JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EDMOND MAILLET

Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 3 (1907), p. 299-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1907_6_3__299_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur les fractions continues arithmétiques et les nombres transcendants ;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. — Introduction.

Soit la fraction continue

$$A = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres quelconques > 0.

Si l'on prend pour ces nombres des entiers positifs, A est une fraction continue arithmétique *ordinaire :* 1° Liouville a indiqué des cas étendus où A est un nombre transcendant : ces nombres où, pour une infinité de valeurs de j, a_j croît assez vite avec j, sont les *nombres transcendants de Liouville;* 2° les nombres A sont encore transcendants quand ce sont des fractions continues quasi-périodiques, sous certaines conditions.

On peut se demander si certaines propriétés analogues ne pourraient subsister lorsque les a_j ne sont pas des entiers positifs. Soit $a_j = b_j c_j^{-1}$, où b_j, c_j sont entiers positifs,

$$J = b_0 c_0^{-1} + 1 : b_1 c_1^{-1} + 1 : b_2 c_2^{-1} + \ldots.$$

Dans ce qui suit ([1]), j'établis diverses conditions suffisantes pour qu'une pareille fraction continue soit un nombre transcendant de Liouville, et j'indique, avec précision, des cas étendus où l'une au moins de ces conditions est satisfaite. Ainsi, les c_n étant donnés, J est un nombre de Liouville lorsque la croissance des b_n est suffisamment rapide avec n, ou que l'ordre de la suite des b_n est assez grand (théorèmes I à V).

La considération des fractions continues J divergentes peut aussi conduire à des nombres transcendants de Liouville (théorème VI).

Dans des cas étendus, les fractions continues J quasi-périodiques sont des nombres transcendants; même, sous certaines conditions, le développement en fraction continue ordinaire (c'est-à-dire à quotients incomplets entiers positifs) de ces nombres J est quasi-périodique (théorèmes VII et VIII et corollaires).

Enfin, je m'occupe un peu des fractions continues

$$K = g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots,$$

où les g_i, h_i sont des entiers positifs pour $i > 0$ (g_0 rationnel), et qui se ramènent facilement au type J. Dans des cas étendus, que je précise, ce sont des nombres de Liouville (théorème IX et X); quand K est quasi-périodique, les périodes ayant un nombre impair de termes, la fraction J correspondante est aussi quasi-périodique dans des cas étendus.

II. — Préliminaires.

Soient $a_n > 0$, b_n, c_n quelconques > 0, entiers ou non. Je rappelle d'abord quelques propriétés connues des fractions continues J et de leurs *pseudo-réduites* ([2])

$$J_n = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots + 1 : a_n.$$

([1]) Je désignerai dans ce Mémoire par *I. T.* mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants*, etc. (Paris, Gauthier-Villars, 1906), à laquelle je ferai de fréquents renvois. *Voir* un résumé de mon Travail dans les *C. R.*, t. CXLIV, 1er sem. 1907, p. 1020, 13 mai.

([2]) Je réserve le mot *réduite* pour le développement en fraction continue ordinaire à quotients incomplets entiers positifs de J. J'adopte l'expression de *pseudo-réduite* pour bien montrer que, en général, malgré l'apparence, les frac-

Elles s'établissent comme les propriétés analogues pour le cas où les a_n sont entiers (*I. T.*, p. 1 à 5), en supposant, bien entendu, la fraction continue convergente ([1]), ce qui a toujours lieu quand les a_n sont $\geqq 1$ dès que n est assez grand. Posant

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} P'_{n+1} = P'_n a_{n+1} + P'_{n-1}, \quad Q'_{n+1} = Q'_n a_{n+1} + Q'_{n-1}, \\ P'_0 = a_0, \quad Q'_0 = 1, \quad P'_1 = a_0 a_1 + 1, \quad Q'_1 = a_1, \quad \text{etc.}, \\ x_{n+1} = a_{n+1} + 1 : a_{n+2} + \ldots, \end{array}\right.$$

on a

$$(2)\quad J_n = P'_n Q'^{-1}_n, \qquad P'_{n+1} Q'_n - P'_n Q'_{n+1} = (-1)^n,$$

$$J = \frac{P'_n x_{n+1} + P'_{n-1}}{Q'_n x_{n+1} + Q'_{n-1}},$$

$$x_{n+1} \frac{Q'_n}{Q'_{n-1}} = \frac{J_{n-1} - J}{J - J_n} = x_{n+1}\left(a_n + \frac{Q'_{n-2}}{Q'_{n-1}}\right) > 0;$$

J est compris entre J_{n-1} et J_n, $J - J_n$ du signe de $J_{n+1} - J_n$, et

$$(3)\quad |J - J_n| < |J_{n+1} - J_n| = (Q'_n Q'_{n+1})^{-1};$$

quand $a_n a_{n+1} \geqq 1$.

$$(4)\quad |J - J_n| < |J - J_{n-1}|;$$

c'est le cas, à partir d'une certaine valeur de n, lorsque $a_n \geqq 1$ à partir de cette valeur. De même

$$(5)\quad J_{n+1} - J_n = (-1)^n (Q'_n Q'_{n+1})^{-1}, \quad J_n - J_{n-1} = (-1)^{n-1} (Q'_{n-1} Q'_n)^{-1},$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} J_{n+1} - J_{n-1} = (-1)^{n-1}[(Q'_{n-1} Q'_n)^{-1} - (Q'_n Q'_{n+1})^{-1}] \\ \qquad = (-1)^{n-1}(Q'_{n-1} Q'_n Q'_{n+1})^{-1}(Q'_{n+1} - Q'_{n-1}) \\ \qquad = (-1)^{n-1} a_{n+1} (Q'_{n-1} Q'_{n+1})^{-1}. \end{array}\right.$$

---

tions J_n pourront avoir, au point de vue arithmétique, des propriétés sensiblement différentes de celles des réduites.

([1]) On sait qu'il faut et il suffit que la série $\sum_1^\infty a_i$ diverge. *Voir* une démonstration simple de cette propriété due, je crois, à Stern (*J. f. Math.*, t. XXXVII) dans Stieltjes (*Ann. Fac. Toul.*, t. VIII, 1894, *J.*, p. 31).

La suite des quantités $J_1, J_3, \ldots, J_{2p+1}, \ldots$ forme donc une suite décroissante, la suite des quantités $J_0 = a_0, J_2, \ldots, J_{2p}, \ldots$ une suite croissante; toutes deux ont pour limite J quand la fraction continue est convergente.

On voit que P'_n et Q'_n sont des polynomes à coefficients entiers formés avec $a_n, a_{n-1} \ldots, a_0$, du premier degré par rapport à chacun des a_i. On peut encore écrire

$$(7)\quad \varpi'_n = c_0 c_1 \ldots c_n P'_n, \qquad \chi'_n = c_0 c_1 \ldots c_n Q'_n, \qquad J_n = P'_n Q'^{-1}_n = \varpi'_n \chi'^{-1}_n,$$

où ϖ'_n, χ'_n sont des polynomes à coefficients entiers formés avec $b_0, \ldots, b_n, c_0, \ldots, c_n$,

$$(8)\qquad \varpi'_{n+1}\chi'_n - \varpi'_n \chi'_{n+1} = (-1)^n (c_0 \ldots c_n)^2 c_{n+1},$$

$$(9)\qquad |J - J_n| < (Q'_n Q'_{n+1})^{-1} < (\chi'_n \chi'_{n+1})^{-1} (c_0 \ldots c_n)^2 c_{n+1}.$$

J'évalue les limites supérieures et inférieures de Q'_n et χ'_n : (1) donne encore

$$(9\,bis)\quad \begin{cases} Q'_n = Q'_{n-1} a_n + Q'_{n-2} > Q'_{n-1} a_n > \ldots > a_1 a_2 \ldots a_n, \\ \chi'_n > c_0 c_1 \ldots c_n a_1 a_2 \ldots a_n > c_0 b_1 b_2 \ldots b_n. \end{cases}$$

D'autre part,

$$Q'_0 = 1, \qquad Q'_1 < 1 + a_1;$$

si $Q'_0, Q'_1, \ldots, Q'_n$ sont plus petits que $(1 + a_1)(1 + a_2)\ldots(1 + a_n)$,

$$Q'_{n+1} = Q'_n a_{n+1} + Q'_{n-1} < (1 + a_1)\ldots(1 + a_n)(1 + a_{n+1}).$$

On a donc

$$(10)\qquad \begin{cases} (1 + a_1)\ldots(1 + a_n) > Q'_n > a_1 a_2 \ldots a_n, \\ c_0 (b_1 + c_1)\ldots(b_n + c_n) > \chi'_n > c_0 b_1 \ldots b_n. \end{cases}$$

Ces formules supposent seulement $a_n > 0$, a_n, b_n, c_n étant rationnels ou non; lorsque les b_n et les c_n sont des entiers, les χ'_n et les ϖ'_n sont des entiers, et J, supposée convergente, est limite de la suite des fractions $J_n = \varpi'_n \chi'^{-1}_n$. On remarquera que toutes les formules ci-dessus obtenues sans considérer x_{n+1} subsistent quand J diverge.

Enfin, lorsque a_n est $\geqq 1$ à partir d'une certaine valeur de n, je rappelle que (*I. T.*, p. 3),

$$Q'_n > 2^{\frac{n-\nu}{2}}, \tag{10 bis}$$

où ν est fini.

II. — Sur les nombres de Liouville de la forme J.

Je suppose les b_n, c_n entiers réels et positifs.

Par définition, un nombre de Liouville réel A est la limite d'une suite de fractions rationnelles $A_n = B_n C_n^{-1}$ (B_n, C_n entiers positifs, premiers entre eux ou non) telles que, pour une infinité de valeurs n_1 de n,

$$0 < |A - A_{n_1}| < C_{n_1}^{-\alpha}, \tag{11}$$

si grand que soit le nombre positif α, les C_{n_1} n'ayant aucune limite supérieure quand n_1 croît indéfiniment : c'est ce que j'appellerai *la condition de Liouville* (1). Il en résulte qu'on peut choisir les n_1 de façon que C_{n_1} ne décroisse pas quand n_1 croît, et que, pour α et n_1 assez grands, A_{n_1} est une réduite de A (*I. T.*, p. 5, prop. 8).

Dès lors, étant donnée une quantité réelle positive A', qu'on sait seulement être limite d'une suite de fractions rationnelles

$$A'_n = B'_n C'^{-1}_n \qquad (B'_n,\ C'_n \text{ entiers}),$$

peut-on écrire une condition nécessaire pour que A' *soit un nombre de Liouville?*

Si l'on sait que la suite des A'_n renferme toutes les réduites, sauf un nombre fini d'entre elles, on devra exprimer que parmi les A'_n il y en a une infinité qui satisfont à la condition de Liouville, ce qui sera nécessaire et suffisant. Mais il est toujours possible de définir un

(1) Ce m'est une occasion de mentionner, pour éviter toute possibilité de confusion, et bien que cela résulte sans aucun doute, me semble-t-il, de mes calculs, que les réduites envisagées dans l'énoncé du bas de la page 44 de *I. T.* sont exclusivement des réduites satisfaisant à la condition de Liouville.

nombre quelconque A' comme limite d'une suite de quantités A'_n dont aucune n'est réduite. Par conséquent, *a priori*, dans le cas de la suite la plus générale A'_n, on n'a aucun moyen d'écrire une condition nécessaire pour que A soit un nombre de Liouville : il en est tout différemment quand A est donné par la suite de ses réduites (*I. T.*, p. 229).

Aussi n'essaierai-je pas d'indiquer en général pour J une pareille condition nécessaire, car rien ne prouve *a priori* que, parmi les J_n, il y a toutes les réduites de J, sauf un nombre limité.

On peut toutefois écrire une condition suffisante pour que les J_n renferment une infinité de réduites. Il suffit, d'après (9), que, pour une infinité de valeurs n_1 de n (*I. T.*, p. 5),

$$|J - J_{n_1}| < \frac{(c_0,\ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1}}{\chi'_{n_1}\chi'_{n_1+1}} < (2\chi'^2_{n_1})^{-1},$$

ou

$$\chi'_{n_1+1} > 2\chi'_{n_1}(c_0\ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1}. \tag{12}$$

Mais, même quand cette condition est satisfaite, on ne sait toujours pas si la suite J_n renferme toutes les réduites, sauf un nombre limité.

Peut-on écrire une condition suffisante pour que J *soit un nombre de Liouville?*

Cette fois *la réponse est affirmative*. Il suffira que, parmi les J_n, il y en ait une infinité J_{n_1} qui, non seulement sont réduites, mais encore satisfont à la condition de Liouville. Il suffira donc, d'après (9),

$$|J - J_{n_1}| < (c_0\ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1}\chi'^{-1}_{n_1}\chi'^{-1}_{n_1+1} < \chi'^{-\alpha}_{n_1},$$

ou

$$\chi'^{\alpha-1}_{n_1}(c_0\ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1} < \chi'_{n_1+1}. \tag{13}$$

On déduit de là diverses conditions suffisantes dont je ferai usage : d'après (10), il suffit

$$(14)\quad\left\{\begin{array}{l}
c_0 b_1\ldots b_{n_1+1} > (c_0\ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1} c_0^{\alpha-1}[(b_1+c_1)\ldots(b_{n_1}+c_{n_1})]^{\alpha-1}, \\
\text{ou} \\
a_1\ldots a_{n_1+1} > c_0^{\alpha}[(1+a_1)\ldots(1+a_{n_1})]^{\alpha-1}(c_1\ldots c_{n_1})^{\alpha}, \\
\text{ou} \\
a_{n_1+1} > c_0^{\alpha}[(1+a_1)\ldots(1+a_{n_1})]^{\alpha-1}(c_1\ldots c_{n_1})^{\alpha+1}.
\end{array}\right.$$

Quand $a_i \geqq 1$, d'où $b_i \geqq c_i$, à partir d'une certaine valeur i' de i, il suffit

$$c_0 b_1 \ldots b_{n_1+1} > \lambda^\alpha c_0^{\alpha-1} 2^{n_1(\alpha-1)} (b_1 \ldots b_{n_1})^{\alpha-1} (c_0 \ldots c_{n_1})^2 c_{n_1+1},$$

ou

$$(15) \qquad a_{n_1+1} > \lambda^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (b_1 \ldots b_{n_1})^{\alpha-2} (c_1 \ldots c_{n_1})^2 c_0^\alpha,$$

ou encore

$$(16) \qquad a_{n_1+1} > \lambda^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (a_1 \ldots a_{n_1})^{\alpha-2} (c_0 \ldots c_{n_1})^\alpha \qquad (\lambda \text{ const.}).$$

On peut en déduire d'autres conditions suffisantes moins précises, mais plus simples.

Dans le cas de (14), soit d_i la plus grande des quantités b_i et c_i : il suffit

$$a_1 \ldots a_{n_1+1} > c_0^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (d_1 \ldots d_{n_1})^{\alpha-1} (c_1 \ldots c_{n_1}),$$

ou, *a fortiori*,

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 \ldots a_{n_1+1} > c_0^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (d_1 \ldots d_{n_1})^\alpha, \\ \text{ou} \\ b_{n_1+1} > c_0^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} (d_1 \ldots d_{n_1})^{\alpha+1} c_{n_1+1}. \end{array} \right.$$

Quand $a_i \geqq 1$ $(i \geqq i')$, soit α_n $(n \geqq i')$ la plus grande des quantités a_1, a_2, ..., a_n; β_n, γ_n les quantités analogues pour les suites b_1, ..., b_n d'une part, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ d'autre part. On a $\alpha_n \geqq 1$, $\beta_n \geqq \gamma_n$; d'après (15), il suffit

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} \beta_{n_1}^{n_1(\alpha-2)} \gamma_{n_1}^{2n_1}, \\ \text{ou} \\ a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha (2 \beta_{n_1})^{n_1 \alpha}; \end{array} \right.$$

d'après (16), il suffit

$$(19) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha 2^{n_1(\alpha-1)} \alpha_{n_1}^{n_1(\alpha-2)} \gamma_{n_1}^{n_1 \alpha}, \\ \text{ou} \\ a_{n_1+1} > (\lambda c_0)^\alpha (2 \alpha_{n_1} \gamma_{n_1})^{n_1 \alpha}. \end{array} \right.$$

Ceci posé, je me reporte aux classifications des fractions continues que j'ai indiquées ailleurs (*I. T.*, p. 8, 219 note (¹), 228, 237), et dont je rappelle sommairement les principes généraux. J est d'ordre (k, ρ) *dans la première classification* quand, pour $n > \nu$,

$$(\omega) \qquad a_n < e_k(n)^{\rho+\varepsilon},$$

et, pour une infinité de valeurs n_2 de n,

$$(\mu) \qquad a_{n_2} > e_k(n_2)^{\rho-\varepsilon},$$

(k entier positif ou négatif, $\rho > \varepsilon$, ε fixe positif aussi petit qu'on veut); il est d'ordre (k, ρ) *dans la deuxième classification* quand on a, au lieu de ces inégalités, les inégalités

$$(\omega') \qquad a_n < e_k(n^{\rho+\varepsilon}),$$

$$(\mu') \qquad a_{n_2} > e_k(n_2^{\rho-\varepsilon})$$

dans les mêmes conditions. Les valeurs a_{n_2} sont *les valeurs principales ou les termes principaux de la suite des a_n,* ou encore *les quotients incomplets principaux de* J. Quand on ne peut trouver aucun système de valeurs de k et ρ tel que (ω), (ω') aient lieu, la suite est d'ordre $+\infty$; quand il en est ainsi pour (μ), (μ'), la suite est d'ordre $-\infty$.

I. *Cas où $a_i \geqq 1$ à partir d'une certaine valeur i' de i.* — On remarque que, lorsque les c_i sont tous égaux à 1, des inégalités analogues à (15) et (16) ont déjà été indiquées ailleurs (*I. T.*, p. 228 et suiv.), et ne peuvent, comme on sait, avoir lieu, sans restriction sur le mode de croissance des a_n, que si la suite des a_n est d'ordre $> (3,0)$ dans la première classification, d'ordre $> (2,1)$ dans la deuxième.

A fortiori doit-il en être ainsi quand les c_i ne sont pas tous égaux à 1. De plus ces inégalités n'ont jamais lieu quand la suite des a_n est d'ordre $< (1, \infty)$ dans la première classification, ou d'ordre $< (1,1)$ dans la deuxième.

Première classification. — L'ordre des b_n, *supposé fini,* est au moins égal à celui des a_n et celui des c_n, puisque $b_n \geqq a_n$ et $b_n \geqq c_n$ pour n assez grand.

Je vais d'abord établir le lemme suivant :

Lemme I. — *Dans la première classification, les produits* $\lambda_n \mu_n$ *des nombres de mêmes indices de deux suites de nombres* λ_n, μ_n *d'ordres finis* (k, ρ), (k_1, ρ_1), *avec* $(k, \rho) \geqq (k_1, \rho_1)$ *et, pour n assez grand,* $\lambda_n \geqq 1$, $\mu_n \geqq 1$: 1° *forment une suite d'ordre* (k, ρ) *lorsque* $k > k_1$; 2° *forment une suite d'ordre* $\geqq (k, \rho)$ *et* $\leqq (k, \rho + \rho_1)$, *lorsque* $k = k_1$.

Si l'une des deux suites est d'ordre infini, avec, pour n assez grand, $\lambda_n \geqq 1$, $\mu_n \geqq 1$, *la suite des* $\lambda_n \mu_n$ *est d'ordre infini.*

Il suffit de considérer le cas où $(k, \rho) < +\infty$.

L'ordre de la suite $\lambda_n \mu_n$ est évidemment $\geqq (k, \rho)$.

D'autre part, quand $k_1 < k$,

$$\mu_n \leqq e_{k_1}(n)^{\rho_1 + \varepsilon} = e_k(n)^{\varepsilon_n}, \qquad \lim \varepsilon_n = 0 \text{ pour } n = 0,$$

$$\lambda_n \leqq e_k(n)^{\rho + \varepsilon}, \qquad \lambda_n \mu_n \leqq e_k(n)^{\rho + 2\varepsilon} \quad (n \text{ assez grand}).$$

Quand $k_1 = k$, l'ordre, qui ne peut dépasser $(k, \rho + \rho_1)$, peut être égal à $(k, \rho + \rho_1)$ si les deux suites renferment une infinité de termes principaux de même indice n_1, car

$$\lambda_{n_1} \geqq e_k(n_1)^{\rho - \varepsilon}, \quad \mu_{n_1} \geqq e_k(n_1)^{\rho_1 - \varepsilon}, \qquad \lambda_{n_1} \mu_{n_1} \geqq e_k(n_1)^{\rho + \rho_1 - 2\varepsilon}.$$

Mais il peut être aussi égal à (k, ρ) : en effet, soit

$$\lambda_n = e_k(n)^{\rho_n}, \qquad \mu_n = e_k(n)^{\sigma_n};$$

il suffit $\rho_n + \sigma_n < \rho + \varepsilon$; ceci aura lieu par exemple si les termes

$$\lambda_{2p}, \qquad \mu_{2p+1}$$

sont principaux, λ_{2p+1} et μ_{2p} restant finis.

Les modifications du raisonnement relatives aux cas limites où ρ ou ρ_1 est nul ou infini ne présentent aucune difficulté spéciale.

C. Q. F. D.

J'applique ce lemme à la suite $b_n = a_n c_n$. On voit que l'on peut distinguer deux cas : ou bien l'ordre des b_n est plus grand que l'ordre des c_n ; ou bien l'ordre des b_n et c_n est le même, l'ordre des a_n pouvant être le même, ou être plus petit. Je vais examiner ces deux cas successivement.

THÉORÈME I. — *Soit* (k, ρ) *l'ordre des* b_n *avec* $(k, \rho) > (3, 0)$, *c'est-à-dire* $k > 3$, *ou* $\rho > 0$ *avec* $k = 3$; *quand l'ordre des* c_n *est* $\leqq (k_1, \rho_1) < (k, \rho)$, J *est un nombre transcendant de Liouville.*

En effet, il suffit, d'après (18), quand ρ est différent de o et de ∞, la valeur b_{n_1+1} étant principale pour la suite des b_n, et ε fixe assez petit :

$$(20) \qquad e_k(n_1+1)^{\rho-\varepsilon} > (\lambda c_0)^\alpha \, 2^{n_1 \alpha} e_k(n_1)^{(\rho+\varepsilon)n_1\alpha} e_{k_1}(n_1+1)^{\rho_1+\varepsilon},$$

dès que n_1 est assez grand. Or

$$e_k(n_1+1)^{\rho-\varepsilon} > e_{k_1}(n+1)^{\rho_1+\varepsilon} e_k(n_1+1)^\varepsilon;$$

il suffit donc de montrer que

$$e_k(n_1+1) > e_k(n_1)^{n_1^2} > e_k(n_1)^{\mu n_1},$$

quel que soit le nombre fixe $\mu > 0$, dès que n_1 est assez grand, c'est-à-dire que

$$(20 \, bis) \qquad e_{k-1}(n_1+1) > e_{k-1}(n_1)^2 > n_1^2 e_{k-1}(n_1),$$

ou

$$e_{k-2}(n_1+1) > 2\, e_{k-2}(n_1).$$

Ceci a lieu pour $k = 3$; quand $k > 3$, il suffit

$$e_{k-3}(n_1+1) > 2\, e_{k-3}(n_1) > \log 2 + e_{k-3}(n_1),$$

ce qui a lieu pour $k = 4$, etc.

Il y a un cas limite à examiner, celui où ρ est infini [on a $(k', 0) = (k'-1, \infty)$] : alors, si $b_n = e_k(n)^{\rho_n}$, ρ_n n'a aucune limite supérieure quand n croît indéfiniment; on prend pour valeurs principales de b_n celles pour lesquelles ρ_n est plus grand que $\rho_1 + 2\varepsilon$, ρ_{n-1}, ρ_{n-2}, ..., et les calculs restent les mêmes. C. Q. F. D.

Théorème II. — *Soit (k, ρ) l'ordre commun des b_n et des c_n, et $(k, \rho) > (3, 0)$; J est encore un nombre transcendant de Liouville si, à la fois, ρ est $\neq 0$ et $\neq \infty$, et les a_n sont d'ordre $> (k, 0)$.*

Les inégalités (18) et (20 *bis*) montrent de suite que, lorsque k est $\neq 0$ et de ∞, J est encore un nombre de Liouville si les a_n sont d'ordre au moins égal à (k, ε_1) (ε_1 positif aussi petit qu'on veut, mais fixe). Toutefois, le cas limite où $\rho = 0$ ou ∞ reste un cas douteux que l'on peut, il est vrai, élucider parfois; ainsi, quand on a, dès que n est assez grand, $a_n \geqq c_n^{\varepsilon_2}$, $b_n \geqq c_n^{1+\varepsilon_2}$ (ε_2 comme ε_1), les conditions (19) et (20 *bis*) montrent encore que J est un nombre de Liouville (on prend $\rho = \infty$, et, pour a_{n_1+1}, une valeur principale de la suite des a_n). On peut alors conclure :

Corollaire I. — *Quand $a_n \geqq c_n^{\varepsilon_2}$ (ε_2 fixe, positif, aussi petit qu'on veut, mais fini, n assez grand), J est un nombre transcendant de Liouville dès que la suite des a_n est d'ordre fini plus grand que $(3, 0)$.*

Remarque I. — Il ne faudrait pas croire que les catégories de nombres de Liouville que l'on vient de trouver renferment toutes les catégories des nombres de Liouville possibles : les conditions (18) et (19) permettent de reconnaître le contraire.

Je suppose que, dans (19), à partir d'une certaine valeur de n, $\alpha_n \geqq \gamma_n$, l'ordre des a_n étant $(2, \rho) > (2, 0)$, J sera un nombre de Liouville si

$$a_{n_1+1} > (2\alpha_{n_1})^{2n_1\alpha};$$

supposant que a_{n_1+1} soit une valeur principale de la suite des a_n,

$$a_{n_1+1} > e_2(n_1 + 1)^{\rho - \varepsilon};$$

pour que J soit un nombre de Liouville, il suffit

$$e_2(n+1)^{\rho-\varepsilon} > (2\alpha_{n_1})^{2n_1\alpha},$$

$$(\rho - \varepsilon)e^{n_1+1} > 2n_1\alpha \log(2\alpha_{n_1}). \tag{21}$$

La limite supérieure de α_{n_1} ainsi trouvée est évidemment toujours acceptable, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de quantités $a_n \geqq 1$, d'ordre $(2, \rho)$ satisfaisant à la condition (21) et de la forme $b_n c_n^{-1}$, b_n étant d'ordre $<(2, \infty)$. En effet, je détermine une suite de quantités $a'_n \geqq 1$ d'ordre $(2, \rho)$ satisfaisant à (21), ce qui est possible; je choisis les c_n entiers $\leqq a'_n$, puis les b_n entiers, de façon que $a'_n \leqq b_n c_n^{-1} \leqq a'_n + 1$, et $a_n = b_n c_n^{-1}$. Alors la suite des a_n est d'ordre $(2, \rho)$ et, d'après le lemme I, les b_n sont d'ordre $<(2, \infty)$. J est un nombre transcendant de Liouville qui ne rentre pas dans les catégories qu'on vient de trouver.

Remarque II. — Ce qui précède comporte diverses conséquences intéressantes : on sait que, la suite des c_n étant donnée, tout nombre positif peut se représenter par une fraction continue de la forme J [voir *I. T.*, p. 86, et, plus loin, relations (42), (43)].

Si l'on considère l'ensemble des fractions continues illimitées J pour lesquelles les c_n sont donnés, les b_n prenant toutes les valeurs entières possibles telles que $b_n \geqq c_n$, J est un nombre de Liouville dès que l'ordre des b_n ou celui des a_n est assez grand (1). Sous cette forme, on voit que les fractions continues

$$a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots,$$

où les a_i sont positifs et $\geqq 1$, ont une propriété arithmétique commune, que les a_i soient entiers ou non. En particulier :

Corollaire II. — *Quand les c_n sont d'ordre $<(3, 0)$,* J *est toujours un nombre transcendant de Liouville dès que les a_n sont d'ordre $>(3, 0)$.*

Les c_n étant d'ordre $<(3, 0)$, si J *n'est pas un nombre de Liouville, les b_n et les a_n sont d'ordre $\leqq(3, 0)$.*

Deuxième classification. — Je considère les deux suites de quantités

$$(22) \qquad A_m = e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon})^{-1} \log a'_m, \qquad C_m = e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon})^{-1} \log c'_m,$$

(1) On traitera plus loin le cas où les a_n, b_n ou c_n peuvent être d'ordre infini.

en supposant l'ordre d'une des deux suites a'_m, c'_m plus grand que (k_1, ρ_1) (ε comme précédemment). Je fais un raisonnement analogue à un raisonnement connu (*I. T.*, p. 238) : je porte en abscisses m, en ordonnée la plus grande des deux quantités A_m et C_m ; j'obtiens des points P_1, P_2, ... pour lesquels je forme un polygone joignant une infinité de ces points, d'ordonnées constamment croissantes avec m, au delà de toute limite, et laissant tous les autres points au-dessous. L'équation $y = \log\varphi_x$ (coordonnées cartésiennes) de ce polygone définit une fonction φ_x, constamment croissante (¹), et telle que

$$A_m \leqq \log\varphi_m, \qquad C_m \leqq \log\varphi_m,$$

$$(23) \quad \log a'_m \leqq e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon})\log\varphi_m, \qquad \log c'_m \leqq e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon})\log\varphi_m,$$

une de ces inégalités au moins devenant une égalité pour une infinité de valeurs de m.

Quand l'ordre des a'_m est plus grand que celui des c'_m, supposé plus petit que $+\infty$, cette dernière condition est alors évidemment satisfaite pour la suite des a'_m par une infinité de valeurs m_1 de m, si l'on choisit l'ordre $(k_1, \rho_1 - \varepsilon)$ fini intermédiaire entre l'ordre des a'_m et celui des c'_m; alors, en effet, C_m est < 1 pour m assez grand. On a même, quand $(k_1, \rho_1) > (1, 0)$, C_m aussi petit qu'on veut pour les valeurs m_1 de m en question. En effet,

$$\log c'_m \leqq e_{k_1-1}(m^{\rho_1-2\varepsilon}),$$
$$e_{k_1-1}(m^{\rho_1-\varepsilon}) > \omega\, e_{k_1-1}(m^{\rho_1-2\varepsilon}),$$

si grand que soit ω, dès que m est assez grand et $(k_1, \rho_1) > (1, 0)$; car ceci a lieu pour $k_1 = 1$; pour $k_1 > 1$, il suffit

$$e_{k_1-2}(m^{\rho_1-\varepsilon}) > \omega\, e_{k_1-2}(m^{\rho-2\varepsilon}) > \log\omega + e_{k_1-2}(m^{\rho-2\varepsilon}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 2$, ... Dans ce cas,

$$(24) \quad \log(a'_{m_1} c'^{-1}_{m_1}) = (A_{m_1} - C_{m_1})e_{k_1-1}(m_1^{\rho_1-\varepsilon}) \geqq \tfrac{1}{2} A_{m_1} e_{k_1-1}(m_1^{\rho_1-\varepsilon}) = \tfrac{1}{2}\log a'_{m_1}.$$

(¹) La méthode indiquée pour deux suites de quantités s'étend évidemment à un nombre quelconque.

On pourra d'ailleurs, dans tous les cas, que l'ordre des a'_m soit ou non infini, pour tenir compte éventuellement de l'irrégularité de la croissance des a'_m et des c'_m, dire *provisoirement* que l'*ordre des a'_m est au moins égal à celui des c'_m pour une infinité de valeurs m_1 de m* quand la première inégalité (23) devient une égalité pour les valeurs m_1.

Ceci posé, soient a_n, b_n, c_n d'ordres plus petits que $+\infty$. J'établis ce lemme, analogue au lemme I :

Lemme II. — *Dans la deuxième classification, les produits $\lambda_n\mu_n$ des nombres de même indice de deux suites de nombres λ_n, μ_n d'ordres (k, ρ), (k_2, ρ_2) plus petits que $+\infty$, avec $(k, \rho) \geqq (k_2, \rho_2)$ et, pour n assez grand, $\lambda_n \geqq 1$, $\mu_n \geqq 1$: 1° forment une suite d'ordre (k, ρ) lorsque $(k, \rho) \geqq (1, 0)$; 2° forment une suite d'ordre $\geqq (k, \rho)$ et $< (0, \infty)$ lorsque $(k, \rho) < (0, \infty)$, d'ordre $(0, \rho)$ quand $k = 0$, $k_2 < 0$, d'ordre $\leqq (0, \rho + \rho_2)$ quand $k = k_2 = 0$* (¹).

D'abord l'ordre de la suite des $\lambda_n\mu_n$ est $\geqq (k, \rho)$.

D'autre part, soit $(k, \rho) \geqq (1, 0)$: pour n assez grand,

$$\lambda_n\mu_n \leqq e_k(n^{\rho+\varepsilon})\, e_{k_2}(n^{\rho_2+\varepsilon}) \leqq e_k(n^{\rho+\varepsilon})^2 \leqq e_k(n^{\rho+2\varepsilon}),$$

car il suffit pour que ceci ait lieu, quand $k = 1$,

$$e^{2n^{\rho+\varepsilon}} \leqq e^{n^{\rho+2\varepsilon}},$$

et, quand $k > 1$,

$$2e_{k-1}(n^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_{k-1}(n^{\rho+2\varepsilon});$$

ceci est vrai pour $k = 2$ et, lorsque $k > 2$, exige seulement

$$\log 2 + e_{k-2}(n^{\rho+\varepsilon}) \leqq 2e_{k-2}(n^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_{k-2}(n^{\rho+2\varepsilon}), \quad \ldots.$$

La suite des $\lambda_n\mu_n$ est d'ordre (k, ρ) (²).

(¹) Lorsque l'une des deux suites λ_n, μ_n est d'ordre infini, la suite des $\lambda_n\mu_n$ est évidemment d'ordre infini.

(²) Je rappelle que l'on a $(k, 0) = (k-1, \infty)$ (*I. T.*, p. 10 et note II).

Soit maintenant $k = 0$, $(k, \rho) < (0, \infty)$:

$$\lambda_n \mu_n \leqq e_{k_2}(n^{\rho_2+\varepsilon}) n^{\rho+\varepsilon}.$$

Si $k_2 < 0$,

$$e_{k_2}(n^{\rho_2+\varepsilon}) < n^{\varepsilon}, \qquad \lambda_n \mu_n \leqq n^{\rho+2\varepsilon};$$

si $k_2 = 0$,

$$\lambda_n \mu_n \leqq n^{\rho+\rho_2+2\varepsilon}.$$

Enfin, quand (k, ρ) et (k_2, ρ_2) sont quelconques, mais $< (0, \infty)$, l'ordre des $\lambda_n \mu_n$ est $< (0, \infty)$. C. Q. F. D.

J'applique ceci à la suite $b_n = a_n c_n$, en supposant les a_n, par suite les b_n, d'ordre $\geqq (2, 1)$. On peut encore, comme pour la première classification, distinguer deux cas : ou bien l'ordre des b_n est plus grand que celui des c_n; ou bien l'ordre des b_n est le même que celui des c_n, l'ordre des a_n pouvant être le même ou être plus petit. Je traiterai seulement le premier cas.

Théorème III. — *Quand l'ordre (k, ρ) des b_n est plus grand que l'ordre des c_n et que $(k, \rho) > (2, 1)$, J est un nombre transcendant de Liouville.*

Je pose ici $b_n = a'_n$, $c_n = c'_n$, et je me sers de (18), de (23) et de (24). D'après (18) il suffit, pour une infinité de valeurs n_1 de n,

$$\log a'_{n_1+1} > n_1 \alpha \log(4 \beta_{n_1}); \tag{25}$$

je choisis pour les valeurs n_1 celles pour lesquelles

$$\log b_{n_1+1} = e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] \log \varphi_{n_1+1},$$

$(k_1, \rho_1 - \varepsilon)$ étant $< (k, \rho)$ et plus grand que l'ordre des c_n.

Il suffit alors, d'après (24),

$$e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] \log \varphi_{n_1+1} > 4 n_1 \alpha e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_{n_1},$$

ou, *a fortiori*, puisque φ_x est croissant,

$$e_{k_1-2}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > \log(4 n_1 \alpha) + e_{k_1-2}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}). \tag{26}$$

Quand $k_1 = 2$,

$$(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon} - n_1^{\rho_1-\varepsilon} = n_1^{\rho_1-\varepsilon}\left[\left(1+\frac{1}{n_1}\right)^{\rho_1-\varepsilon} - 1\right] \geqq \frac{\rho_1-\varepsilon}{2} n_1^{\rho_1-\varepsilon-1},$$

qui est $> \log(4n_1\alpha)$ pour n_1 assez grand, lorsque $\rho_1 > 1+\varepsilon$; on peut toujours satisfaire à cette condition, quand les b_n sont d'ordre $> (2,1)$ (ε assez petit).

Quand $k_1 = 3$, il suffit

$$e^{(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon} - n_1^{\rho_1-\varepsilon}} - 1 \geqq e^{\frac{\rho_1-\varepsilon}{2n_1}} - 1 > \frac{\rho-\varepsilon}{2n_1} > e^{-n_1^{\rho_1-\varepsilon}} \log(4n_1\alpha),$$

ce qui a lieu pour n assez grand.

Quand $k_1 > 3$, il suffit

$$e_{k_1-2}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > 4n_1\alpha e_{k_1-2}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}),$$
$$e_{k_1-3}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > \log(4n_1\alpha) + e_{k_1-3}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 4$, etc. C. Q. F. D.

Remarque. — Ici encore on peut montrer qu'il y a d'autres catégories de nombres de Liouville que ceux qu'on vient d'obtenir. Ainsi, je suppose que les a_n soient d'ordre $(k,\rho) > (1,1)$ et $\leqq (2,1)$: pour une infinité de valeurs n_1 de n, $a_{n_1+1} > e_k(n_1^{\rho-\varepsilon})$; d'après (18) et (25), il suffit, pour une infinité de ces valeurs n_1,

$$(27)\qquad e_{k-1}(n_1^{\rho-\varepsilon}) > n_1\alpha\log(4\beta_{n_1}),\qquad (1,1) < (k,\rho) \leqq (2,1),$$

ce qui donne pour β_{n_1} une limite supérieure toujours acceptable, c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite de quantités b_n et a_n satisfaisant à (27), b_n étant d'ordre $\leqq (2,1)$. En effet, je suppose $a_n \geqq c_n$, $b_n \leqq a_n^2$, $\beta_n \leqq \alpha_n^2$; je détermine une suite de quantités $a'_n \geqq 1$ d'ordre (k,ρ) satisfaisant à

$$e_{k-1}(n_1^{\rho-\varepsilon}) > 2n_1\alpha\log(4\alpha_{n_1}^2)$$

pour une infinité de valeurs n_1 de n. Je choisis les c_n entiers tels que $c_n \leqq a'_n$, puis les b_n entiers de façon que

$$a'_n \leqq b_n c_n^{-1} \leqq a'_n + 1 \qquad \text{et} \qquad a_n = b_n c_n^{-1}.$$

La suite des a_n est d'ordre (k, ρ), et les b_n sont d'ordre $(k, \rho) \leqq (2, 1)$, d'après le lemme II. J est un nombre de Liouville qui ne rentre pas dans la catégorie trouvée au théorème III.

Cas où les b_n sont d'ordre infini dans les deux classifications. — Une suite de quantités d'ordre infini dans une des deux premières classifications l'est aussi dans l'autre (*I. T.*, p. 237). Il me suffit d'envisager la deuxième classification.

On pourra distinguer deux cas, suivant que la suite des c_n est d'ordre plus petit que l'infini ou d'ordre infini.

1° La suite des c_n est d'ordre plus petit que l'infini. D'après le lemme II, la suite des b_n étant d'ordre infini, il en est de même de la suite des a_n.

J'applique dès lors les formules (19) et (23) en prenant $a_m = a'_m$, $c_m = c'_m$, $(k_1, \rho_1) > (2, 1+\varepsilon)$, et l'ordre des c_n inférieur à $(k_1, \rho_1 - \varepsilon)$. Il suffira, pour une infinité de valeurs n_1,

$$\log a_{n_1+1} > n_1 \alpha \log(4\alpha_{n_1}\gamma_{n_1});$$

je choisis les valeurs n_1 telles que

$$\log a_{n_1+1} = e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] \log \varphi_{n_1+1};$$

il suffira

$$(28) \qquad e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > 4 n_1 \alpha e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}),$$

dès que n_1 est assez grand : c'est une conséquence de (26), et, par suite, J est un nombre transcendant de Liouville.

2° La suite des c_n est d'ordre infini.

On pourrait chercher ici à classer au préalable les suites de quantités d'ordre infini d'après les principes que j'ai indiqués sommairement ailleurs [1], et distinguer un certain nombre de cas où une des conditions (15), (16), (18), (19) est satisfaite. Je me contenterai d'un énoncé

---

[1] *Bull. Soc. Math.*, t. XXXIV, 1906, p. 217-218. Dans l'application de ces principes (par exemple le Corollaire I, p. 219), l'ordre de la suite des k_n à considérer est évidemment l'ordre, en fonction de n, de la suite de celles des quantités k_n qui sont *positives*.

moins précis, mais probablement plus général : j'envisagerai le cas où, suivant ce que j'ai dit à propos de (23), l'ordre des a_m est au moins égal à celui [1] des c_m *pour une infinité de valeurs* n_1+1 *de* n. On est encore conduit, d'après (19) et (23) à l'inégalité (28), et J est un nombre transcendant de Liouville.

En résumé :

Théorème IV. — *La suite des* b_n *étant d'ordre infini,* J *est un nombre transcendant de Liouville :* 1° *quand les* c_n *sont d'ordre plus petit que l'infini;* 2° *quand les* c_n *étant d'ordre infini, l'ordre des* a_n *est, au sens défini plus haut à propos de la formule* (23), *d'ordre au moins égal à celui des* c_n *pour une infinité de valeurs de* n.

II. *Cas où, parmi les* a_i, *il y en a une infinité dont la valeur est* < 1. — Une des conditions (14) ou (17) ne peut être satisfaite que si, pour une infinité de valeurs n_1 de n, b_{n_1+1} est $> c_{n_1+1}$, et même, quand on ne fait aucune restriction sur le mode de croissance des b_n, que si la suite des b_n est d'ordre $>(2,\infty)$ dans la première classification, d'ordre $\geqq (2,1)$ dans la deuxième (*I. T.*, p. 228 et suiv.). Les méthodes à employer restant les mêmes que tout à l'heure, j'observerai seulement ce qui suit :

Ordres non infinis : *Première classification.* — Quand l'ordre (k,ρ) des b_n est plus grand que (k_1,ρ_1) qui est plus grand que l'ordre des c_n, et $(k_1,\rho_1)>(3,0)$, la seconde condition (17) a lieu, b_{n_1+1} étant une valeur principale de la suite des b_n, si

$$e_k(n_1+1)^{\rho-\varepsilon} > c_0^\alpha\, 2^{n_1\alpha}\, e_k(n_1)^{(\rho+\varepsilon)n_1(\alpha+1)}\, e_{k_1}(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon};$$

ceci est une conséquence de (20), quand on y change α en $\alpha+2$; J est donc alors un nombre de Liouville. Le cas limite $\rho=\infty$ n'offre pas de difficultés.

Deuxième classification. — Quand l'ordre (k,ρ) des b_n est plus grand que celui des c_n et $>(2,1)$, la seconde condition (17) conduit à une condition tout à fait analogue à (25), où δ_{n_1}, qui est la plus

[1] On pourrait se placer au même point de vue lorsque les a_m, les b_m et les c_m sont d'ordre plus petit que $+\infty$.

grande des quantités $d_1, \ldots, d_{n_1}$, remplace β_{n_1} : J est encore un nombre de Liouville.

Lorsque la suite des b_n est d'ordre infini, on distingue deux cas : 1° si la suite des c_n est d'ordre fini, d'après (24), où

$$a'_m = b_m, \qquad c'_m = c_m,$$

on a

$$\log b_m c_m^{-1} \geqq \tfrac{1}{2} \log b_m$$

pour une infinité de valeurs de m telles que

$$\log b_m = e_{k_1-1}(m^{\rho-\varepsilon}) \log \varphi_m;$$

écrivant la seconde condition (17) pour ces valeurs $n_1 + 1$ de m, (23) conduit à une condition analogue à (28), qui a encore lieu pour n_1 assez grand. 2° Si la suite des c_n est d'ordre infini, en supposant la suite des a_n d'ordre au moins égal à celui des c_n pour une infinité de valeurs de n, on appliquera la troisième inégalité (14) et (23), avec

$$a'_m = a_m, \qquad c'_m = c_m.$$

Il suffit d'après (14), et

$$\log(c_0 c_1 c_2 \ldots c_{n_1})^{\alpha+1} \leqq (n_1 + 1)(\alpha + 1) e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_{n_1},$$
$$\log(1 + a_m) \leqq 2 e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}) \log \varphi_{n_1}, \qquad m \leqq n_1,$$

que

$$e_{k_1-1}[(n_1+1)^{\rho_1-\varepsilon}] > e_{k_1-1}(n_1^{\rho_1-\varepsilon}).\,4\,n_1(\alpha+1),$$

ce qui est une conséquence de (28).

En résumé :

Théorème V. — *Les théorèmes* I, III *et* IV *se conservent quand, parmi les a_i, il y en a un nombre infini qui sont* < 1; *la fraction continue est alors forcément convergente* [1].

---

[1] Car $\sum_1^\infty a_i$ diverge, d'après les énoncés des théorèmes I à IV.

Je me dispense d'examiner si l'extension du théorème II est possible, et s'il y a des cas particuliers analogues à ceux qui ont été rencontrés à propos des théorèmes I à IV.

IV. — Des fonctions continues divergentes.

Je me propose de montrer rapidement que ces fractions continues peuvent aussi conduire à considérer des nombres de Liouville. Soit encore

$$J = a_0 + 1 : a_1 + \ldots + 1 : a_n + \ldots, \qquad a_i > 0.$$

D'après (2)

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} J_n &= P'_0 Q'^{-1}_0 + (P'_1 Q'^{-1}_1 - P'_0 Q'^{-1}_0) + \ldots \\ &\qquad + (P'_n Q'^{-1}_n - P'_{n-1} Q'^{-1}_{n-1}), \\ J_n &= P'_0 Q'^{-1}_0 + (Q'_0 Q'_1)^{-1} - (Q'_1 Q'_2)^{-1} + \ldots \\ &\qquad + (-1)^{n-1} (Q'_n Q'_{n-1})^{-1}. \end{aligned}\right.$$

La valeur absolue des termes du second membre diminue de gauche à droite à partir du second, car

$$P'_{m-1} < P'_{m+1}, \qquad Q'_{m-1} < Q'_{m+1},$$

d'après (1). Les pseudo-réduites d'ordre n pair augmentent, en restant inférieures à toutes les pseudo-réduites d'ordre n impair, qui diminuent, car

$$J_{2r} < J_{2r+2} < J_{2r+1} < J_{2r-1}.$$

Donc

$$\lim J_{2r+1} = L_2, \qquad \lim J_{2r} = L_1, \qquad L_2 \geqq L_1.$$

Quand $Q'_{n-1} Q'_n$, qui croît toujours avec n, tend vers une limite λ finie > 0, on a

$$(30)\qquad L_2 = L_1 + \frac{1}{\lambda};$$

la fraction continue diverge, $Q_{2r} > Q'_0 = 1$, et $Q'_{2r+1} > Q'_1 = a_1$ tendent vers des limites finies q_1 et q_2, $\sum_1^\infty a_n$ converge (¹). Cette dernière condition est nécessaire, et aussi suffisante. D'après (6),

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} J_{m+1} - J_{m-1} &= (-1)^{m-1} a_{m+1} (Q'_{m-1} Q'_{m+1})^{-1} \\ &= (-1)^{m-1} [(Q'_{m-1} Q'_m)^{-1} - (Q'_m Q'_{m+1})^{-1}] \end{aligned}\right.$$

et

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} J_{2r} &= J_0 + (J_2 - J_0) + \ldots + (J_{2r} - J_{2r-2}), \\ J_{2r+1} &= J_1 + (J_3 - J_1) + \ldots + (J_{2r+1} - J_{2r-1}). \end{aligned}\right.$$

Q'_{m+1} et Q'_{m-1} tendent vers la même limite q, égale à q_1 ou q_2, et sont, dès que m est assez grand, $> \frac{q}{2}$ et $< 2q$. Donc, d'après (31),

$$(33)\quad \frac{a_{m+1}}{4q^2} < \left| J_{m+1} - J_{m-1} \right| < \frac{4a_{m+1}}{q^2}.$$

La somme

$$\Sigma_{m+1} = |(J_{m+1} - J_{m-1}) + (J_{m+3} - J_{m+1}) + \ldots| = |L - J_{m-1}|,$$

où L est L_2 ou L_1 suivant que m est pair ou impair, est telle que

$$(34)\quad \Sigma_{m+1} < 4q^{-2}(a_{m+1} + a_{m+3} + \ldots) < 4q^{-2}(a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots).$$

Ici, la série $\sum_1^\infty a_n$ converge; par conséquent, à partir d'une certaine valeur de n_1, on a (²)

$$a_n < \mu^{-1}, \qquad a_n^{-1} > \mu,$$

(¹) On trouvera une démonstration dans le Mémoire précité de Stieltjes (*Ann. Fac. Toul.*, 1894, *J*, p. 30 à 32), où il suffit de changer P_n en P'_n, Q_n en Q'_n, L en L_1, L_1 en L_2. On peut aussi consulter OTTO STOLZ, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, Leipzig, Teubner, 1885-1886, t. II, Chap. VIII, en particulier, p. 282.

(²) Dès lors, la suite des a_n^{-1} est d'ordre $\geqq (0,1)$ dans les deux premières classi grand que soit le nombre μ donné : on voit que, à côté de l'ordre (k, ρ) des $a_n^{-1} = c_n b_n^{-1}$, on peut envisager une quantité analogue définie de la façon suivante, avec la première ou la deuxième classification respectivement : si l'on a, pour $n > \nu$,

$$(35) \qquad a_n^{-1} > e_l(n)^{\sigma-\varepsilon}, \qquad \text{ou} \qquad a_n^{-1} > e_l(n^{\sigma-\varepsilon}),$$

et, pour une infinité de valeurs n_2 de n,

$$(36) \qquad a_{n_2}^{-1} < e_l(n_2)^{\sigma+\varepsilon}, \qquad \text{ou} \qquad a_{n_2}^{-1} < e_l(n_2^{\rho+\varepsilon}),$$

ε fixe positif aussi petit qu'on veut dès que ν est assez grand, on pourra dire que la suite des a_n^{-1} est *d'ordre minimum* (l, σ), en remplaçant alors ici l'expression « d'ordre (k, ρ) » utilisée dans les paragraphes précédents par celle *d'ordre maximum* (k, ρ). Cette nouvelle dénomination ne devient nécessaire que si l'on considère simultanément l'ordre maximum et l'ordre minimum [1]. A l'ordre minimum correspondent évidemment une infinité de *valeurs principales* a_{n_2}, comme pour l'ordre maximum ; l'on a $(l, \sigma) \leqq (k, \rho)$.

Ceci posé, je me sers de la première classification, et je sup-

---

sifications, sans quoi l'on aurait, à partir d'une certaine valeur de n,

$$a_n^{-1} \leqq n, \qquad \frac{1}{n} \leqq a_n,$$

et la série ne serait pas convergente. Grâce à un raisonnement complémentaire analogue, on peut donc, avec ma terminologie, énoncer incidemment ce lemme :

Lemme. — *Dans une série convergente à termes positifs Σa_n, la suite des a_n^{-1} est d'ordre $\geqq (0, 1)$ dans les deux premières classifications.*

Pour une fonction entière à termes positifs $\Sigma a_n z^n$, la suite des a_n^{-1} est d'ordre minimum $\geqq (1, \infty)$ dans la première classification, d'ordre minimum $\geqq (1, 1)$ dans la deuxième ; et réciproquement, sauf un cas douteux quand cet ordre est $(1, 1)$ dans la deuxième classification.

(1) L'extension aux fonctions entières est immédiate : les deux ordres se confondent pour les fonctions entières à croissance régulière. (*Comp.* Borel, *Leçons sur les fonctions entières, passim,* en particulier, p. 22 et 120.)

pose $(l, \sigma) > (3, 0)$. D'après (35)

$$a_n < e_l(n)^{\varepsilon-\sigma},$$

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots < \sum_{m+1}^{\infty} e_l(n)^{\varepsilon-\sigma}.$$

Or

$$e_l(n+1)^{\sigma-\varepsilon} > 2e_l(n)^{\sigma-\varepsilon},$$

d'après (20 *bis*); donc :

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots < e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) < 2e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma},$$

et, d'après (34),

$$\Sigma_{m+1} < 8q^{-2}e_l(m+1)^{\varepsilon-\sigma}. \tag{37}$$

D'autre part, on a, d'après (7),

$$J_m = \varpi'_m \chi'^{-1}_m, \qquad L_1 = \frac{\varpi'_{2r}}{\chi'_{2r}} + \Sigma_{2r+2}, \qquad L_2 = \frac{\varpi'_{2r+1}}{\chi'_{2r+1}} - \Sigma_{2r+3}.$$

D'après (37), pour que L_1 et L_2 soient des nombres de Liouville, il suffit que

$$8q^{-2}e_l(2r+2)^{\varepsilon+\sigma} < \chi'^{-\alpha}_{2r}, \qquad 8q^{-2}e_l(2r+3)^{\varepsilon-\sigma} < \chi'^{-\alpha}_{2r+1},$$

respectivement, pour une infinité de valeurs de r, ou encore,

$$8\chi'^{\alpha}_{2r} < q^2 e_l(2r+2)^{\sigma-\varepsilon}, \qquad 8\chi'^{\alpha}_{2r+1} < q^2 e_l(2r+3)^{\sigma-\varepsilon}. \tag{38}$$

Ici, d'après (35), à partir d'une certaine valeur de n, $c_n > b_n$; (10) donne alors $\chi'_m < 2^m \gamma_m^{m+1}$, où γ_m est la plus grande des quantités $c_0, c_1, \ldots, c_m, b_0, b_1, \ldots, b_m$. Il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs paires et de valeurs impaires de m,

$$8(2^m \gamma_m^{m+1})^{\alpha} < q^2 e_l(m+2)^{\sigma-\varepsilon}. \tag{39}$$

Je suppose les ordres maximum et minimum des a_n^{-1} égaux à (l, θ) et (l, θ_1), l'ordre maximum des b_n au plus égal à (l, θ_2), où $\theta, \theta_1, \theta_2$ sont finis > 0, $\sigma = \theta_1$. Alors les ordres maximum et minimum des c_n sont égaux à (l, τ), (l, τ_1) (lemme I ou raisonnements analogues), avec τ, τ_1 finis > 0; il suffira, pour m assez grand,

$$\alpha[m \log 2 + (m+1)(\tau + \varepsilon)e_{l-1}(m)] < (\sigma - \varepsilon)e_{l-1}(m+2) + \log\frac{q^2}{8},$$

ce qui résulte de (20 *bis*). Donc :

Théorème VI. — *Lorsque* J *est une fraction continue divergente, les* a_n^{-1} *étant d'ordre maximum et minimum* (l, θ) *et* (l, θ_1) *plus grands que* $(3, 0)$ *et les* b_n *d'ordre* $\leqq (l, \theta_2)$, $(\theta, \theta_1, \theta_2$ *étant finis et* $> 0)$, *dans la première classification, les pseudoréduites d'ordre pair et impair tendent respectivement vers des limites distinctes* L_1 *et* L_2 *qui sont des nombres transcendants de Liouville.*

Je ne m'attarde pas davantage sur les fractions continues divergentes : on pourrait trouver d'autres exemples dans les deux classifications, en s'inspirant des idées contenues dans un Mémoire antérieur : *Sur les fonctions monodromes et les nombres transcendants* (*Journ. de Mathém.*, 1904, p. 288-303). Je remarque seulement que, d'après [1] un passage de Stieltjes, les pseudoréduites d'ordre pair sont les pseudoréduites d'une fraction continue convergente

$$m_0 : n_0 - m_1 : n_1 - m_2 : n_2 - \ldots,$$

dont les numérateurs $-m_1$, $-m_2$, ... sont négatifs, ce qui donne le moyen de former des fractions continues convergentes de ce type et qui sont des nombres de Liouville.

V. — Des fractions continues quasi-périodiques.

Une fraction continue $J = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$ est quasi-périodique lorsque l'on peut trouver parmi les nombres a_0, a_1, a_2, ... une infinité de suites de s_1, s_2, ..., s_m, ... nombres a_i consécutifs et dont chacune est formée par la répétition un nombre k_1, k_2, ..., k_m, ...

---

[1] Mémoire précité, p. 3, formule (1°).

aussi grand qu'on veut de fois (dès que m est assez grand) d'un même groupe ou arrangement de nombres consécutifs a_i. On sait (*I. T.*, p. 127, 131 et suiv.) que, les a_i étant entiers > 0, lorsque k_m croît assez vite avec m par rapport à $s_m k_m^{-1}$ et au nombre α_m des nombres a_i de la partie non périodique qui précède les périodes, J est un nombre transcendant. Dans des cas étendus [1], la racine carrée d'un nombre transcendant de Liouville est une fraction continue quasi-périodique.

Je vais indiquer ici des cas analogues où, J étant quasi-périodique et les $a_i = b_i c^{-1}$, entiers ou fractionnaires $\geqq 1$, J est un nombre transcendant.

Je conserve les notations de ma démonstration relative au cas où a_i est entier (*I. T.*, p. 131), et je suis la même marche, en remplaçant I par J.

Si $p_i q_i^{-1}$ est la $i^{\text{ième}}$ pseudo-réduite de J et de Y_n, on a encore la formule (3_7) (*I. T.*, p. 132)

$$R_n Y_n^2 + R'_n Y_n + R''_n = 0, \tag{3_7}$$

avec

$$(40)\quad \begin{cases} R_n = \quad q_{\alpha_n} q_{\alpha_n+\lambda_n-1} - q_{\alpha_n-1} q_{\alpha_n+\lambda_n}, \\ R'_n = -q_{\alpha_n} p_{\alpha_n+\lambda_n-1} - p_{\alpha_n} q_{\alpha_n+\lambda_n-1} + q_{\alpha_n+\lambda_n} p_{\alpha_n-1} + q_{\alpha_n-1} p_{\alpha_n+\lambda_n}, \\ R''_n = \quad p_{\alpha_n} p_{\alpha_n+\lambda_n-1} - p_{\alpha_n-1} p_{\alpha_n+\lambda_n}. \end{cases}$$

Or, d'après (1) et (10), on voit que R_n, R'_n, R''_n ont leur valeur absolue limitée supérieurement en fonction de α_n, λ_n et des $\alpha_n + \lambda_n + 1$ premières quantités $a_i (i = 0, 1, \ldots, \alpha_n + \lambda_n)$.

On doit remarquer que, lorsque les a_i ne sont plus tous entiers, Y_n peut être un nombre rationnel ou quadratique, tandis qu'il est forcément quadratique quand les a_i sont entiers. Il suffit de citer la fraction continue

$$x = \tfrac{3}{2} + 1 : \tfrac{3}{2} + 1 : \tfrac{3}{2} + \ldots, \qquad x^2 - \tfrac{3}{2}x - 1 = 0, \qquad x = 2.$$

Il devient donc nécessaire de distinguer deux cas : Y_n est ou n'est pas rationnel.

---

(1) *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 215, théorème I et p. 219, corollaire I.

Je vais d'abord vérifier que la relation (3_7) n'est pas une identité. En effet, si

$$R_n = R'_n = R'_n = 0,$$

$$q_{\alpha_n+\lambda_n} = \frac{q_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n-1}} q_{\alpha_n+\lambda_n-1}, \qquad p_{\alpha_n+\lambda_n} = \frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n-1}} p_{\alpha_n+\lambda_n-1},$$

$$R'_n = (p_{\alpha_n+\lambda_n-1} q_{\alpha_n-1} - q_{\alpha_n+\lambda_n-1} p_{\alpha_n-1}) \left(\frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n-1}} - \frac{q_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n-1}} \right) = 0.$$

Or

$$\frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n-1}} - \frac{q_{\alpha_n}}{q_{\alpha_n-1}} = \frac{p_{\alpha_n} q_{\alpha_n-1} - p_{\alpha_n-1} q_{\alpha_n}}{p_{\alpha_n} q_{\alpha_n-1}} \neq 0,$$

d'après (2); il faudrait donc

$$\frac{p_{\alpha_n+\lambda_n-1}}{q_{\alpha_n+\lambda_n-1}} = \frac{p_{\alpha_n-1}}{q_{\alpha_n-1}},$$

ce qui est impossible, d'après (29), puisqu'il n'y a pas deux pseudo-réduites égales. Y_n sera donc déterminée par (3_7) et deux des quantités R_n, R'_n, R''_n sont $\neq 0$:

1° Y_n est rationnel, pour une infinité de valeurs de n, bien entendu. Il résulte de (3_7) que le numérateur F_n et le dénominateur G_n de Y_n mis sous forme de fraction irréductible $F_n G_n^{-1}$ sont des entiers limités en fonction de α_n, λ_n et des $\alpha_n + \lambda_n + 1$ premières quantités b_i, c_i

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_n + \lambda_n),$$

d'après (7). Je me dispense de faire le calcul qui n'est pas bien difficile. Dès lors, d'après (9),

$$|J - p_{\alpha_n+k_n\lambda_n} q^{-1}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}| < q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}, \qquad |Y_n - p_{\alpha_n+k_n\lambda_n} q^{-1}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}| < q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n},$$

$$(4_7) \qquad |J - Y_n| < 2 q^{-2}_{\alpha_n+k_n\lambda_n}.$$

Si J n'est pas rationnel [1] (et égal à Y_n), supposant qu'il y a une

---

[1] Si J est rationnel et égal à pq^{-1}, $|J - p_i q_i^{-1}| < q_i^{-1} q_{i+1}^{-1}$; d'après (9), $q_i q_{i+1} < q q_i c_0 c_1 \ldots c_i$; d'après (10), on a, quel que soit i,

$$a_1 a_2 \ldots a_{i+1} < q c_0 c_1 \ldots c_i.$$

infinité de valeurs de n, telles que k_n soit assez grand et que, d'après (10 *bis*),

$$q_{\alpha_n+k_n\lambda_n} > G_n^\alpha,$$

si grand que soit le nombre fixe α, J est un nombre transcendant de Liouville.

2° Y_n est irrationnel, pour une infinité de valeurs de n, bien entendu. Il est quadratique; (4_7) a encore lieu. Si J n'est pas quadratique (et égal à Y_n), on a $J - Y_n \neq 0$ et, dans (3_7), R_n et R''_n sont $\neq 0$.

Je suppose J algébrique et racine d'une équation donnée $f(x) = 0$ de degré d, dont les coefficients, entiers, ont leur valeur absolue $\leqq a'$; d'après (7) et (40),

$$|Y_n||Y'_n| = |R''_n R_n^{-1}| < |R''_n|(c_0 c_1 \ldots c_{\alpha_n})^2 c_{\alpha_n+1}\ldots c_{\alpha_n+\lambda_n} = |R''_n \theta_n|,$$
$$|Y'_n| < |M R''_n \theta_n|,$$

M constante, le second membre $\geqq 1$,

$$|f(Y'_n)| \leqq a'(d+1)|M R''_n \theta_n|^d.$$

Y_n est racine de l'équation

$$R_n \theta_n Y_n^2 + R'_n \theta_n Y_n + R''_n \theta_n = 0,$$

à coefficients entiers. On prend $B_0 = R_n \theta_n$ et l'on conclut qu'il faut

$$|J - Y_n| \geqq |M_1 a'(d+1)(M R_n R''_n \theta_n^2)^d|^{-1}.$$

Cette inégalité sera impossible si l'on prend k_n assez grand par rapport à α_n, λ_n et aux b_i, c_i ($i \leqq \alpha_n + \lambda_n$) pour que, pour une infinité de valeurs de n,

(40 *bis*) $$q_{\alpha_n+k_n\lambda_n} \geqq 2|\omega R_n R''_n \theta_n^2|^\omega,$$

si grand que soit le nombre fixe ω. Donc :

THÉORÈME VII. — *Si, pour une infinité de valeurs de n, k_n dé-*

passe une certaine limite inférieure (¹) *qui dépend de α_n, λ_n et des b_i, c_i, avec $a_i = b_i c_i^{-1} \geqq 1$, $i \leqq \alpha_n + \lambda_n$, J est un nombre rationnel, quadratique ou transcendant.*

Remarque I. — Dans le cas où Y_n est quadratique pour une infinité de valeurs de n, telles que (40 *bis*) ait lieu, on peut chercher à déterminer plus exactement la nature arithmétique du nombre J supposé transcendant. Soient

$$(41) \quad J = \zeta_0 + 1 : \zeta_1 + 1 : \zeta_2 + \ldots, \qquad Y_n = \zeta'_0 + 1 : \zeta'_1 + 1 : \zeta'_2 + \ldots,$$

où les ζ_i, ζ'_i sont entiers positifs $\geqq 1$, les développements en fraction continue ordinaire de J et Y_n. Le développement $\zeta'_0 + 1 : \zeta'_1 + 1 : \zeta'_2 + \ldots$ est périodique; or, le nombre des termes de la partie non périodique du développement en fraction continue ordinaire de la racine,

$$x = \frac{E + \sqrt{A}}{D} = \rho_0 + 1 : \rho_1 + \ldots \qquad \text{(A entier positif non carré parfait)},$$

de

$$Lx^2 - 2Mx + N = 0$$

($D = \pm L$, $E = \pm M$, $A = M^2 - LN$, L, M, N entiers, notations de Serret, *Algèbre supérieure*, t. I, 5ᵐᵉ édition, Paris, Gauthier-Villars, 1885, p. 38-45) est $\leqq \frac{\log|D|}{\log 2} + 3 + 2A$ (²) et la période a au

(¹) On peut évidemment se proposer de trouver des limites inférieures plus précises de la croissance des k_n à l'aide des calculs précédents; je ne m'en occuperai pas.

(²) Soit n_1 le plus petit entier tel que (Notations de Serret) $Q_{n_1}^2 > |L| = |D : D_n$ et E_n sont positifs pour $n \geqq n_1$; or $Q_{n_1} > 2^{\frac{n_1-2}{2}}$ (*I. T.*, p. 3 et 42). Soit n' le plus grand entier, tel que $2^{n'-3} \leqq |D|$; on a

$$Q_{n'}^2 > 2^{n'-2} > |D|, \qquad n' \leqq 3 + \frac{\log|D|}{\log 2}, \qquad n_1 \leqq n'.$$

Mais, d'après le raisonnement de Serret, *on peut seulement affirmer que la partie non périodique* a au plus, non n_1 termes, en dehors de ζ'_0, mais $n_1 + 2A$ termes et $\rho_{n+1} < 2\sqrt{A}$ pour $n \geqq n_1$.

plus $2A$ termes; enfin les termes de la partie non périodique ne dépassent pas $F = 2\sqrt{5}\varphi$, si φ est la plus grande des quantités $2\sqrt{A}$, $|L|$, $|M|$, $|N|$, les termes de la partie périodique ne dépassent pas $2\sqrt{A} \leqq F$.

Ici, Y_n est racine de l'équation (3_7), qu'on peut écrire

$$T_n Y_n^2 + T'_n Y_n + T''_n = 0,$$

où T_n, T'_n, T''_n sont entiers, avec

$$L = T_n = 2R_n\theta_n, \qquad -2M = T'_n = 2R'_n\theta_n, \qquad N = T''_n = 2R''_n\theta_n,$$
$$A = M^2 - LN = \tfrac{1}{4}(T'^2_n - 4T_nT''_n).$$

Ceci posé, on voit que $|J - Y_n|$ est limité supérieurement en fonction des $\alpha_n + \lambda_n + 1$ premières quantités b_i, c_i, de α_n, de λ_n, de k_n, et inférieurement en fonction du nombre de quotients incomplets que l'on suppose communs aux développements (41).

D'autre part, d'après la formule (11), page 42, de Serret, quel que soit n,

$$|D_n| \leqq \frac{Q_n^2}{Q_nQ_{n+1}}\left(2\sqrt{A} + \frac{|D|}{Q_nQ_{n+1}}\right) = \frac{2\sqrt{A}\,Q_n}{Q_{n+1}} + \frac{|D|}{Q_{n+1}^2} < 2\sqrt{A} + |D|,$$

et, d'après (4) et (5) (p. 44 de Serret), $|D_n|$ étant entier, on obtient une limite supérieure S de a_n, quel que soit n, en fonction de L, M, N, limite applicable aux $n_1 + 1$ premiers quotients. Sans trop chercher la précision, soit φ la plus grande des quantités $|D| = |L|$, $|E| = |M|$, $|D_{-1}| = |N|$ et $2\sqrt{A}$; on trouve

$$\rho_n \leqq 2\sqrt{5}\,\varphi = S.$$

Il en résulte que les quotients incomplets de la partie non périodique de $x = \dfrac{E + \sqrt{A}}{D}$ ne peuvent dépasser S, et même, ceux d'indice supérieur à $\dfrac{\log|D|}{\log 2} + 3$ ne dépassent pas $2\sqrt{A}$. Ces derniers, comme nombre et valeur, ont les mêmes limites supérieures que les quotients d'une période et jouent, à cet égard, le même rôle.

Ceci éclaircira et permettra de compléter un passage de mon article du *Bulletin de la Société mathématique*, 1906, page 222, si l'on observe : 1° que ν_m y est, en réalité, non le nombre des termes de la partie non périodique de X_m, comme je l'ai dit à tort, mais, à une unité près, la valeur de n à partir de laquelle D_n et E_n sont positifs; 2° que ces ν_m termes ont une limite supérieure $\leqq Q_m^{\theta_1}$ (θ_1 fini), d'après les notations de cet article.

Soient, en effet, ζ_{m+1}, ζ'_{m+1} les deux premiers quotients incomplets différents de même indice, ξ_{m+1}, ξ'_{m+1} les quotients complets correspondants, $p'_i q'^{-1}_i$ les réduites de Y_n : avec mes notations (*I. T.*, p. 4),

$$J = \frac{p'_m \xi_{m+1} + p'_{m-1}}{q'_m \xi_{m+1} + q'_{m-1}}, \qquad Y_n = \frac{p'_m \xi'_{m+1} + p'_{m-1}}{q'_m \xi'_{m+1} + q'_{m-1}},$$

$$|J - Y_n| = \frac{|\xi_{m+1} - \xi'_{m+1}|}{(q'_m \xi_{m+1} + q'_{m-1})(q'_m \xi'_{m+1} + q'_{m-1})} > (4 q'^2_m)^{-1} |\xi'^{-1}_{m+1} - \xi^{-1}_{m+1}|;$$

on a de plus

$$\xi'_i \leqq F + 1 < 2F, \qquad \xi'^{-1}_i > (2F)^{-1}.$$

Quand $\xi'_{m+1} < \xi_{m+1} \leqq 2\xi'_{m+1}$, on a

$$\xi'_{m+2} \geqq 1 + \xi'^{-1}_{m+3} > 1 + (2F)^{-1} = \frac{2F+1}{2F},$$

$$\xi'^{-1}_{m+2} < \frac{2F}{2F+1}, \qquad \xi_{m+1} - \xi'_{m+1} \geqq 1 - \xi'^{-1}_{m+2} > \frac{1}{2F+1};$$

$$\xi'^{-1}_{m+1} - \xi^{-1}_{m+1} > \frac{1}{(2F+1)\xi_{m+1}\xi'_{m+1}} > \frac{1}{2(2F+1)(2F)^2} > (4F)^{-3}.$$

Quand $\xi_{m+1} > 2\xi'_{m+1}$,

$$\xi'^{-1}_{m+1} - \xi^{-1}_{m+1} \geqq \frac{1}{2\xi'_{m+1}} > (4F)^{-1} > (4F)^{-3}.$$

Quand $\xi_{m+1} < \xi'_{m+1} = \zeta'_{m+1} + \xi'^{-1}_{m+2}$,

$$\xi'_{m+1} - \xi_{m+1} > \xi'^{-1}_{m+2} > (2F)^{-1},$$

$$\xi^{-1}_{m+1} - \xi'^{-1}_{m+1} > \frac{1}{2F\xi_{m+1}\xi'_{m+1}} > (2F)^{-3} > (4F)^{-3}.$$

Finalement, on a toujours $|\xi^{-1}_{m+1} - \xi'^{-1}_{m+1}| > (4F)^{-3}$, et

$$|J - Y_n| > (4q'^2_m)^{-1}(4F)^{-3};$$

enfin, d'après (10),

$$q'_m \leqq 2^m \zeta'_1 \ldots \zeta'_m \leqq (2F)^m,$$

d'où, tenant compte de (4_7),

$$2 q^{-2}_{\alpha_n + k_n \lambda_n} > |J - Y_n| > (2^{2m+8} F^{2m+3})^{-1},$$

ou

$$2^{2m+9}\,F^{2m+3} > q^2_{\alpha_n+k_n\lambda_n} > 2^{\alpha_n+k_n\lambda_n-\nu}, \qquad \nu \text{ fini},$$

d'après (10 *bis*). Le nombre m est ainsi limité inférieurement en fonction de k_n; comme la période du développement (41) de Y_n a au plus 2 A termes, et la partie non périodique $3+\frac{\log|L|}{\log 2}+2$ A termes, on voit que, si k_n est assez grand, les développements (41) ont autant de périodes communes que l'on veut. Par conséquent :

Corollaire. — *Tout étant posé comme au théorème* VII, *lorsque, pour une infinité de valeurs de n,* Y_n *est quadratique, et que* k_n *dépasse une certaine limite inférieure qui dépend de* α_n, λ_n *et des* b_i, c_i $(i \leqq \alpha_n+\lambda_n)$; *le développement en fraction continue ordinaire (c'est-à-dire à quotients incomplets entiers positifs) de* J *est périodique ou quasi-périodique.*

Remarque II. — Il existe des cas étendus où l'on peut préciser un peu plus et certifier que J n'est pas rationnel, et même qu'il est transcendant.

La suite des c_i étant donnée et $c_i \geqq 1$, j'admets que l'on puisse trouver un mode de représentation des nombres positifs par les fractions continues

$$\frac{b_0}{c_0}+1:\frac{b_1}{c_1}+1:\frac{b_2}{c_2}+\ldots,$$

où les b_i, entiers >0, satisfont au besoin à certaines conditions, mode tel qu'à tout nombre positif N′ correspond une et *une seule* fraction continue de cette forme : ce sera le cas, comme on sait, quand $c_i=1$; ce sera encore le cas, comme on va le voir, quand on prend $b_i \geqq c_i c_{i-1}$ pour $i>0$.

En effet, soit N′ un nombre positif, et la suite des c_i donnée : je puis trouver b_0 entier positif tel que

$$(42)\qquad N'-\frac{b_0}{c_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}<\frac{1}{c_0}, \qquad \varepsilon_0>c_0, \qquad b_0=E(N'c_0)\geqq 0,$$

puis $b_1, b_2, \ldots$ entiers positifs tels que

$$(43)\quad \begin{cases} \varepsilon_0 - \dfrac{b_1}{c_1} = \dfrac{1}{\varepsilon_1} < \dfrac{1}{c_1}, & \varepsilon_1 > c_1, \quad b_1 = \mathrm{E}(c_1\varepsilon_0) \geqq c_1 c_0, \\ \varepsilon_1 - \dfrac{b_2}{c_2} = \dfrac{1}{\varepsilon_2} < \dfrac{1}{c_2}, & \varepsilon_2 > c_2, \quad b_2 = \mathrm{E}(c_2\varepsilon_1) \geqq c_2 c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

On a $\varepsilon_i > c_i$, en sorte que, si la fraction continue est limitée, le dernier quotient $\varepsilon_{n-1} = b_n c_n^{-1}$ est $> c_{n-1}$.

Ce procédé donne pour tout nombre $\mathrm{N}' > 0$ un développement unique en fraction continue, évidemment convergent, puisque $c_i \geqq 1$, $a_i = b_i c_i^{-1} \geqq 1$ (*I. T.*, p. 3). Inversement, deux développements

$$\mathrm{N}' = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \frac{b_2}{c_2} + \ldots, \qquad \mathrm{N}'_1 = \frac{b'_0}{c_0} + 1 : \frac{b'_1}{c_1} + 1 : \frac{b'_2}{c^2} + \ldots,$$

avec $b_i, b'_i, c_i, c'_i > 0$ et $b_i \geqq c_i c_{i-1}$, $b'_i \geqq c_i c_{i-1}$, le dernier quotient ε_{n-1}, dans le cas d'une fraction continue limitée étant $> c_{n-1}$, représentent deux nombres distincts; car, si $\mathrm{N}' = \mathrm{N}'_1$,

$$\mathrm{N}' = \frac{b_0}{c_0} + \frac{1}{\varepsilon_0} = \frac{b'_0}{c_0} + \frac{1}{\varepsilon'_0}, \qquad \varepsilon_0 \geqq \frac{b_1}{c_1}, \qquad \varepsilon'_0 \geqq \frac{b'_1}{c_1},$$

d'où

$$\varepsilon_0 > c_0, \qquad \varepsilon'_0 > c_0, \qquad \frac{|b_0 - b'_0|}{c_0} = |\varepsilon_0^{-1} - \varepsilon_0'^{-1}| < c_0^{-1}, \qquad b_0 = b'_0,$$

$$\mathrm{N}' = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b_1}{c_1} + 1 : \varepsilon_1 = \frac{b_0}{c_0} + 1 : \frac{b'_1}{c_1} + 1 : \varepsilon'_1,$$

$$\frac{b_1}{c_1} + 1 : \varepsilon_1 = \frac{b'_1}{c_1} + 1 : \varepsilon'_1.$$

En vertu du même raisonnement, qui peut évidemment se continuer indéfiniment, $b_1 = b'_1$, $b_2 = b'_2$, etc. Donc $\mathrm{N}' = \mathrm{N}'_1$ [1].

Le développement ainsi obtenu de N' ne peut évidemment s'arrêter que si N' est rationnel : pour une certaine valeur i l'on a alors

---

[1] Ce qui précède reste vrai, même si les $c_i \geqq 1$ sont rationnels ou irrationnels.

exactement

$$\varepsilon_{i-1} = b_i c_i^{-1} > c_{i-1}.$$

La réciproque est vraie; on le vérifie par la même méthode ([1]) que lorsque les c_j sont égaux à 1.

Soit en effet $N' = \frac{A}{A_1}$, avec A, A_1 entiers premiers entre eux : les relations (42), (43) s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{ll} A c_0 \quad - A_1 b_0 = A_2 = \frac{A_1 c_0}{\varepsilon_0} < A_1, & \varepsilon_0 = \frac{A_1 c_0}{A_2}, \\ A_1 c_0 c_1 - A_2 b_1 = A_3 = \frac{A_2 c_1}{\varepsilon_1} < A_2, & \varepsilon_1 = \frac{A_2 c_1}{A_3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}\right.$$

Les A_2, A_3, ... sont des entiers positifs qui ne peuvent diminuer indéfiniment : l'un deux s'annule, et N' se représente par une fraction continue limitée. Donc :

Dans le mode de développement en fraction continue défini par (42) *et* (43), *les* c_i *étant entiers* > 0, *les irrationnelles sont caractérisées par un développement en fraction continue illimitée.*

Supposant que le développement $J = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots$ satisfasse aux conditions (42), (43), il en est de même de Y_n, qui n'est pas rationnel. Dès lors :

THÉORÈME VIII. — *Tout étant posé comme au théorème VII, lorsque l'on a* $b_i \geqq c_i c_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, J *est quadratique ou transcendant; par suite, si* k_n *satisfait aux conditions du corollaire précédent, le développement en fraction continue ordinaire de* J *est périodique ou quasi-périodique.*

On peut dans certains cas préciser un peu plus. Ainsi :

COROLLAIRE ([2]). — *Tout étant posé comme au théorème VIII, J est*

([1]) SERRET, *Algèbre supérieure*, t. I, 5e édition, 1885, p. 7.

([2]) Voici des indications sur la démonstration.

Pour le développement en fraction continue du type (42), (43) d'une irration-

transcendant quand l'on a, pour une infinité de valeurs de i,

$$b_i > \alpha(c_0 c_1 \ldots c_{i-1})^2 c_i,$$

si grand que soit α. Ceci est le cas quand les c_i sont tous limités et que $b_i > \alpha^i$ pour une infinité de valeurs de i.

Si de plus k_n satisfait aux conditions du corollaire du théorème VII, le développement en fraction continue de J *est quasi-périodique.*

VI. — Autre forme de fractions continues.

Au lieu d'envisager des fractions continues de la forme J, on peut aussi considérer les fractions

$$K = g_0 + \cfrac{h_1}{g_1 + \cfrac{h_2}{g_2 + \ldots}}, \tag{44}$$

que j'écrirai plus simplement (les confusions de notations étant faciles à éviter)

$$K = g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots.$$

On les ramène de suite aux fractions J, car

$$\left\{\begin{aligned} g_0 + h_1 : g_1 &= g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1}, \\ g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 &= g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1} + h_2 h_1^{-1} : g_2 \\ &= g_0 + 1 : g_1 h_1^{-1} + 1 : g_2 h_1 h_2^{-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

---

nelle quadratique, les calculs de l'*Algèbre supérieure* de Serret (t. I, 1885, 5e édition, p. 38-45) se conservent; mais $P_n Q_n^{-1}$ devient une pseudo-réduite, et l'on ne sait plus si les D_n, E_n sont entiers. La formule (11), page 42-43, et les formules (4) et (5), page 44 de cet Ouvrage donnent pour n assez grand, d'après ma formule (7),

$$2\sqrt{A}\, a_n^{-1} > D_n > |D c_0^2 c_1^2 \ldots c_{n-1}^2|^{-1}, \qquad D_n > 0, \qquad |E_n| < \sqrt{A},$$

et même, quel que soit n,

$$(2\sqrt{A} + |D|)\, a_n^{-1} > D_n > |D c_0^2 c_1^2 \ldots c_{n-1}^2|^{-1};$$

ceci limite $b_n = a_n c_n$ en fonction de $\sqrt{A}$, $|D|$, c_0, …, c_{n-1}, c_n. Si les c_n sont limités, $b_n < \theta^n$, où θ est une constante convenable.

Finalement,

$$K = a_0 + 1 : a_1 + 1 : a_2 + \ldots, \tag{45}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} a_{2n} &= g_{2n} \frac{h_1 h_3 \ldots h_{2n-1}}{h_2 h_4 \ldots h_{2n}}, & a_0 &= g_0, \\ a_{2n+1} &= g_{2n+1} \frac{h_2 h_4 \ldots h_{2n}}{h_1 h_3 \ldots h_{2n+1}}, & a_1 &= g_1 h_1^{-1}. \end{aligned} \right. \tag{46}$$

Les deux fractions (44) et (45) ont mêmes pseudoréduites, et sont par conséquent à la fois convergentes ou divergentes : on peut aussi écrire

$$a_i = \frac{h_{i-1} h_{i-3} \ldots}{h_i h_{i-2} \ldots} g_i, \qquad a_i a_{i-1} = g_i g_{i-1} h_i^{-1}. \tag{47}$$

Ces formules permettront d'appliquer les résultats précédemment trouvés pour le cas où les a_m sont rationnels > 0 aux fractions continues (44). Je me bornerai à quelques indications, en supposant g_0 rationnel > 0, et les g_i, h_i entiers positifs pour $i > 0$.

Il n'y a qu'à se reporter aux formules (14) et (17), en observant que b_i et c_i n'y sont pas forcément premiers entre eux, et posant

$$b_i = g_i h_{i-1} h_{i-3} \ldots, \qquad c_i = h_i h_{i-2} \ldots,$$

pour obtenir des conditions très générales suffisantes quand on veut que K soit un nombre transcendant de Liouville [1]. Mais je me contenterai de faire une application des théorèmes I et suivants.

Première classification. — Je suppose que la suite des h_i soit d'ordre $\leqq (k_1, \rho_1)$ plus petit que l'ordre $(k, \rho) > (3, 0)$ de la suite des g_i, et je prends pour g_i une valeur principale. On a $a_i = b_i c_i^{-1}$,

$$b_i \geqq g_i \geqq e_k(i)^{\rho-\varepsilon}, \qquad c_i \leqq e_{k_1}(i)^{\rho_1+\varepsilon} e_{k_1}(i-1)^{i(\rho_1+\varepsilon)} < e_k(i)^{\rho-2\varepsilon};$$

---

(1) C'est ici le lieu de rappeler que (Legendre, *Éléments de Géométrie*, 9e édition, Paris, F. Didot, 1812, Note IV, p. 290, lemme I et O. Stolz, *Allgemeine Arithmetik*, t. II, p. 297) K est irrationnel si, à partir d'une certaine valeur de i, $h_i \leqq g_i$. K est alors convergent, car, d'après (47), a_i ou a_{i-1} est > 1.

il suffit en effet, prenant $(k_1, \rho_1) \leqq (k, \rho - 4\varepsilon)$,

$$e_{k_1}(i-1)^{i(\rho_1+\varepsilon)} < e_{k}(i)^{\varepsilon}$$

pour i assez grand, ce qui est une conséquence de (20 *bis*). Les cas limites où l'ordre des g_i est (k, ∞) avec $k \geqq 3$, ou même est infini se traitent sans difficulté. D'après les théorèmes I, IV et V :

Théorème IX. — *La fraction continue*

$$g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots,$$

où g_0 est rationnel > 0, et les g_i, h_i sont entiers > 0, est un nombre transcendant de Liouville lorsque l'ordre de la suite des g_i dans la première classification est $> (3, 0)$ et $>$ l'ordre de la suite des h_i supposé plus petit que $+\infty$.

Deuxième classification. — Je suppose l'ordre des g_i plus grand que $(k, \rho) > (2, 1)$, et $(k, \rho) > (k_1, \rho_1)$ qui est plus grand que l'ordre des h_i supposé non infini. On a, en prenant pour g_i une valeur principale,

$$b_i \geqq g_i \geqq e_k(i^\rho), \qquad c_i < e_{k_1}(i^{\rho_1 - \eta})^i < e_{k_1}(i^{\rho_1})$$

(η comme ε), car il suffit

$$i e_{k_1-1}(i^{\rho_1-\eta}) < e_{k_1-1}(i^{\rho_1});$$

prenant $k_1 \geqq 2$, il suffit, quand i est assez grand,

$$\log i + e_{k_1-2}(i^{\rho_1-\eta}) < 2\, e_{k_1-2}(i^{\rho_1-\eta}) < e_{k_1-2}(i^{\rho_1});$$

pour $k_1 = 2$, ceci a lieu; pour $k_1 > 2$, il suffit

$$\log 2 + e_{k_1-3}(i^{\rho_1-\eta}) < 2\, e_{k_1-3}(i^{\rho_1-n}) < e_{k_1-3}(i^{\rho_1}),$$

ce qui a lieu pour $k_1 = 3$, etc.

D'après les théorèmes III, IV et V, on conclut :

Théorème X. — *La fraction continue*

$$g_0 + h_1 : g_1 + h_2 : g_2 + \ldots,$$

où g_0 *est rationnel, et les* g_i, h_i *sont entiers, est un nombre transcendant de Liouville lorsque l'ordre de la suite des* g_i *dans la deuxième classification est* $> (2, 1)$ *et plus grand que l'ordre de la suite des* h_i *supposé plus petit que* $+\infty$.

On pourrait encore chercher des exemples de fractions continues (44) qui sont des nombres transcendants de Liouville, sans que les deux théorèmes ci-dessus leur soient applicables, ou faire d'autres applications des théorèmes I à V et de leurs corollaires; mais je ne m'y arrête pas

Je dirai toutefois encore quelques mots du cas où (44) est périodique ou quasi-périodique.

On dira que K est périodique lorsque les suites des g_i et des h_i sont périodiques; si les deux périodes ont chacune p et q termes, soit $2r$ le plus petit commun multiple pair de p et q; les deux suites admettent toutes deux une période de $2r$ termes. Alors

$$a_{i+2r} = g_{i+2r}\frac{h_{i+2r-1}h_{i+2r-3}\cdots}{h_{i+2r}h_{i+2r-2}\cdots} = a_i\lambda_i,$$

où $\lambda_i = \dfrac{h_{i+2r-1}h_{i+2r-3}\cdots h_{i+1}}{h_{i+2r}h_{i+2r-2}\cdots h_{i+2}}$; soient $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2r}$ les termes de la période des h_n; $h_{i+1}, h_{i+2}, \ldots, h_{i+2r}$ représentent ces termes dans l'ordre $\eta_j, \eta_{j+1}, \ldots, \eta_{2r}, \eta_1, \ldots, \eta_{j-1}$: λ_i est ainsi susceptible des deux valeurs inverses l'une de l'autre

$$\lambda' = \frac{\eta_1\eta_3\cdots\eta_{2r-1}}{\eta_2\eta_4\cdots\eta_{2r}}, \qquad \lambda'' = \lambda'^{-1}.$$

Quand $\lambda' = \lambda'' = 1$, $a_{i+2r} = a_i$, et (45) est périodique : ce sera le cas en particulier quand p et q sont impairs, car les g_i et les h_i admettent une période de r termes, où r est impair $= 2s+1$, et

$$\eta_1 = \eta_{2s+2}, \qquad \eta_2 = \eta_{2s+3}, \ldots, \eta_{2s} = \eta_{4s+1}, \qquad \eta_{2s+1} = \eta_{4s+2} = \eta_{2r}.$$

La suite des a_i et la fraction continue (45) ont alors une période de $2r$ termes.

On passe de là au cas où (44) est quasi-périodique, une infinité des systèmes de périodes ayant tous dans leur période un nombre impair de termes : (45) est quasi-périodique ([1]). On déduit de là le moyen d'appliquer les théorèmes VII et VIII et leurs corollaires aux fractions continues (44) : je ne m'y attarde pas.

([1]) Sous certaines conditions évidentes relatives au nombre de termes de la partie non périodique des deux suites des g_i et des h_i.

Bourg-la-Reine, mai 1907.