JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. RÉMY

Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 4 (1908), p. 1-37.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1908_6_4__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur certaines surfaces algébriques liées aux fonctions abéliennes de genre trois;

Par M. L. REMY.

1. Les surfaces hyperelliptiques pour lesquelles les coordonnées d'un point sont des fonctions quadruplement périodiques de deux variables *représentent les couples de points* d'une courbe de genre deux en ce sens qu'à un couple de points de la courbe correspond un point de la surface et réciproquement. D'une manière plus générale, on peut considérer les surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une courbe C de genre p.

De même que pour les surfaces hyperelliptiques, il convient de faire une distinction fondamentale entre le cas où un point de la surface répond à *un seul* couple de points sur la courbe C (surfaces générales d'après M. Picard) et le cas où un point de la surface correspond à *deux* ou *plusieurs* couples (la surface de Kummer en est un exemple classique).

Dans ce Mémoire, nous nous bornerons au cas de $p=3$; la courbe C est alors, si l'on veut et sans que la généralité en soit diminuée, une courbe plane du quatrième ordre. Nous considérerons *les surfaces* S *telles qu'à un point de* S *correspondent deux couples de points de* C *situés en ligne droite*.

Nous établirons quelques théorèmes généraux relativement aux surfaces S et nous en ferons l'application à une surface particulière du sixième ordre.

Correspondance entre les surfaces S et la courbe plane d'ordre quatre.

2. Il convient tout d'abord de rappeler comment on peut représenter les coordonnées d'un point d'une telle surface S au moyen de fonctions abéliennes à six systèmes de périodes.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation de la courbe C du quatrième ordre et désignons par

$$g_1(x)\,dx, \quad g_2(x)\,dx, \quad g_3(x)\,dx$$

trois différentielles abéliennes distinctes de première espèce attachées à cette courbe. Posons

$$\begin{aligned} g_1(x_1)\,dx_1 + g_1(x_2)\,dx_2 + g_1(x_3)\,dx_3 &= du, \\ g_2(x_1)\,dx_1 + g_2(x_2)\,dx_2 + g_2(x_3)\,dx_3 &= dv, \\ g_3(x_1)\,dx_1 + g_3(x_2)\,dx_2 + g_3(x_3)\,dx_3 &= dw. \end{aligned}$$

Toute fonction rationnelle symétrique par rapport à (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) est une fonction abélienne de u, v, w; il en est de même si l'on suppose que le point (x_3, y_3) est fixe, mais alors u, v, w sont liés par la relation

$$\vartheta(u-\lambda, v-\mu, w-\nu) = 0,$$

$\vartheta(u, v, w)$ désignant une fonction thêta normale du premier ordre (qu'on peut choisir arbitrairement d'ailleurs) et λ, μ, ν des constantes.

Si l'on désigne par $G_i(x)$ l'intégrale $\int g_i(x)\,dx$, on peut, en augmentant u, v, w de constantes et en choisissant convenablement les limites inférieures des intégrales, ramener les relations précédentes à la forme

$$\begin{aligned} G_1(x_1)+G_1(x_2) &= u \\ G_2(x_1)+G_2(x_2) &= v \qquad [\vartheta(u, v, w)=0]. \\ G_3(x_1)+G_3(x_2) &= w \end{aligned}$$

Les surfaces S peuvent dès lors être représentées paramétriquement par les équations

$$X_i = \Phi_i(u, v, w) \qquad (i=1, 2, 3)$$

où les Φ_i sont des fonctions abéliennes à six systèmes de périodes des trois paramètres u, v, w liés eux-mêmes par la relation

$$\vartheta(u, v, w)=0.$$

3. Nous nous bornerons au cas où les fonctions $\Phi_i(u, v, w)$ sont des fonctions paires de u, v, w. Dans ce cas, à un couple de points (x_1, y_1), (x_2, y_2) correspond un point de la surface S, mais à un point de S répondent deux systèmes de valeurs des arguments (u, v, w) et $(-u, -v, -w)$ et, par suite, deux couples de points (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2). Ces deux couples satisfont manifestement aux relations

$$\begin{aligned} g_1(x_1)\,dx_1+g_1(x_2)\,dx_2+g_1(x'_1)\,dx'_1+g_1(x'_2)\,dx'_2 &= 0, \\ g_2(x_1)\,dx_1+\ldots &= 0, \\ g_3(x_1)\,dx_1+\ldots &= 0, \end{aligned}$$

qui établissent que les deux couples de points sont en ligne droite.

Ce sont les surfaces S de ce type qui font l'objet de ce Mémoire.

Sur le système canonique des surfaces S.

4. Sur la surface S les trois intégrales doubles

$$\iint du\,dv, \quad \iint dv\,dw, \quad \iint dw\,du$$

restent finies à l'intérieur d'un prismatoïde des périodes et, comme elles ne changent pas quand on y remplace respectivement u, v, w par $-u$, $-v$, $-w$, ce sont des intégrales abéliennes de première espèce. On démontre d'ailleurs qu'une surface représentant les couples de points d'une courbe C de genre trois ne saurait avoir plus de trois intégrales doubles de première espèce ([1]).

Les surfaces S *sont donc de genre trois.*

Nous nous proposons d'étudier sur la surface S le système linéaire doublement infini des courbes L découpées par les surfaces adjointes d'ordre $m-4$ (m étant le degré de la surface S) ou système canonique.

5. Il est aisé d'obtenir leur équation en u, v, w. Toute intégrale double de première espèce d'une surface algébrique d'ordre m

$$S(X, Y, Z) = 0$$

est nécessairement de la forme

$$\int\int \frac{dX\,dY}{S'_z} Q(X, Y, Z),$$

$Q(X, Y, Z)$ désignant un polynome adjoint d'ordre $m-4$.

Or

$$dX\,dY = \frac{D(X, Y)}{D(u, v)} du\,dv,$$

u et v étant regardés comme variables indépendantes et w comme une fonction de u et v définie par l'équation fondamentale

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0.$$

([1]) *Voir* un Mémoire de M. Humbert. *Sur une surface de sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. II, 1896).

On trouve par un calcul simple

$$\frac{D(X, Y)}{D(u, v)} = \frac{H(u, v, w)}{\dfrac{\partial \vartheta}{\partial w}},$$

en posant

$$H(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial w} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial u} & \dfrac{\partial \vartheta}{\partial v} & \dfrac{\partial \vartheta}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

L'intégrale double générale de première espèce prend donc la forme

$$\begin{aligned} \iint \lambda\, dv\, dw + \mu\, dw\, du + \nu\, du\, dv &= \iint \frac{dX\, dY}{S'_z} Q(X, Y, Z) \\ &= \iint \frac{dX\, dY}{H} \left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial w}\right), \end{aligned}$$

de là résulte que *la courbe générale du système canonique a pour équation*

$$F(u, v, w) = \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \nu \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = 0.$$

Il convient de remarquer que cette fonction $F(u, v, w)$ n'est pas une fonction thêta de trois variables indépendantes u, v, w; mais, lorsque u, v, w vérifient l'équation

$$\vartheta(u, v, w) = 0,$$

$F(u, v, w)$ satisfait aux mêmes relations fonctionnelles que la fonction $\vartheta(u, v, w)$, puisque ces relations sont de la forme

$$\vartheta(u + \text{pér.}, v + \text{pér.}, w + \text{pér.}) = e^{P(u, v, w)} \vartheta(u, v, w).$$

Les fonctions $\vartheta(u, v, w)$ et $F(u, v, w)$ sont d'ailleurs de parité contraire.

6. La famille des courbes L présente un intérêt particulier dans l'étude des surfaces S en raison de son caractère d'invariance, car deux surfaces S admettent manifestement une correspondance birationnelle.

En particulier, le genre $p^{(1)}$ des courbes C est un invariant (*Curvengeschlecht* d'après M. Nöther). Cet invariant se détermine de suite grâce au théorème suivant de M. Nöther :

Si l'on désigne par $p^{(2)}$ le degré du système canonique, c'est-à-dire le nombre de points d'intersection variables de deux courbes L *du système, on a*

$$p^{(1)} = p^{(2)} + 1.$$

Dans le cas actuel $p^{(2)}$ se déduit du nombre des solutions non fixes communes aux trois équations

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \mu_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \nu_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = 0 \\ \lambda_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \mu_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \nu_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial w} = 0 \end{aligned}\right. \qquad [\vartheta(u, v, w) = 0].$$

Or, ces fonctions satisfaisant sur la surface aux équations fonctionnelles d'une fonction ϑ du premier ordre, le théorème de M. Poincaré sur le nombre des solutions communes à trois fonctions thêta leur est applicable; d'après ce théorème, trois fonctions thêta de genre trois, d'ordre m, n, p, ont $6 \times m \times n \times p$ solutions communes; soit, dans le cas actuel, six solutions. Celles-ci sont, deux à deux, égales et de signe contraire et, par suite, il leur correspond trois points de la surface. Ces équations n'ont, d'ailleurs, pas de solution commune fixe, car une telle solution annulerait à la fois

$$\vartheta(u, v, w), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial u}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial w}.$$

Donc *le degré du système canonique $p^{(2)}$ est égal à* 3 *et le genre $p^{(1)}$ de la courbe générale* L *est égal à* 4 (¹).

7. Les surfaces adjointes d'ordre $m - 4$ dépendant de deux para-

(¹) Le théorème de M. Nöther suppose que les surfaces adjointes ne passent pas toutes par certains points ou lignes simples de la surface. C'est ce que nous vérifierons un peu plus loin pour les surfaces S par un exemple particulier.

mètres, il en existe une infinité qui sont tangentes à la surface en un point; celles-ci découpent une famille simplement infinie de courbes de genre trois. Nous nous proposons d'établir que cette famille joue un rôle essentiel au point de vue du lien qui rattache la surface S à la courbe plane du quatrième ordre C dont dérivent les fonctions abéliennes $\Phi(u, v, w)$.

A cet effet, considérons les équations fondamentales

$$G_1(x) + G_1(x') = u,$$
$$G_2(x) + G_2(x') = v,$$
$$G_3(x) + G_3(x') = w$$

qui entraînent entre u, v, w la relation.

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0.$$

Supposons que le point (x, y) décrive la courbe C, alors que le point (x', y') reste fixe, $(x' = x'_0, y' = y'_0)$; dans ce cas, u, v, w représentent, à une constante près, les intégrales de première espèce $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ attachées à C.

D'ailleurs, la courbe C étant du quatrième ordre, on peut prendre pour $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$ les intégrales

$$\int_{x_0}^{x} g_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{x}{f'_y}\,dx,$$
$$\int_{x_0}^{x} g_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y}{f'_y}\,dx,$$
$$\int_{x_0}^{x} g_3(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{f'_y}\,dx.$$

Dans cette hypothèse, u, v, w sont liés par une deuxième relation qu'il est aisé d'expliciter; si l'on pose, en effet,

$$u' = u + \int_{x'_0}^{\xi} g_1(x)\,dx = G_1(x) + G_1(\xi),$$
$$v' = v + \int_{x'_0}^{\xi} g_2(x)\,dx = G_2(x) + G_2(\xi),$$
$$w' = w + \int_{x'_0}^{\xi} g_3(x)\,dx = G_3(x) + G_3(\xi),$$

u', v', w' vérifient manifestement l'équation

$$\mathfrak{S}(u', v', w') = 0.$$

On a donc, quel que soit ξ,

$$\mathfrak{S}\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_1(x)\,dx,\ v + \int_{x'_0}^{\xi} g_2(x)\,dx,\ w + \int_{x'_0}^{\xi} g_3(x)\,dx\right] = 0;$$

d'où, en dérivant cette équation par rapport à ξ,

$$\begin{aligned} g_1(\xi)\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{S}&\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_1(x)\,dx, \ldots\right] \\ + g_2(\xi)\frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{S}&\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_2(x)\,dx, \ldots\right] \\ + g_3(\xi)\frac{\partial}{\partial w}\mathfrak{S}&\left[u + \int_{x'_0}^{\xi} g_3(x)\,dx, \ldots\right] = 0 \end{aligned}$$

et, en faisant $\xi = x'_0$,

$$x'_0 \frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{S}(u, v, w) + y'_0 \frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{S}(u, v, w) + \frac{\partial}{\partial w}\mathfrak{S}(u, v, w) = 0.$$

Telle est la relation cherchée entre u, v, w.

Cette équation définit sur la surface S une courbe $\mathfrak{L}$ dont les points répondent aux couples de C formés du point fixe $A_0(x'_0, y'_0)$ et d'un point variable (x, y). De cette définition il résulte que les courbes $\mathfrak{L}$ et C se correspondent point par point.

La courbe $\mathfrak{L}$ est une courbe particulière du système canonique, car son équation est de la forme

$$\lambda\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial u} + \mu\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial v} + \nu\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial w} = 0,$$

λ, μ, ν vérifiant l'équation homogène de la courbe C,

$$f(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

Lorsque le point (x, y) décrit la courbe C, le point (u, v, w) décrit la courbe $\mathfrak{L}$ sur la surface S. Considérons la tangente au point A_0 à la courbe C qui coupe de nouveau cette courbe en deux points A_1, A_2; aux couples (A_0, A_1) et (A_0, A_2) répond un seul et même point α de la surface; mais en ce point passent deux branches de la courbe $\mathfrak{L}$ qui correspondent respectivement aux positions de (x, y) voisines de A_1 et à celles voisines de A_2. Les courbes $\mathfrak{L}$ sont donc les courbes du système canonique qui possèdent un point double.

Nous parvenons ainsi au théorème suivant :

La condition $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ *qui exprime que la surface adjointe d'ordre* $m - 4$

$$\lambda Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu Q_2(x_1, \ldots, x_4) + \nu Q_3(x_1, \ldots, x_4) = 0$$

est tangente à S, *est une équation algébrique de genre trois, et c'est précisément de la courbe* $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ *que dérivent les fonctions abéliennes* $\Phi(u, v, w)$ *qui définissent la représentation paramétrique de la surface* $S(u, v, w)$.

Les surfaces adjointes d'ordre $m - 4$ *qui sont tangentes à* S *découpent sur cette surface une famille simplement infinie de courbes de genre trois et de mêmes modules; ces modules sont ceux de la courbe fondamentale* $f(\lambda, \mu, \nu) = 0$ (¹).

8. Ces théorèmes permettent de préciser la correspondance géométrique entre la surface $S(u, v, w)$ et le plan de la courbe C.

A toute courbe $\mathfrak{L}$ tracée sur la surface correspond un point de la courbe C.

Plus généralement, à l'adjointe générale L ayant pour équation

$$\lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0$$

(¹) M. Humbert a établi les propriétés précédentes pour une surface particulière $S(u, v, w)$ (*Comptes rendus*, 1er semestre 1895). Dès lors, elles s'étendent à toute surface analogue en raison de leur caractère d'invariance. Sa démonstration est fondée sur d'élégantes propriétés géométriques de cette surface; mais, en raison même de la généralité de ces théorèmes, il n'était peut-être pas sans intérêt d'en donner une démonstration analytique.

correspond, dans le plan de la courbe C, le point de coordonnées homogènes λ, μ, ν, en ce sens que les points de la surface situés sur la courbe L sont définis par les couples de points (M, M′) de C situés sur une sécante variable passant par le point (λ, μ, ν). En effet, la droite qui joint les couples de points (M, M′) enveloppe une courbe algébrique; soit ρ la classe de cette courbe. Évaluons, en fonction de ρ, le nombre de points d'intersection de L avec une autre courbe L′ du système canonique; nous avons à prendre les tangentes communes à deux courbes de classe ρ, au nombre de ρ^2, et chacune d'elles coupe C en quatre points que l'on peut répartir de trois manières en deux couples (M, M′). Dès lors, les courbes L, L′ de la surface se coupent en $3\rho^2$ points et, comme le degré du système canonique est égal à 3, on a nécessairement $\rho = 1$. Les points de la courbe L répondent donc aux couples de points C découpés par une sécante qui tourne autour d'un point fixe.

Si la courbe L décrit sur la surface S un faisceau linéaire, son point représentatif (λ, μ, ν) décrit dans le plan une droite Δ : aux trois points-bases du faisceau correspondent les trois répartitions en deux couples des quatre points d'intersection de Δ et de C. Si l'on désigne par u_0, v_0, w_0 les arguments de l'un quelconque des trois points-bases, les coordonnées a, b, c de la droite Δ

$$a\lambda + b\mu + c\nu = 0$$

sont proportionnelles à

$$\frac{\partial}{\partial u}\mathfrak{S}(u_0, v_0, w_0), \quad \frac{\partial}{\partial v}\mathfrak{S}(u_0, v_0, w_0), \quad \frac{\partial}{\partial w}\mathfrak{S}(u_0, v_0, w_0).$$

De cette correspondance découle le théorème suivant :

Tout faisceau linéaire de surfaces adjointes à la surface S *comprend quatre surfaces tangentes à* S; *à chacune des trois répartitions en deux couples de ces quatre surfaces correspond un point bien déterminé m parmi les trois points bases du faisceau.*

9. Nous considérerons enfin deux courbes de la surface S qui sont liées à la famille des courbes $\mathfrak{L}$; l'une, L_a, est le lieu de leur point double a; l'autre, L_b, est le lieu du point b commun à toutes les adjointes passant par le point a.

Ces courbes ont une représentation simple sur le plan (λ, μ, ν); considérons une tangente variable de la courbe C et désignons par o le point de contact et par 1, 2 les autres points d'intersection; d'après les considérations précédentes, aux couples (o, 1), (o, 2) correspond le point double a et aux couples (o, o), (1, 2) correspond le point b. La courbe L_b est donc définie par les relations

$$u = 2G_1(x),$$
$$v = 2G_2(x),$$
$$w = 2G_3(x);$$

d'où l'on déduit de suite :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{S}(u, v, w) = 0, \\ \mathfrak{S}\left(\frac{u}{2}, \frac{v}{2}, \frac{w}{2}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Quant à l'équation de la courbe L_a, elle peut s'obtenir directement de la manière suivante : soit

$$F(u, v, w) = \lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0$$

l'équation d'une courbe $\mathfrak{L}$ à point double; les arguments de ce point double u, v, w vérifient les équations suivantes :

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,$$
$$F(u, v, w) = 0,$$
$$\frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}}{\frac{\partial F}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}}{\frac{\partial F}{\partial w}};$$

ou, en développant les trois dernières équations,

$$\begin{aligned}
&\lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0,\\
&\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial v} + \nu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial w} + \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} = 0,\\
&\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial v} + \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2} + \nu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\, \partial w} + \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} = 0,\\
&\lambda \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial w} + \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\, \partial w} + \nu \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial w^2} + \rho \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0.
\end{aligned}$$

Ces relations entraînent, puisque λ, μ, ν, ρ ne sont pas tous nuls,

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial v} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial w} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}\\
\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial v} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\, \partial w} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}\\
\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial u\, \partial w} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial v\, \partial w} & \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial w^2} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}\\
\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation de la courbe C. On vérifie aisément, en vertu de la relation $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$, que cette fonction satisfait aux équations fonctionnelles d'une fonction thêta paire, d'ordre quatre, de caractéristique nulle et qu'elle admet pour zéros doubles les 28 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}$.

Définition analytique d'une surface S d'ordre six.

10. Avant de définir la surface particulière $S(u, v, w)$ qui fait l'objet de la seconde Partie de ce travail, il convient de rappeler quelques propriétés des fonctions thêta de genre trois. Soit un Tableau normal de périodes :

$$\begin{matrix}
2\pi i, & 0, & 0, & a, & b, & c,\\
0, & 2\pi i, & 0, & b, & d, & e,\\
0, & 0, & 2\pi i, & c, & e, & h;
\end{matrix}$$

on appelle *fonction thêta normale, d'ordre m*, une fonction uniforme, entière, de u, v, w, vérifiant les relations

$$\begin{aligned}
\Theta(u+2\pi i, v, w) &= e^{\varepsilon_1 \pi i}\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u, v+2\pi i, w) &= e^{\varepsilon_2 \pi i}\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u, v, w+2\pi i) &= e^{\varepsilon_3 \pi i}\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u+a, v+b, w+c) &= e^{\eta_1 \pi i}\, e^{-mu-m\frac{a}{2}}\,\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u+b, v+d, w+e) &= e^{\eta_2 \pi i}\, e^{-mv-m\frac{d}{2}}\,\Theta(u, v, w),\\
\Theta(u+c, v+e, w+h) &= e^{\eta_3 \pi i}\, e^{-mw-m\frac{h}{2}}\,\Theta(u, v, w),
\end{aligned}$$

ε_1, ε_2, ε_3, η_1, η_2, η_3 désignant o ou 1. L'ensemble des six nombres

$$\begin{matrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3, \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \end{matrix}$$

est dit *la caractéristique de la fonction thêta;* la caractéristique est dite *nulle* si les six nombres sont nuls.

D'après cela, pour tout ordre m, il y a 64 caractéristiques différentes, c'est-à-dire 64 systèmes de fonctions thêta normales; en particulier, il y a 64 fonctions thêta normales d'ordre *un*, $\vartheta(u, v, w)$. Parmi ces fonctions, 36 sont paires et 28 sont impaires; chacune s'annule pour 28 demi-périodes, c'est-à-dire pour 28 systèmes de valeurs de u, v, w compris dans les formules

$$\begin{aligned}
u &= l\pi i + p\frac{a}{2} + q\frac{b}{2} + r\frac{c}{2},\\
v &= m\pi i + p\frac{b}{2} + q\frac{d}{2} + r\frac{e}{2},\\
w &= n\pi i + p\frac{c}{2} + q\frac{e}{2} + r\frac{h}{2}\\
&(l, m, n, p, q, r = 0 \text{ ou } 1).
\end{aligned}$$

M. Humbert a fait connaître un algorithme qui établit un lien entre les 64 fonctions ϑ et les demi-périodes qui annulent chacune d'elles. Nous en ferons un fréquent usage dans la suite.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$; $\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta''$ trois séries de quatre caractères; les 64 symboles $\alpha\alpha'\alpha''$ représenteront les 64 fonctions thêta normales d'ordre *un* et les 64 symboles $(\alpha\alpha'\alpha'')$ représenteront les 64 demi-périodes, de telle sorte :

1° Que les 28 demi-périodes annulant la fonction $\alpha\alpha'\alpha''$ soient représentées par les symboles $(pp'p'')$, où les caractères α, α', α'' figurent au total un nombre impair de fois;

2° Que les 28 fonctions qui s'annulent pour la demi-période $(\alpha\alpha'\alpha'')$ soient également représentées par les symboles $pp'p''$, où les caractères α, α', α'' figurent, au total, un nombre impair de fois.

L'algorithme jouit des propriétés suivantes :

Considérons le produit de fonctions thêta normales, d'ordre *un*, en nombre pair, telles que $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, ...; écrivons à la suite les uns des autres les caractères qui entrent dans les symboles de ces fonctions et traitons cette expression comme un produit algébrique; elle sera de la forme

$$\alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m\alpha'^{h'}\ldots\alpha''^{h''}\ldots\delta''^{m''}.$$

Si les exposants h, k, l, m sont entre eux de même parité, ainsi que les exposants h', k', l', m' et les exposants h'', k'', l'', m'', le produit des fonctions thêta considérées (produit qui est évidemment une fonction thêta normale) aura sa caractéristique nulle.

De plus, si la somme $h+h'+h''$ est paire, ce produit sera une fonction paire de u, v, w.

11. Pour définir la surface S, on considère les fonctions $\Theta(u, v, w)$ normales, de caractéristique nulle, du second ordre et paires; elles sont au nombre de huit linéairement indépendantes, parmi lesquelles ϑ^2, en désignant par $\vartheta(u, v, w) = 0$ la relation fondamentale que u, v, w sont toujours supposés vérifier. On peut donc déterminer *quatre* fonctions $\Theta(u, v, w)$ non identiquement nulles, linéairement indépendantes et s'annulant [nécessairement à l'ordre deux (¹)] pour trois demi-périodes p arbitrairement choisies.

(¹) Supposons, en effet, que cette demi-période p soit $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$;

Ceci posé, la surface $S(u, v, w)$ est définie paramétriquement par les équations

$$x_i = \Theta_i(u, v, w) \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les trois demi-périodes p seront choisies parmi celles qui annulent $\mathfrak{S}$; mais on reconnaît par l'algorithme qu'il existe deux types distincts de groupes de trois demi-périodes : dans le premier cas, elles annulent toutes trois six fonctions thêta du premier ordre; dans le second cas, elles en annulent quatre. Nous examinerons exclusivement le premier cas qui conduit à des résultats beaucoup plus symétriques. Pour fixer les idées, les trois demi-périodes seront désignées par les symboles

$$\begin{array}{lcl} (\alpha\alpha'\alpha'') & \text{ou} & p_\alpha, \\ (\alpha\alpha'\beta'') & \text{ou} & p_\beta, \\ (\alpha\alpha'\gamma'') & \text{ou} & p_\gamma \end{array}$$

et l'équation fondamentale $\mathfrak{S}(u, v, w)$ sera notée $\alpha\beta'\delta''$ ou pour abréger simplement par $\mathfrak{S}$.

12. Le degré de la surface est égal au nombre des solutions non fixes communes aux trois équations

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(u, v, w) &= 0, \\ a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4 &= 0, \\ b_1\Theta_1 + b_2\Theta_2 + b_3\Theta_3 + b_4\Theta_4 &= 0, \end{aligned}$$

les a et b étant des constantes arbitraires. D'après le théorème de M. Poincaré, ces trois équations ont $6 \times 2 \times 2 \times 1 = 24$ solutions communes, parmi lesquelles figurent les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ qui comptent chacune pour quatre solutions. Les autres solutions, au nombre de $24 - 12 = 12$, sont deux à deux égales et de signe contraire, en sorte qu'il ne leur correspond que $\frac{1}{2}12 = 6$ points sur la surface S.

La surface S *est donc du sixième ordre.*

---

les fonctions étant paires, si le point p est un zéro, il est nécessairement un zéro double.

13. Aux 28 demi-périodes qui annulent $\mathfrak{S}$ correspondent sur la surface des lignes et des points remarquables.

Aux trois demi-périodes annulant à la fois $\mathfrak{S}$ et les quatre fonctions Θ_i correspondent trois *unicursales singulières*, lesquelles sont des coniques, puisque p_α, p_β, p_γ sont des zéros doubles pour les fonctions Θ_i.

Aux 25 autres demi-périodes annulant $\mathfrak{S}$ et non les Θ_i répondent sur la surface S *vingt-cinq points doubles :* supposons, en effet, que l'une des demi-périodes soit $u = v = w = 0$; les fonctions Θ_i ne s'annulant pas pour $u = v = w = 0$ et étant paires, on aura, aux environs de $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$,

$$\Theta_i = a_i + (A_i u^2 + B_i v^2 + C_i w^2 + D_i uv + E_i vw + F_i wu) + \ldots,$$

d'où l'on conclut aisément qu'une droite menée par le point $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ de la surface S a, avec celle-ci, deux intersections confondues au point considéré.

Courbe double de la surface S.

14. Les surfaces adjointes à S sont des quadriques dépendant de deux paramètres : la surface possède donc nécessairement une courbe ou des points multiples. Ce sont ces courbes que nous étudierons tout d'abord.

Il a été établi que la courbe mobile d'intersection de la surface S par une adjointe a pour équation

$$F(u, v, w) = \lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} = 0.$$

La fonction F ne s'annule, en général, pour aucune demi-période, mais on peut disposer des paramètres $\frac{\lambda}{\nu}$, $\frac{\mu}{\nu}$, de manière qu'elle s'annule pour deux demi-périodes p_i, p_j choisies par exemple parmi celles qui annulent $\mathfrak{S}$. Dans ce cas, chacune d'elles est pour la fonction F un zéro double. Supposons, en effet, pour fixer les idées, que p_i désigne la période $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, ce qui implique que la fonction $\mathfrak{S}$ est impaire : il résulte de là que F est une fonction paire et ne peut s'annuler pour p_i qu'à l'ordre deux. Nous désignerons

Par F_α la fonction F qui s'annule pour p_β et p_γ,
» F_β » » p_γ et p_α,
» F_γ » » p_α et p_β.

Ceci posé, les produits $F_\alpha F_\beta$, $F_\beta F_\gamma$, $F_\gamma F_\alpha$ satisfont [lorsqu'on suppose u, v, w liés par la relation $\mathfrak{S}(u, v, w) = 0$] aux mêmes relations fonctionnelles que les fonctions Θ_i et nous pouvons dès lors prendre pour fonctions coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 &= F_\beta F_\gamma, \\ x_2 &= F_\gamma F_\alpha, \\ x_3 &= F_\alpha F_\beta, \\ x_4 &= \Theta_4(u, v, w). \end{aligned}$$

15. Considérons le plan variable $x_3 + \rho x_2 = 0$: il coupe la surface suivant la courbe fixe $F_\alpha = 0$ et suivant la courbe variable $F_\beta + \rho F_\gamma = 0$. Or, cette dernière fonction est, sur la surface S, une fonction thêta d'ordre *un* s'annulant au second ordre pour la demi-période p_α, d'où l'on déduit que le degré de la courbe est égal à

$$\tfrac{1}{2}(6 \times 2 \times 1 \times 1 - 2 \times 2) = 4.$$

Il en résulte nécessairement que la droite D_α, commune aux plans $x_3 + \rho x_2 = 0$, est une droite double de la surface. Il en serait de même pour les droites $x_3 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; ces trois droites doubles passent toutes trois par le sommet $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ du tétraèdre de référence.

Donc, *la surface* S *possède trois droites doubles* D_α, D_β, D_γ *concourantes; leur point de concours est un point triple de la surface.*

Les coniques singulières répondant aux demi-périodes p_α, p_β, p_γ sont situées respectivement dans les faces du trièdre formé par les droites doubles. En effet, l'équation du plan de la conique p_α

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = \Theta_\alpha(u, v, w) = 0$$

s'obtient en déterminant les constantes $\frac{a_1}{a_4}$, $\frac{a_2}{a_4}$, $\frac{a_3}{a_4}$, de manière que la fonction Θ_α admette p_α comme zéro d'ordre de multiplicité supérieur à deux. Dès lors

$$\Theta_\alpha = F_\beta F_\gamma = x_1.$$

16. Il est intéressant de préciser la représentation analytique des points multiples de la surface. Considérons un plan arbitraire

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = \Theta(u, v, w) = 0$$

et cherchons son point d'intersection avec la droite double D_α. Les fonctions $\mathfrak{S}$, F_α, Θ ont, en dehors des demi-périodes p_β, p_γ,

$$(6 \times 1 \times 1 \times 2 - 2 \times 2 \times 2) = 4$$

solutions communes, deux à deux égales et de signe contraire. Ces deux systèmes de valeurs des arguments

$$(\pm u', \pm v', \pm w'), \quad (\pm u'', \pm v'', \pm w'')$$

définissent le même point de la droite double, considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre nappe de la surface.

On obtient le point triple en considérant les solutions communes aux équations $\mathfrak{S} = 0$, $F_\beta = 0$, $F_\gamma = 0$; en dehors de la demi-période p_α, elles ont $(6 \times 1 \times 1 \times 1 - 2 \times 2) = 2$ solutions communes; désignons-les par $(\pm u_\alpha, \pm v_\alpha, \pm w_\alpha)$; soient de même $(\pm u_\beta, \pm v_\beta, \pm w_\beta)$ et $(\pm u_\gamma, \pm v_\gamma, \pm w_\gamma)$ les solutions communes respectivement aux équations $\mathfrak{S} = 0$, $F_\gamma = 0$, $F_\alpha = 0$ et aux équations $\mathfrak{S} = 0$, $F_\alpha = 0$, $F_\beta = 0$. Ces trois systèmes de valeurs des paramètres définissent les trois nappes de la surface qui se coupent au point triple.

17. Les quadriques adjointes à la surface S sont nécessairement des cônes du second ordre ayant pour sommet le point triple et contenant les trois droites doubles. Effectivement la fonction

$$F_\alpha F_\beta F_\gamma \left(\lambda \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} + \mu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} + \nu \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}\right)$$

est, sur la surface, une fonction thêta d'ordre quatre, de caractéristique nulle, paire et s'annulant à l'ordre quatre pour les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ, ce qui prouve qu'elle représente l'intersection complète de la surface S par une quadrique.

En effet, il existe $\frac{4^2+8}{2} = 36$ fonctions thêta paires, d'ordre quatre, de caractéristique nulle, linéairement distinctes; il faut en déduire les $\frac{3^2+1}{2} = 14$ produits de ϑ par une fonction thêta, d'ordre trois, de même parité et de même caractéristique que ϑ. Parmi ces fonctions on peut donc en former $36 - 14 - 3 \times 4 = 10$ qui s'annulent à l'ordre quatre pour les trois demi-périodes. C'est précisément le nombre des termes du polynome homogène du second degré en x_1, x_2, x_3, x_4. Donc une telle fonction peut s'exprimer par un polynome homogène du second degré en x_1, x_2, x_3, x_4.

18. Deux cônes adjoints quelconques se coupent, en dehors des droites doubles, suivant une droite D passant par le point triple; et ceci précise la correspondance entre la courbe plane C du quatrième ordre et la surface considérée S. Aux trois répartitions en deux couples des quatre points d'intersection de C avec une droite Δ répondent trois points de la surface en ligne droite avec le point triple. A toute droite Δ du plan de la courbe C correspond ainsi une droite D de l'espace menée par le point triple et réciproquement.

La courbe L_a, lieu géométrique des points de contact des surfaces adjointes tangentes à S (n° **9**), est, dans le cas actuel, la courbe de contact du cône circonscrit à S et ayant le point triple pour sommet. La courbe L_b est l'intersection résiduelle de ce cône par la surface.

Ce cône circonscrit est, comme le montre aisément la Géométrie analytique, un cône d'ordre dix-huit admettant les droites D comme droites multiples d'ordre huit. Il existe une correspondance univoque entre les génératrices de ce cône et les tangentes à la courbe fondamentale C.

Sur les courbes définies par les fonctions thêta du premier ordre.

19. Les 63 fonctions thêta du premier ordre autres que $\vartheta = 0$ définissent sur S des courbes intéressantes; leur étude se fait aisément au moyen de l'algorithme du n° **10** et elle nous conduira à une définition et à une génération géométriques de la surface S.

Chacune de ces courbes est de genre un; en effet, toute fonction normale du premier ordre $\mathfrak{S}_k$ se déduit de $\mathfrak{S}$ (à un facteur exponentiel près) en augmentant u, v, w d'une demi-période et, par suite, aux points de la courbe $\mathfrak{S}_k = 0$ sur la surface correspondent sur la courbe plane C les couples (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) vérifiant les relations

$$G_1(x_1) + G_1(x_2) = G_1(x'_1) + G_1(x'_2) + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$G_2(x_1) + G_2(x_2) = G_2(x'_1) + G_2(x'_2) + \frac{\mathfrak{P}_2}{2},$$

$$G_3(x_1) + G_3(x_2) = G_3(x'_1) + G_3(x'_2) + \frac{\mathfrak{P}_3}{2}.$$

Désignons par x_3, x_4 les deux points de C en ligne droite avec x'_1, x'_2; les équations précédentes s'écrivent :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_j\, G_1(x_j) &= \frac{\mathfrak{P}_1}{2} \\ \Sigma_j\, G_2(x_j) &= \frac{\mathfrak{P}_2}{2} \\ \Sigma_j\, G_3(x_j) &= \frac{\mathfrak{P}_3}{2} \end{aligned}\right. \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

$\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ étant une période; ces relations établissent que les quatre points x_1, x_2, x_3, x_4 sont les points de contact de la courbe C avec une conique quadritangente. Chacune des courbes $\mathfrak{S}_k = 0$ correspond donc, point par tangente, à l'enveloppe des droites joignant deux à deux, sur C, les quatre points de contact des coniques inscrites d'un même système. Or ces droites enveloppent, ainsi qu'il est connu, une courbe générale de troisième classe et de genre un. *Les courbes* $\mathfrak{S}_k = 0$ *de la surface* S *sont donc de genre un* (¹).

Il convient de distinguer les 63 fonctions $\mathfrak{S}$ en quatre groupes,

---

(¹) Cette démonstration, due à M. Humbert (*Journal de Mathématiques*, 1896), a été reproduite ici pour la clarté de l'exposition.

suivant qu'elles s'annulent pour 3, 2, 1 ou 0 des trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ. Nous examinerons successivement ces différents cas.

Plans tangents singuliers de la surface S.

20. D'après le choix des périodes p_α, p_β, p_γ, il existe, en dehors de $\mathfrak{S}$, cinq fonctions thêta du premier ordre s'annulant pour ces trois demi-périodes. Elles répondent aux symboles suivants :

$$
\begin{array}{lll}
\alpha\gamma'\delta'' & \text{ou} & \mathfrak{S}_1, \\
\alpha\delta'\delta'' & \text{ou} & \mathfrak{S}_2, \\
\beta\alpha'\delta'' & \text{ou} & \mathfrak{S}_3, \\
\gamma\alpha'\delta'' & \text{ou} & \mathfrak{S}_4, \\
\delta\alpha'\delta'' & \text{ou} & \mathfrak{S}_5.
\end{array}
$$

La courbe $\mathfrak{S}_i = 0$ est de degré $\dfrac{6 \times 1 \times 1 \times 2 - 3 \times 1 \times 2}{2} = 3$; c'est une courbe plane, car la fonction $(\mathfrak{S}_i)^2$ peut s'exprimer par une combinaison linéaire et homogène de x_1, x_2, x_3, x_4 ; et le plan de cette cubique est tangent à la surface tout le long de cette courbe. Enfin la cubique n'a pas de point double, puisqu'elle est de genre un.

La surface S *admet donc cinq plans tangents singuliers le long d'une cubique.*

21. L'algorithme permet d'étudier simplement la répartition des vingt-cinq points doubles par rapport aux cinq plans tangents singuliers P_1, P_2, ..., P_5. Les vingt-cinq points doubles comprennent les *dix sommets du pentaèdre* formé par les cinq plans. En outre, chaque plan tangent singulier contient *trois* points doubles. Ainsi, le plan P_1 noté $\alpha\gamma'\delta''$ contient les trois points doubles

$$(\alpha\delta'\alpha''), \quad (\alpha\delta'\beta''), \quad (\alpha\delta'\gamma'').$$

Ces points seront dénommés $A_{\alpha,1}$, $A_{\beta,1}$, $A_{\gamma,1}$, l'un des indices se rapportant aux plans P_i, l'autre aux demi-périodes p_α, p_β, p_γ ou encore aux droites doubles D_α, D_β, D_γ. Il en serait de même pour les autres plans P_i.

Enfin, en dehors de ces points singuliers pour lesquels les tangentes à S forment un cône proprement dit, chaque plan P_i contient trois autres points doubles qui sont les traces des droites doubles. Ces points sont nécessairement des points-pince.

Quadriques circonscrites à la surface S.

22. A toute fonction $\mathfrak{S}$ qui s'annule pour deux des demi-périodes p_α, p_β, p_γ correspond une courbe gauche, d'ordre

$$\frac{6 \times 1 \times 1 \times 2 - 2 \times 2}{2} = 4$$

et de genre un, c'est-à-dire une biquadratique.

Le long de cette courbe on peut circonscrire à la surface S une quadrique qui la coupe en outre suivant deux des droites doubles; car, si la fonction $\mathfrak{S}$ s'annule pour p_β et p_γ, on établit, d'après un raisonnement déjà employé, que l'équation

$$(\mathfrak{S})^2 F_\beta F_\gamma = 0$$

représente l'intersection complète de S par une quadrique.

En vertu de l'algorithme, il existe *dix-huit* fonctions de ce type; parmi elles les *trois* fonctions

$$\begin{array}{ccc} \alpha\beta'\alpha'' & \text{ou} & Q_\alpha, \\ \alpha\beta'\beta'' & \text{ou} & Q_\beta, \\ \alpha\beta'\gamma'' & \text{ou} & Q_\gamma \end{array}$$

jouent un rôle particulier.

La biquadratique $Q_\alpha = 0$ ne contient aucun des sommets du pentaèdre, et elle passe par les dix points doubles

$$A_{\beta,i}, \quad \ldots, \qquad \text{et} \qquad A_{\gamma,i}, \quad \ldots, \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

On peut en déduire une conséquence géométrique intéressante : la biquadratique $Q_\alpha = 0$ perce le plan P_i aux deux points doubles $A_{\beta,i}$, $A_{\gamma,i}$; d'ailleurs, elle ne saurait passer par la trace des droites doubles D sur le plan P_i, car, en raison du rôle symétrique joué par les plans P, elle passerait de même par les traces de D sur les quatre autres plans P. Elle est donc nécessairement tangente au plan P en un point simple de la surface, et la quadrique Q_α, circonscrite à la surface S le long de la biquadratique, est tangente au plan P_i en ce point.

En résumé, la quadrique Q_α contient les droites D_β, D_γ et elle est tangente aux cinq plans P_i. Il existe donc trois quadriques Q_α, Q_β, Q_γ (n'appartenant pas à un même faisceau) tangentes aux cinq plans P_i et aux plans du trièdre formé par les droites doubles; en d'autres termes :

Les cinq plans tangents singuliers forment avec les plans du trièdre des droites doubles un groupe de huit plans de Lamé.

D'ailleurs, ces huit plans ne sont soumis à aucune autre condition; ils déterminent, en effet, sans ambiguïté, la surface S (1). Or un groupe de Lamé dépend de vingt et un paramètres, soit, au point de vue projectif, six paramètres; c'est précisément le nombre des modules dont dépend la représentation paramétrique par les fonctions abéliennes.

Définition géométrique de la surface S.

23. La surface du sixième ordre $S(u, v, w)$ qui a été définie analytiquement possède trois droites doubles concourantes et cinq plans tangents singuliers : ces propriétés sont caractéristiques.

Soit, en effet, une surface du sixième ordre Σ jouissant de ces propriétés; désignons par $P_1, \ldots, P_5$ ses plans tangents singuliers et par Π_α, Π_β, Π_γ les faces du trièdre des droites doubles, et considérons le plan Π'_γ qui forme, avec les sept plans $P_1, P_2, \ldots, P_5$, Π_α et Π_β un groupe de Lamé.

Les huit plans $P_1, P_2, \ldots, P_5$, Π_α, Π_β, Π'_γ déterminent sans ambi-

(1) Les cubiques de contact de chaque plan singulier doivent passer, en effet, par les six sommets du quadrilatère complet découpé dans ce plan par les quatre autres plans singuliers, par les traces des droites *doubles* et par les points de contact des quadriques Q_α, Q_β, Q_γ.

guïté une surface $S(u, v, w)$ définie au moyen des fonctions abéliennes $\Phi(u, v, w)$. Je dis que S coïncide avec Σ et, par suite, Π'_γ avec Π_γ.

Les coniques C_α, Γ_α suivant lesquelles le plan Π_α coupe les surfaces S et Σ, en dehors des droites doubles, coïncident, puisqu'elles sont tangentes toutes deux aux traces des cinq plans $P_1, \ldots, P_5$, et il en est de même pour les coniques C_β, Γ_β situées dans le plan Π_β. D'autre part, chacun des plans P_i coupe les surfaces S et Σ suivant deux cubiques c_i, γ_i, lesquelles ont neuf points communs, savoir : six sommets du pentaèdre, la trace de la droite double D_γ, intersection des plans Π_α, Π_β, et les points de contact des coniques situés dans les plans Π_α et Π_β. Admettons provisoirement que ces neuf points ne forment pas la base d'un faisceau de cubiques; dès lors, les cubiques c_i et γ_i coïncident et l'on en déduit que les surfaces S et Σ sont confondues.

Pour établir que les neuf points ne sont pas la base d'un faisceau de cubiques, il suffit de remarquer que, dans cette hypothèse, dès que les six plans $P_1, \ldots, P_5$, Π_α seraient donnés, ainsi que la droite double D_γ, le plan Π_β serait parfaitement déterminé, devant passer par le neuvième point base du faisceau; or nous avons vu plus haut que les sept plans $P_1, P_2, \ldots, P_5, \Pi_\alpha, \Pi_\beta$ peuvent être pris arbitrairement. C. Q. F. D.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Toute surface du sixième ordre qui possède trois droites doubles concourantes et cinq plans tangents singuliers est une surface $S(u, v, w)$, *c'est-à-dire qu'elle peut être associée à une courbe plane* C *d'ordre quatre de telle façon qu'à un point de la surface correspondent deux couples de points de* C *situés en ligne droite et réciproquement.*

Les cinq plans tangents singuliers et les plans du trièdre des trois droites doubles forment nécessairement un groupe de huit plans de Lamé.

24. Nous présenterons une dernière remarque relative aux biquadratiques Q_α, Q_β, Q_γ et qui conduit à une forme simple de l'équation de la surface. Considérons le produit des quatre fonctions Q_α, Q_β, Q_γ, $\mathfrak{S}$

dont les symboles sont respectivement

$$\alpha\beta'\alpha'', \quad \alpha\beta'\beta'', \quad \alpha\beta'\gamma'', \quad \alpha\beta'\delta''.$$

En vertu de l'algorithme, c'est une fonction thêta impaire de caractéristique nulle; dès lors le produit $Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma$ est une fonction thêta d'ordre trois, de même caractéristique que ϑ, mais de parité contraire. D'après un théorème général qui sera établi plus loin, une telle fonction définit l'intersection de S par une surface adjointe d'ordre trois Σ_3.

De même que les quadriques Q_α, Q_β, Q_γ, la surface cubique Σ_3 est parfaitement déterminée dès que l'on se donne les huit plans P et Π, car elle contient les droites doubles D et les quinze points de contact des quadriques Q_α, Q_β, Q_γ avec les cinq plans P_i. Désignons par les mêmes lettres Q_α, ... les premiers membres des équations cartésiennes de ces surfaces.

Il résulte des considérations précédentes que l'équation de la surface S est de la forme

$$Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma - \Sigma_3^2 = 0.$$

Génération géométrique de la surface S.

25. En dehors des trois quadriques Q_α, Q_β, Q_γ, il en existe *quinze* autres également tangentes à la surface le long d'une biquadratique et passant par deux des droites doubles; leur étude conduit à une génération géométrique de la surface S.

Ces quadriques peuvent être dénommées $Q_{\alpha,i}$, $Q_{\beta,i}$, $Q_{\gamma,i}$, les indices α, β, γ correspondant aux droites doubles et les indices i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ aux plans singuliers P_i; si $pp'\delta''$ est le symbole de la fonction ϑ qui définit le plan P_i, la biquadratique $Q_{\alpha,i}$ est définie par l'équation

$$\vartheta_{pp'\alpha''} = 0.$$

On reconnaît aisément au moyen de l'algorithme que la biquadratique $Q_{\alpha,1}$, par exemple, passe par les quatre sommets du tétraèdre P_2, P_3, P_4, P_5, rencontre en outre ces plans aux points doubles $A_{\alpha,2}$, $A_{\alpha,3}$,

$A_{\alpha,4}$, $A_{\alpha,5}$ et qu'elle passe enfin par les deux points doubles $A_{\beta,1}$, $A_{\gamma,1}$ situés dans le plan P_1.

26. On peut considérer le plan P_i et la quadrique $Q_{\alpha,i}$ comme formant une surface cubique dégénérée circonscrite à la surface S. Nous nous proposons de démontrer que les cinq surfaces

$$(P_i, Q_{\alpha,i}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

appartiennent à une famille de surfaces cubiques inscrites à la surface S.

A cet effet, remarquons que le produit des quatre fonctions P_1, $Q_{\alpha,1}$, P_2, $Q_{\alpha,2}$ dont les symboles sont respectivement

$$\alpha\gamma'\delta'', \quad \alpha\gamma'\alpha'', \quad \alpha\delta'\delta'', \quad \alpha\delta'\alpha''$$

est une fonction paire et de caractéristique nulle; de plus il admet les demi-périodes p_β, p_γ comme zéros d'ordre quatre et p_α comme zéro d'ordre deux. D'autre part, le produit $F_\beta F_\gamma$ est, sur la surface, une fonction thêta, paire, d'ordre deux et de caractéristique nulle, admettant p_α comme zéro d'ordre quatre et p_β, p_γ comme zéros d'ordre deux. On en déduit par un raisonnement employé déjà à plusieurs reprises que l'équation

$$P_1 Q_{\alpha,1} P_2 Q_{\alpha,2} F_\beta F_\gamma = 0$$

représente l'intersection complète de la surface S par une surface cubique T_3 et, par suite, que l'équation de la surface S est de la forme

$$\text{(E)} \qquad S = (P_1 Q_{\alpha,1})(P_2 Q_{\alpha,2}) - T_3^2 = 0,$$

en désignant par $P_1 = 0$, ..., $T_3 = 0$ les équations cartésiennes des surfaces correspondantes.

Cette équation met en évidence que la *surface* S *est l'enveloppe de la famille de surfaces cubiques*

$$(\alpha) \qquad \Sigma_\alpha = \rho^2(P_1 Q_{\alpha,1}) + 2\rho T_3 + (P_2 Q_{\alpha,2}) = 0,$$

ρ désignant un paramètre variable. Il existe trois familles analogues Σ_α, Σ_β, Σ_γ.

La famille des surfaces cubiques inscrites Σ_α comprend comme dégénérescences les cinq surfaces formées respectivement du plan P_i et de la quadrique $Q_{\alpha,i}$.

L'équation abélienne de la courbe de contact de la surface Σ_α est

$$\rho\,\vartheta_{\alpha\gamma'\delta''}\vartheta_{\alpha\gamma'\alpha''}+\vartheta_{\alpha\delta'\delta''}\vartheta_{\alpha\delta'\alpha''}=0.$$

27. De l'équation (E) on peut déduire des conséquences géométriques. La surface T_3 contient les droites doubles D_β, D_γ, mais non la droite D_α; elle coupe donc celle-ci en deux points m et n en dehors du point triple de la surface S. D'après l'équation (E) ces points m, n coïncident avec les points d'intersection de D_α avec les plans P_1, P_2 et les quadriques $Q_{\alpha,1}$, $Q_{\alpha,2}$; d'après des considérations de symétrie, l'un de ces points appartient à P_1 et $Q_{\alpha,1}$ et l'autre à P_2 et $Q_{\alpha,2}$.

Ceci posé, soit Σ_α une surface cubique quelconque de la famille (α); l'équation de la surface S peut se mettre sous la forme

$$S\equiv(P_1 Q_{\alpha,1})\Sigma_\alpha - T_3'^2=0.$$

La surface cubique T'_3 rencontre la droite D_α au point triple, au point m et en un troisième point s. Il résulte de l'identité précédente que la surface Σ_α a un point double en s.

En résumé, la surface cubique variable Σ_α est définie par les conditions suivantes : elle contient les droites D_β, D_γ, elle passe par les dix sommets du pentaèdre $P_1P_2\ldots P_5$ (car chacune des surfaces décomposées $P_iQ_{\alpha,i}$ passe par ces dix sommets); enfin, elle possède un point double situé sur la droite D_α. Bien qu'assujettie à dix-neuf conditions, elle dépend d'un paramètre, ce qui constitue un théorème :

Étant donnés huit plans de Lamé $P_1, \ldots, P_5$, Π_α, Π_β, Π_γ, *il existe une surface cubique, passant par les dix sommets du pentaèdre* $P_1, \ldots, P_5$, *contenant deux des arêtes du trièdre* Π_α, Π_β, Π_γ *et admettant pour point double un point quelconque s de la troisième arête* D; *quand le point s décrit cette arête, la surface cubique enveloppe la surface du sixième ordre* S *déterminée par le groupe de Lamé. Cette surface admet trois générations analogues.*

28. Ce théorème conduit à une forme élégante de l'équation de la surface S. Remarquons que la donnée des huit plans $P_1, \ldots, P_5, \Pi_\alpha, \Pi_\beta, \Pi_\gamma$ définit la quadrique $Q_{\alpha,i}$ par des conditions linéaires (car elle doit passer par les sommets du tétraèdre des quatre plans P autres que P_i et contenir les deux droites D_β, D_γ). Ceci posé, si l'on désigne par $F(X, Y, Z)$ le polynome

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2YZ - 2ZX - 2XY,$$

l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$F[(P_i Q_{\alpha,i}), (P_j Q_{\alpha,j}), (P_k Q_{\alpha,k})] = 0.$$

Il existe trente formes analogues.

29. Voici une dernière conséquence du théorème précédent. La surface inscrite variable Σ_α coupe le plan P_i suivant une cubique qui passe par huit points fixes ; à savoir les traces des droites D_β, D_γ et les six sommets du quadrilatère complet découpé par les quatre autres plans singuliers. Elle passe donc par un neuvième point qui n'est autre que le point double $A_{\alpha,i}$; de là une définition simple des points doubles A : le point $A_{\alpha,i}$ forme avec les traces, sur le plan P_i, des deux droites doubles D_β, D_γ et des six droites d'intersection des plans singuliers autres que P_i un groupe de neuf points bases d'un faisceau de cubiques.

Surfaces adjointes d'ordre trois et d'ordre quatre circonscrites à S.

30. On reconnaît au moyen de l'algorithme qu'il existe *trente* fonctions thêta du premier ordre s'annulant pour une des trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ ; elles définissent sur la surface S des courbes gauches de degré cinq et de genre un. Considérons l'une de ces fonctions, $\mathfrak{S}_{\alpha\alpha'\alpha''}$ par exemple, qui s'annule pour la demi-période $(\alpha\alpha'\alpha'')$ ou p_α. Le produit

$$(\mathfrak{S}_{\alpha\alpha'\alpha''})^2 F_\alpha^2 F_\beta F_\gamma$$

est une fonction thêta d'ordre six, de caractéristique nulle, paire, admettant les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ pour zéros d'ordre six, et l'on en conclut que l'on peut circonscrire à la surface S, le long de la quintique $\vartheta_{\alpha\alpha'\alpha''} = 0$, une surface cubique adjointe admettant D_α comme droite double.

Ces trente surfaces cubiques font partie de trente familles de surfaces cubiques inscrites qui se déduisent très simplement des trois familles Σ_α, Σ_β, Σ_γ précédemment définies. D'après l'équation

$$\text{(E)} \qquad S \equiv (P_i Q_{\alpha,i})(P_k Q_{\alpha,k}) - T_3^2 = 0,$$

on peut considérer la surface S comme l'enveloppe de la famille de surfaces cubiques

$$\rho^2(P_i Q_{\alpha,k}) + 2\rho T_3 + (P_k Q_{\alpha,i}) = 0.$$

On définit par cette voie trente familles analogues. Pour démontrer que les trente surfaces cubiques adjointes appartiennent respectivement à ces trente familles, il suffit de vérifier, par exemple, que le produit $(\vartheta_{\alpha\alpha'\alpha''} F_\alpha)$ a même caractéristique et même parité que les produits $(P_1 Q_{\alpha,2})$ et $(P_2 Q_{\alpha,1})$ et qu'il s'annule au même ordre de multiplicité pour les demi-périodes p_α, p_β, p_γ; c'est ce qu'on vérifie aisément en vertu des symboles de ces fonctions

$$\begin{aligned} &P_1 \;\, : \alpha\gamma'\delta'', &\qquad &P_2 \;\, : \alpha\delta'\delta'', \\ &Q_{\alpha,1} : \alpha\gamma'\alpha'', &\qquad &Q_{\alpha,2} : \alpha\delta'\alpha''; \end{aligned}$$

d'autre part F_α est de même caractéristique que $\vartheta_{\alpha\beta'\delta''}$ et de parité contraire.

31. Enfin les *dix* fonctions thêta du premier ordre qu'il nous reste à considérer ne s'annulent pour aucune des trois demi-périodes p; elles définissent sur la surface des courbes gauches de degré six et de genre un. Soit $\vartheta_{\alpha\alpha'\delta''}$ l'une de ces fonctions, l'équation

$$(\vartheta_{\alpha\alpha'\delta''})^2 F_\alpha^2 F_\beta^2 F_\gamma^2 = 0$$

représente l'intersection complète de S par une surface adjointe d'ordre quatre admettant les droites D_α, D_β, D_γ pour droites doubles.

Donc *il existe dix surfaces de Steiner adjointes à* S *et circonscrites à* S *le long d'une courbe gauche du sixième ordre.*

On reconnaît que ces dix surfaces correspondent aux combinaisons deux à deux des cinq plans tangents singuliers P_i; la surface (i, j) contient douze points doubles de la surface : à savoir les traces sur les plans P_i, P_j des arêtes du trièdre formé par les trois autres plans singuliers et les six points doubles A contenus dans les plans P_i, P_j.

Sections de la surface S par les surfaces adjointes.

32. La représentation paramétrique au moyen des fonctions abéliennes permet d'étudier assez simplement les courbes découpées sur la surface S par les surfaces adjointes d'ordre n.

Nous admettrons désormais pour fixer les idées que la fonction désignée jusqu'ici par $\vartheta(u, v, w)$ est la fonction thêta normale d'ordre un, de caractéristique nulle (cette fonction est paire).

Soit $\Sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation algébrique d'une surface adjointe d'ordre n et désignons par $\Sigma(u, v, w)$ ce que devient $\Sigma(x_1, \ldots, x_4)$ lorsqu'on y remplace $x_1, \ldots, x_4$ par leurs expressions en u, v, w

$$x_1 = F_\beta F_\gamma, \qquad x_2 = F_\gamma F_\alpha, \qquad x_3 = F_\alpha F_\beta, \qquad x_4 = \Theta_4.$$

$\Sigma(u, v, w)$ est [du moins lorsqu'on suppose $\vartheta(u, v, w) = 0$] une fonction thêta paire d'ordre $2n$, de caractéristique nulle et s'annulant à l'ordre $2n$ pour les trois demi-périodes p_α, p_β, p_γ. De plus, comme la surface $\Sigma(x, \ldots, x_4) = 0$ passe, par hypothèse, par les trois droites doubles D_α, D_β, D_γ, $\Sigma(u, v, w)$ contient en facteur le produit $F_\alpha F_\beta F_\gamma$, en sorte que

$$\Sigma(u, v, w) = F_\alpha F_\beta F_\gamma \, \sigma(u, v, w).$$

D'après cette relation même, $\sigma(u, v, w)$ est une fonction thêta impaire de caractéristique nulle, d'ordre $2n - 3$, admettant p_α, p_β, p_γ pour zéros d'ordre $2n - 4$.

Réciproquement, toute équation $\sigma(u, v, w) = 0$ de ce type définit l'intersection de la surface S par une surface adjointe d'ordre n. En effet, le polynome général $\Sigma(x_1, \ldots, x_4)$ homogène d'ordre n dépend de $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$ constantes; la condition de contenir les trois droites doubles de la surface S impose $3n+1$ conditions linéaires; enfin, si l'on désigne par $S(x_1, \ldots, x_4) = 0$ l'équation de la surface S, tout polynome de la forme

$$\Sigma = S(x_1, \ldots, x_4) K(x_1, \ldots, x_4),$$

K désignant un polynome d'ordre $n-6$, est identiquement nul sur la surface. En résumé, l'équation de la surface adjointe la plus générale d'ordre n dépend d'un nombre de paramètres homogènes égal à

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - \frac{(n-5)(n-4)(n-3)}{6} - (3n+1)\\ &= 3n^2 - 9n + 10.\end{aligned}$$

Évaluons, d'autre part, le nombre des fonctions $\sigma(u, v, w)$ linéairement distinctes et non identiquement nulles sur la surface S. Les fonctions thêta d'ordre $2n-3$, de caractéristique nulle et impaire, sont au nombre de $\frac{(2n-3)^3-1}{2}$; il faut en déduire les produits de $\mathfrak{S}$ par les fonctions d'ordre $2n-4$, de caractéristique nulle, impaires, au nombre de $\frac{(2n-4)^3-8}{2}$. Enfin, les fonctions $\sigma(u, v, w)$ doivent s'annuler à l'ordre $2n-4$ pour p_α, p_β, p_γ, ce qui impose $3(n-2)^2$ conditions linéaires. Le nombre des fonctions $\sigma(u, v, w)$ est donc

$$\psi(n) = \frac{(2n-3)^3-1}{2} - \frac{(2n-4)^3-8}{2} - 3(n-2)^2 = 3n^2 - 9n + 10.$$

L'égalité de $\varphi(n)$ et de $\psi(n)$ établit la réciproque annoncée. Donc :

Les courbes découpées sur la surface S par ses adjointes d'ordre n ont pour équation générale $\sigma(u, v, w) = 0$, en désignant par $\sigma(u, v, w)$ une fonction normale d'ordre $2n-3$, de caractéristique nulle, impaire et admettant les demi-périodes p_α, p_β, p_γ pour zéros d'ordre $2n-4$, et réciproquement.

33. En particulier, on peut supposer que $\sigma(u, v, w)$ est de la forme suivante :

$$\sigma(u, v, w) = F_\alpha^k F_\beta^k F_\gamma^l \tau(u, v, w).$$

Dans ce cas, l'équation $\tau(u, v, w) = 0$ définit l'intersection de S par une surface adjointe qui admet respectivement les droites D_α, D_β, D_γ comme droites multiples d'ordre $h+1$, $k+1$, $l+1$.

Nous considérerons spécialement les surfaces adjointes d'ordre $2n$ qui admettent les droites D_α, D_β, D_γ comme droites multiples d'ordre n. Voici le résultat :

Les courbes C_n découpées sur la surface S par les surfaces adjointes d'ordre $2n$ qui admettent les droites doubles de la surface pour droites multiples d'ordre n ont pour équation générale $\varphi_n(u, v, w) = 0$ en désignant par $\varphi_n(u, v, w)$ une fonction normale quelconque d'ordre n, de caractéristique nulle et de même parité que le nombre n, et réciproquement.

Sur le genre des courbes tracées sur la surface S.

34. Nous n'étudierons le genre des courbes tracées sur la surface que dans le cas particulier des courbes C_n, cas qui conduit aux résultats les plus simples.

Soit $\varphi(u, v, w) = 0$ l'équation d'une courbe C et désignons par X, Y, Z les coordonnées cartésiennes non homogènes d'un point de la courbe.

Nous chercherons tout d'abord à former *a priori* une différentielle abélienne de première espèce attachée à la courbe C. Soit $\chi(u, v, w)$ une fonction normale de même ordre, de même caractéristique et de même parité que $\varphi(u, v, w)$ et considérons l'intégrale

$$I = \int \frac{\chi(u, v, w)\dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}}{J(u, v, w)}\, du,$$

en posant

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Cette intégrale est une intégrale abélienne attachée à la courbe C;

en effet, on a sur cette courbe

$$\begin{aligned} dX &= \frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv + \frac{\partial X}{\partial w}dw, \\ 0 &= \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}du + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}dv + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}dw, \\ 0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w}dw; \end{aligned}$$

d'où

$$J(u, v, w)\,dX = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \end{vmatrix} du.$$

Dès lors, l'intégrale I peut s'écrire

$$I = \int \frac{\chi(u, v, w)\,dX}{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial u}}{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}} & \frac{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial v}}{\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}} & 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \varphi}{\partial w} \end{vmatrix}}.$$

Le dénominateur est de la forme

$$A\frac{\partial \varphi}{\partial u} + B\frac{\partial \varphi}{\partial v} + C\frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

A, B, C étant sur la courbe des fonctions abéliennes impaires de u, v, w, et l'intégrale I peut se mettre sous la forme

$$I = \int \frac{dX}{A\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}\chi - \frac{\partial \chi}{\partial u}\varphi}{\chi^2}\right) + \ldots},$$

puisque $\varphi(u, v, w) = 0$ sur la courbe C, ou enfin

$$I = \int \frac{dX}{A\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) + B\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) + C\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)}.$$

Cette forme met en évidence que le coefficient de dX est une fonction abélienne *paire* de u, v, w, donc une fonction rationnelle de X, Y, Z.

L'intégrale I est donc une intégrale abélienne appartenant à la courbe C et il en serait de même plus généralement de l'intégrale

$$I' = \int \frac{\psi(u, v, w)}{J(u, v, w)} du,$$

$\psi(u, v, w)$ désignant une fonction normale d'ordre $n+1$, de caractéristique nulle, mais de parité contraire à $\varphi(u, v, w)$, car le quotient

$$\frac{\psi}{\chi\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial w}}$$

est une fonction abélienne paire sur la surface S.

L'intégrale I' est de *première espèce :* en effet, u, v, w restent finis sur la courbe, dès lors l'intégrale ne saurait devenir infinie que dans le cas où $J(u, v, w)$ s'annule. Or, en vertu des équations

$$\mathfrak{S}(u, v, w) = 0,$$
$$\varphi(u, v, w) = 0,$$

on a sur la courbe

$$\frac{du}{\frac{D(\mathfrak{S}, \varphi)}{D(v, w)}} = \frac{dv}{\frac{D(\mathfrak{S}, \varphi)}{D(w, u)}} = \frac{dw}{\frac{D(\mathfrak{S}, \varphi)}{D(u, v)}}.$$

On en déduit que l'intégrale ne peut devenir infinie que pour des valeurs u, v, w annulant à la fois $\mathfrak{S}$, φ et les trois déterminants fonctionnels : un tel système définit un point double sur la courbe. Or la courbe générale d'une série linéaire C ne peut avoir de point double variable que sur la courbe double de la surface S, ce qui n'a pas lieu pour les courbes C_n, et, d'autre part, elles ne passent par aucun point fixe.

L'intégrale V est donc une intégrale abélienne de première espèce pour la courbe générale C_n.

35. Combien cette forme donne-t-elle d'intégrales linéairement distinctes? Pour fixer les idées, supposons n pair, la démonstration serait d'ailleurs analogue pour n impair. Dans ce cas, les fonctions $\psi(u, v, w)$ d'ordre $n+1$, de caractéristique nulle et impaires, non identiquement nulles sur la surface, sont au nombre de

$$\frac{(n+1)^3-1}{2}-\frac{n^3-8}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}+4;$$

mais parmi ces fonctions il en est trois identiquement nulles le long de la courbe : à savoir

$$\varphi\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial u},\quad \varphi\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial v},\quad \varphi\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial w}.$$

La formule donne donc

$$N=\frac{3n(n+1)}{2}+1$$

intégrales distinctes de première espèce.

On peut démontrer que ce sont bien là *toutes* les intégrales de première espèce de la courbe. D'après un théorème connu de M. Nöther, si l'on désigne par ν le nombre des points d'intersection variables de la courbe avec une de ses surfaces adjointes et par p le genre de cette courbe :

$$\nu=2(p-1).$$

Au cas actuel, ce nombre ν est le nombre des points d'intersection variables des courbes $\varphi=0$, $\chi=0$, ou encore la moitié du nombre des solutions communes aux équations

$$\varphi=0,\qquad \chi=0,\qquad \mathfrak{S}=0,$$

c'est-à-dire $\frac{6n(n+1)}{2}$; d'ailleurs ces équations n'ont aucune solution commune fixe. Dès lors

$$p = \frac{3n(n+1)}{2} + 1 = \mathrm{N}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous parvenons donc au théorème suivant :

La courbe générale C_n, *d'équation* $\varphi_n(u, v, w) = 0$, *découpée sur la surface* S *par une surface adjointe d'ordre* $2n$, *admettant les trois droites doubles de* S *comme droites multiples d'ordre* n, *est de genre*

$$p = \frac{3n(n+1)}{2} + 1$$

et ses intégrales abéliennes de première espèce sont de la forme

$$\int \frac{\varphi_{n+1}(u, v, w)}{\frac{D(\mathfrak{S}, \varphi)}{D(v, w)}} du,$$

en désignant par $\varphi_{n+1}(u, v, w)$ *une fonction normale quelconque d'ordre* $n+1$, *de caractéristique nulle et de même parité que le nombre* $n+1$.

En d'autres termes, la courbe générale C_{n+1} découpe sur une courbe C_n quelconque le groupe canonique de points G_{2p-2} le plus général.

Le cas où $n = 1$ correspond aux courbes L du système canonique; la formule $p = \frac{3n(n+1)}{2} + 1$ donne alors $p = 4$, ce que nous avions déjà établi. De plus, le groupe canonique G_{2p-2} est découpé sur la courbe L générale par les surfaces de Steiner qui admettent les mêmes droites doubles que la surface S considérée.

Le théorème précédent s'étend à toute surface S :

Sur toute surface S, *l'équation* $\varphi_n(u, v, w) = 0$, *où* φ_n *désigne la fonction thêta générale d'ordre* n, *de caractéristique nulle et de* *même parité que le nombre n, définit un système linéaire de courbes* C_n *qui jouit des propriétés suivantes :*

Il dépend de $\frac{3n(n-1)}{2}+3$ *paramètres* (¹), *son degré est égal à* $3n^2$ *et le genre de la courbe générale est égal à* $\frac{3n(n+1)}{2}+1$. *Enfin, les courbes* C_{n+1} *découpent sur toute courbe* C_n *le groupe canonique de points* G_{2p-2} *le plus général.*

(¹) Cette expression n'est pas valable pour $n=1$.