(\eta')$. Soient (K, ω, η), (K, ω, η') ces deux projections. Soit M un point de (K, ω); N sa projection sur $S(\eta)$, N' sa projection sur $S(\eta')$. N et N' seront identiques si l'y du point M est plus petit en valeur absolue que ε_k. Dans le cas contraire ces deux points seront *correspondants* conformément à la loi de correspondance adoptée plus haut. La différence des deux cycles $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ sera alors un cycle de $S(\eta)$ homologue à zéro, au cycle évanouissant Ω_2, ou à un de ses multiples.

L'ensemble des cycles $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ quand on fait varier η depuis zéro jusqu'à ε_k engendrera une variété $\Delta(\varepsilon_k)$ à deux dimensions. Le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ est toujours homologue à un multiple de Ω_2; supposons, par exemple, à Ω_2; il se réduit au point P pour $\eta = \varepsilon_k$; mais, pour $\eta = 0$, il ne se réduit pas à un point, mais à un cycle de la surface $S(0)$ qui est encore homologue à Ω_2 et que nous pourrons appeler

$$(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0').$$

La variété $\Delta(\varepsilon_k)$, que nous pourrons appeler un *doigt* à cause de sa forme, n'est donc pas fermée, mais a pour frontière le cycle

$$(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0').$$

Mais, jusqu'ici, nous avons supposé que Ω_2 n'est pas homologue à zéro, c'est-à-dire que le cycle infiniment petit que l'on peut tracer sur $S(\eta)$ quand η est très voisin de ε_k ne partage pas cette surface en deux régions distinctes. Mais le cas contraire peut aussi se présenter; il arrive alors que la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose en deux surfaces distinctes, c'est-à-dire que la courbe intersection de $F = 0$ et de $y = \varepsilon_k$ est décomposable.

Dans ce cas, le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ décomposera la surface $S(\eta)$ en deux régions que nous appellerons $S_1(\eta)$ et $S_2(\eta)$. Considérons la variété à trois dimensions engendrée par $S_1(\eta)$ quand η varie de zéro à ε_k; elle sera limitée d'une part par le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, par $S_1(o)$ qui est une partie de $S(o)$ et par $S_1(\varepsilon_k)$; de sorte que

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim S_1(\varepsilon_k) - S_1(o).$$

Mais $S_1(\varepsilon_k)$ *n'est autre chose que la surface de Riemann relative à l'une des composantes de la courbe d'intersection de* $F = o$ *et* $y = \varepsilon_k$; ce qui nous fait comprendre la signification du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ dans ce cas particulier.

Revenons au cas général et reportons-nous à un paragraphe précédent, nous verrons que nous y avons défini une intégrale

$$j(L_i);$$

eh bien! cette intégrale n'est autre chose que l'intégrale prise le long du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ lorsque la ligne L_i parcourue par le point α, β, γ, ε est telle que α et γ soient constamment nuls, β égal à 1, et que ε varie avec un argument constant de zéro à ε_k.

Un autre cas est celui où le point singulier ε_k correspond à un point conique ordinaire de la surface $F = o$. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 + 2\Omega_2, \quad \Omega_2, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

et non plus en $\Omega_1 + \Omega_2$, Ω_2, ..., Ω_{2p}. Ce que nous avons dit de la loi de correspondance subsiste; seulement la fonction $\varphi(\rho)$, qui croît constamment depuis $\rho = \rho_0$ jusqu'à $\rho = \rho_1$, au lieu de croître de zéro à 2π, croîtra de zéro à 4π. La définition du doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ restera la même.

Il peut arriver ensuite que le plan $y = \varepsilon_k$ soit tangent à $F = o$ en deux points différents. Alors la surface $S(\eta)$ très voisine de $S(\varepsilon_k)$ présente deux étranglements au lieu d'un, il y a deux cycles *évanouissants* au lieu d'un, d'où résulte la circonstance suivante :

Appelons *doigt simple* et désignons par $\Delta(\varepsilon_k, \Omega)$ la variété engendrée par un cycle de $S(\eta)$ qui reste homologue à Ω quand on fait varier η de zéro à ε_k. Notre doigt défini plus haut et que nous continuerons à appeler simplement $\Delta(\varepsilon_k)$ serait dans cette notation

$$\Delta[\varepsilon_k, (K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')].$$

Dans les cas examinés plus haut, il n'y avait qu'un cycle évanouissant Ω_2, le cycle $(K, \omega, \eta) - (K, \omega, \eta')$ était toujours homologue à un multiple de Ω_2, soit à $n\Omega_2$, de sorte qu'on avait toujours

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(o),$$

$\sigma(o)$ désignant une partie de $S(o)$.

Ici, au contraire, nous aurons deux cycles évanouissants Ω_2, Ω'_2 et deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2), \Delta(\varepsilon_k, \Omega'_2)$ et l'on aura, quel que soit le cycle k,

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n\Delta(\rho_k, \Omega_2) + n'\Delta(\varepsilon_k, \Omega'_2) + \sigma(o),$$

n et n' étant entiers, de sorte que $\Delta(\varepsilon_k)$ s'exprimera linéairement en fonction non plus d'un, mais de deux doigts simples.

Il peut arriver que l'un des cycles Ω_2 et Ω'_2 qui correspondent aux deux étranglements soit homologue à zéro sur sa surface; soit, par exemple, Ω_2; dans ce cas la surface $S(\varepsilon_k)$ se décompose et le doigt simple $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ est alors homologue à l'une des composantes de cette surface de Riemann, plus une région de $S(o)$. C'est ce que nous avons vu plus haut.

Nous examinerons un dernier cas, c'est celui où le plan $y = \varepsilon_k$ coupe $F = o$ suivant une courbe présentant un point de rebroussement. Il arrive alors que les cycles

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad \Omega_3, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p}$$

se changent en

$$\Omega_1 + \Omega_2, \quad -\Omega_1, \quad \Omega_3, \quad \ldots, \quad \Omega_{2p},$$

de sorte qu'il y a deux cycles évanouissants

$$\Omega_1, \quad \Omega_2$$

et par conséquent deux doigts simples $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ dont le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire à coefficients entiers.

§ 5. — Formation des cycles.

Cela posé, reprenons le cycle K, menons les projetantes de ses différents points et prolongeons-les jusqu'à la surface S(o). Ces projetantes engendreront une variété W à trois dimensions. Quelles sont les frontières de cette variété? Ce sera d'abord le cycle K dont chaque point est l'extrémité de l'une des projetantes; ce sera ensuite une portion $S_2(o)$ de la surface S(o); car l'autre extrémité de chaque projetante se trouve sur cette surface. Mais, ce n'est pas tout; deux projetantes issues de deux points infiniment voisins pourront ne pas rester infiniment voisines; si, par exemple, ω et ω' sont deux arguments infiniment voisins, l'un plus grand, l'autre plus petit que celui de ε_k, les projetantes issues des deux cycles à une dimension (K, ω) et (K, ω') se sépareront et s'étaleront sur le doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, de sorte que ces doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ complètent la frontière de W. Je puis donc écrire

$$K \sim S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k),$$

$\Delta(\varepsilon_k)$ a pour frontière $(K, \omega, o) - (K, \omega, o')$; $S_2(o)$ aura pour frontières $\sum [(K, \omega, o) - (K, \omega, o')]$ de telle façon que la variété totale $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$ soit comme il convient une variété fermée.

Soit J l'intégrale

$$\iint \frac{P\,dx\,dy}{F'_z}$$

étendue à K. Elle sera égale à l'intégrale étendue à $S_2(o) + \sum \Delta(\varepsilon_k)$. Étendue à $S_2(o)$ elle est nulle, puisque, le long de cette surface, y est constant et que

$$dx\,dy = o.$$

L'intégrale étendue à $\Delta(\varepsilon_k)$ sera une combinaison linéaire des intégrales étendues aux différents doigts simples correspondants, intégrales que nous avons appelées $j(L_i)$.

L'intégrale J est donc une combinaison linéaire des intégrales $j(L_i)$, la ligne L_i étant telle que $\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$. C'est ce que nous avions annoncé dans un paragraphe antérieur.

J'ai dit que la surface $S_2(0)$ a pour frontière

$$\sum [(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0')],$$

de sorte que

$$\sum [(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0')] \sim 0$$

sur la surface $S(0)$. Supposons que les doigts simples correspondant à $\Delta(\varepsilon_k)$ soient $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_1)$, $\Delta(\varepsilon_k, \Omega_2)$ et soient Ω_1^0 et Ω_2^0 les cycles correspondants de $S(0)$.

Soit

$$\Delta(\varepsilon_k) \sim n_1 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_1) + n_2 \Delta(\varepsilon_k, \Omega_2) + \sigma(0),$$

on aura sur $S(0)$

$$(K, \omega, 0) - (K, \omega, 0') \sim n_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0,$$

d'où

$$\sum (\eta_1 \Omega_1^0 + n_2 \Omega_2^0) \sim 0$$

sur $S(0)$.

Ainsi pour un cycle K *de l'espèce considérée, mais quelconque, on aura toujours*

$$K \sim S_2(0) + \sum n_i \Delta(\varepsilon_k, \Omega_i), \tag{1}$$

$S_2(0)$ *étant une partie de* $S(0)$, n_i *un entier et* Ω_i *un des cycles évanouissants relatifs à* ε_k; *d'ailleurs les entiers* n_i *et les cycles* Ω_i *ne devront pas être quelconques, car on devra avoir sur* $S(0)$

$$\sum n_i \Omega_i^0 \sim 0, \tag{2}$$

Ω_i^0 *étant le cycle de* $S(0)$ *qui correspond à* Ω_i.

Mais nous nous sommes jusqu'ici restreints au cas où le point $y = 0$, de même que le point $y = \infty$, correspondait à une région R_0 par rapport à K, c'est-à-dire où, pour aucun point du cycle C, on n'a ni $y = 0$, ni $y = \infty$. Les cycles qui satisfont à cette condition pourront s'appeler de la première sorte et l'on voit que tout cycle de la première sorte peut être ramené à la forme (1).

Passons aux cycles de la seconde sorte, ce seront ceux où l'excès $2p - n$ dont il a été question au paragraphe du nombre des points pour lesquels le déterminant Δ est positif sur celui des points où ce déterminant est négatif, où cet excès, dis-je (constant pour tout le plan des y d'après ce que nous avons vu) est constamment nul. Je dis que tout cycle de la seconde sorte peut être ramené à la première.

Supposons en effet qu'un cycle K admette $2h$ points pour lesquels $y = 0$, et que h de ces points soient tels que $\Delta > 0$ et h tels que $\Delta < 0$. Accouplons ces points deux à deux de telle façon qu'à un point tel que $\Delta > 0$ soit accouplé un point tel que $\Delta < 0$. Soit M_1 et M_2 un pareil couple de points. Entourons M_1 sur le cycle K d'un contour infiniment petit C_1; soit D_1 la portion très petite de K limitée par ce contour. Définissons de même autour de M_2 le contour C_2 et le domaine D_2; nous pourrons supposer que les valeurs de y correspondantes aux différents points de C_1 soient les mêmes que celles qui correspondent aux différents points de C_2. Ces valeurs formeront alors dans le plan des y un contour fermé très petit γ entourant le point $y = 0$; je puis alors imaginer un contour mobile C à une dimension et un domaine mobile D à deux dimensions satisfaisant aux conditions suivantes : 1° le contour C sera la fonrtière de D; 2° C et D varieront d'une manière continue; 3° initialement C et D se confondront avec C_1 et D_1 et finalement avec C_2 et D_2; 4° les valeurs de y correspondant au contour C seront sur le contour fermé très petit γ.

Dans ces conditions, C engendrera une variété à deux dimensions U et D une variété à trois dimensions W. La frontière complète de W se composera de U, D_1 et D_2. Car W est assimilable à un cylindre dont U serait la surface latérale et D_1 et D_2 les deux bases; on aura donc

$$U \sim D_1 + D_2,$$

d'où

$$K \sim K - D_1 - D_2 + U.$$

Aussi nous pouvons remplacer K par $K - D_1 - D_2 + U$; ce cycle a perdu ainsi les deux points M_1 et M_2 et n'a gagné aucun autre point pour lequel $y = 0$, car sur U la variable y reste constamment sur le contour γ, qui ne passe pas par $y = 0$. En opérant de même sur tous les autres couples de points, nous ferons disparaître tous les points pour lesquels $y = 0$. On ferait disparaître de même tous les points pour lesquels $y = \infty$, de sorte que le cycle se trouverait ramené à la première sorte.

Restent enfin les cycles pour lesquels l'excès $2p - n$ n'est pas nul. Le premier d'entre eux nous est fourni par la surface de Riemann

$$x = x_0,$$

où x_0 est une constante quelconque.

Pour cette surface, en effet, l'excès en question est égal au degré de la surface $F = 0$, que j'appellerai m; car à un point $y = y_0$ du plan des y correspondront m points de la surface dont le z sera donné par l'équation

$$F(x_0, y_0, z) = 0.$$

(Dans certains cas particuliers, le degré de cette équation en z est plus petit que celui de la surface $F = 0$, c'est alors le degré de l'équation en z que nous appellerons m.)

Pour ces m points le déterminant Δ est positif; l'excès $2p - n$ est donc bien égal à m.

Soit donc K un cycle pour lequel cet excès soit égal à q et H le cycle $x = x_0$.

Alors le cycle $m\mathrm{K} - q\mathrm{H}$ aura pour excès zéro; il sera donc de la deuxième sorte et pourra être ramené à la première.

Donc le cycle $m\mathrm{K}$ sera homologue à q fois le cycle $x = x_0$ plus un cycle de la forme (1).

Ici nous apercevons une des différences les plus importantes entre les résultats qui ressortent de la convention adoptée ici et de celle qui était adoptée dans le Mémoire cité. Considérons l'intersection de la surface $F = 0$ avec le plan

$$P_1 = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z - \delta_1 = 0$$

et l'intersection avec le plan

$$P_2 = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0.$$

A ces deux courbes correspondront deux surfaces de Riemann et, par conséquent, deux cycles à deux dimensions que j'appellerai K_1 et K_2. Je dis qu'on aura

$$K_1 \sim K_2.$$

En effet, considérons les intersections de $F = 0$ avec $P_1 + \lambda P_2 = 0$, où λ est réel et positif, mais varie d'ailleurs de o à ∞; les points de ces différentes intersections engendreront une variété W à trois dimensions. Quelle est la frontière de W? Elle se compose des deux cycles K_1 et K_3 de sorte que

$$K_1 \sim K_2.$$

Il ne pourrait y avoir de doute qu'en ce qui concerne les points à l'infini des courbes

$$F = P_1 + \lambda P_2 = 0,$$

ce sont des points de la surface de Riemann $S(\infty)$; à chaque valeur de λ correspondent un nombre fini de ces points, de sorte que, quand λ variera de o à l'∞, ces points décriront une ligne à une dimension seulement qui ne saurait constituer une frontière pour W qui en a trois.

Ainsi le cycle K_1, le cycle K_2 sont homologues entre eux, homologues par conséquent aussi au cycle $S(0)$, ou au cycle $S(y)$ quel que soit y, ou au cycle $x = x_0$.

Il n'en serait pas de même avec la convention du Mémoire cité, car pour $P_1 = z$, par exemple, on pourrait faire tendre x et y vers l'infini et en même temps λ vers zéro, de telle sorte que P_2 tende vers l'infini et $-\lambda P_2 = P_1 = z$ vers une limite finie quelconque; or avec cette convention les points $x = y = \infty$, $z = z_1$ et $x = y = \infty$, $z = z_2$ seraient regardés comme distincts et engendreraient une variété à deux dimensions que j'appellerai Z quand z_1 et z_2 prendraient toutes les valeurs possibles. Alors la frontière de W se composerait non seulement de K_1 et de K_2, mais encore de Z.

On a donc

$$K_2 \sim K_1 + Z.$$

Soient de même X la variété à deux dimensions formée par les points où x est fini, y et z infinis, et Y celle qui est formée par les points où y est fini, x et z infinis; on aura alors

$$K_1 \sim X + Y$$

et

$$K_2 \sim X + Y + Z,$$

et cette homologie sera vraie pour tous les cycles K_2 engendrés par les points satisfaisant à l'équation $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z - \delta_2 = 0$, *à moins que deux des coefficients* α_2 β_2, γ_2 *ne soient nuls à la fois,* auquel cas le second membre devrait être remplacé par $X + Y$ si $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, par $X + Z$ si $\alpha_2 = \gamma_2 = 0$, par $Y + Z$ si $\beta_2 = \gamma_2 = 0$.

Je n'entrerai pas dans plus de détails et ne rechercherai pas s'il y a une homologie entre X, Y, Z, me contentant de faire remarquer que le cycle $x = x_0$ n'est pas homologue à $S(0)$.

Au contraire, avec la convention nouvelle, tous les cycles engendrés par les points satisfaisant à une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$$

sont homologues entre eux et, en particulier, il en est ainsi de $S(0)$ et du cycle $x = x_0$.

Nous devons toutefois faire observer que, pour certaines valeurs des coefficients α, β, γ, ε, le cycle $\alpha x + \beta y + \gamma z = \varepsilon$ peut se décomposer et que, en particulier, la surface de Riemann $S(y)$ peut se décomposer pour certaines valeurs de y.

Supposons donc que la surface $S(y)$, indécomposable pour la valeur la plus générale de y, se décompose en $S_1(\varepsilon_k)$ et $S_2(\varepsilon_k)$ pour $y = \varepsilon_k$. Il est clair qu'on aura alors

$$S(y) \sim S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k),$$

mais qu'il n'y aura en général aucune homologie entre $S_1(\varepsilon_k)$ et

$S_2(\varepsilon_k)$; nous avons vu d'ailleurs qu'il arrive alors que $S_1(\varepsilon_k)$ est homologue au doigt $\Delta(\varepsilon_k)$, plus une portion de $S(o)$.

§ 6. — Homologies entre les cycles.

Ainsi tous nos cycles peuvent se ramener à $S(o)$ ou à un cycle de la forme (1). Tous les cycles que l'on peut former ainsi sont-ils distincts? Toute combinaison de $S(o)$ et de cycles de la forme (1) est elle-même une combinaison de la forme (1) et, par conséquent, en tous ses points y est nul ou appartient à l'une des coupures. Est-il possible qu'une pareille combinaison soit homologue à zéro? C'est-à-dire existe-t-il une variété à trois dimensions W dont une pareille combinaison forme la frontière complète?

Soit W une pareille variété, soit y_0 une valeur de y n'appartenant pas à l'une des coupures; soit $W(y_0)$ l'ensemble des points de W pour lesquels $y = y_0$; alors $W(y_0)$ formera une ligne ou variété à une dimension. Cette ligne $W(y_0)$ peut-elle aboutir à un point d'arrêt? Non, car ce point d'arrêt appartiendrait à la frontière de W, ce qui est impossible, puisque, pour tous les points de cette frontière, y est nul ou se trouve sur l'une des coupures et ne peut, par conséquent, être égal à y_0. A moins que ce point d'arrêt ne soit l'un des m points communs à toutes les surfaces de Riemann $S(y)$ et qui sont donnés, comme nous l'avons vu plus haut, par l'équation

$$F_m(x, o, z) = o.$$

Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ ces m points.

Ainsi $W(y_0)$ *se composera de cycles fermés et de lignes allant de l'un des points* Q *à un autre.*

La ligne $W(y_0)$ appartient à la surface $S(y_0)$; considérons sur la surface $S(y_1)$ les points qui correspondent à ceux de $W(y_0)$ en vertu de la loi de correspondance adoptée plus haut; soit $W(y_0, y_1)$ l'ensemble de ces points. Je dis que la ligne $W(y_0, y_1)$ restera toujours homologue à elle-même sur la surface $S(y_1)$ quand y_1 restant constant on fera varier y_0. Si en effet y_0 varie d'une façon continue, $W(y_0)$ et par conséquent $W(y_0, y_1)$ varieront d'une façon continue, sans quoi le $W(y_0)$ pour lequel une discontinuité se produirait devrait appartenir à la frontière de W.

Il résulte de là par exemple que, s'il y avait des valeurs de y pour lesquelles W n'admette aucun point, $W(y_0, y_1)$ devrait être *constamment* homologue à zéro sur $S(y_1)$ et que, par conséquent, il en serait de même de $W(y_0)$ sur $S(y_0)$.

De quoi va alors se composer la frontière de W? Lorsque y_0 approchera d'un point η de l'une des coupures, la ligne $W(y_0, y_1)$, toujours homologue à elle-même sur $S(y_1)$, tendra vers $W(\eta, y_1)$ et $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta)$, de telle façon que $W(\eta, y_1)$ soit le lieu des points de $S(y_1)$ qui correspondent aux différents points de $W(\eta)$ sur $S(\eta)$. Quand maintenant y_0 approchera du même point par l'autre lèvre de la coupure, la ligne $W(y_0, y_1)$ tendra vers $W(\eta', y_1)$ et la ligne $W(y_0)$ tendra vers $W(\eta')$. En général, $W(\eta)$ ne sera pas homologue à $W(\eta')$, car les points de $W(\eta, y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta)$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta)$; les points de $W(\eta', y_1)$ sont les points de $S(y_1)$ qui correspondent à ceux de $W(\eta')$ *considérés comme appartenant à* $S(\eta')$. Alors, bien que $W(\eta, y_1)$ soit homologue à $W(\eta', y_1)$ sur $S(y_1)$, il n'en résulte pas que $W(\eta)$ soit homologue à $W(\eta')$ sur $S(\eta)$.

La frontière de W sera alors engendrée par les cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

quand on fait décrire successivement à η toutes les coupures. Quand on fera varier η depuis o jusqu'à ε_k le long de la coupure $o\varepsilon_k$, le cycle $W(\eta) - W(\eta')$, qui devra s'évanouir pour $\eta = \varepsilon_k$, engendrera un doigt $\Delta(\varepsilon_k)$. La frontière de W est donc bien un cycle de la forme (1).

Combien pouvons-nous obtenir de cette façon d'homologies entre les cycles de la forme (1)?

Tout dépend de l'hypothèse faite au sujet de la ligne $W(y_0, y_1)$. Il est clair que, si l'on remplace cette ligne par une autre qui lui soit homologue sur $S(y_1)$, les deux homologies que l'on obtiendra ainsi ne seront pas distinctes.

La ligne $W(y_0, y_1)$ pourra se composer de l'un des $2p$ cycles de la surface de Riemann $S(y_1)$, ou d'une ligne allant sur cette surface de Q_1 à l'un des $m-1$ autres points $Q_2, Q_3, \ldots, Q_m$, ou d'une combinaison de ces lignes, aucune autre hypothèse n'est possible. D'ailleurs, si l'on envisage deux lignes allant de Q_1 à Q_2, il suffira de considérer la première, car la réunion de ces deux lignes formerait un cycle. Cela nous fait donc en tout $2p+m-1$ homologies.

Ces homologies sont-elles toutes distinctes? Si le cycle

$$W(\eta) - W(\eta')$$

est homologue à zéro sur $S(\eta)$ et cela sur toutes les coupures, il est clair que l'homologie correspondant à W se réduit à une identité. En effet, dans ce cas, les doigts $\Delta(\varepsilon_k)$ qui figurent dans le premier membre de l'homologie $S_1(0) + \sum \Delta(\varepsilon_k) \sim 0$ sont homologues à zéro. plus une portion de $S(0)$; il reste donc $S_1(0) \sim 0$, $S(0)$ étant une portion de $S(0)$; mais, comme une variété ne peut être homologue à zéro sans être fermée, cette homologie doit se réduire soit à une identité, soit à $S(0) \sim 0$. Cette dernière hypothèse doit être rejetée puisque $S(0)$ n'est pas homologue à zéro. Si l'on peut former ainsi q homologies se réduisant à des identités, il n'y aura plus que

$$2p + m - q - 1$$

homologies distinctes.

Si $W(y_0)$ est un cycle, il faut que $W(\eta) \sim W(\eta')$, c'est-à-dire que le cycle ne soit pas altéré quand y tourne autour du point singulier ε_k et qu'il en soit de même pour tous les autres points singuliers. Il faut, en d'autres termes, que $W(y_0)$ soit ce que nous avons appelé, dans le Mémoire cité, un *cycle invariant;* nous aurons donc d'abord autant d'homologies identiques que de cycles invariants, c'est-à-dire, d'après le Mémoire cité, autant que de cycles à trois dimensions, ou encore autant que de cycles à une dimension.

Y en a-t-il d'autres? Supposons que la ligne $W(y_0)$ aboutisse à un point Q_1, considérons la portion de la variété à quatre dimensions V voisine de Q_1; soit M un point de V infiniment voisin de Q_1; soit Π le plan tangent à la variété V au point Q_1; ce sera une variété plane à quatre dimensions appartenant à l'espace plan à plus de quatre dimensions dans lequel nous supposons V tracée; la droite MQ_1, si les deux points M et Q_1 sont infiniment voisins, sera dans le plan Π. Portons alors sur la droite MQ_1 une longueur égale à 1 à partir de Q_1 et soit H(M) le point ainsi obtenu; les points H(M) appartiendront à l'hypersphère de rayon 1 et de centre Q_1, ou plutôt à l'intersection de cette hypersphère et du plan H, intersection que j'appelle J et qui est une variété hypersphérique H à trois dimensions. Si deux points M et M' sont de part et d'autre de Q_1, de telle façon que les deux droites MQ_1 et Q_1M' soient dans le prolongement l'une de l'autre, les deux points H(M) et H(M') seront diamétralement opposés sur J.

Considérons maintenant les points M de W qui sont très voisins de Q_1; les H(M) correspondants engendreront une variable à deux dimensions H(W) située sur J; considérons de même les points M très voisins de Q_1 et tels que $y = y_0$; les H(M) correspondants engendreront une variété à une dimension $H(y_0)$ située sur J. Enfin les points de $W(y_0)$ donneront des H(M) en nombre fini et dont l'ensemble pourra s'appeler $H(W, y_0)$. Si alors un point appartient à $H(y_0)$, il en sera de même du point diamétralement opposé.

Au contraire, si un point appartient à $H(W, y_0)$, il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, puisque par hypothèse la ligne $W(y_0)$ s'arrête au point Q_1 et ne se prolonge pas au delà. Donc, si un point appartient à H(W), il n'en sera pas de même du point diamétralement opposé, sans quoi nous aurions deux points diamétralement opposés sur un même $H(W, y_0)$.

Si la ligne $W(y_0)$ doit nous conduire à une homologie se réduisant à une identité, nous venons de voir que $W(\eta)$ doit être homologue à $W(\eta')$ sur $S(\eta)$. Je puis sans restreindre la généralité supposer que $W(\eta)$ est non seulement homologue mais identique à $W(\eta')$. Si, en effet, il en était autrement, soit $C(\eta)$ la portion de $S(\eta)$ limitée par le cycle $W(\eta) - W(\eta')$ homologue à zéro. Soit $P(\varepsilon_k)$ la variété à trois dimensions engendrée par $C(\eta)$ quand η varie de zéro à ε_k en suivant la coupure; elle est limitée par l'ensemble des cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

qui la séparent de W, et par $C(o, \varepsilon_k)$, en désignant par $C(o, \varepsilon_k)$ la limite vers laquelle tend $C(\eta)$ quand η tend vers zéro en suivant la coupure $O\varepsilon_k$. Il est clair que $C(o, \varepsilon_k)$ est une portion de $S(o)$.

Envisageons alors la variété à trois dimensions

$$W + \sum P(\varepsilon_k)$$

où la sommation indiquée par le signe $\sum$ est étendue aux différentes coupures.

La variété W avait pour frontière l'ensemble des cycles

$$W(\eta) - W(\eta')$$

plus une partie de $S(o)$, la variété $\sum P(\varepsilon_k)$ avait pour frontière l'ensemble des cycles $W(\eta) - W(\eta')$ plus $\sum C(o, \varepsilon_k)$ qui est une partie de $S(o)$. Quand nous annexons les deux variétés l'une à l'autre, la partie commune de la frontière disparaît, de sorte que la frontière complète fait partie de $S(o)$. Comme cette frontière complète doit être une variété *fermée* à deux dimensions, ou bien elle se réduira à zéro, de sorte que $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété fermée, ou bien elle sera la surface $S(o)$ tout entière, ce qui est très possible puisque cette surface n'est pas homologue à zéro.

Ainsi, $W + \sum P(\varepsilon_k)$ est une variété *fermée* à trois dimensions; il est vrai qu'elle présente une circonstance toute particulière, puisque pour certaines valeurs de y, à savoir les valeurs $y = \eta$, les points de cette variété pour lesquels $y = \eta$ forment non plus une ligne, mais une variété à deux dimensions $C(\eta)$. Mais il suffit de déformer infiniment peu notre variété pour faire cesser cette circonstance gênante. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, supposer que W est une variété fermée et, par conséquent, que $W(\eta)$ est identique à $W(\eta')$.

Alors, $H(W)$ est une variété fermée; supposons d'abord que Q_1 soit l'extrémité d'une des branches de la ligne $W(y_0)$ et n'appartient à aucune autre branche de cette ligne; il suffit évidemment que cela ait lieu pour une valeur de y_0 pour que cela ait lieu pour toutes. Dans ce cas H(W) a un seul point commun avec $H(y_0)$; ce sont deux variétés fermées l'une à deux, l'autre à une dimension tracées sur l'hypersphère H. Si elles n'ont qu'un point commun c'est qu'elles ne sont ni l'une ni l'autre homologues à zéro sur H; *or cela est absurde puisque* H *est simplement connexe.*

Prenons un cas plus général; chacune des branches de $W(y_0)$ peut être parcourue dans deux sens opposés; nous distinguerons donc un sens positif et un sens négatif. D'autre part nous attribuerons un signe à l'intersection de H(W) et de $H(y_0)$ [d'après le signe d'un certain déterminant ainsi qu'il a été expliqué dans l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique,* 2e série, Ier Cahier, p. 33 et suiv.)]. Supposons donc que p branches de $W(y_0)$ aboutissent à Q_1 de façon que Q_1 soit à la *fin* de la branche quand on décrit cette branche dans le sens positif, et n quand on décrit la branche dans le sens négatif.

Alors H(W) et $H(y_0)$ admettront p intersections positives et n négatives. Ou bien alors l'excès $p - n$ ne sera pas nul, ce qui est impossible parce qu'on pourrait avoir $H(W) \sim 0$ sur H et que H est simplement connexe; ou bien cet excès sera nul et alors la ligne $W(y_0)$ pourra être remplacée par une autre ne passant pas par Q_1.

Il est donc impossible qu'il existe une variété W satisfaisant aux conditions énoncées; il n'y a donc pas d'autre homologie identique que celles que l'on déduit des cycles invariants.

En résumé, soit N le nombre des points singuliers $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, en tenant compte du degré de multiplicité, un de ces points pouvant être double par exemple s'il correspond à deux cycles évanouissants.

Soit $2p$ le nombre des cycles de la surface de Riemann $S(y)$.

Soit m le nombre des points tels que $Q_1, Q_2, \ldots$.

Soit q le nombre des cycles invariants de $S(y)$, ou, ce qui revient au même, le nombre des cycles à une ou à trois dimensions de F(0).

Nous aurons N doigts, tous nos cycles seront des combinaisons de la forme (1), c'est-à-dire des combinaisons de ces N doigts et de S(0); mais toutes les combinaisons de ces $N + 1$ variétés ne conviennent pas; elles doivent satisfaire à la condition (2); cette condition, puisque S(0) admet $2p$ cycles, équivaut à $2p$ conditions simples. Il reste ainsi $N + 1 - 2p$ cycles.

Mais ces cycles sont liés par des homologies, engendrées par les différentes lignes $W(y_0)$ possibles; il y en a $2p$ provenant des $2p$ cycles fermés qu'on peut tracer sur $S(y_0)$; il y en a $m-1$ provenant des $m-1$ lignes qui vont d'un point Q à l'autre. Si ces $2p+m-1$ homologies sont distinctes, ce qui arrive en général, il reste

$$N + 2 - 4p - m,$$

cycles à deux dimensions distincts. Mais il y a q homologies identiques, il y a donc finalement

$$N + q + 2 - 4p - m \tag{3}$$

cycles à deux dimensions.

§ 7. — Application aux surfaces du troisième degré.

Appliquons ces principes à la surface du troisième degré. Dans les paragraphes précédents, un rôle essentiel était joué par les surfaces de Riemann $S(y)$ correspondant aux intersections de la surface $F = 0$ avec le plan $y =$ const. Si nous prenons les coordonnées homogènes

$$x, \quad y, \quad z, \quad t,$$

ces plans $y =$ const. passent par une droite fixe située à l'infini et qui a pour équations $y = t = 0$. On pourrait répéter la même analyse en faisant jouer le rôle de cette droite $y = t = 0$ à une droite quelconque D et le rôle des surfaces $S(y)$ aux surfaces de Riemann correspondant aux intersections de $F = 0$ avec les plans passant par D.

Cela revient à faire un changement de coordonnées tétraédriques en prenant cette droite D pour l'une des arêtes du tétraèdre de référence. Tout étant projectif, il est clair que le résultat doit rester le même quelle que soit la droite D et l'on en comprendra d'ailleurs mieux les raisons en se reportant à ce qui a été dit aux paragraphes **2** et **3**.

L'application de la formule (3) doit conduire au même nombre de cycles à deux dimensions, de quelque façon que soit choisie la droite D.

Mais, si ce résultat est certain *a priori*, il conduit à quelques paradoxes apparents et il est intéressant de voir par quel mécanisme se fait la compensation. M. Picard, en étudiant une surface du troisième degré particulière, sur laquelle nous reviendrons, avait déjà mis en évidence certaines propositions paradoxales, dont il avait donné l'explication.

Dans la formule (3), le nombre q représente le nombre des cycles linéaires. Ce nombre est évidemment indépendant de la droite D. Il est d'ailleurs nul, comme l'a montré M. Picard, pour la surface du troisième degré.

Le nombre N est le nombre des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite D. Ce nombre est égal à 12 dans le cas le plus général.

Le nombre p est le genre de la courbe, intersection de $F = 0$ par un plan passant par la droite D; il est égal à 1.

Les points $Q_1, Q_2, \ldots$ sont les intersections de la surface $F = 0$ et de la droite D; le nombre m est le nombre de ces intersections. Il est égal à 3 dans le cas général. On a donc, dans le cas général,

$$q = 0, \qquad N = 12, \qquad p = 1, \qquad m = 3$$

et, pour le nombre de cycles,

$$N + q + 2 - 4p - m = 7.$$

Supposons maintenant que la surface $F = 0$, restant toujours la plus générale, la droite D prenne des positions particulières.

Supposons d'abord que la droite D devienne tangente à la surface; deux des plans tangents menés par D se confondront et N se réduira à 11, mais deux des points d'intersection de D se confondront et m se réduira à 2. Le nombre $N + q + 2 - 4p - m$ ne changera pas.

Supposons maintenant que l'un des plans tangents menés par D coupe la surface suivant une courbe présentant un point de rebroussement; ici encore deux plans tangents se confondront, mais il faut tenir compte du degré de multiplicité. Or nous avons vu que, dans le cas d'un rebroussement, il y a deux cycles évanouissants et que, par conséquent, le plan tangent doit être regardé comme double; le nombre N reste donc égal à 12.

La surface $F = 0$ contient vingt-sept droites que nous appellerons les *droites* Δ. Supposons que D rencontre l'une des droites Δ. Le plan de D et de Δ coupe la surface suivant la droite Δ et une conique; c'est donc un plan tangent double avec deux points de contact distincts.

Le nombre des plans tangents *distincts* se réduit donc à 11, mais ce plan $D\Delta$ doit être regardé comme double; il n'y a, il est vrai, qu'un seul cycle évanouissant, mais la courbe se décompose; cela fait donc deux doigts simples, l'un engendré par le cycle évanouissant, l'autre homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann, donc N reste égal à 12.

Les divers plans menés par Δ coupent la surface suivant des coniques; deux de ces coniques touchent la droite Δ. Soient P_1 et P_2 les plans de ces deux coniques et supposons que Δ soit dans le plan P_1. Alors trois de nos douze plans tangents se confondent, les deux points de contact du plan tangent $D\Delta$, qui étaient distincts et équivalents à deux points doubles à tangentes séparées, se confondent en un seul, équivalent à un point de rebroussement. Nous avons cette fois deux cycles évanouissants, cela nous fait *trois* doigts simples dont deux correspondent à ces deux cycles et un est homologue à l'une des composantes de la surface de Riemann (composante relative à la droite, ou bien à la conique); donc le plan tangent P_1 doit être regardé comme triple et N reste égal à 12.

Ainsi voilà trois cas où le plan tangent correspond à deux, deux ou trois plans tangents confondus : ce sont ceux où ce plan coupe la surface suivant une cubique à rebroussement, suivant une droite Δ et une conique qui la coupe, suivant une droite Δ et une conique qui la touche; nous venons de voir que ce plan doit être alors regardé comme double, double ou triple. Mais il peut arriver que, dans l'un de ces trois cas, la droite D passe par le point de contact, c'est ce qui arrive respectivement si D touche la surface en un point où l'indicatrice est parabolique, si D coupe Δ en un point où cette droite rencontre la conique intersection du plan $D\Delta$ et de la surface $F = 0$, si D coupe Δ au point où cette droite *touche* la conique intersection de $D\Delta$ et de la surface. Le plan tangent correspond alors à trois, trois ou quatre plans tangents confondus, et il reste double, double ou triple; le nombre N se réduit donc à 11, mais, comme D touche la surface, le nombre m se réduit à 2, de sorte que la différence $N - m$ et le nombre des cycles

$$N + q + 2 - 4p - m$$

ne changent pas.

Si la droite D est une asymptote de l'indicatrice en un point de la surface, le plan tangent correspondant équivaut à trois plans tangents confondus; donc N se réduit à 10, mais, d'autre part, D coupe la surface en trois points confondus, de sorte que m se réduit à 1 et que la différence $N - m$ ne change pas.

Il peut se faire que, parmi les plans tangents menés par D, il y en ait deux ou plusieurs qui présentent séparément l'une des singularités que nous venons d'étudier; rien n'est à changer alors à ce qui précède. Il peut arriver enfin que par la droite D on puisse mener un plan qui coupe la surface suivant trois droites Δ, qui soit par conséquent triplement tangent à la surface. Ce plan correspondra à trois plans tangents confondus. Quel est son degré de multiplicité, c'est-à-dire le nombre de doigts simples auxquels il correspond? Il n'y a qu'un cycle évanouissant, mais la surface de Riemann $S(\varepsilon_k)$ se décompose en trois parties $S_1(\varepsilon_k)$, $S_2(\varepsilon_k)$, $S_3(\varepsilon_k)$ correspondant aux trois droites. Nous aurons donc trois doigts simples, le premier engendré par le cycle évanouissant, le deuxième homologue à $S_1(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(o)$, le troisième homologue à $S_2(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(o)$. Le cycle qui serait homologue à $S_3(\varepsilon_k)$ plus une partie de $S(o)$ n'est pas distinct des précédents, car, toutes les surfaces $S(y)$ étant homologues entre elles, comme nous l'avons vu, on a

$$S_1(\varepsilon_k) + S_2(\varepsilon_k) + S_3(\varepsilon_k) \sim S(o),$$

de sorte qu'une combinaison de nos trois doigts nous ramène au cycle $S(o)$. En résumé, ce plan triplement tangent, qui équivaut à trois plans tangents confondus, a pour degré de multiplicité 3, de sorte que N reste égal à 12.

Il nous reste à examiner le cas où D est l'une des droites Δ. Alors D rencontre dix autres droites Δ, que j'appellerai A_1 et B_1, A_2 et B_2, A_3 et B_3, A_4 et B_4, A_5 et B_5.

Les droites A_i et B_i se rencontrent quel que soit i et il n'y a pas d'autre rencontre entre les droites A et B. Par D on peut mener cinq plans tangents qui sont les cinq plans DA_iB_i; que sont devenus les sept autres plans tangents? Soit D' une droite très voisine de D; par D' nous pouvons mener douze plans tangents, dont cinq tendront vers les cinq plans DA_iB_i; vers quelles limites tendront les sept autres et les points de contact correspondants? Parmi les plans menés par D, il y en a deux, P_1 et P_2, qui coupent la surface suivant la droite D et une conique qui la touche. Eh bien, deux plans tangents tendront vers P_1 et deux vers P_2.

Il reste à voir ce que deviennent les trois plans tangents restants. Soient M'_1, M'_2, M'_3 les trois points d'intersection de D' avec la surface; quand D' tendra vers D, ces trois points tendront vers trois points M_1, M_2, M_3 de D; eh bien, les points de contact des trois plans tangents restants tendront vers M_1, M_2, M_3.

Quant aux cycles à deux dimensions correspondants, voici ce qu'ils deviennent. Considérons d'abord un plan tangent qui, à la limite, se réduit au plan A_iB_iD; la surface de Riemann correspondant à l'intersection de ce plan et de la surface se décompose à la limite en trois parties correspondant aux trois droites A_i, B_i, D; le *doigt* correspondant est à la limite homologue à l'une de ces trois parties, par exemple à la surface de Riemann correspondant à la droite A_i et que j'appellerai $S(A_i)$. Voilà donc déjà cinq de nos sept cycles correspondant aux cinq surfaces de Riemann $S(A_1)$, $S(A_2)$, ..., $S(A_5)$. Les sept doigts correspondant aux sept autres plans tangents nous fourniront à la limite, par leurs combinaisons entre eux et avec $S(o)$, un seul cycle nouveau qui sera la surface de Riemann $S(D)$; cette notation $S(A_i)$, $S(D)$ ne peut engendrer aucune confusion avec $S(y)$, puisque A_i et D sont des droites et y une quantité. Il nous reste un dernier cycle qui est $S(o)$, mais

$$S(o) \sim S(D) + S(A_i) + S(B_i),$$

puisque $S(o)$ est homologue à la surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec un plan quelconque, et que, quand ce plan est le plan DA_iB_i, cette surface de Riemann se décompose en $S(D)$, $S(A_i)$, $S(B_i)$.

En conséquence, tous les cycles à deux dimensions de $F = 0$ sont homologues à des combinaisons des sept cycles suivants :

$$S(D), \quad S(A_1), \quad S(A_2), \quad S(A_3), \quad S(A_4), \quad S(A_5), \quad S(B_1),$$

qui ne sont autre chose que des surfaces de Riemann correspondant à sept des vingt-sept droites Δ.

Quelques mots maintenant sur les intersections mutuelles de ces cycles; quel est l'excès du nombre des intersections positives sur celui des intersections négatives, en adoptant le point de vue du paragraphe **9** de l'*Analysis situs* (*Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, Ier Cahier, p. 33)? Si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(y_1)$ et $S(y_2)$, cet excès sera évidemment 3; si nous considérons deux surfaces de Riemann $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$ correspondant à deux droites Δ, cet excès sera 1 ou zéro, suivant que ces deux droites se rencontreront ou non. Si nous considérons deux cycles K_1 et K_2, nous représenterons cet excès par $N(K_1, K_2)$; si alors

$$K_1 \sim K'_1, \qquad K_2 \sim K'_2,$$

on aura également

$$N(K_1, K_2) = N(K'_1, K'_2).$$

Si maintenant

$$K_2 \sim n_0 S(D) + \Sigma n_i S(A_i) + n_6 S(B_1),$$

il viendra

$$N(K_1, K_2) = n_0 N[K_1, S(D)] + \Sigma n_i N[K_1, S(A_i)] + n_6 N[K_1, S(B_1)],$$

d'où cette conséquence que la connaissance des sept excès

$$N[K_1, S(D)], \quad N[K_1, S(A_i)], \quad N[K_1, S(B_1)]$$

suffit pour déterminer $N(K_1, K_2)$, K_2 étant un cycle quelconque.

Soit, en particulier, $K_1 = S(\Delta_1)$, $K_2 = S(\Delta_2)$, Δ_1 et Δ_2 étant deux quelconques des vingt-sept droites Δ; nous voyons que la connaissance du nombre des points d'intersection de Δ_1 avec D, les A_i et B_1 suffit pour déterminer le nombre des intersections de Δ_1 avec une droite quelconque Δ_2, c'est-à-dire pour déterminer complètement la droite Δ_1.

C'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier; une des vingt-sept droites sera complètement déterminée quand on saura si elle rencontre une autre des vingt-sept droites choisie au hasard D, et aussi si elle rencontre cinq autres des vingt-sept droites qui rencontrent D sans se rencontrer entre elles.

On sait que les surfaces du troisième degré sont unicursales. Si en effet on prend deux des vingt-sept droites Δ qui ne se rencontrent pas, soient D et D'; qu'on prenne un point M sur D et un point M' sur D' ayant pour abscisse, par exemple, le premier u, le second v, la droite MM' rencontrera la surface en un troisième point M_1 dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles du u et de v. De cette circonstance découlent des conséquences paradoxales sur lesquelles M. Picard a déjà appelé l'attention.

Si les valeurs de u et v correspondent à l'une des droites A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 qui rencontrent à la fois D et D', la droite MM' est tout entière sur la surface et les coordonnées du point M_1 deviennent indéterminées.

Si maintenant nous prenons un point M_1 sur la surface, les deux plans M_1D et M_1D' se couperont suivant une droite déterminée MM', les points M et M' seront donc déterminés et, par conséquent, u et v seront fonctions rationnelles des coordonnées de M_1. Si cependant le point M_1 était sur la droite D, le plan M_1D ne serait alors autre chose que le plan tangent en M_1 et ce qui précède subsisterait.

Le lieu des points $u = \infty$ est une conique C' qui coupe D' en deux points et le lieu des points $v = \infty$ est une conique C qui coupe D en deux points.

Reprenons maintenant la variété V à quatre dimensions engendrée par la surface $F = 0$; et sur cette variété un cycle K fermé à deux dimensions et non homologue à zéro. Soit W l'espace plan à quatre dimensions engendré par les deux variables complexes u, v; on pourrait d'abord être tenté de dire que, la surface étant unicursale, V et W doivent être homéomorphes, qu'à tout cycle fermé K de V correspondra un cycle fermé K' de W; que, tous les cycles fermés de W étant homologues à zéro, il doit en être de même de tous les cycles fermés de V;

ce qui serait contraire aux conclusions qui précèdent. Les découvertes de M. Picard nous ont d'ailleurs depuis longtemps mis en garde contre un pareil raisonnement.

Le cycle K, en effet, peut rencontrer l'une des droites A_i ou l'une des coniques C ou C'. S'il rencontre C, par exemple, le cycle correspondant K' ne sera plus fermé, mais présentera un pointement à l'infini, ainsi que l'a signalé M. Picard.

Supposons maintenant que le cycle K' soit fermé et, par conséquent, homologue à zéro dans l'espace W. S'ensuivra-t-il que le cycle fermé correspondant K soit homologue à zéro sur V? Pas du tout. Il y a dans l'espace W cinq points auxquels correspondent une infinité de points de la variété V; ce sont les points $u = u_i$, $v = v_i$ qui correspondent aux cinq droites A_i; nous avons vu en effet que, pour ces valeurs de u et v, les coordonnées de M_1 sont indéterminées. Supposons alors que le cycle K' passe par l'un de ces points u_i, v_i; étant homologue à zéro sur W, il limitera un domaine à trois dimensions de cet espace. Mais considérons un point N de R et supposons que ce point se rapproche indéfiniment de u_i, v_i qui est sur la frontière de R. Soit M le point de V qui est le correspondant de N; quand N tendra vers u_i, v_i, le point M tendra vers un point de la droite A_i et ce point pourra occuper une position quelconque sur cette droite, suivant la façon dont N tendra vers u_i, v_i. Soit R' un domaine à trois dimensions de V correspondant à R; sa frontière complète se composera non seulement de K, cycle de V correspondant à K', mais de la surface de Riemann $S(A_i)$; car, quand N se rapproche de la frontière de R, le point correspondant M se rapproche soit de K si N tend vers un point de K' autre que u_i, v_i, soit d'un point quelconque de $S(A_i)$ si N tend vers u_i, v_i. Donc K n'est pas homologue à zéro.

Dans la variété W, on doit considérer comme distincts les points $u = \infty$, $v = v_1$ et $u = \infty$, $v = v_2$, de même que les points $u = u_1$, $v = \infty$ et $u = u_2$, $v = \infty$, puisque à ces points correspondent des droites MM' distinctes. On doit donc adopter, au sujet des points à l'infini, non la convention du Mémoire actuel, mais celle du Mémoire cité. Il en résulte que les deux surfaces de Riemann $u =$ const. et $v =$ const. ne sont pas homologues entre elles. D'où cette conclusion : les cycles K' de W qui sont tous entiers à distance finie sont homologues à zéro; mais, si l'on tient compte de ceux qui s'étendent à l'infini, il y en a *deux* qui non seulement ne sont pas homologues à zéro, mais sont indépendants, ce sont justement ces deux surfaces de Riemann $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$

De plus, parmi les cycles K' homologues à zéro, il y en a qui ne correspondent pas à des cycles K homologues à zéro : ce sont ceux qui passent par l'un des points u_i, v_i et cinq de ces cycles doivent être considérés comme distincts, puisqu'il y a cinq points u_i, v_i. Nous retrouverons donc bien nos *sept* cycles distincts et la conciliation est complète avec ce qui précède.

Un mot encore sur une circonstance qui peut se présenter pour certaines surfaces du troisième degré particulières; il peut arriver que trois des droites Δ, que j'appellerai Δ_1, Δ_2, Δ_3, soient dans un même plan tangent P et passent par un même point M. C'est ce qui arrive en particulier pour la surface de M. Picard

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Si alors la droite D par laquelle doivent être menés les plans tangents se trouve sur le plan P, *quatre* des plans tangents menés par D se confondront avec P, de sorte que nous n'aurons plus que neuf plans tangents distincts au lieu de douze.

Il faut voir à combien de doigts distincts ce plan correspond. Pour nous en rendre compte, prenons la surface de Picard et coupons par exemple par les plans $z = \text{const.}$; la droite D étant alors la droite à l'infini qui est l'intersection commune de tous ces plans $z = \text{const.}$ La courbe d'intersection est

$$x^3 + y^3 = 1 - z^3,$$

où z est regardé comme un paramètre. Les deux cycles sont des combinaisons de lacets tracés dans le plan des x et enveloppant les trois points singuliers

$$x = \sqrt[3]{1 - z^3}, \qquad x = \varepsilon \sqrt[3]{1 - z^3}, \qquad x = \varepsilon^2 \sqrt[3]{1 - z^3},$$

ε étant une racine cubique de l'unité. Pour $z = 1$, ces trois points singuliers se confondent avec O, les lacets se réduisent à un point et il en est de même des cycles, les deux cycles sont donc évanouissants.

De plus, pour $z = 1$, la courbe se décompose en trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3; donc, entre les deux doigts provenant des deux cycles évanouissants, nous en aurons deux autres homologues à $S(\Delta_1)$ et $S(\Delta_2)$; je ne parle pas de $S(\Delta_3)$ qui n'est pas distinct des précédents puisque

$$S(\Delta_1) + S(\Delta_2) + S(\Delta_3) \sim S(0).$$

Ainsi ce plan tangent quadruple donne naissance à quatre doigts distincts. Le nombre N n'est donc pas altéré.

Supposons enfin que la surface présente un point conique H; dans ce cas, six des droites Δ, comptant chacune pour deux, passent en H; je les appellerai Δ_1, Δ_2, ..., Δ_6; il y a quinze autres droites qui sont dans les quinze plans déterminés par les six premières. Le nombre des cycles K se réduit alors à 6; on peut le voir de trois manières :

1° Nos sept cycles $S(D)$, $S(A_i)$, $S(0)$ du cas général se réduisent ici à $S(\Delta_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$) et $S(0)$, parce que, si l'on prend pour la droite D la droite Δ_1, les droites A_i ne sont autres que les cinq autres droites Δ_i; or, les droites Δ_i forment l'intersection de la surface avec le cône tangent au point H qui est du second degré. La surface de Riemann correspondant à l'intersection de la surface avec une quadrique quelconque est homologue à $2S(0)$, on a donc l'homologie

$$\Sigma S(\Delta_i) \sim 2S(0),$$

de sorte qu'il ne reste que six cycles distincts.

2° Si la droite D est quelconque, deux des plans tangents menés par D se confondent avec le plan DH, de sorte que les nombres N, p et m deviennent égaux à 11, 1, 3 et que

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

3° Si la droite D passe par H, un plan quelconque mené par D coupera la surface suivant une conique, et cette conique se décomposera en deux droites, quand ce plan passera par l'une des six droites Δ_i; on a donc $N = 6$, la conique étant unicursale, $p = 0$, et D coupant la surface en deux points distincts, $m = 2$; on a donc

$$N + 2 - 4p - m = 6.$$

Plus généralement, quand une surface acquerra un point conique, le nombre des cycles à deux dimensions diminuera d'une unité. Soit, en effet, P le point conique, et supposons d'abord que la droite D ne passe pas par ce point, le plan PD devra être regardé comme un plan tangent, qui comptera pour *deux* plans tangents confondus, mais pour *un* seulement au point de vue de l'évaluation du nombre N. Le nombre N se changera donc en $N - 1$ et les autres nombres ne changeront pas.

Supposons maintenant qu'on fasse passer la droite D par P; les points de contact de la surface avec les plans tangents menés par D sont les intersections de cette surface avec une certaine courbe gauche, et cette courbe coupe la surface au point P, non plus en deux, mais en six points confondus; de plus, ce point P ne comptera plus dans l'évaluation du nombre N puisqu'il n'y a plus de plan PD. Donc N se changera, non plus en $N - 1$, mais en $N - 6$.

D'autre part, le genre p d'une section faite par un plan quelconque mené par D se change en $p - 1$ puisque toutes ces sections admettent un point double. Le nombre m des intersections distinctes de D avec la surface se change en $m - 1$ puisque deux de ces intersections sont confondues en P.

Le nombre $N + 2 - 4p - m$ se change donc en $N + 1 - 4p - m$.

Nous n'avons pas à nous inquiéter des plans tangents menés par D au cône tangent à la surface au point P. En effet, pour les sections faites par ces plans, le point double devient un point de rebroussement, ce qui n'altère pas le genre.