JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ARNAUD DENJOY

Sur les produits canoniques d'ordre infini

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 6 (1910), p. 1-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1910_6_6__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les produits canoniques d'ordre infini;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Depuis que M. Poincaré a énoncé son célèbre théorème sur la possibilité d'exprimer simultanément deux variables dont la correspondance est analytique par des fonctions uniformes et analytiques d'une même troisième, l'étude de la fonction multiforme la plus générale se trouve réduite à celle de deux types de fonctions particulièrement simples : les fonctions uniformes et les fonctions inverses de fonctions uniformes.

Ce n'est pas ici le lieu d'expliquer à quels problèmes précis se réduit l'étude simultanée d'une fonction uniforme y et de sa fonction inverse x. Qu'il me suffise de dire que ces problèmes, résolus au voisinage des points réguliers ou polaires relativement à y, ont leur solution presque inexistante si x est voisin d'un point essentiel, même isolé pour y.

Cependant, des résultats très importants ont été obtenus touchant le système des nombres x_0 correspondant à une même valeur de y_0, quand $y(x)$ ne possède qu'un point singulier essentiel qu'on peut supposer situé à l'infini. On a démontré dans ce dernier cas, relativement aux modules des nombres x_0, que la suite, supposée croissante, de ces modules a un ordre sensiblement indépendant de y_0.

C'est une propriété bien simple à établir que, si l'ensemble de toutes les singularités possibles d'une fonction multiforme ne morcelle pas le plan ([1]), le nombre des déterminations de la fonction est le même en tous les points réguliers pour chaque branche, si ce nombre est borné. Les points singuliers de la fonction x inverse de la fonction y supposée entière sont d'une part des points critiques algébriques en infinité dénombrable (comme ceux de toute fonction multiforme), et des points singuliers transcendants qui sont les valeurs vers lesquelles peut tendre la fonction entière y, quand la variable x suit un chemin convenablement choisi s'éloignant à l'infini. Si ces valeurs sont en infinité dénombrable, comme on tend à le penser, la fonction $x(y)$ multiforme est de celles dont toutes les singularités réunies ne morcellent pas le plan. Peut-on déduire de ceci, malgré l'infinité des branches de $x(y)$, une raison de la fréquence constante des valeurs x_0 correspondant à un nombre arbitraire y_0? Il est permis d'espérer que l'on trouvera par cette voie une lumineuse explication de ce fait remarquable. Je n'ai cependant pas engagé ma recherche dans cette direction, jugeant son succès douteux en l'état actuel de nos connaissances.

Désireux de préciser les résultats déjà connus sur cette question, j'ai utilisé le détour qui consiste à relier le plus étroitement possible la croissance du nombre n des zéros intérieurs à un cercle concentrique à l'origine, à celle du module maximum de la fonction sur ce même cercle. La croissance du module maximum de $y-y_0$ étant évidemment indépendante de y_0, la croissance du nombre n relatif à y_0 sera déterminée et indépendante de y_0 dans la mesure où la croissance d'une fonction entière détermine celle de ses zéros.

Le problème direct : *Connaissant le module r_n du $n^{ième}$ zéro a_n d'une fonction entière, en déduire les limites du module maximum de cette fonction*, a été résolu par MM. Boutroux et Lindelöf avec une extrême précision dans le cas où la suite r_n est de genre fini, où la série $\frac{1}{r_n^{p+1}}$ est convergente pour une certaine valeur entière de p. Je

([1]) Je dis qu'un ensemble ne morcelle pas le plan, si deux points quelconques n'appartenant pas à l'ensemble peuvent être joints par une ligne dont aucun point n'appartient à l'ensemble. Les ensembles dénombrables ne morcellent pas le plan.

me suis proposé d'atteindre la même précision dans le cas où la suite r_n est d'ordre infini, et j'y suis parvenu dans des cas très généraux.

La difficulté essentielle consistait à définir ce qu'il faut entendre par produits canoniques d'ordre infini, si l'on veut que de tels produits possèdent les propriétés essentielles des produits canoniques d'ordre fini. Voici la définition que j'ai proposée. Un produit

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}} = \prod_1^\infty E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

sera dit *canonique* si, $e^{\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)}$ étant le maximum du module du $n^{\text{ième}}$ facteur sur le cercle $|z| = r$, la série

$$\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = P(r)$$

est une fonction de r telle qu'il n'y ait pas possibilité de la rendre moins croissante par un autre choix de l'exposant p_n, fonction de n.

La seule arbitraire dans un produit du type précédent étant p_n, il faut que la condition précédente détermine le choix de p_n.

J'ai tout d'abord (Chap. I) procédé à une étude minutieuse de la fonction $\varphi(u, p)$. J'ai ainsi déterminé successivement pour le facteur primaire $E(x, p)$, ou plutôt pour le logarithme de son module, la répartition de ses divers maxima et minima sur tout cercle $|x| = u$, l'expression exacte de chacun d'eux par une intégrale curviligne, leur classement par ordre de valeurs absolues et, comme conséquence, le maximum et le minimum absolus; enfin, des expressions approchées et simples de ces deux dernières fonctions, restant avec elles dans des rapports finis, *quels que soient u et p* (¹).

Cette étude terminée, il me devenait facile de résoudre le problème du choix de l'exposant canonique p_n grâce à la remarque suivante (²): Le module maximum du facteur primaire $E(x, p)$, sur un cercle fixe $|x| = u$, croît avec p, si $u > 1$, décroît si $u < 1$, tend vers une limite si $u = 1$. Les deux premières assertions sont d'ailleurs légèrement inexactes, mais de telle façon que la conséquence suivante ne soit

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 29 juin 1908.
(²) *Id.*, 13 janvier 1908.

pas altérée : si je divise le produit $\prod_1^\infty E\left(\frac{x}{a_n}, p_n\right)$ en deux autres $\prod_1^h$ et $\prod_{h+1}^\infty$, h étant défini par $r_h \leqq r < r_{h+1}$, si

$$e^{P_1} = \prod_1^h e^{\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)}, \qquad e^{P_2} = \prod_{h+1}^\infty e^{\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)}$$

si, partant d'une fonction p_n arbitraire, je la remplace par une fonction plus croissante, P_1, qui est comme P_2 une fonction de r, augmente, P_2 diminue. Si je remplace p_n par une fonction moins croissante, P_2 augmente, P_1 diminue. Si donc je détermine l'*exposant* p_n *par lequel* P_1 *et* P_2 *sont du même ordre de grandeur*, le choix d'un exposant, soit plus croissant, soit moins croissant, ne pourra qu'augmenter l'ordre de $P = P_1 + P_2$.

J'ai pu déterminer dans des cas étendus la valeur de p_n et calculer avec une erreur relative infiniment petite la valeur de $P(r)$. L'exposant de convergence p_n et la fonction correspondante P sont tels que : 1° en modifiant les arguments des zéros a_n de toutes les façons possibles, sans changer leurs modules ni la loi qui donne p_n, je suis certain qu'à partir d'une certaine valeur de r, calculée une fois pour toutes connaissant α et la suite r_n, le module maximum de la fonction F est inférieur à $e^{(1+\alpha)P(r)}$, α étant positif fixe, arbitrairement petit; 2° en conservant la loi qui me donne p_n ou en la remplaçant par une autre arbitraire il me sera possible de choisir une répartition convenable des arguments des a_n telle que, pour une infinité de valeurs croissantes de r, le module maximum de F soit supérieur à $e^{(1-\alpha)P(r)}$.

Je cite entre autres résultats que, moyennant des hypothèses très larges, si, par exemple, la fonction n de r_n interpolée pour toutes les valeurs de r_n a sa dérivée toujours croissante, on peut prendre sensiblement $p = \frac{d\log n}{d\log r_n}$, et l'on a

$$\frac{n}{p} < \text{Max.}\log|F(z)| < 2nLp,$$

n étant le nombre des zéros intérieurs au cercle $|z| = r$ et p l'exposant de convergence des zéros les plus voisins de ce cercle.

Pour ne pas allonger outre mesure ce Mémoire, j'ai dû me borner au choix de p et au calcul de P dans deux cas de régularité (¹) de la croissance de n en fonction de r_n. En tout cas, il n'est jamais question dans ce travail de limiter la croissance de n dans le sens de la rapidité, il n'est question que de sa régularité.

Dans le premier cas, que j'appelle *cas de moyenne régularité*, j'ai admis sur la fonction $r(n)$ [ou plutôt sur $n(r_n)$] les hypothèses qui me permettaient commodément le choix de p et la limitation supérieure de $P(r)$. Ces hypothèses sont d'ailleurs moins particulières que celles dont on use habituellement.

Dans le second cas, j'ai cherché des conditions telles que $P(r)$ puisse être calculé asymptotiquement d'une façon exacte.

La première famille de fonctions $r(n)$ comprend celles où, dans une succession de grands intervalles, la répartition des modules des zéros conviendrait à des fonctions d'ordre fini. Il y a entre les produits de cette famille, pour lesquels la formule trouvée donne de loin en loin une expression exacte, et ceux qui sont évalués asymptotiquement par la formule du second cas, une différence qui se ramène à celle de deux fonctions de croissance arbitrairement rapide, mais dont la première est représentée par une ligne brisée où chaque côté a une longueur très grande relativement à celle du côté précédent, et une pente beaucoup plus forte, et dont la seconde aurait au contraire à sa courbe représentative une tangente dont le coefficient angulaire croît uniformément sans gravir une succession de paliers.

J'ai été le plus possible avare d'hypothèses gratuitement imposées à n et à $r(n)$, parce que je désirais, *une fois mis en possession des formules* valables dans les cas de moyenne ou d'extrême régularité, *déterminer le champ d'application de ces formules,* je veux dire les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir n et $r(n)$ pour qu'elles soient exactes. Je renvoie, pour la solution de ce problème, à un prochain Mémoire où je traite également le cas des croissances irrégulières, et le problème inverse : *De la croissance de la fonction déduire la croissance des zéros* dont la solution

---

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 13 juillet 1908.

consiste à étudier et à préciser la généralisation du théorème de M. Picard, donnée par M. Borel.

4. A ma connaissance, trois Mémoires contiennent les propriétés essentielles des fonctions d'ordre infini connues au moment où j'ai publié mes premiers résultats.

Le premier est le célèbre Mémoire de M. Borel où se trouve notamment la démonstration élémentaire du théorème de M. Picard, et où sont jetées les bases de la théorie qui nous occupe. Le second, par ordre chronologique, est dû à M. Kraft, élève de M. Blumenthal (¹), qui s'est essentiellement donné pour but de reprendre par le détail le Mémoire précédent, afin d'en donner un exposé parfaitement clair et didactique. Ce travail renferme une excellente mise au point de la question en l'état où il la prend et en l'état où il la porte, et il m'a été de la plus grande utilité. Enfin, la thèse de M. Boutroux consacre aux produits de genre infini quelques pages, où l'auteur fait preuve de sa pénétration habituelle en déterminant, dans un cas particulier, la valeur optima de l'exposant de convergence.

Ai-je besoin de dire que tous les perfectionnements apportés à la théorie des fonctions de genre fini retentissent sur celle des fonctions de genre infini, et qu'à ce titre je dois citer encore, comme m'ayant apporté un réel secours, le travail de M. Lindelöf?

Une théorie plusieurs fois étudiée, et où d'elles-mêmes s'imposent les questions et la manière de les traiter, serait bien difficile à renouveler au point de ne pas éveiller de réminiscences dans l'esprit du lecteur. Augmenter le plus possible la précision et la généralité des résultats, afin de les rendre immédiatement applicables, alléger les calculs sans sacrifier la rigueur, je n'ai pas recherché d'autre but.

(¹) M. Blumenthal a repris la question dans un Livre de la Collection de monographies sur la théorie des fonctions : *Leçons sur les fonctions entières d'ordre infini,* qui est encore sous presse au moment où j'écris ces lignes.

CHAPITRE I.

LA VARIATION DU MODULE D'UN FACTEUR PRIMAIRE.

Nous étudierons successivement la répartition, l'évaluation et le classement des maxima et minima du module d'un facteur primaire; leurs valeurs, quand le degré de l'exponentielle contenue dans ce facteur devient infiniment grand; enfin, des expressions approchées et simples de ces nombres.

Répartition des maxima et minima du module.

1. Selon la notation habituelle, nous écrivons

$$E(x, p) = (1 - x)e^{x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^p}{p}}.$$

Nous nous proposons de chercher les points d'un cercle $|x| = u$ où $|E(x, p)|$ passe par un maximum ou un minimum quand le point représentatif de la variable $x = ue^{i\theta}$ décrit ce cercle. Posons

$$\log E(x, p) = U(u, \theta) + i\,V(u, \theta).$$

D'après $U = \log|E|$, nous cherchons les points où $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$.

Pour calculer $\frac{\partial U}{\partial \theta}$, nous remarquons que la dérivée de $\log E$, en un point x_0, est la même, quelle que soit la façon dont x tend vers x_0. Si x se déplace suivant le cercle $|x| = u$, on a $dx = ix\,d\theta$ et

$$ix\frac{d\log E}{dx} = \frac{\partial U}{\partial \theta} + i\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Pour un déplacement normal à ce cercle, $dx = \frac{x}{u}\,du$, et

$$\frac{x}{u}\frac{d\log E}{dx} = \frac{\partial U}{\partial u} + i\frac{\partial V}{\partial u}.$$

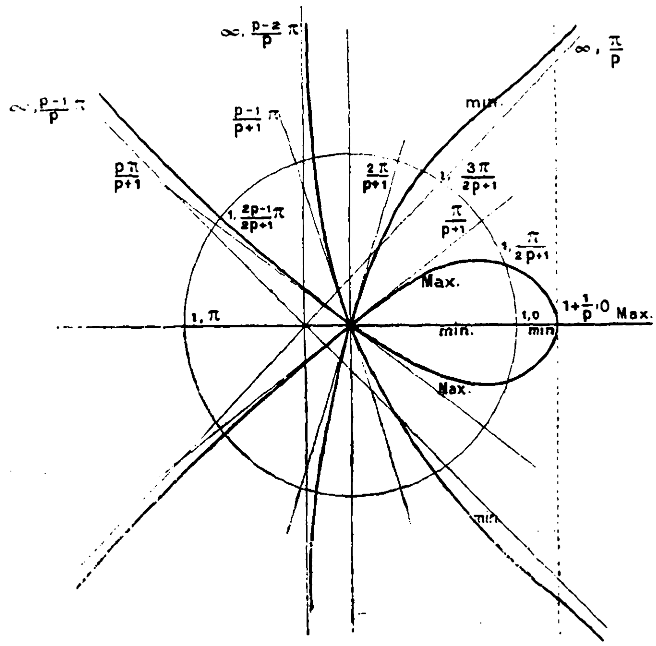
En égalant dans les deux relations les parties réelles et les parties imaginaires, en remarquant que $\dfrac{d \log E}{dx} = -\dfrac{x^p}{1-x}$, on trouve

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = u^{p+1}\frac{\sin(p+1)\theta - u\sin p\theta}{1-2u\cos\theta+u^2},$$
$$\frac{\partial U}{\partial u} = u^{p}\frac{u\cos p\theta - \cos(p+1)\theta}{1-2u\cos\theta+u^2}.$$

Nous ne nous intéresserons qu'à $\dfrac{\partial U}{\partial \theta}$.

L'équation $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0$ qui nous donne les maxima et minima de U sur le cercle $|x| = u$, se réduit à $\sin(p+1)\theta - u\sin p\theta = 0$. Elle est vérifiée pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (nous nous bornons au champ $-\pi \leqq \theta \leqq +\pi$).

Fig. 1.



Pour une valeur quelconque de θ différant de celles-là et n'annulant pas $\sin p\theta$, on a

$$u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}.$$

C'est l'équation polaire d'une courbe que nous allons construire.

2. Le changement de θ en $\theta+\pi$ change u en $-u$ et redonne le même point. Donc, sur une droite arbitraire passant par l'origine, il n'y a qu'un point de la courbe. Nous l'obtiendrons toute en faisant varier θ de o à π.

La courbe possède à l'origine un point multiple d'ordre p, dont les tangentes sont données par

$$\theta = \frac{h\pi}{p+1} \qquad (h=1, 2, \ldots, p).$$

Elle a $p-1$ directions asymptotiques $\theta = \frac{h\pi}{p}$, $h=1, 2, \ldots, p-1$. Ces dernières valeurs de θ alternent avec les précédentes. On a

$$\frac{h\pi}{p} < \frac{h+1}{p+1}\pi < \frac{h+1}{p}\pi < \frac{h+2}{p+1}\pi \ldots,$$

u est positif pour $\frac{h-1}{p}\pi < \theta < \frac{h}{p+1}\pi$ et négatif pour $\frac{h}{p+1}\pi < \theta < \frac{h}{p}\pi$, h étant l'un des nombres $1, 2, \ldots, p$.

Cherchons les maxima et minima de u,

$$\frac{du}{d\theta} = u\left[\frac{p+1}{\operatorname{tang}(p+1)\theta} - \frac{p}{\operatorname{tang} p\theta}\right].$$

En étudiant par le théorème de Rolle l'équation

$$\frac{1}{p}\operatorname{tang} p\theta = \frac{1}{p+1}\operatorname{tang}(p+1)\theta,$$

on constate que la fonction $\frac{du}{d\theta}$ s'annule seulement pour $\theta = h\pi$, et qu'elle change de signe pour ces valeurs. Elle devient infinie sans changer de signe pour $p\theta = h\pi$ $(h=1, 2, \ldots, p-1)$. Elle a donc un signe constant pour $0 < \theta < \pi$. Ce signe est le signe *moins*.

La branche de courbe correspondant à θ très petit et positif tend vers le point $\theta = 0$, $u = 1 + \frac{1}{p}$, qui est le seul où la courbe possède une tangente perpendiculaire au rayon vecteur.

Pour achever la construction de la courbe, on peut remarquer qu'elle possède $p-1$ asymptotes, passant par le point $\left(\frac{1}{p}, \pi\right)$. Il peut être utile d'avoir ses points d'inflexion, puisqu'à partir du dernier point de cette sorte une branche de courbe se rapproche constamment de son asymptote.

Les points d'inflexion sont donnés par

$$\tan (p+1)\theta = (p+1)\tan\theta.$$

Ils se trouvent par suite aux points de rencontre de la courbe avec la tangente

$$u\cos\theta = 1 + \frac{1}{p}.$$

Enfin, elle passe par les points

$$u = 1, \qquad \theta = \frac{2h+1}{2p+1}\pi$$
$$(h = 1, 2, \ldots, p-1).$$

J'ai construit cette courbe (¹) dans l'hypothèse $p = 4$.

Valeurs des maxima et minima.

3. La courbe $\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$ étant construite, voici les résultats qu'elle nous fournit. Pour une valeur positive de u, désignons par Θ_i l'argument compris entre $-\pi$ et $+\pi$ d'un point du cercle $|x| = u$, où U passe par un maximum; par θ_i l'argument correspondant à un minimum. On a maximum ou minimum selon le signe de $\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}$ ou de $\frac{\partial}{\partial\theta}\overline{\sin(p+1)\theta - u\sin p\theta}$. Ce signe est celui de $\sin p\theta$, si $\theta \neq h\pi$.

(¹) Cette courbe paraît être intéressante à d'autres titres. Ajoutons-lui les demi-droites $\theta = 0$ et $\theta = \pi$; puis supprimons d'une entre autres les branches infinies, en commençant par $\theta = 0$. Nous conservons encore la branche en forme de boucle. Alors, l'équation $1 - x + ax^{p+1} = 0$ où $p \geq 1$ a une racine et une seule dans chacune des $(p+1)$ régions en lesquelles nous nous trouvons avoir divisé le plan. En particulier, l'une des racines a son module inférieur à $1 + \frac{1}{p}$, et *par suite à* 2, *quel que soit* $p \geq 1$ (propriété démontrée par M. Landau dans *Vierteljahrschrift der N. G. in Zürich*, t. LI, p. 316; *voir* aussi *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXIV, mai 1907).

Sur une même branche de la courbe on a constamment soit un maximum, soit un minimum. Les branches à maximum alternent avec les branches à minimum. On a

$$0 < \Theta_1 < \frac{\pi}{p+1} \quad \text{pour} \quad u < 1 + \frac{1}{p}, \qquad \Theta_1 = 0 \quad \text{pour} \quad u > 1 + \frac{1}{p},$$

$$\frac{2\pi}{p} < \Theta_2 < \frac{3\pi}{p+1}, \qquad \dots, \qquad \frac{2i\pi}{p} < \Theta_i < \frac{2i+1}{p+1}\pi, \qquad \dots$$

$$\left[p \text{ pair} : \Theta_{\frac{p}{2}} = \pi;\ p \text{ impair} : i = \frac{p-1}{2}\right].$$

Le changement de θ en $-\theta$ pour une même valeur de u nous donnant la même valeur pour $U(u, \theta)$, on aura des maxima pour les arguments $\Theta_{-i} = -\Theta_i$, qui sont compris dans les intervalles symétriques des précédents par rapport à o :

$$-\frac{2i\pi}{p} > \Theta_{-i} > -\frac{2i+1}{p+1}\pi.$$

De même

$$\vartheta_1 = 0 \qquad \text{pour} \qquad u < 1 + \frac{1}{p};$$

et

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2h-1}{p}\pi < \vartheta_h < \dfrac{2h}{p+1}\pi \\[2ex] -\dfrac{2h-1}{p}\pi > \vartheta_{-h} > -\dfrac{2h}{p-1}\pi \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} p \text{ pair} : h = 1, 2, \dots, \dfrac{p}{2} \\ p \text{ impair} : \vartheta_{\frac{p+1}{2}} = \pi \end{array}\right\}.$$

Ainsi pour $j = 1, 2, \dots, p$ il n'y a ni maximum ni minimum dans les angles formés de demi-droites

$$\frac{j\pi}{p+1} < \vartheta < \frac{j\pi}{p} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{j\pi}{p+1} > \vartheta > -\frac{j\pi}{p}.$$

Enfin, quand u croît, les valeurs positives de θ_i ou Θ_i décroissent toujours.

Nous désignerons par $M_i(u)$ le nombre $U(u, \theta)$ où θ est remplacé par la fonction Θ_i de u. De même, nous posons

$$m_i(u) = U(u, \vartheta_i).$$

On a

$$M_i = M_{-i}$$

et

$$m_i = m_{-i}.$$

Dans ce qui suivra, nous ne considérerons que les valeurs de θ telles que $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

4. Cherchons les expressions de M_i et de m_i. Quelle que soit la fonction $\theta(u)$, on a

$$\frac{d}{du}\mathrm{U}(u,\theta) = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta}\frac{d\theta}{du}.$$

Si $\mathrm{U}(u,\theta) = \mu(u)$, μ étant un maximum ou un minimum, comme $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \theta} = 0$, il reste

$$\frac{d\mu(u)}{du} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} = u^p \frac{u\cos p\theta - \cos(p+1)\theta}{1 - 2u\cos\theta + u^2}.$$

Supposons $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$. Remplaçons, dans cette fraction, u par $\frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}$. Le numérateur devient $\frac{\sin\theta}{\sin p\theta}$. Le dénominateur multiplié par $\sin^2 p\theta$ est le carré du troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont $\sin p\theta$ et $\sin(p+1)\theta$, l'angle compris étant θ. Une construction simple dans le cercle trigonométrique (ou le calcul direct) montre que le troisième côté est $\sin\theta$. Toutes réductions faites, il vient

$$\frac{d\mu(u)}{du} = u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta},$$

$$\mu(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du,$$

où θ est l'une des fonctions Θ_i ou θ_i différentes de 0 et de π. $\mu(u)$ *se trouve donc mis sous la forme d'une intégrale curviligne prise le long de la branche correspondante de la courbe construite au paragraphe* **2**.

Si $\theta = \pi$,

$$\mathrm{U}(u,\pi) = -u + \frac{u^2}{2} + \ldots + (-1)^p \frac{u^p}{p} + \mathrm{L}(u+1);$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}(u,\pi)}{\partial u} = (-1)^p \frac{u^p}{1+u}.$$

Donc, $\mu(u)$ pour $\theta = \pi$ est égal à

$$(-1)^p \int_0^u \frac{u^p}{1+u}\,du.$$

Si $\theta = 0$,

$$U(u, 0) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(1-u);$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{u^p}{u-1}.$$

Donc, si $u < 1$,

$$m_1(u) = -\int_0^u \frac{u^p}{1-u} du$$

pour

$$1 < u < 1 + \frac{1}{p}, \qquad m_1(u) = \int_A^u \frac{u^p}{u-1} du,$$

A étant la racine de $U(u, 0) = 0$, elle-même comprise entre 1 et $1 + \frac{1}{p}$. Pour $u \geqq 1 + \frac{1}{p}$, on a

$$\int_A^u \frac{u^p}{u-1} du = M_1(u),$$

tandis que

$$M_1(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\Theta_1}{\sin \Theta_1} du \qquad \text{pour} \qquad u < 1 + \frac{1}{p}.$$

Relations de grandeur des différents maxima et minima.

5. Réservons momentanément les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Je dis que, pour une même valeur de u, deux maxima ou minima quelconques ne peuvent être égaux en valeur absolue si $u = 0$.

Nous allons montrer que, θ et θ' étant deux fonctions de u distinctes et satisfaisant à l'équation $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, il est impossible que les *coefficients différentiels des fonctions* $\mu(u)$ *et* $\mu'(u)$ *correspondantes soient jamais égaux en valeur absolue* pour $u > 0$. Nous en conclurons que celui qui est le plus grand en valeur absolue au départ le restera toujours. D'ailleurs, le signe de chacun de ces coefficients différentiels est invariable, puisque c'est celui de $\sin p\theta$ ou de $\sin p\theta'$ et que θ et θ' restent chacun compris entre deux multiples consécutifs fixes de $\frac{\pi}{p}$. Donc les valeurs absolues des fonctions $\mu(u)$ correspondantes resteront dans le même ordre relatif de grandeur.

Il s'agit de montrer l'impossibilité de

$$\frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \pm\frac{\sin p\theta'}{\sin\theta'},$$

θ et θ' correspondant à une même valeur de u.

Nous sommes amenés à étudier les équations

$$\varepsilon\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{\sin p\theta}{\sin p\theta'} = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin(p+1)\theta'}, \qquad \varepsilon^2 = 1.$$

Nous supposons que chacun des termes de ces fractions soit différent de zéro, car nous excluons

$$u = 0, \qquad u = \infty, \qquad \theta \text{ ou } \theta' = 0, \qquad \theta \text{ ou } \theta' = \pi.$$

Nous allons montrer plus simplement que par le calcul l'impossibilité des relations ci-dessus, sauf pour $\theta = \theta'$.

Étant donné, dans un plan où a été choisi un sens positif pour les rotations, un triangle ABC dont les côtés sont des axes dirigés portant des numéros d'ordre 1, 2, 3; si l'on désigne par $(2, 3)$ l'angle défini à un multiple de 2π près dont il faut faire tourner l'axe 2 pour l'amener en coïncidence (position et sens) avec l'axe 3, par $(3, 1)$ et $(1, 2)$ les angles de rotation qui permettent d'amener respectivement en coïncidence 3 avec 1, 1 avec 2; si a, b, c mesurent algébriquement les *segments* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, comptés sur les axes dirigés qui les portent, en projetant ces derniers sur des axes perpendiculaires aux premiers, on vérifie que

$$\frac{a}{\sin(2,3)} = \frac{b}{\sin(3,1)} = \frac{c}{\sin(1,2)}.$$

Cela étant, je me donne un axe 1; sur cet axe, un point C. Autour de C, je fais tourner dans le sens positif l'axe 1 de l'angle $-(p+1)\theta$. Sur l'axe 2 ainsi obtenu je porte un segment $\overline{CA} = b$, b étant un nombre algébrique arbitraire. Autour du point A, je fais tourner l'axe 2 d'un angle égal à $p\theta$. L'intersection de ce nouvel axe 3 avec 1 me donne un point B à distance finie. Car

$$(3, 1) = (3, 2) + (2, 1) + 2h\pi = \theta + 2h\pi.$$

Le triangle ABC est un vrai triangle, car ses angles diffèrent de $k\pi$.

Soient $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$, $c = \overline{AB}$ ses côtés, mesurés algébriquement sur les axes qui les portent. On a

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{a}{\sin p\theta} = \frac{c}{-\sin(p+1)\theta}.$$

Je refais la même construction en remplaçant θ par θ', et en partant du même axe 1, du même point C et du nombre εb. Le triangle A'B'C obtenu est un vrai triangle, et, si ses côtés mesurés algébriquement sont

$$a' = \overline{B'C}, \qquad b' = \overline{CA'}, \qquad c' = \overline{A'B'},$$

on a

$$\frac{b'}{\sin\theta'} = \frac{a'}{\sin p\theta'} = \frac{c'}{-\sin(p+1)\theta'}.$$

Donc

$$\frac{\varepsilon b}{b'} = \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}.$$

Comme $b' = \varepsilon b$, on a $a = a'$, $c = c'$. L'égalité $a = a'$ montre que B' est en B, puisque les segments $\overline{BC}$ et $\overline{B'C}$ portés par le même axe ont même extrémité et même mesure. Les deux triangles ayant leurs côtés égaux en longueur, deux côtés homologues et deux couples de sommets homologues coïncidant, coïncident ou sont symétriques par rapport au côté commun. D'après $c = c'$, l'axe 3' coïncide (en tenant compte des sens) avec 3 ou avec son symétrique par rapport à 1. Comme $(3, 1) = \theta + 2h\pi$, $(3', 1) = \theta' + 2h\pi$, on a $\theta = \theta' + 2h\pi$, ou $\theta + \theta' = 2h\pi$.

On peut sans ignorer de fonction $\mu(u)$ supposer $0 \leqq \theta \leqq \pi$. Comme dans le raisonnement actuel, nous excluons les extrémités de l'intervalle, il n'y a d'autre solution que $\theta = \theta'$.

Il est donc impossible que, pour une valeur quelconque de $u \neq 0$, deux fonctions $\mu(u)$ ne correspondant ni à $\theta = 0$ ni à $\theta = \pi$ aient leurs éléments différentiels égaux en valeur absolue.

Si $\theta = 0$, le coefficient différentiel de l'une des deux fonctions $\mu(u)$ ($\mu = m_1$ et $\mu = M_1$) est $\dfrac{u^p}{u-1}$ qui conserve un signe constant entre 0 et 1 d'une part, entre 1 et l'infini d'autre part. Si $\theta = \pi$, le coefficient différentiel $(-1)^p \dfrac{u^p}{1+u}$ garde un signe constant.

On trouve facilement que l'égalité

$$\frac{u^p}{u-1} = \pm u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$$

entraîne

$$\sin p\theta \sin(p+1)\theta = 0.$$

Mêmement, si $\frac{u^p}{u-1}$ est remplacé par $\frac{u^p}{u+1}$.

Pareillement

$$\frac{u^p}{1-u} = \frac{u^p}{1+u}$$

n'a d'autres solutions que $u=0$ et $u=\infty$.

En résumé, les dérivées de deux fonctions $\mu(u)$ quelconques ne peuvent être égales en valeur absolue pour une même valeur de u.

6. Examinons leur ordre relatif de grandeur pour u infiniment petit; on a

$$U(u,\theta) = -\frac{u^{p+1}}{p+1}\cos(p+1)\theta - \frac{u^{p+2}}{p+2}\cos(p+2)\theta\ldots.$$

D'autre part, d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}$ a une racine $\theta(u)$ prenant la valeur $\frac{h\pi}{p+1}$ pour $u=0$ et holomorphe en u autour de $u=0$. Si

$$\theta = \frac{k\pi}{p+1} + Au + \ldots,$$

$$\cos(p+1)\theta = (-1)^k(1 + A'u^2 + \ldots),$$

$$\cos(p+2)\theta = (-1)^k \cos\frac{k\pi}{p+1} + A''u + \ldots,$$

$$\mu(u) = (-1)^{k+1}\left(\frac{u^{p+1}}{p+1} + \frac{u^{p+2}}{p+2}\cos\frac{k\pi}{p+1} + \ldots\right).$$

La classification est évidente au voisinage de l'origine. Donc,

$$M_1(u) > -m_2(u) > \ldots > -M_i(u) > -m_i(u) > \ldots.$$

Pour $M_1(u)$, il est utile de remarquer que l'élément différentiel revêt deux formes $u^p\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$ et $\frac{u^p}{u-1}$, suivant que u est inférieur ou supérieur à $1+\frac{1}{p}$. On constate que le coefficient différentiel $\frac{u^p}{u-1}$ est supérieur aux valeurs absolues de ceux de tous les $\mu(u)$ qui correspondent à la même valeur de $u > 1+\frac{1}{p}$, en faisant la comparaison pour u infini. D'ailleurs les deux valeurs du coefficient de $M_1(u)$ coïncident pour $u = 1+\frac{1}{p}$. La place de $M_1(u)$ dans la suite est donc justifiée pour toutes les valeurs de u.

Examinons celle qu'il convient d'attribuer à $-m_1$. Pour $u \leqq 1$, on a

$$-m_1 > M_1(u).$$

Entre $u=1$ et $u = 1+\frac{1}{p}$, la fonction $-m_1(u)$ décroît de $+\infty$ à $-M_1\left(1+\frac{1}{p}\right)$. Elle coïncide donc successivement avec tous les termes de la suite ci-dessus. En particulier, pour $u = 1+\frac{\delta_p}{p}$, on a $m_1(u) = m_2(u)$. ($0<\delta_p<1$, et nous verrons que δ_p tend vers une limite pour p infini.)

7. Donc, pour $u < 1+\frac{\delta_p}{p}$, le *minimum absolu de la fonction* est $m_1(u)$. Pour $u > 1+\frac{\delta_p}{p}$, c'est $m_2(u)$. Pour tous les cas, le *maximum absolu*, que nous désignerons [1] désormais par $M(u)$ *coïncide avec* $M_1(u)$ qui revêt deux formes différentes suivant que $u<1+\frac{1}{p}$ ou $u>1+\frac{1}{p}$.

Pour $u \leqq 1+\frac{1}{p}$,

$$M(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}, \qquad 0<\theta<\frac{\pi}{p+1},$$

$$u \geqq 1+\frac{1}{p}, \qquad M(u) = u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}+L(u-1) = \int_A^u \frac{u^p}{u-1}\,du,$$

(1) Dans les deux derniers Chapitres, où il nous sera indispensable de mettre en évidence l'exposant p auquel appartient le facteur primaire considéré, nous désignerons la partie réelle de $\log E(x,p)$ par $U_p(u,\theta)$ et son maximum par $\varphi(u,p)$ de préférence à $M_p(u)$, notation employée plus haut, et qui peut prêter à confusion.

si A annule $u + \ldots + \frac{u^p}{p} + \mathrm{L}(u-1)$. Pour $u = 1 + \frac{1}{p}$ les deux expressions de $\mathrm{M}(u)$ coïncident et ont la même dérivée.

Le minimum $-m(u)$ de la fonction est $[m(u)$ est toujours positif$]$

$$\text{pour}\quad u<1, \qquad u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + \mathrm{L}(1-u) = -\int_0^u \frac{u^p}{1-u}\,du,$$

$$1 < u < 1 + \frac{\delta_p}{p}, \qquad u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u_p}{p} + \mathrm{L}(1-u) = -\int_u^{\mathrm{A}} \frac{u^p}{u-1}\,du,$$

$$1 + \frac{\delta_p}{p} < u, \qquad \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\,du, \qquad u = \frac{\sin \overline{p+1}\,\theta}{\sin p\theta}, \qquad \frac{\pi}{p} < \theta < \frac{2\pi}{p+1},$$

δ_p étant déterminée par la condition que les deux expressions du minimum soient égales. Mais leurs dérivées sont différentes, car elles sont de signes contraires, $m_2(u)$ est toujours décroissant, $m_1(u)$ croît pour $u > 1$.

Expressions approchées du maximum.

8. En vue des applications, il nous est indispensable d'obtenir, pour $\mathrm{M}(u)$ et $m(u)$, des limites supérieures douées d'expressions simples et restant si possible dans un rapport fini avec les fonctions qu'elles limitent.

M. Lindelöf a montré que, τ étant un nombre quelconque compris entre p et $p+1$ ou égal à l'un de ces nombres, il existe un nombre A tel que

$$\mathrm{M}(u) < \mathrm{A}u^\tau.$$

Désignons plus spécialement par A_τ la limite inférieure de toutes les valeurs possibles de A pour une valeur déterminée de τ. On a

$$\mathrm{M}(u) \leqq \mathrm{A}_\tau u^\tau,$$

l'égalité ayant lieu au moins pour une valeur de u. La notation A_p est ambiguë, car elle peut convenir également à deux nombres, l'un relatif à $\mathrm{E}(x, p)$, l'autre à $\mathrm{E}(x, p-1)$. Ce dernier sera désigné par A'_p, la notation A_p étant réservée au premier. Nous allons étudier le nombre A_τ. *Nous constaterons qu'on a toujours* $\mathrm{A}_\tau < 1$, en sorte que $\mathrm{M}(u) < u^\tau$, *quel que soit p supérieur à* 1.

Nous verrons que A_τ *tend, quand p devient infini, vers une limite positive inférieure à* 1, et nous étudierons dans quelle zone le rapport $\frac{A_\tau u^\tau}{M(u)}$ reste fini, non seulement par la variation de u, mais même p croissant indéfiniment. En dehors de cette zone, nous devrons chercher une nouvelle limite supérieure $G(u)$ de $M(u)$, de telle sorte que $\frac{G(u)}{M(u)}$, où G et M dépendent de u et de p, *reste compris entre des constantes numériques fixes, quels que soient u et p.*

9. A_τ est la limite inférieure des nombres A tels que

$$\varphi(u) = A u^\tau - M(u) \geqq 0.$$

Pour

$$0 < u \leqq 1 + \frac{1}{p}, \qquad M(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} d\theta$$

avec

$$u = \frac{\sin(p+1)\theta}{\sin p\theta}, \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1}.$$

Pour

$$u \geqq 1 + \frac{1}{p}, \qquad M(u) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1).$$

Déterminons d'abord la limite inférieure de A tel que $\varphi(u) \geqq 0$ pour $u \leqq 1 + \frac{1}{p}$.

Pour u infiniment petit, si $\tau < p+1$ ou, avec $\tau = p+1$, si $A > \frac{1}{p+1}$, le premier membre est d'abord positif et croissant. Examinons le sens de sa variation. On a

$$\varphi'(u) = \tau A_\tau u^{\tau-1} - u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

Le signe de $\varphi'(u)$ est celui de

$$\tau A_\tau - u^{p+1-\tau} \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \varphi_1(u).$$

Or, $\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}$ décroît $(p > 1)$ quand θ croît, c'est-à-dire croît avec u. En effet, la dérivée de cette fonction de θ est

$$\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}\left(\frac{p}{\operatorname{tang} p\theta} - \frac{1}{\operatorname{tang}\theta}\right).$$

Le premier facteur est positif, puisque $0 < \theta < \frac{\pi}{p+1}$. Quant au second, il est négatif. Nous avons déjà séparé ses racines. Il n'en possède pas dans l'intervalle 0 à $\frac{\pi}{p}$.

$\varphi_1(u)$ décroît donc toujours. Donc φ_1 et par suite $\varphi'(u)$ s'annulent une fois au plus, quand u varie de 0 à $1 + \frac{1}{p}$. Donc, $\varphi(u)$, d'abord croissant, ou bien croît constamment dans l'intervalle, ou bien possède uniquement un maximum. Comme $\varphi(u)$ commence par être positif, pour qu'il le soit constamment dans l'intervalle 0 à $1 + \frac{1}{p}$, il faut et il suffit qu'il le soit pour $u = 1 + \frac{1}{p}$. La condition qui résout $\varphi(u) \geqq 0$ pour $u < 1 + \frac{1}{p}$ est donc

$$(1) \qquad A\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\tau} \geqq \psi(p),$$

en posant

$$\psi(p) = u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u - 1) \qquad \text{pour} \qquad u = 1 + \frac{1}{p}.$$

Il est facile de voir que A_τ décroît constamment avec $\frac{1}{\tau}$, pour une valeur donnée de p. En effet, si $B_\tau = \frac{\psi(p)}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\tau}}$ (B'_p correspond à A'_p), si C_τ est le maximum de $\frac{M(u)}{u^\tau}$ pour $u > 1 + \frac{1}{p}$, A_τ est le plus grand des nombres B_τ et C_τ. Or, ces deux nombres décroissent manifestement si τ va en croissant de p à $p + 1$. Les conclusions précédentes restent valables pour $p = 1$.

10. Nous avons maintenant à résoudre l'inégalité

$$\varphi(u) = A u^\tau - M(u) \geqq 0$$

pour $u \geqq 1 + \frac{1}{p}$. Cette différence, si nous donnons à A la valeur $B_\tau = \frac{\psi(p)}{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{\tau}}$, est d'abord nulle. Le signe de $\varphi(u)$, quand u dépasse la valeur $1 + \frac{1}{p}$, est donc celui de $\varphi'(u)$. Je dis que l'hypothèse $A = B_\tau$

entraîne $\varphi'\left(1+\frac{1}{p}\right)<0$ si $p \geqq 2$, en sorte que B_τ est une valeur trop faible pour A.

La relation à montrer est

$$0>\varphi'(u)=\tau A u^{\tau-1}-\frac{u^p}{u-1}$$

pour

$$A u^\tau = B_\tau u^\tau = \psi(p), \qquad u=1+\frac{1}{p}, \qquad p \leqq \tau \leqq p+1.$$

Il faut donc montrer

$$0>(p+1)\frac{\psi(p)}{u}-\frac{u^p}{u-1},$$

ou, d'après les valeurs de $\psi(p)$ et de u,

$$(2) \qquad u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}+\mathrm{L}(u-1)<u^p \qquad \text{pour} \qquad u=1+\frac{1}{p}.$$

C'est à la démonstration de l'inégalité (2) que se réduiront toutes les difficultés soulevées par la détermination de A_τ. Calculons $\psi(p)$.

Dans le polynome

$$u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}=f(u),$$

posons $u=1+t$. On a

$$f(u)=f(1)+t f'(1)+\ldots+t^p\frac{f^{(p)}(1)}{p!},$$

$$f^{(h)}(1)=(p-1)(p-2)\ldots(p-h+1)$$
$$+(p-2)\ldots(p-h)+\ldots+(h-1)\ldots2.1,$$

$$\frac{f^{(h)}(1)}{(h-1)!}=C_{p-1}^{h-1}+C_{p-2}^{h-1}+\ldots+C_{h-1}^{h-1},$$

C_m^n étant le nombre des combinaisons de m objets n à n.

Or, soient p objets A, B, ..., L à combiner h à h. Le nombre des combinaisons qui contiennent A est égal au nombre des combinaisons des objets B, C, ..., $h-1$ à $h-1$, soit C_{p-1}^{h-1}. Le nombre des combinaisons qui, ne contenant pas A, contiennent B est celui des combinaisons de C, ..., L, $h-1$ à $h-1$, soit C_{p-2}^{h-1}, et ainsi de suite. La somme du second membre est donc C_p^h. Donc

$$\frac{f^{(h)}(1)}{h!} = \frac{C_p^h}{h} \quad \text{avec} \quad C_p^h = \frac{p(p-1)\dots(p-h+1)}{h!},$$

$$f(u) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \sum_{h=1}^{h=p} \frac{C_p^h}{h} t^p.$$

Posons $t = \frac{\alpha}{p}$. Pour avoir $\psi(p)$, il nous suffira de faire $\alpha = 1$,

$$f\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{1} + \frac{1 - \frac{1}{p}}{2} \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{2}{p}\right)}{2.3} \frac{\alpha^3}{3} + \dots$$
$$+ \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\dots\left(1 - \frac{h-1}{p}\right)}{h!} \frac{\alpha^h}{h} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\dots\left(1 - \frac{p-1}{p}\right)}{p!} \frac{\alpha^p}{p}.$$

Ajoutons $\operatorname{Log}(u - 1)$. Il vient

$$U\left(1 + \frac{\alpha}{p}, 0\right) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - Lp + L\alpha + \alpha$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=p} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\dots\left(1 - \frac{h-1}{p}\right)}{h!} \frac{\alpha^h}{h}.$$

Or, le nombre $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - Lp$ est constamment $(p \geqq 2)$ plus petit que 1 et d'ailleurs supérieur à C, constante d'Euler, vers laquelle il tend pour p infini.

Dans l'inégalité (2) $\left(\text{à démontrer pour } u = 1 + \frac{1}{p} \text{ seulement}\right)$ nous avons donc l'expression du premier membre, qui est égal à $U\left(1 + \frac{1}{p}, 0\right)$. Le second membre de (2) pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$ est

$$1 + \alpha + \sum_{h=2}^{h=p} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)\dots\left(1 - \frac{h-1}{p}\right)}{h!} \alpha^h.$$

Il est manifeste, en comparant les deux expressions, que $U(u, 0) < u^h$ pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, si $\alpha \leqq 1$. Car, si $\alpha \leqq 1$, on a $L\alpha \leqq 0$, et quel que soit p

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - Lp < 1.$$

L'inégalité (2) est donc démontrée pour $u \leqq 1 + \frac{1}{p}$, par suite $B_\tau < A_\tau$. Si $p = 1$, l'inégalité (2) est remplacée par l'égalité pour $u = 1 + \frac{1}{p}$.

11. Ouvrons une brève parenthèse au sujet de la valeur de $U\left(1 + \frac{\alpha}{p}, 0\right)$. Quand p devient infiniment grand, l'expression de U tend en croissant toujours vers la limite suivante :

$$C + L\alpha + \frac{\alpha}{1} + \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{2} + \ldots + \frac{1}{2.3\ldots h}\frac{\alpha^h}{h} + \ldots = C + L\alpha + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha} d\alpha.$$

Ceci est égal au *logarithme intégral* de α. *On a donc*

$$Li\alpha = \lim_{p=\infty}\left[u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1)\right]$$

pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, *de même que* $e^\alpha = \lim_{p=\infty} u^p$.

Si l'on considère la racine réelle α_0 comprise entre 0 et 1 de l'équation $Li\alpha = 0$, la racine de $U(u, 0)$, réelle et comprise entre 1 et $1 + \frac{1}{p}$, est supérieure à $1 + \frac{\alpha_0}{p}$.

12. Revenons au choix de A_τ. Nous devons le supposer supérieur à B_τ, et le déterminer par la condition que le minimum de

$$\varphi(u) = A_\tau u^\tau - M(u)$$

soit nul, u étant supposé supérieur à $1 + \frac{1}{p}$.

Examinons la dérivée de

$$Au^\tau - M(u) = \varphi(u).$$

$\varphi'(u)$ a le signe de

$$\tau A - \frac{u^{p+1-\tau}}{u-1} = \varphi_1(u).$$

Je dis que $\frac{u^{p+1-\tau}}{u-1}$ décroît toujours. Pour s'en convaincre, il suffit de le vérifier pour τ le plus petit possible, c'est-à-dire pour $\tau \doteq p$, auquel cas le fait est évident. Donc, si au départ cette expression est inférieure à τA, la dérivée $\varphi'(u)$ ne s'annule pas et reste toujours positive. La fonction croît donc toujours, et, comme la valeur de A est supérieure à $\frac{\psi(p)}{u^\tau}$ pour $u = 1 + \frac{1}{p}$, la fonction $\varphi(u)$ est toujours positive. A est alors supérieur à A_τ. Donc, A_τ qui est supérieur à $\frac{\psi(p)}{u^p}$ est inférieur à

$$\frac{u^{p+1-\tau}}{\tau(u-1)}$$

pour $u = 1 + \frac{1}{p}$, c'est-à-dire à $\frac{p}{\tau}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1-\tau}$.

13. Nous allons même montrer que $A_\tau < 1$, quel que soit $p > 2$, et pour cela que $u^\tau > M(u)$.

Il faut d'abord vérifier que $1 > B_\tau$. Or, l'inégalité $1 > \frac{\psi(p)}{u^p}$ pour $u = 1 + \frac{1}{p}$ est précisément l'inégalité (2) démontrée. Donc, $B_\tau < 1$, si $\tau > 1$.

Il nous suffit donc de montrer que, pour $u > 1 + \frac{1}{p}$, $u^p - M(u) = \varphi(u)$ est positif, c'est-à-dire la validité de l'inégalité (2) pour toutes les valeurs de u supérieures à $1 + \frac{1}{p}$. Or, le minimum de $\varphi(u)$ a lieu pour $u = \frac{p}{p-1}$ (nous supposons $p \geqq 2$).

Je dis que

$$u^p > u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^{p-1}}{p-1} + \frac{u^p}{p} + L(u-1) \qquad \text{pour} \qquad u = 1 + \frac{1}{p-1}.$$

En effet,

$$u^p - \frac{u^p}{p} = u^p\frac{p-1}{p} = u^{p-1}.$$

Nous sommes conduits à démontrer

$$u^{p-1} > u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^{p-1}}{p-1} + L(u-1) \qquad \text{pour} \qquad u = 1 + \frac{1}{p-1}.$$

Or, c'est l'inégalité (2) où p est diminué d'une unité.

Donc $A_\tau < 1$, si $\tau > 2$. D'ailleurs, $A_2 = 1$.

14. La valeur exacte de A_τ est fournie en écrivant que le minimum

de $\varphi(u)$ est nul. La valeur de u correspondante est telle que

$$\tau A_\tau = \frac{u^{p+1-\tau}}{u-1}.$$

L'équation donnant u est

$$(3) \qquad o = -\frac{1}{\tau}\frac{u^{p+1}}{u-1} + u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p} + L(u-1).$$

u vérifiant l'équation (3), A_τ est donné par

$$(4) \qquad A_\tau u^\tau = \frac{1}{\tau}\frac{u^{p+1}}{u-1}.$$

La dérivée du second membre de (3) est toujours positive et ce second membre est positif infiniment grand avec u. Il est négatif pour $u = 1 + \frac{1}{p}$. Il s'annule donc une fois et une seule pour $u > 1 + \frac{1}{p}$. Si l'on pose $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, α gardant une valeur fixe, le second membre de l'équation (3) tend vers celui de l'équation

$$(5) \qquad o = -\frac{e^\alpha}{\alpha} + C + L\alpha + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\,d\alpha,$$

et cela uniformément dans tout domaine positif fini de α. Cette dernière expression, quand α va de zéro à $+\infty$, varie de $-\infty$ à $+\infty$, et est toujours croissante comme on le voit en la mettant sous la forme

$$C + L\alpha - \frac{1}{\alpha} - 1 + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1 - \alpha}{\alpha^2}\,d\alpha.$$

Elle s'annule une fois, en changeant de signe. La convergence uniforme du second membre de (3) vers celui de (5) montre que l'équation (3) a une racine $1 + \frac{\beta_p}{p}$, telle que β_p tend vers la racine α' de (5). Comme l'équation (3) n'a qu'une racine, cette racine unique se trouve obtenue.

La valeur A_τ tend pour τ infini vers $\frac{1}{\alpha'}$.

On constate facilement que $\alpha' > 1$. On a

$$\alpha' = 1,34\ldots$$

15. En résumé, le rapport $\frac{A u^\tau}{M(u)}$ avec $A = 1$, et même, à partir d'une valeur assez grande de p, avec $A = \frac{1}{\alpha'} + \varepsilon$, ε étant positif et fixe, est supérieur à 1, quels que soient u et p. Mais ce rapport croît indéfiniment quand u est infiniment petit si $\tau < p+1$, et quand u est infiniment grand si $\tau > p$.

Si $\tau = p+1$, le rapport reste fini [1], p étant fixe, pour $u < k$, k étant un nombre positif fixe arbitraire. Si $\tau = p$, ce rapport est fini pour $u > k$. Donc, pour une valeur de p déterminée, les deux expressions u^{p+1} pour $u < k$ et u^p pour $u > k$ limitent supérieurement et avec des approximations finies $M(u)$.

Seulement ces approximations qui approchent $\frac{1}{p+1}$ pour la première forme, $\frac{1}{p}$ pour la seconde, *ne sont plus finies quel que soit p.* Nous allons, pour les valeurs très grandes et pour les valeurs très petites de u, substituer à $M(u)$ deux limites supérieures dont les rapports à $M(u)$ soient inférieurs à une constante numérique.

Mais auparavant cherchons dans quel domaine le rapport $\frac{u^\tau}{M(u)}$ reste inférieur à un nombre fixe, quand p croît indéfiniment.

16. Tout d'abord, nous remarquons que, *si α est un nombre fixe positif ou négatif, le maximum de $|E(x, p)|$ pour $|x| = 1 + \frac{\alpha}{p}$* $\left[\text{nombre dont le logarithme est } M\left(1+\frac{\alpha}{p}\right)\right]$ *tend vers une limite quand p croît indéfiniment.*

On trouve aisément que si $\alpha \leqq 1$, dans l'égalité

$$u = 1 + \frac{\alpha}{p} = \frac{\sin \overline{p+1}\,\theta}{\sin p\theta} \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{p+1},$$

$p\theta$ tend vers β, donné par $\beta \cot \beta = \alpha$ avec $0 \leqq \beta \leqq \pi$.

Cette dernière équation donne $\beta = 0$ pour $\alpha = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ pour $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ pour $\alpha = -\infty$.

---

[1] Nous dirons, selon l'usage, qu'un nombre variable est *borné*, si sa valeur absolue est inférieure à un nombre fixe calculable. Nous dirons qu'un nombre positif variable est *fini*, si lui et son inverse sont bornés.

On constate que pour $-k \leqq \alpha \leqq 1$, k étant un nombre positif arbitrairement grand, $u^p \dfrac{\sin p\theta}{p \sin\theta}$ converge uniformément vers $e^\alpha \dfrac{\sin\beta}{\beta}$. On en déduit que

$$M(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} du$$

tend vers

$$\mathfrak{M}(\alpha) = \int_{-\infty}^\alpha e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} du.$$

En effet, quel que soit ε positif donné, je peux choisir A tel que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A} e^\alpha d\alpha < \varepsilon$.

J'aurai alors, d'après $0 < \dfrac{\sin\beta}{\beta} < 1$, si $0 < \beta < \pi$,

$$\int_{-\infty}^{-A} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} d\alpha < \varepsilon.$$

Or, $\dfrac{\sin p\theta}{p\sin\theta} < 1$, si $0 < p\theta < \pi$, et $\left(1 + \dfrac{\alpha}{p}\right)^p < e^\alpha$, quel que soit $\alpha > -p$, d'après $1 + x < e^x$ quel que soit x.

On aura donc, si $p > A$,

$$\int_0^{1-\frac{A}{p}} u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} du < \varepsilon.$$

Pour montrer qu'à partir d'une certaine valeur de p

$$\left| \mathfrak{M}(\alpha) - M\left(1 + \frac{\alpha}{p}\right) \right| < 2\varepsilon,$$

il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{-A}^\alpha e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} d\alpha$ est la limite pour p infini de $\displaystyle\int_{1-\frac{A}{p}}^{1+\frac{\alpha}{p}} u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} du$, ce qui résulte de la convergence uniforme de $u^p \dfrac{\sin p\theta}{p\sin\theta}$ vers $e^\alpha \dfrac{\sin\beta}{\beta}$ dans le domaine $-A \leqq \alpha \leqq 1$.

En particulier pour $u = 1$, α est nul quel que soit p et par suite $M(1)$ tend vers une limite $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} d\alpha$, quand p croît indéfiniment.

Le module maximum de $E(x, p)$ *sur le cercle* $|x| = 1$ *tend vers une limite pour p infini.* Nous désignerons parfois cette limite par $M_\infty(1)$.

Pour $\alpha > 1$, nous avons vu que *le module maximum de* $E(x, p)$ *sur le cercle* $|x| = 1 + \frac{\alpha}{p}$ *tend vers* $e^{Li\alpha}$ *pour p infini.* $Li\alpha$ est la limite de $M(u)$.

17. D'autre part u^τ tend, quel que soit τ compris entre p et $p+1$, vers e^α. Si donc α reste compris entre des limites numériques, si éloignées soient-elles l'une de l'autre, le rapport $\frac{u^\tau}{M(u)}$ reste lui-même compris entre des limites numériques. Mais l'une de ces limites numériques devient de plus en plus grande quand l'une au moins des limites de α s'éloigne indéfiniment.

En effet, d'après la décroissance de $\frac{\sin\beta}{\beta}$ quand α varie de 1 à $-\infty$,

$$\mathfrak{M}(\alpha) < \frac{\sin\beta}{\beta}\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha\, d\alpha = e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta}.$$

Donc, pour une valeur fixe de α,

$$\lim \frac{u^\tau}{M(u)} > \frac{\beta}{\sin\beta}.$$

Puisque β tend vers π quand α tend vers $-\infty$, le rapport $\frac{u^\tau}{M(u)}$ ne sera inférieur à un nombre donné, quel que soit p, que si α est supérieur à un nombre calculable au moyen du premier.

De même pour $\alpha > 1$, le rapport $\dfrac{e^\alpha}{\int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\, d\alpha}$ est infiniment grand avec α.

Donc, la limite u^τ ne restera inférieure à $CM(u)$, C étant fixe, qu'entre deux limites $1 - \frac{k}{p}$ et $1 + \frac{h}{p}$, où k et h désignent deux nombres positifs fixes, calculables au moyen de C.

Nous allons donner deux nouvelles expressions approchées de $M(u)$ qui conviendront pour les domaines complétant inférieurement et supérieurement le domaine précédent.

Nouvelles expressions approchées du module maximum.

18. Considérons la fonction, définie pour $u < 1$,

$$G(u) = \frac{1}{p+1}\frac{u^{p+1}}{1-u}.$$

Son développement en série suivant les puissances croissantes de u montre que $G(u) - M(u) > 0$ pour $u > 0$.

Je dis que $\frac{G(u)}{M(u)}$ *croît de* 1 *à* $+\infty$ *quand* u *varie de* 0 *à* 1. Montrons d'abord que l'équation $\frac{G(u)}{M(u)} = \frac{1}{A}$ n'a qu'une racine si $A < 1$.

Dérivons le premier membre $\psi(u)$ de $AG(u) - M(u) = 0$,

$$u^{-p}\psi'(u) = \frac{A}{1-u} + \frac{Au}{(p+1)(1-u)^2} - \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

Le signe de $\psi'(u)$ est celui de

$$\psi_1(u) = A + \frac{Au}{(p+1)(1-u)} - \alpha_u$$

en posant

$$\alpha_u = (1-u)\frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

Je dis que α_u décroît constamment. En effet $\alpha_u = \dfrac{-\cos\frac{2p+1}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$ et $\frac{\pi}{p+1} < \theta < \frac{\pi}{2p+1}$. Quand u croît de 0 à 1, θ décroît de la première de ces limites à la seconde; $-\cos\frac{2p+1}{2}\theta$, qui est toujours positif, décroît; $\cos\frac{\theta}{2}$ croît. Donc α_u, qui est toujours positif, décroît. $\psi_1(u)$ est donc croissant et par suite s'annule une fois au plus. Il y a d'ailleurs bien une racine d'après $\psi_1(0) = A - 1 < 0$, $\psi_1(1) = +\infty$.

Soit $1 + \frac{\beta'}{p}$ cette racine. Le premier membre de

$$A + \frac{A}{p+1}\frac{u}{1-u} - \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}(1-u) = 0$$

tend si $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, uniformément pour $-k < \alpha < -h$ (k et h positifs, fixes et arbitraires), vers celui de

$$A + \frac{A}{-\alpha} + \cos\beta = 0. \tag{1}$$

Cette équation, pour $A < 1$, admet, d'après la croissance de son premier membre pour $\alpha < 0$, une racine α_1 et une seule; β'_p tend vers α_1.

Remontons à l'équation $\psi(u) = AG(u) - M(u) = 0$. Comme $\psi(u)$ est infiniment petit et négatif pour u infiniment petit, infiniment grand positif pour $u = 1$, comme ψ' ne s'annule qu'une fois dans l'intervalle 0 à 1, $\psi(u)$ s'annule une fois et une seule. Soit $1 + \frac{\beta_p}{p}$ sa racine. On a

$$\beta'_p < \beta_p < 0.$$

Il serait aisé de voir que β_p tend vers une limite pour p infini. On a

$$A\,G(u) - M(u) < 0 \qquad \text{pour} \qquad u < 1 + \frac{\beta_p}{p},$$

$$A\,G(u) - M(u) > 0 \qquad \text{pour} \qquad u > 1 + \frac{\beta_p}{p}.$$

Donc, le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ est croissant.

19. On pourrait conclure de ceci qu'il est possible, quelque petit que soit le nombre fixe ε, de calculer K, tel que, à partir d'une certaine valeur de p, on ait

$$\frac{G(u)}{M(u)} < 1 + \varepsilon \qquad \text{si} \qquad u < 1 - \frac{K}{p}.$$

Nous allons trouver la relation précise d'ordres de grandeur de ε et de K.

Quand u tend vers 1, le rapport croît indéfiniment. Nous allons montrer que *si* $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, *si* $\alpha < -k_1$, k_1 *étant positif, si petit que soit* k_1, *ce rapport est borné*, et, *si* k_1 *est pris suffisamment grand, la limite supérieure du rapport* $\frac{G}{M}$ *tend pour p infini vers un nombre surpassant l'unité d'aussi peu qu'on le voudra.*

Nous avons vu que $\frac{G}{M}$ est croissant. La valeur de ce rapport est donc pour toutes les valeurs de u inférieures à $1 - \frac{k_1}{p}$, compris entre 1 et sa valeur finale. Cherchons la limite de $\frac{G(u)}{M(u)}$ si $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, pour p infini, α étant fixe. Cette limite est

$$\frac{e^\alpha}{-\alpha} \frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} d\beta} = \frac{\mathcal{G}(\alpha)}{\mathfrak{M}(\alpha)},$$

en posant

$$\mathcal{G}(\alpha) = \frac{e^\alpha}{-\alpha} = \lim G(u).$$

Intégrons par parties

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} d\alpha = e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} - \int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta}\left(\cot\beta - \frac{1}{\beta}\right)\frac{d\beta}{d\alpha} d\alpha,$$

d'après

$$\beta \cot\beta = \alpha, \qquad \left(\cot\beta - \frac{1}{\beta}\right)\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta}\left(1 + \frac{1-\alpha}{\alpha^2 - \alpha + \beta^2}\right) d\alpha = e^\alpha \frac{\sin\beta}{\beta} = e^\alpha \frac{\cos\beta}{\alpha}.$$

Or, α étant négatif, on a d'abord (¹)

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2 - \alpha + \beta^2} = \frac{1}{-\alpha + \dfrac{\beta^2}{1-\alpha}} = \frac{\theta}{-\alpha},$$

(¹) Dans tout le cours de ce Mémoire, la signification de la notation θ sera traduite, sauf expresse indication contraire, par les mots *un certain nombre compris entre* o *et* 1. En conséquence, θ dans une même expression pourra représenter deux nombres différents, mais compris dans ces limites. Le calcul des nombres θ sera régi par des égalités telles que

$$\theta + \theta = 2\theta, \qquad \theta \times \theta = \theta;$$

a et b étant positifs,

$$\theta a + \theta b = \theta(a + b).$$

Nous utiliserons de la même façon la notation δ, dont la signification sera *un* expression que nous utiliserons pour les grandes valeurs de α, et

$$\frac{1-\alpha}{\alpha^2-\alpha+\beta^2} = \frac{1}{1-\alpha+\dfrac{\beta^2}{1-\alpha}-1} < \frac{1}{2\beta-1} = \frac{1-\theta'}{\pi-1}, \qquad \text{car} \qquad \beta > \frac{\pi}{2}.$$

Ceci nous servira pour les petites valeurs de α.

Donc

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^{\alpha}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\alpha = e^{\alpha}\frac{-\cos\beta}{-\alpha}\left(1+\frac{\theta}{-\alpha}\right)^{-1} = e^{\alpha}\frac{-\cos\beta}{-\alpha}\,\frac{\pi-1}{\pi-\theta'}.$$

(Évidemment, les nombres θ et θ' n'ont pas les mêmes valeurs dans les deux couples d'égalités. Mais leurs bornes subsistent.) Finalement

$$\frac{\mathcal{G}(\alpha)}{\mathcal{M}(\alpha)} = \frac{1}{-\cos\beta}\left(1+\frac{\theta}{-\alpha}\right) = \frac{1}{-\cos\beta}\,\frac{\pi-\theta'}{\pi-1}.$$

Ceci nous montre les deux faits énoncés :

1° k_1 étant un nombre positif fixe, si petit soit-il, puisque $\dfrac{G(u)}{M(u)}$ est croissant pour toutes les valeurs de u, $\dfrac{G(u)}{M(u)} < \dfrac{G\left(1-\dfrac{k_1}{p}\right)}{M\left(1-\dfrac{k_1}{p}\right)}$ si

$$u = 1+\frac{\alpha}{p} < 1-\frac{k_1}{p}.$$

---

certain nombre compris entre -1 *et* $+1$. Le calcul des nombres δ est régi par des égalités telles que

$$\delta+\delta = 2\delta, \qquad \delta\times\delta = \delta.$$

On a

$$\theta-\theta = \delta;$$

a et b étant positifs,

$$\theta a - \theta b = \frac{a-b}{2} + \delta\frac{a+b}{2},$$

ou, *a fortiori*, $= \delta(a+b)$,

$$\delta a + \delta b = \delta(a+b), \qquad \ldots;$$

ces conventions n'entraînent pas plus de confusion que la présence des lettres d indiquant la dérivation. Cependant, quand l'intérêt de la clarté l'exigera, nous donnerons des indices ou accents aux nombres θ ou δ, si plusieurs d'entre eux se trouvent dans un même calcul.

Comme le second rapport tend vers une limite pour p infini, $\frac{G(u)}{M(u)}$ est inférieur à un nombre fixe. La seconde expression de $\frac{\mathcal{G}(\alpha)}{M(\alpha)}$ montre que ce nombre est de l'ordre de $\frac{1}{k_1}$, si k_1 est pris de plus en plus voisin de zéro.

2° ε étant donné à l'avance, si $\frac{1}{k_1} < \varepsilon$, la valeur limite de $\frac{G\left(1-\frac{k_1}{p}\right)}{M\left(1-\frac{k_1}{p}\right)}$ est inférieure à $1+\varepsilon$ en partie principale, car $-\cos\beta > 1 - \frac{\pi^2}{2k_1^2} + \ldots$.

Donc, il existe un nombre $P > k_1$ tel que, pour $p > P$,

$$\frac{G\left(1-\frac{k_1}{p}\right)}{M\left(1-\frac{k_1}{p}\right)} < 1 + 2\varepsilon$$

et par suite aussi $\frac{G(u)}{M(u)} < 1 + 2\varepsilon$ si $u < 1 - \frac{k_1}{p}$.

20. La fonction $\frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)}$ coupe la fonction u^τ pour $u = 1 + \frac{\alpha_p}{p}$, α_p tendant vers -1.

On a, pour $\alpha = -1$,

$$\frac{\mathcal{G}(\alpha)}{\mathfrak{M}(\alpha)} < 4,$$

car le premier membre est inférieur à

$$\frac{1}{-\cos\beta}\,\frac{\pi}{\pi-1} < \frac{3}{2}\,\frac{1}{-\cos\beta}.$$

Or,

$$|\cot\beta| = \frac{1}{\beta} < \frac{3}{2\pi} < \frac{1}{2}.$$

Donc, $-\cos\beta > \frac{1}{\sqrt{5}}$.

La limite cherchée est inférieure à $\frac{3\sqrt{5}}{2} < 4$.

21. *Pour* $u > 1$, *nous prendrons*

$$G(u) = \frac{u^{p+1}}{p(u-1)}.$$

Posons $\chi(u) = AG(u) - M(u)$; supposons d'abord $A > 1$. Si $u < 1 + \frac{1}{p}$, $G(u) > u^{p+1}$. Donc $\chi(u) > 0$. Si $u > 1 + \frac{1}{p}$, $\chi(u)$ passe par un minimum pour $u = 1 + \frac{A}{A-1}\frac{1}{p}\cdot$ Pour cette valeur de u, $\chi(u) = (A-1)u^{p+1} - M(u)$.

Pour $A \geqq 2$ (ou même $A \geqq 1 + A'_{p+1}$), nous savons que cette expression est toujours positive. Elle l'est donc en particulier pour

$$u = 1 + \frac{A}{A-1}\frac{1}{p}.$$

Soit B le minimum de $\frac{G(u)}{M(u)}$, minimum qui est supérieur à $\frac{1}{2}\cdot$ Si $1 < A < B$, $\chi(u)$ qui est positif pour $u = 1 + \frac{1}{p}$ et pour u infini, et qui possède un seul minimum, d'ailleurs négatif, s'annule deux fois. On voit facilement que ses racines $1 + \frac{\delta_p}{p}$, $1 + \frac{\delta'_p}{p}$ avec $\delta_p < \frac{A}{A-1} < \delta'_p$, sont telles que δ_p et δ'_p tendent vers des limites pour p infini, A restant fixe.

Si $A \leqq 1$, $\chi'(u)$ est constamment négatif pour $u > 1 + \frac{1}{p}\cdot$

Or, $\chi(\infty) = -\infty$, $\chi\left(1 + \frac{1}{p}\right)$ est positif si A est supérieur au nombre que nous avons appelé B'_{p+1} au paragraphe 9. On a d'ailleurs, si $u < 1 + \frac{1}{p}$, $\chi(u) > 0$, d'après $G(u) > u^{p+1}$. Donc $\chi(u)$ s'annule une fois et une seule, pour $u > 1 + \frac{1}{p}\cdot$

Si $A < B'_{p+1}$, $\chi(u)$ est négatif pour $u > 1 + \frac{1}{p}\cdot$ Mais on démontre comme dans le cas de $u < 1$, et en utilisant la même forme $M(u) = \int_0^u u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} du$, que $\chi'(u)$ est négatif et que $\chi(u)$ n'a qu'une racine pour $u < 1 + \frac{1}{p}\cdot$ Donc, $\psi(u)$ ne prend qu'une fois la valeur $\frac{1}{A} \geqq 1$.

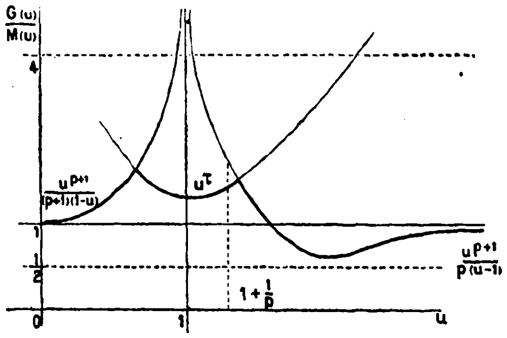
En résumé, $\frac{G(u)}{M(u)}$ décroît de $+\infty$ pour $u - 1$ infiniment petit positif, à un certain minimum supérieur à $\frac{1}{2}$, pour $u = 1 + \frac{\gamma_p}{p}$, γ_p tendant vers une limite pour p infini, puis croît jusqu'à 1, quand u varie de $1 + \frac{\gamma_p}{p}$ à $+\infty$.

22. On montre comme pour $u < 1$, et même plus commodément à cause de la forme simple de $M(u)$, que $\frac{G}{M}$ peut être supposé compris entre $1 - \varepsilon$ et 1, si $p > P'$, $u > 1 + \frac{k'}{p'}$, P' et k' étant deux nombres fixes en même temps que ε et croissant indéfiniment avec $\frac{1}{\varepsilon}$, auquel k' est comparable. Ceci étant admis, on peut même remarquer que pour chacune des valeurs $1, 2, \ldots, P' - 1$, de p, $\frac{G}{M}$ tend vers 1, quand u croît indéfiniment. Donc les fonctions $\frac{G}{M}$ correspondant à ces valeurs de p seront chacune supérieures à $1 - \varepsilon$, si $u > C_1$ pour la première, $u > C_2$ pour la seconde, ..., $u > C_{P'-1}$ pour la dernière. Soit k'' le plus grand des nombres $C_1 - 1$, $2(C_2 - 1)$, ..., $(P' - 1)(C_{P'-1} - 1)$, k'. Quel que soit p, pour $u > 1 + \frac{k''}{p}$, on aura

$$1 > \frac{G(u)}{M(u)} > 1 - \varepsilon.$$

23. En résumé, *nous adoptons pour limiter* $M(u)$ *les fonctions* $\frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)}$, u^τ, $\frac{u^{p+1}}{p(u-1)}$, *la médiane dans un intervalle allant de* $1 - \frac{k}{p}$ à $1 + \frac{h}{p}$ (k et h *positifs fixes arbitraires*) *et les deux autres*

Fig. 2.



pour $u < 1 - \frac{k}{p}$ *et pour* $u > 1 + \frac{h}{p}$ *respectivement.* Dans ces conditions, *le rapport de la fonction limitatrice* $G(u)$ *à* $M(u)$ *est compris entre des constantes numériques déterminées avec k et h, indépendamment de u et de p. Enfin, si* $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, *quand* α *croît indé-*

finiment avec p, par valeur soit positives, soit négatives, le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ *tend vers* 1.

Nous donnons ci-dessus la courbe représentative du rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$. Elle montre que, si l'on choisit $G = u^\tau$ dans l'intervalle des valeurs de u où u^τ rencontre les fonctions extrêmes, $\frac{G}{M}$ reste compris entre $\frac{1}{2}$ et 4. D'ailleurs habituellement nous prendrons $G(u) = u^\tau$ dans un champ beaucoup plus étendu, tel que l'approximation fournie par les fonctions extrêmes soit inférieure à ε, nombre positif, petit et fixe.

Dans les applications qui suivront, nous chercherons à évaluer des limites supérieures des logarithmes des produits de facteurs primaires, à une constante finie près. Nous pourrons substituer à ces logarithmes la fonction G de ci-dessus. Mais, comme les facteurs pour lesquels le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ s'écarte de 1 d'une quantité finie se trouveront être négligeables relativement aux autres, nous obtiendrons la limite supérieure cherchée du logarithme avec une approximation infiniment petite. Dans l'intervalle médian, *la forme* u^τ *elle-même nous sera inutile.* Nous retiendrons seulement le fait que $M(u)$ est borné si $p(u-1)$ est inférieur à un nombre fixe.

24. *Sens de variation de* $M_p(u)$ *relativement à p.* — Remarquons enfin, chose très importante pour la suite, que *les expressions qui remplacent* $M(u)$ *croissent avec p si* $u > 1$ *et décroissent si* $u < 1$.

C'est vrai de la médiane si u est fixe, quel que soit le champ où on la choisit pour $G(u)$. Pareillement, la première décroît avec $\frac{1}{p}$, quel que soit $u < 1$. La dernière croît si $u > e^{\frac{1}{p}}$.

En choisissant

$$G(u) = \frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)} \qquad \text{pour} \qquad u < 1 - \frac{k}{p},$$

k étant arbitraire et fixe,

$$G(u) = u^\tau \qquad \text{si} \qquad 1 - \frac{k}{p} < u < 1 + \frac{h}{p} \qquad \text{avec} \qquad h > 2,$$

$$G(u) = \frac{u^{p+1}}{p(u-1)} \qquad \text{si} \qquad u > 1 + \frac{h}{p},$$

$G(u)$ pour une valeur donnée de u décroît si $u < 1$, croît pour $u > 1$, quand p croît indéfiniment $\left(\text{car } 1 + \frac{2}{p} > e^{\frac{1}{p}} \text{ si } p \geqq 1\right)$.

25. On peut se rendre compte qu'*il en est sensiblement de même pour* $M(u)$ *lui-même*. L'excès pour un même couple u, θ de la valeur de $U(u, \theta)$ pour $p+1$ sur sa valeur pour p est $\frac{u^{p+1}}{p+1}\cos(p+1)\theta$. Si $\frac{\pi}{p+1} > \theta > \frac{\pi}{2(p+1)}$, l'excès est négatif. Si $\frac{\pi}{2(p+1)} > \theta > 0$, l'excès est positif.

Or, pour $\theta = \frac{\pi}{2(p+1)}$ la valeur de u correspondant à l'exposant p est $u_1 = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2(p+1)}}$ et celle qui correspond à l'exposant $p+1$ est $u_2 = \cos\frac{\pi}{2(p+1)}$. Soient M_p et M_{p+1} les maxima respectifs correspondant aux deux exposants.

Si $u < u_2$, on a

$$M_p > M_{p+1};$$

si $u_1 < u$,

$$M_p < M_{p+1}.$$

Si l'on pose

$$u_1 = 1 + \frac{h}{p^2}, \qquad u_2 = 1 - \frac{k}{p^2},$$

h et k sont bornés supérieurement et inférieurement quel que soit $p > 1$. Si p croît indéfiniment, h et k tendent vers une limite (¹).

(¹) Je laisse au lecteur le soin de montrer que $p(1-u_2)$ est décroissant si $p \geqq 1$. Donc sa plus grande valeur est $1 - \cos\frac{\pi}{4} < \frac{1}{2}$. Donc, si $u < 1 - \frac{1}{2p}$, $M_p(u) > M_{p+1}(u)$ quel que soit $p \geqq 1$. On a même, quel que soit $p \geqq 1$,

$$(p+1)^2(1-u_2) < \frac{\pi^2}{8}, \qquad p^2(u_1 - 1) < 1.$$

Enfin, quel que soit p, la différence $M_{p+1}(u) - M_p(u)$, si

$$1 + \frac{1}{p} > u > 1 + \frac{1}{p^2},$$

est, à un facteur fini près, $u^p(u-1)$ et est inférieure, en valeur absolue, à $\frac{h}{p^2}$ (h borné) si $1 < u < 1 + \frac{1}{p^2}$.

26. Pour une valeur de p donnée, si $u < 1 - \frac{k}{p^2}$, $M_{p+1} < M_p$. Donc, si $p > \sqrt{\frac{k}{1-u}}$, u étant un nombre fixe inférieur à 1, M_p décroît quand p croît. Si $p < \sqrt{\frac{k}{1-u}}$, alors $1 - \frac{k}{p^2} < u < 1$, et $M_p(u)$, quel que soit p, varie dans un champ borné. Si même on suppose $p > p_0$, la valeur de M_p diffère de moins de ε de $M_\infty(1)$. Donc, quel que soit u inférieur à 1, si l'on fait croître p à partir d'un nombre fixe p_0, on est certain qu'à partir d'une certaine valeur de p, $M_p(u)$ décroît. Pour les valeurs de p précédentes et supérieures à p_0, $M_p(u)$ est sensiblement constant à ε près, ε étant arbitrairement petit en même temps que $\frac{1}{p_0}$.

De même, si $u > 1$, $M_p(u)$ croît avec p, certainement à partir d'une certaine valeur de p, les valeurs précédant celles-là et supérieures à p_0 laissant, à ε près, $M_p(u)$ constant et égal a $M_\infty(1)$.

Expressions approchées du module minimum d'un facteur primaire.

27. D'après la classification faite des maxima et minima du facteur primaire sur le cercle $|x| = u$, on a constamment

$$M(u) > -m_2(u).$$

Donc $\frac{G(u)}{-m_2(u)}$ est supérieur à 1 si $u < 1$ et à $\frac{1}{2}$ si $u > 1$.

La fonction $m_2(u)$ pour $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$ tend vers

$$\int_{-\infty}^{\alpha} e^{\alpha} \frac{\sin\beta}{\beta} \, d\alpha$$

avec

$$\beta \cot\beta = \alpha, \qquad \pi < \beta < 2\pi.$$

Aux valeurs $-\infty$, 0, $+\infty$ de α correspondent les valeurs 2π, $\frac{3\pi}{2}$, π de β.

On démontre, comme avec $M(u)$, que, si α est fixe, le rapport $\frac{G(u)}{-m_2(u)}$ tend vers une limite. Si α est compris entre des constantes numériques données, le rapport est compris entre des constantes numériques calculables au moyen des premières. Si α tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, cette limite tend vers 1.

Seulement, $+m_2(u)$ n'est le logarithme du module minimum du facteur primaire que pour $u > 1 + \frac{\alpha_p}{p}$, où $0 < \alpha_p < 1$, α_p tendant d'ailleurs vers une limite.

Supposons $u < 1$; on a toujours $\frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)} > -m_1(u)$, comme le montrent les développements en série des deux membres. Nous avons ici intérêt à distinguer les points d'un cercle $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, voisins de 1, de ceux qui en sont éloignés. Un calcul facile montre que, sur le cercle $|x-1| = \frac{\alpha}{p}$, le minimum se produit quand l'argument de $x-1$ est π. La valeur de $U\left(1 + \frac{\alpha}{p}, 0\right)$ tendant dans tous les cas vers $C + L|\alpha| + \int_0^\alpha \frac{e^\alpha - 1}{\alpha}\,d\alpha$, c'est là, après changement de α en $-\alpha$ l'expression limite du minimum sur le cercle concentrique au point 1 et de rayon $\frac{\alpha}{p}$. Voici donc le résultat définitif :

Si l'on retranche du plan des x un cercle de centre 1 *et de rayon* $\frac{k}{p}$, *k étant positif et fixe, on a partout, en dehors de ce cercle,* $\frac{G(u)}{m(u)} = h$, *h variant quels que soient u et p entre deux nombres positifs calculables au moyen de k, et h tendant vers* 1 *si* $\alpha = p(1-u)$ *croît indéfiniment en valeur absolue* [en réalité, $-m(u)$ désigne le logarithme du minimum de $|E(x,p)|$ sur l'arc non exclu du cercle $|x| = u$].

Si x est intérieur au cercle précédent, on a

$$U(u, \theta) = h' + L|\alpha|,$$

h' étant borné avec k.

CHAPITRE II.

LES PRODUITS CANONIQUES D'ORDRE INFINI. PREMIER TYPE DE CROISSANCE. RÉGULARITÉ MOYENNE.

28. Étant donnée une suite de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, rangés par ordre de modules non décroissants, avec $a_1 \neq 0$, si la série $\frac{1}{|a_n|^{p+1}}$ converge, tandis que la série $\frac{1}{|a_n|^p}$ diverge, et si p est entier ou nul, on appelle ***produit canonique***, ayant pour zéros les nombres de la suite précédente, l'expression

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad \text{si} \qquad p = 0,$$

$$F(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p}\left(\frac{z}{a_n}\right)^p} \qquad \text{si} \qquad p \geqq 1.$$

Le *genre* du produit canonique est égal à p. Rappelons que son *ordre* est le nombre ρ tel que $\frac{1}{|a_n|^{\rho'}}$ diverge et $\frac{1}{|a_n|^{\rho''}}$ converge, moyennant $\rho' < \rho < \rho''$.

Une fonction quelconque admettant pour zéros les nombres de la suite a_n, et l'origine à l'ordre m, sera de la forme

$$H(z) = z^m e^{G(z)} F(z),$$

$G(z)$ étant une fonction entière.

Si $G(z)$ est un polynome de degré p au plus, la croissance de $H(z)$ est identique à celle de $F(z)$ $\Big($une exception peut se produire, dans le cas où la série $\frac{1}{|a_n|^{p+\varepsilon}}$ est convergente, quelque petit que soit $\varepsilon\Big)$, et $H(z)$ croît moins vite que $e^{\varepsilon|z|^{p+1}}$, quelque petit que soit ε.

Si $G(z)$ est un polynome de degré $p+h$, $h \geqq 1$, la croissance de $H(z)$ est comparable à celle de $e^{A|z|^{p+h}}$. Elle est plus rapide si $G(z)$ n'est pas un polynome, en sorte qu'il n'y a pas de fonction $H(z)$ ayant un ordre de croissance moindre [1] que celui de $F(z)$.

29. Supposons maintenant que la série $\frac{1}{|a_n|^p}$ diverge quel que soit p, et considérons toutes les expressions de la forme

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\ldots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}}=\prod_{n=1}^{\infty}E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right).$$

Nous allons montrer d'après quels principes il faut choisir p_n, pour que la fonction $F(z)$ correspondante jouisse de propriétés analogues, au point de vue de la croissance, à celles des produits canoniques d'ordre fini.

Afin que ce produit ne dépende pas de l'ordre des facteurs, nous choisirons l'exposant p_n de façon que ce produit soit absolument convergent. Si $|z|=r$, $|a_n|=r_n$, il faut et il suffit pour cela que la série $\frac{1}{p_n+1}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}$ soit convergente quel que soit r.

Le fait que la condition de convergence absolue est indépendante des arguments des zéros nous conduit à *ne faire dépendre* p_n *que de la suite* r_n.

Pour rendre la série $\frac{1}{p_n}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}$ convergente, Weierstrass avait choisi $p_n=n$. M. Borel a fait remarquer que $p_n=\log n$ assure la convergence, et depuis on a signalé maintes fois que, si $p_n=\frac{\log n}{\log r_n}$ ne suffit pas à faire converger cette série, $p_n=k\frac{\log n}{\log r_n}$, si k est fixe et supérieur à 1, y suffit. (D'une façon plus précise, si dans l'une de ces égalités le second membre n'est pas entier, on doit le remplacer par sa partie entière.)

---

[1] Nous dirons habituellement que deux fonctions $f_1(r)$, $f_2(r)$ infiniment croissantes sont du même ordre de grandeur si leur rapport reste fini, en d'autres termes, a des limites d'indétermination différentes de zéro et de l'infini, pour r infini. Ici ce sont plutôt les logarithmes des fonctions considérées, qui sont du même ordre de grandeur. Si $\frac{f_1(r)}{f_2(r)}$ tend vers zéro, f_1 est dit moins croissant que f_2, et f_2 plus croissant que f_1.

L'exposant de Weierstrass a été modifié par M. Borel, parce que cet exposant donne un produit de facteurs primaires $F(z)$ beaucoup trop croissant. Voici d'après quel principe nous choisirons p_n.

30. Supposons donnée seulement la suite $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$. Si $M(r)$ désigne le maximum de $\log|F(z)|$ pour $|z| = r$ [1], $M(r)$ dépendra évidemment des arguments des zéros dont les modules seuls nous sont donnés. Ces arguments variant de toutes les façons possibles, $M(r)$ possède, pour chaque valeur de r, une certaine limite supérieure $P(r)$, qui ne dépend que de la fonction p_n choisie et de la suite r_n.

Nous déterminerons l'exposant p_n par la condition que cette limite $P(r)$ soit la plus petite possible, ou exactement, que toute autre loi choisie pour p_n nous donne une limite au moins égale à $P(r)$.

31. Nous allons transformer cette condition. Rappelons un résultat obtenu dans le premier Chapitre. Il existe un nombre h supérieur à 1, tel que, si $M_p(u) = \underset{|x|=u}{\mathrm{Max.}} \log|E(x, p)|$,

$$h M_p(u) > M_{p+q}(u),$$

quels que soient $u < 1$, p et q entiers, et tel que

$$M_p(u) < h M_{p+q}(u),$$

si $u > 1$. De plus, si petit que soit ε, on peut trouver p_0 tel que, si $p > p_0$, h peut être supposé égal à $1 + \varepsilon$.

Cela étant, considérons le nombre N défini par

$$r_{N-1} < r \leqq r_N,$$

et posons

$$F_1(z) = \prod_1^{N-1} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right), \qquad F_2(z) = \prod_N^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right).$$

Soient $P_1(r)$ et $P_2(r)$ les limites supérieures respectives des maxima de $\log|F_1(z)|$ et de $\log|F_2(z)|$ pour $|z| = r$, quand les zéros

(1) M. Borel désigne par $M(r)$ le maximum de $|F(z)|$ pour $(z) = r$. Mais le langage gagne en simplicité si l'on désigne par $M(r)$ le logarithme de ce maximum.

$a_1, a_2, \ldots$ prennent tous les arguments possibles en gardant les mêmes modules. On a

$$P(r) = P_1(r) + P_2(r).$$

Si nous convenons de considérer comme étant de même ordre de grandeur deux fonctions dont le rapport a deux limites d'indétermination finies pour r infini, l'ordre de grandeur de $P(r)$ est égal au plus grand des ordres de P_1 et de P_2.

Or, pour $n < N$, le maximum de $\log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right|$ croît, r restant fixe, si p_n croît. Si $n \geqq N$, ce module décroît.

Remplaçons p_n par une fonction plus croissante q_n; $P_1(r)$ est remplacé par une fonction non moins croissante $Q_1(r)$. En effet, q_n et p_n croissant indéfiniment, $P_1(r)$ finit par surpasser r^λ, quel que soit le nombre fixe λ. Supposons donc que pour $r_n > r_{N_0}$ on ait

$$p > p_0 \quad \text{et} \quad q > q_0 > p_0.$$

Nous écrivons

$$P_1(r) = \sum_1^{N-1} \text{Max.} \log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right| = \sum_1^{N_0} + \sum_{N_0+1}^{N-1} = P'_1 + P''_1,$$

$$Q_1(r) = \sum_1^{N-1} \text{Max.} \log\left|E\left(\frac{z}{a_n}, q_n\right)\right| = \sum_1^{N_0} + \sum_{N_0+1}^{N-1} = Q'_1 + Q''_1.$$

D'après ce que nous venons de rappeler, il existe un nombre r_0 tel que, pour $r > r_0$,

$$P'_1(r) < \varepsilon P''_1(r).$$

D'ailleurs, nous savons d'après la valeur de p_0 que

$$Q''_1 > (1-\varepsilon) P''_1(r).$$

Donc

$$P_1 = P'_1 + P''_1 < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} Q''_1(r) < \frac{1}{1-\varepsilon'} Q_1(r),$$

ε' étant comparable à ε, si celui-ci est petit. D'où

$$Q_1(r) > (1-\varepsilon') P_1(r),$$

si $r > r_0$.

De même, si nous remplaçons p_n par une fonction moins croissante s_n, $P_2(r)$ sera remplacé par une fonction non moins croissante $S_2(r)$.

Supposons que p_n *donne le même ordre de grandeur à* P_1 *et à* P_2. Alors, que je remplace p_n par une fonction plus croissante ou par une fonction moins croissante, *l'ordre de* $P(r)$ *ne peut pas diminuer* (¹).

C'est cette fonction p_n donnant à P_1 et à P_2 des ordres de grandeur égaux que j'appellerai *exposant canonique de convergence attaché à la suite* r_n.

Nous supposerons toujours p_n *non décroissant.*

32. Moyennant une première hypothèse très générale sur la croissance de r_n, nous déterminerons la valeur de p_n. Nous allons, par un raisonnement très rapide et assez grossier, indiquer l'idée directrice qui conduit au choix de p et la valeur de $P(r)$ correspondante. Nous rendrons ensuite cette analyse rigoureuse, mais, grâce au sommaire qui l'aura précédée, le lecteur ne perdra pas de vue, dans la minutie du raisonnement, les conclusions à atteindre.

Nous poserons

$$\log r_n = x(n), \qquad \log n = y(n).$$

Dans le plan des xy les points L dont les coordonnées sont $x(m)$, $y(m)$ forment une suite à abscisses et ordonnées simultanément non décroissantes. Joignons ces points par une courbe.

Ceci revient à définir une fonction non décroissante $y = f(n)$ telle que

$$y(n) = f[x(n)].$$

Le fait que la suite r_n n'est pas d'ordre fini est traduit par la relation

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{y(n)}{x(n)} = \infty,$$

qui n'oblige nullement $\frac{y(n)}{x(n)}$ à croître indéfiniment (²).

(¹) Les auteurs qui se sont occupés des fonctions de genre infini ont eu généralement, avec le désir d'abaisser l'ordre de grandeur de $F(z)$, le souci de réduire le reste P_2 de façon à le rendre aisément limitable (cela, en augmentant la convergence de la série, c'est-à-dire p_n); mais la valeur de P_1 rend alors trop fort l'ordre de $F(z)$.

(²) Selon l'usage, nous désignons par $\overline{\lim\limits_{x=a}}\, u$ et $\underline{\lim\limits_{x=a}}\, u$ la plus grande et la plus petite des limites possibles de u quand x tend arbitrairement vers a.

Nous supposons que la répartition des points L soit telle que le coefficient angulaire y' de la tangente croisse toujours. Cela est possible si $\frac{y(n+1)-y(n)}{x(n+1)-x(n)}$ est croissant avec n. La courbe $y=f(x)$ tourne sa concavité vers les y positifs, et y' croît indéfiniment avec x, sans quoi la suite r_n serait de genre fini.

Remarquons dès maintenant que l'expression

$$-\psi(x,\mathrm{X}) = y - \mathrm{Y} + y'(\mathrm{X}-x)$$

est constamment négative et qu'elle est infiniment grande, en même temps que x, quel que soit X, et en même temps que X, si x reste borné.

Si A a pour coordonnées (X, Y), si (x, y) sont les coordonnées de $\mathrm{B}(y<\mathrm{Y})$ ou de $\mathrm{B}'(y>\mathrm{Y})$, les tangentes en B et B′ coupent la droite d'abscisse X en des points C et C′ situés au-dessous de A. $\psi(x, \mathrm{X})$ est égal au segment CA ou au segment C′A.

33. Le logarithme du module du $n^{\text{ième}}$ facteur primaire a pour limite supérieure (à ε près si h est assez grand)

$$\frac{1}{p_n}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}\frac{1}{\dfrac{r}{r_n}-1} \qquad \text{pour} \qquad \frac{r}{r_n} > 1+\frac{h}{p_n},$$

$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^{\tau_n} \qquad \text{pour} \qquad 1+\frac{h}{p_n} > \frac{r}{r_n} > 1-\frac{h}{p_n} \qquad (p_n \leqq \tau_n \leqq p_n+1),$$

$$\frac{1}{p_n+1}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}\frac{1}{1-\dfrac{r}{r_n}} \qquad \text{pour} \qquad \frac{r}{r_n} < 1-\frac{h}{p_n}.$$

Posons

$$\log r = \mathrm{X} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Y} = f(\mathrm{X}).$$

Supposons le choix de p_n effectué et séparons les valeurs de r_n en trois groupes suivant la position de $\frac{r}{r_n}$ relativement à $1+\frac{h}{p_n}$ et à $1-\frac{h}{p_n}$. Supposons qu'il existe deux valeurs r_{N_1} et r_{N_2} séparatrices. Posons

$$r_{\mathrm{N}_1} = e^{\mathrm{X}_1}, \qquad r_{\mathrm{N}_2} = e^{\mathrm{X}_2}, \qquad \mathrm{N}_1 = e^{\mathrm{Y}_1}, \qquad \mathrm{N}_2 = e^{\mathrm{Y}_2}.$$

Si nous écrivons

$$P(r) = \int_1^{\infty} M\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) dn,$$

nous pourrons décomposer cette intégrale en trois :

$$\int_1^{N_1} e^{(p_n+1)\overline{X-x(n)}} \frac{dn}{p_n(e^{X-x(n)}-1)}, \qquad \int_{N_1}^{N_2} e^{(p_n+1)\overline{X-x(n)}}\, dn,$$

$$\int_{N_2}^{\infty} e^{(p_n+1)\overline{X-x(n)}} \frac{dn}{(p_n+1)(1-e^{X-x(n)})}.$$

Changeons de variable. Remplaçons dn par $e^y y'dx$, et mettons partout e^Y en facteur. L'exposant de e dans les trois intégrales devient $y - Y + (p+1)(X-x)$.

Supposons $p+1$ *égal à* y'. Dans les intégrales extrêmes les quotients $\frac{y'}{p}$ ou $\frac{y'}{p+1}$ disparaissent, comme étant infiniment voisins de 1. Il reste

$$\int_{X_0}^{X_1} e^{-\psi(x,X)} \frac{dx}{e^{X-x}-1}, \qquad \int_{X_1}^{X_2} e^{-\psi(x,X)} y'\, dx, \qquad \int_{X_2}^{\infty} e^{-\psi(x,X)} \frac{dx}{1-e^{X-x}}.$$

ψ, avons-nous dit, croît indéfiniment en même temps que x, X étant fixe, ou en même temps que X, x étant borné. Supposons que ψ croisse assez vite pour assurer la convergence de la dernière intégrale, ou, d'une façon plus précise, pour que

$$\int_{X_2+1}^{\infty} e^{-\psi} \frac{dx}{1-e^{X-x}}$$

soit borné, ainsi que

$$\int_{X_0}^{X_1-1} e^{-\psi} \frac{dx}{e^{X-x}-1}.$$

Alors, les intégrales extrêmes ne deviennent infiniment grandes que par leurs limites X_1 et X_2. Nous majorons le tout en supprimant $e^{-\psi}$ qui est inférieur à 1. Les ordres de grandeur sont les mêmes que dans la somme

$$\int_{X_1-1}^{X_1} \frac{dx}{e^{X-x}-1} + \int_{X_1}^{X_2} y'\, dx + \int_{X_2}^{X_2+1} \frac{dx}{1-e^{X-x}}.$$

A une constante finie près, la première est égale à $L\frac{1}{X - X_1}$, la dernière à $L\frac{1}{X_2 - X}$; la médiane est $Y_2 - Y_1$.

Comme on a sensiblement

$$X_1 = X - \frac{h}{Y'}, \qquad X_2 = X + \frac{h}{Y'},$$

ce sera une hypothèse généralement vérifiée que $Y_2 - Y_1$ soit environ égal à $2h$, et par suite borné tandis que les intégrales extrêmes sont infiniment grandes et *de même ordre,* savoir celui de LY'.

Nous trouvons ainsi

$$P(r) < 2e^{\gamma} LY' = 2nLp.$$

Nous allons préciser le choix de p et les raisonnements qui nous donnent la valeur de $P(r)$.

L'approximation par les fonctions régulières.

34. Soit une suite donnée de nombres non décroissants

$$r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \ldots$$

ou plutôt la suite des logarithmes de ces nombres

$$x(1), \quad x(2), \quad \ldots, \quad x(n), \quad \ldots.$$

Posons, comme nous l'avons indiqué,

$$\log n = y(n).$$

$y(n)$ est une fonction de la variable discontinue $x(n)$, qui peut être mal déterminée avec les acceptions

$$\log m, \quad \log(m+1), \quad \ldots, \quad \log(m+p),$$

pour $x = \xi$, si

$$x(m-1) \neq \xi = x(m) = x(m+1) = \ldots = x(m+p) \neq x(m+p+1),$$

bien qu'à chaque valeur de $y(n)$ corresponde au plus une valeur de x.

Nous ne pourrons pas résoudre les problèmes relatifs à la formation des produits canoniques ni à l'évaluation de leur module maximum, si nous ne faisons sur la fonction $y[x(n)]$ des hypothèses plus restrictives que sa simple croissance. Étant donnée une suite $x(n)$, nous substituerons à la fonction $y(n)$ deux autres fonctions $y_1(x)$, $y_2(x)$, telles que

$$y_1[x(n)] \geqq y[x(n)] \geqq y_2[x(n)],$$

y_1 et y_2 satisfaisant aux conditions qui s'imposeront à nous pour rendre les calculs possibles. De la sorte, nous substituons, pour chaque valeur de n, à $x(n)$ deux nombres $x_1(n)$ et $x_2(n)$, tels que

$$x_1[y(n)] \leqq x(n) \leqq x_2[y(n)].$$

Les résultats des calculs effectués pour y_1 et y_2 se trouveront comprendre entre eux les résultats relatifs à y.

35. Nous pourrons supposer que les courbes représentant $y_1(x)$ et $y_2(x)$ passent par une infinité de points L. Nous construirons pour cela chacune de ces fonctions à partir de sa dérivée seconde que nous supposerons positive et continue. Soit par exemple à construire y_1.

Je définis dans le plan des xy''_1 deux familles de courbes, les courbes c et les courbes γ, telles que :

1° Par chaque point du plan passe au moins une courbe c et au moins une courbe γ, et, sur une même courbe c ou γ, y''_1 varie toujours dans le même sens avec x.

2° Si je fais déplacer et éloigner à l'infini le point $\mu(x, y''_1)$ sur une courbe c, la courbe C décrite par le point

$$x, y_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} y''_1\, dx + \mathrm{A}(x - x_0) + \mathrm{B}$$

finit, quels que soient les nombres fixes A et B, par laisser au-dessous d'elle tous les points L_m à partir d'un certain rang.

3° Si je fais déplacer et éloigner à l'infini le point $\mu(x, y''_1)$ sur une courbe γ, la courbe Γ correspondante décrite par le point (x, y_1) a au-dessus d'elle, quels que soient A et B, une infinité de points L_m. Ceci n'est pas impossible, à cause de l'égalité

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{y(n)}{x(n)} = \infty.$$

4° Étant donnée une courbe quelconque c_0 de la première famille, nous supposerons que, si un point (α, β) est dans sa région négative [la région négative de $y = f(x)$ est $y < f(x)$], il est possible de faire passer par α, β une courbe c, entièrement située pour $x > \alpha$ dans la région négative de c_0 et tendant vers c_0 uniformément dans tout champ borné et tel que $\alpha > \alpha_0$, si le point α, β tend vers le point α_0, β_0 de c_0.

Nous supposerons encore que, par tout point α_0, β_0 de c_0, il est possible de faire passer une courbe γ entièrement située pour $x > \alpha_0$ dans la région négative de c_0.

Alors, si nous faisons décrire successivement à $\mu(x, y''_1)$, d'une part la courbe c_0, d'autre part, de α_0, β_0 à $\alpha\beta$, une ligne entièrement située dans la région négative de c_0, puis la courbe c définie ci-dessus, ou encore la courbe γ passant en α, β, la courbe C_0 correspondant au premier trajet de $\mu(x, y''_1)$ aura dans sa région négative les courbes C ou Γ correspondant à chacun des seconds trajets.

36. Je vais définir y''_1 pour les valeurs croissantes de x. Soit α_0, β_0 un point quelconque du plan des xy''_1. Je considère une courbe c_0 de la première famille passant par ce point. Si je fais décrire à $\mu(x, y''_1)$ cette courbe c_0, la courbe C_0 définie par

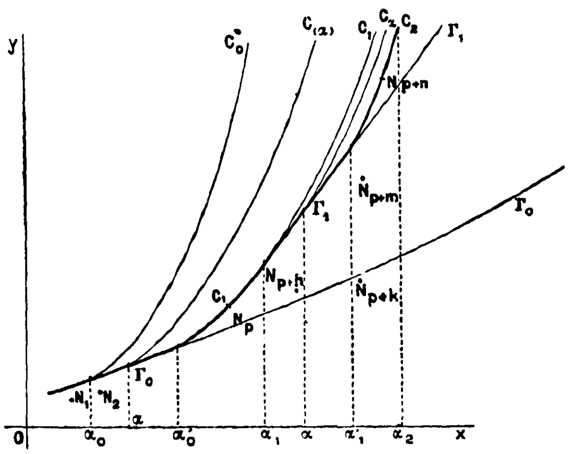
$$y_1 = \int_{\alpha_0}^{x} dx \int_{\alpha_0}^{x} y''_1\, dx + A(x - x_0) + B$$

n'a au-dessus d'elle qu'un nombre fini de points L_m. En augmentant B s'il est nécessaire, je peux supposer qu'il n'y en a aucun (nous supposerons toujours A et B positifs).

Je considère alors la fonction y_1 obtenue en choisissant y''_1 de la façon suivante : de $x = \alpha_0$ à $x = \alpha > \alpha_0$, je fais décrire au point $\mu(x, y''_1)$ une courbe γ_0 passant en α_0, β_0 et située dans la partie négative de c_0, ce qui amène μ en α, β, et, à partir de $x = \alpha$, une courbe c, que je désigne par $c(\alpha)$, telle que, si $\alpha' < \alpha$, $c(\alpha)$ soit dans la région négative de $c(\alpha')$ et que $c(\alpha)$ varie continûment avec α. Comment se comporte y_1?

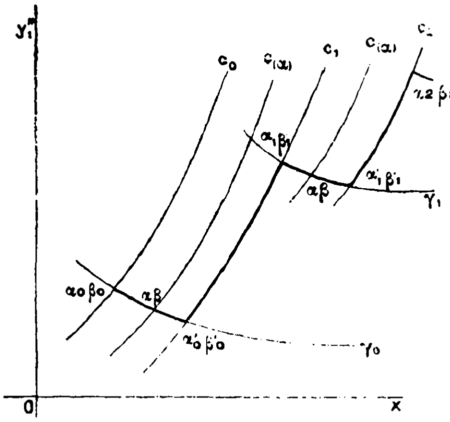
D'abord, x, y_1 décrit un arc de la courbe Γ_0 qui correspondrait à un déplacement indéfini de μ sur γ_0; puis, à partir du point d'abscisse α, une courbe $C(\alpha)$ de l'allure de C_0, laissant au-dessous d'elle tous les L à partir d'un certain rang. $C(\alpha_0)$ coïncide avec C_0. $C(\alpha)$ est dans la région négative de $C(\alpha')$ si $\alpha' < \alpha$ et si $x > \alpha$, et $C(\alpha)$ varie continûment avec α. Est-il possible que α, β s'éloigne indéfiniment sur γ_0 sans que la courbe $C(\alpha)$ correspondante rencontre aucun point L? Évidemment non. Car, soit L_p le premier point situé au-dessus de la

Fig. 3.



courbe Γ_0. Si $\alpha \geqq x(p)$ la courbe $C(\alpha)$ aura toujours au-dessus d'elle le point L_p. Faisons varier α de α_0 à $x(p)$. Pour cette dernière valeur

Fig. 4.



de α, la courbe $C(\alpha)$ a un certain nombre s fini et non nul de points L situés au-dessus d'elle. Pour $\alpha = \alpha_0$, tous sont au-dessous. Quand α varie de α_0 à $x(p)$ d'une façon continue, ces s points traversent successivement la courbe $C(\alpha)$ qui varie d'une façon continue. Il y a donc une valeur α'_0 de α telle que, pour $\alpha < \alpha'_0$, la courbe $C(\alpha)$ est entièrement au-dessus des s points considérés, et, pour $\alpha = \alpha'_0$, il y a au moins un de ces points et au plus tous les s sur la courbe $C(\alpha'_0)$. (Dans la figure 3, les points L du texte sont par erreur désignés par N.)

D'ailleurs, puisque $\alpha'_0 < x(p)$, $C[x(p)]$ est entièrement situé dans la région négative de $C(\alpha'_0)$, et par suite non seulement les s points situés dans la région positive de $C[x(p)]$ mais encore ceux de ses régions négative ou nulle, c'est-à-dire tous les points L, sont ou bien dans la région négative de $C(\alpha'_0)$ ou bien (en nombre au plus égal à s et au moins égal à un) sur $C(\alpha'_0)$.

Je fais décrire à x, y''_1 la courbe $c(\alpha'_0)$ que nous désignerons par c_1, à partir de $\alpha'_0 \beta'_0$, jusqu'à ce que le point x, y_1 qui décrit C_1 [ou $C(\alpha'_0)$], ait surpassé d'une unité en ordonnée le dernier des points L qu'il peut rencontrer. J'appelle α_1, β_1 le point où j'arrête x, y''_1, et d'où la construction recommence comme en α_0, β_0.

Je fais décrire à $\mu(x, y''_1)$ une courbe γ_1 de la seconde famille, située dans la région négative de c_1 et passant par $\mu_1(\alpha_1, \beta_1)$, jusqu'au point α, β et à partir de α une courbe c. Les courbes c sont dans la région positive de γ_1, $c(\alpha)$ est dans la région négative de $c(\alpha')$ si $\alpha' < \alpha$, pour $x > \alpha$, et $c(\alpha)$ varie continûment. Le point x, y_1 décrit un arc de la courbe Γ_1 correspondant à γ_1, puis une courbe $C(\alpha)$. Je choisis pour α la valeur α'_1 telle que, pour $\alpha < \alpha'_1$, les courbes $C(\alpha)$ correspondantes sont entièrement au-dessus de tous les points L, et telle que $C(\alpha'_1)$ que je désigne par C_2 rencontre au moins un des points L et en tous cas un nombre fini d'entre eux. Je déplace $\mu(x, y''_1)$ sur la courbe c_2 qui part de $\alpha'_1 \beta'_1$ jusqu'à ce que x, y_1 ait surpassé d'une unité en ordonnée le dernier point L situé sur C_2. Soit α_2, β_2 le point où x, y''_1 est arrêté. J'applique de nouveau la construction à partir de ce point, etc.

La courbe x, y_1 construite de proche en proche se trouvera rencontrer une infinité de points L et n'en avoir aucun au-dessus d'elle. Enfin, y''_1 existe, est positif et continu.

37. Définissons les courbes c et γ dans les divers cas possibles.

Premier cas. — $\overline{\lim} \frac{y}{x^2} = \infty$. Les courbes γ seront des parallèles à l'axe des x.

Les courbes c auront des équations de la forme

$$\eta = F''(\xi - \lambda),$$

λ étant un paramètre, η et ξ étant les coordonnées courantes.

On voit immédiatement que, dans notre construction précédente, λ prendra des valeurs de plus en plus grandes positives. Il faudra donc que la courbe

$$\eta = F(\xi - \lambda),$$

quel que soit λ fixe, finisse par dépasser tous les points L. Si nous joignons deux à deux les points consécutifs L_m, L_{m+1}, nous obtenons une ligne brisée $y = f(x)$.

Il nous suffira que

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{f(x+\lambda)} = \infty,$$

quel que soit le nombre λ fixe, et pour cela que

$$\lim_{x=\infty} \frac{F(x)}{f(x+\lambda_n)} = \infty,$$

λ_n prenant une suite de valeurs tendant vers l'infini. Ce problème a été résolu par Du Bois-Reymond. Si nous voulons que $F(x)$ ait une dérivée seconde positive, ou même des dérivées de tout ordre, nous prendrons

$$F(x) = \sum_1^\infty \left(\frac{x}{n}\right)^{h_n},$$

et nous déterminerons, comme il suit, les exposants h_p qui sont des entiers croissants. Soit $\varphi(x)$ une fonction tendant vers l'infini avec x, et

$$f(x+\lambda_n) = f_n(x).$$

Je détermine h_p par la condition que le $p^{\text{ième}}$ terme de la série $\left(\frac{x}{p}\right)^{h_p}$ soit, pour

$$p+1 \leqq x \leqq p+2,$$

supérieur à $\mu_p \varphi(p)$, μ_p étant le maximum de

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_p(x)$$

dans le même intervalle. Les fonctions f_i étant croissantes, et d'après

$$f_{i+1}(x) > f_i(x),$$

il suffit que

$$\left(\frac{p+1}{p}\right)^{h_p} > \varphi(p) f_p(p+1) = \varphi(p) f(p+1+\lambda_p).$$

Je prends pour h_p le premier entier supérieur à h_{p-1} satisfaisant à cette inégalité. Alors, pour

$$x > p+1,$$

on aura toujours

$$\mathrm{F}(x) > \varphi(x) f_i(x),$$

i étant l'un quelconque des nombres 1, 2, ..., p. Donc, $\frac{\mathrm{F}(x)}{f_i(x)}$ tend vers l'infini avec x, quel que soit i.

On voit immédiatement que le système de courbes c, γ proposé satisfait à toutes les conditions requises.

Deuxième cas. — $\overline{\lim\limits_{x=\infty}} \frac{y}{x^2} = a \neq 0$.

Je prends pour équations des courbes c et γ respectivement

$$\eta = a + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\xi - \lambda} \qquad \text{et} \qquad \eta = a - \frac{1}{\lambda'} + \frac{1}{\xi - \lambda'}.$$

On constate que par tout point α, β du demi-plan $\xi > 0$ passe une courbe et une seule de chaque famille telle que $0 < \lambda < \alpha$ et $0 < \lambda' < \alpha$.

Les courbes c sont des hyperboles ayant leurs asymptotes parallèles aux axes et situées dans les angles de ces asymptotes où pénètre et reste $y = -x$.

Seule nous intéresse la branche aux x positifs. L'asymptote parallèle à Ox a son ordonnée supérieure à a, l'autre a son abscisse positive. Si un point α_1, β_1 est dans la partie négative de la branche d'hyperbole qui passe en α, β, la valeur λ_1 est supérieure à λ, et les deux branches d'hyperboles n'ont pas de points communs.

Les courbes γ sont les symétriques des précédentes relativement à $\eta = a$.

Si, dans la construction exposée, on prend successivement un arc sur γ_0, un arc sur c_1, un arc sur γ_1, etc., avant d'atteindre respectivement les arcs de c_n et de γ_n, on est constamment (pour $\xi > \lambda_n$) dans la région positive de c_n et (pour $\xi > \lambda'_n$) dans la région négative de γ_n. Cela explique que λ et λ' sont infiniment grands avec n. Sinon, comme λ et λ' croissent toujours, si l'un, λ par exemple, ne devient pas infini, il reste inférieur à un nombre fixe λ_0 et l'on a toujours, à partir de $\xi > \lambda_0$,

$$\eta > a + \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\xi - \lambda_0}.$$

En intégrant, on trouverait que

$$\overline{\lim} \frac{y(n)}{x^2(n)} \geqq a + \frac{1}{\lambda_0} > a.$$

Si λ' restait inférieur à λ'_0, la plus grande limite de $\frac{y}{x^2}$ serait de même inférieure à $a - \frac{1}{\lambda'_0}$. Donc, y''_1 tend vers a.

Troisième cas. — $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{y(n)}{x^2(n)} = 0$.

Je prends pour courbes c des parallèles à l'axe des x et pour courbes γ des courbes telles que

$$\eta = \frac{1}{k + (\xi - \lambda)^2}.$$

38. Pareillement, on peut s'arranger pour que y''_1 vérifie la condition, dont nous reconnaîtrons l'intérêt,

$$\lim_{x=\infty} y''_1 \left[x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''_1(x)}} \right] : y''_1(x) = 1,$$

quelque grand que soit le nombre fixe k, et quelle que soit la façon dont varie θ entre 0 et 1.

Définissons dans les trois cas précédents les courbes c et γ passant par un point α, β.

Premier cas. — Considérons le faisceau de courbes

$$\eta = \frac{\beta}{\left[1 - \frac{\varepsilon\sqrt{\beta}}{k}(\xi - \alpha) \right]^2}$$

qui passent en α, β.

On a, quel que soit k, fixe,

$$\eta\left[\xi+\frac{\theta k}{\sqrt{\eta(\xi)}}\right]=\frac{1}{(1-\theta\varepsilon)^2}\eta(\xi).$$

Ces courbes dépendent encore du paramètre k, si on laisse ε fixe. Les courbes γ correspondent à k infini, $\eta=\beta$. Pour une valeur quelconque de k, on a une courbe c. Car la courbe C correspondante décrite par x, y_1 a une asymptote verticale. Enfin, on peut supposer pour les courbes c qu'on particularise les valeurs de ε et k pour chaque point α, β, de façon que $\frac{1}{\varepsilon}$ et k soient infiniment grands, si α et β le sont simultanément.

Il suffirait, pour que toutes les hypothèses soient vérifiées, de prendre pour réseau c les courbes qui passent en un même point α_0, β_0 choisi une fois pour toutes,

$$\eta=\frac{\beta_0}{[1-\lambda(\xi-\alpha_0)]^2}.$$

Quand α, β s'éloigne, λ tend vers zéro et la condition proposée pour y''_1 est vérifiée.

Deuxième cas. — Nous avons construit y_1 de façon que y''_1 tendît vers une limite non nulle : le problème actuel est donc résolu.

Troisième cas. — Considérons les courbes

$$\eta=\frac{\beta}{\left[1+\frac{\varepsilon\sqrt{\beta}}{k}(\xi-\alpha)\right]^2}.$$

On a

$$\eta\left[\xi+\frac{\theta k}{\sqrt{\eta}}\right]=\frac{1}{(1+\theta\varepsilon)^2}\eta(\xi).$$

Pour k infini, on a les courbes c, $\eta=\beta$.

Une valeur finie de k donnera une courbe γ. Car la courbe Γ correspondante décrite par x, y_1 a une asymptote non verticale. Comme ci-dessus, la valeur de k correspondant à une valeur de α donnée sera choisie infiniment grande avec α.

Nous montrerons plus loin que y'_1 satisfait à la relation

$$\lim y'_1\left[x+\frac{\theta k}{y'_1(x)}\right] : y'_1(x)=1.$$

39. Pour construire $y_2(x)$ à partir de y''_2, nous définirons de même deux familles de courbes dans le plan des x, y''_2 : l'une formée des courbes c telles que, si xy''_2 les suit toujours, tous les points L_n finissent (du moins si A et B, supposés positifs, ne sortent pas d'un certain champ) par surpasser la courbe

$$x, y_2=\int_{x_0}^{x} dx\int_{x_0}^{x} y''_2\,dx+A(x-x_0)+B;$$

l'autre formée des courbes γ telles que, si xy''_2 suit constamment l'une d'elles, xy_2 surpasse une infinité de points L, quels que soient A et B. Le choix de y''_2 se décrit comme celui de y''_1. Il y a trois cas à distinguer, suivant que $\varliminf\limits_{x=\infty}\dfrac{y(n)}{x^2(n)}$ est infini, fini ou nul.

Nous n'aurons jamais à calculer explicitement y_1 ni y_2. Il nous suffit d'avoir prouvé leur existence et donné un moyen théorique de les obtenir.

Calcul de la limite supérieure du module d'un produit canonique.

40. Soit donc $F(z)$ un produit supposé canonique. Soit p_n l'exposant de convergence du $n^{\text{ième}}$ facteur $E\left(\dfrac{z}{a_n}, p_n\right)$. Soit $\varphi(u, p_n)$ le maximum de $\log|E(x, p_n)|$ pour $|x|=u$ [ce que nous désignions aussi au précédent Chapitre par $M_{p_n}(u)$]. Pour $|z|=r$, le maximum de $\log\left|E\left(\dfrac{x}{a_n}, p_n\right)\right|$ est $\varphi\left(\dfrac{r}{r_n}, p_n\right)$, et la limite supérieure $P(r)$ du maximum de $\log|F(z)|$ est

$$\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right).$$

Nous poserons

$$\log r = X \qquad \text{et} \qquad P(r)=\Pi(X).$$

Nous avons trouvé trois formes approchées pour φ.

Supposons que la fonction $\log n$ de $\log r_n$, interpolée pour les valeurs de $x = \log r$ comprises entre les nombres de la suite $\log r_n$, ait sa dérivée jamais décroissante, ou même simplement (¹) qu'*il existe un entier p croissant* (qui sera notre exposant de convergence) et *une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ tels que pour*

$$x_p \leqq x < x_{p+1}, \qquad p - \alpha \leqq y' < p + 1 - \alpha,$$

α étant positif et fixe. Nous dirons que *y satisfait à l'hypothèse* A. Nous supposerons α inférieur à 1, bien que cette hypothèse n'intervienne pas en fait dans le résultat final. Nous choisirons, si

$$x_p \leqq x < x_{p+1}, \qquad p_n = p.$$

Nous allons montrer que les deux sommes désignées au début de ce Chapitre par $P_1(r) = \Pi_1(X)$ et $P_2(r) = \Pi_2(X)$ sont bien du même ordre de grandeur et évaluer $\Pi(X)$.

Nous désignerons par ν_p la valeur de e^y pour $x = x_p$; par n_p le plus petit entier non inférieur à ν_p. On a

$$n_p - 1 < \nu_p \leqq n_p.$$

Si

$$\nu_p, \quad \nu_{p+1}, \quad \ldots, \quad \nu_{p+m}$$

sont compris entre deux entiers consécutifs, si l'on a

$$\nu_{p-1} < i - 1 < \nu_p \leqq \nu_{p-1} \leqq \ldots \leqq \nu_{p+m} \leqq i < \nu_{p+m+1},$$

nous désignerons i par n_{p+m}, $i - 1$ de préférence par $n_p - 1$ et nous dirons que

$$n_{p-1} < n_p = n_{p+1} = \ldots = n_{p+m} < n_{p+m+1}.$$

Alors, quel que soit p si

$$n_p \leqq n \leqq n_{p+1} - 1,$$

l'exposant de convergence attaché au zéro a_n est p.

(¹) y' n'est pas nécessairement croissant, mais peut osciller entre les valeurs $p - \alpha$ et $p + 1 - \alpha$ $\left(\text{par exemple au voisinage de } p + \frac{1}{2}\right)$, après avoir pris la première et avant de prendre la seconde. Ceci est à rapprocher du fait signalé par M. Boutroux (*Acta mathematica*, 1904, p. 103 et suivantes, p. 115) au sujet des fonctions de genre fini, que la limitation de leur module peut se faire si

$$p + \alpha < y' < p + 1 - \alpha.$$

41. Donnons-nous un nombre ε arbitrairement petit. Nous allons calculer le module maximum du produit canonique avec une approximation inférieure à ε, ou du moins inférieure à un nombre arbitrairement petit en même temps que ε.

On sait qu'il existe deux nombres h et p_0, tels que, si $p \geqq p_0$:

1° Pour $u < 1 - \frac{h}{p}$, on a [si $M(u)$ désigne $\varphi(u, p)$]

$$1 < \frac{G(u)}{M(u)} < 1 + \varepsilon \qquad \text{avec} \qquad G(u) = \frac{u^{p+1}}{(p+1)(1-u)};$$

2° Pour $u > 1 + \frac{h}{p}$, on a

$$1 - \varepsilon < \frac{G(u)}{M(u)} < 1 \qquad \text{avec} \qquad G(u) = \frac{u^{p+1}}{p(u-1)};$$

3° Pour $1 - \frac{h}{p} < u < 1 + \frac{h}{p}$, nous utiliserons seulement ce fait que $M(u)$ est borné. Il peut être cependant intéressant de remarquer que le rapport $\frac{G(u)}{M(u)}$ est fini quand h est borné, si

$$G(u) = u^{\tau}, \qquad p \leqq \tau \leqq p + 1.$$

D'après cela, je forme un premier groupement *fixe* avec les facteurs d'exposant inférieur à p_0. Le plus haut rang de ces facteurs est $n_{p_0} - 1$. Nous désignerons aussi n_{p_0} par N_0.

Je divise les termes qui suivent en trois catégories suivant que leurs y sont : 1° inférieurs à $Y_1 = Y - h$; 2° compris entre Y_1 et $Y_2 = Y + h$; 3° supérieurs à Y_2.

Soient X_1 la valeur de x correspondant à Y_1, X_2 celle qui correspond à Y_2. D'après

$$Y - y = (X - x) y'(\lambda),$$

λ étant compris entre x et X, on a, si $Y_1 < y < Y$,

$$(X - x)(p - \alpha) < Y - y < h,$$

si $x_p \leqq x < x_{p+1}$, en sorte que pour les zéros de cet intervalle $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ est borné en même temps que h. $\left(\text{Remarquons en même temps que } X - X_1 \text{ est infiniment petit avec } \frac{1}{X}.\right)$

Si $Y_2 < y$,

$$(x - X)(p + 1 - \alpha) > y - Y > h,$$

en sorte que la forme $\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \frac{1}{p\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)}$ nous donnera $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$, avec une erreur relative inférieure à ε. D'après $X_2 - X < \frac{h}{P - \alpha}$, $X_2 - X$ est infiniment petit avec $\frac{1}{X}$.

Nous désignerons par P, P_1, P_2 les exposants qui règnent respectivement en X, X_1, X_2, en sorte qu'on a

$$x_P \leqq X < x_{P+1}, \qquad x_{P_1} \leqq X_1 < x_{P_1+1}, \qquad x_{P_2} \leqq X_2 < x_{P_2+1},$$

par N_1 ou par n'_{P_1+1} le plus petit entier que ne surpasse pas e^{Y_1},

$$n'_{P_1+1} - 1 < e^{Y_1} \leqq n'_{P_1+1};$$

par N_2 ou par n'_{P_2} le plus petit entier que ne surpasse pas e^{Y_2},

$$n'_{P_2} - 1 < e^{Y_2} \leqq n'_{P_2}.$$

Nous désignerons aussi e^{Y_1} par ν'_{P_1+1} et e^{Y_2} par ν'_{P_2}. On a

$$\nu'_{P_1+1} \leqq n'_{P_1+1} \leqq n_{P_1+1}$$

et

$$n_{P_2} \leqq \nu'_{P_2} \leqq n'_{P_2}.$$

Nous écrivons la somme à évaluer

$$\Pi(X) = \sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = \sum_1^{N_0 - 1} + \sum_{N_0}^{N_1 - 1} + \sum_{N_1}^{N_2 - 1} + \sum_{N_2}^{\infty} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3.$$

S_0 est inférieur à

$$r^{p_0} \sum_1^{N_0 - 1} \frac{1}{r_n^{p_0}}.$$

N_0 étant fixe, comme les sommes suivantes, dans leur ensemble, croissent plus vite que r^m, quel que soit le nombre fixe m, S_0 à partir d'une certaine valeur de X deviendra inférieur à $\varepsilon\,\Pi(X)$. Nous n'aurons donc pas à nous occuper de S_0.

S_3 nous sera plus facile à évaluer que S_1.

42. *Calcul de* S_3. — Posons

$$\sum_{n=n_p}^{n=n_{p+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) = U_p, \qquad \sum_{n'_{P_2}}^{n_{P_2+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_2\right) = U'_{P_2}.$$

Nous avons

$$S_3 = U'_{P_2} + U_{P_2+1} + \ldots + U_p + \ldots.$$

La fonction $y = f(x)$ interpole la fonction r_n de n pour les valeurs non entières de n. Du même coup se trouve interpolée la fonction $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ pour toutes les valeurs de n, et pour chaque valeur entière et fixe de p. La fonction interpolatrice $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$, p étant fixe, décroît relativement à n. Grâce à cette décroissance il est aisé d'évaluer l'erreur commise en remplaçant U_p par

$$V_p = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn.$$

Nous posons aussi

$$V'_{P_2} = \int_{\nu'_{P_2}}^{\nu_{P_2+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_2\right) dn.$$

Mais remarquons dès maintenant que, pour une même valeur de n,

$$\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) \gtrless \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p+1\right),$$

parce que $\frac{r}{r_n}$ est inférieur à

$$1 - \frac{h}{P_2} < 1 - \frac{h}{p} < 1 - \frac{1}{2p}$$

(*voir* page 37 en note).

Posons

$$T_p = \int_{n_p}^{n_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn.$$

Pour $p = P_2$, nous remplaçons T_p par T'_{P_2} et n_p par n'_{P_2}.

Nous démontrerons plus loin que la série V_p converge. Si nous admettons sa convergence, le calcul suivant montre celles de U_p et de T_p et rattache leurs valeurs à celle de la première.

Nous désignerons par

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' U_p$$

la somme

$$U'_{P_2} + U_{P_2+1} + \ldots + U_{P_2+m}.$$

De même

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p = V'_{P_2} + \sum_{P_2+1}^{P_2+m} V_p,$$

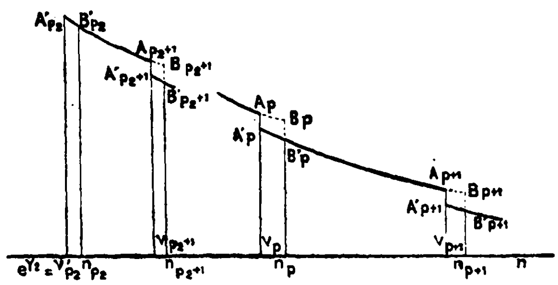
$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p = T'_{P_2} + \sum_{P_2+1}^{P_2+m} T_p.$$

On a

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p = \int_{\nu'_{P_2}}^{\nu_{P_2+m+1}} f_1(n)\,dn, \qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p = \int_{n'_{P_2}}^{n_{P_2+m+1}} f_2(n)\,dn.$$

Indiquons par une figure le trajet des points représentatifs des fonctions f_1, f_2. Soient A_p, B_p les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right)$ et

Fig. 5.



d'abscisses respectives ν_p, n_p. Soient A'_p, B'_p les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ et d'abscisses ν_p, n_p. A'_{P_2}, B'_{P_2} ont pour ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_2\right)$ et pour abscisses ν'_{P_2}, n'_{P_2}. Le point représentatif de f_1 suit le trajet (trait fort

$$A'_{P_2} A_{P_2+1}, \quad A'_{P_2+1} A_{P_2+2}, \quad \ldots, \quad A'_{P_2+m} A_{P_2+m+1}.$$

Le point représentatif de f_2 suit le trajet (trait fort et trait pointillé)

$$B'_{P_2} B_{P_2+1}, \quad \ldots, \quad B'_{P_2+m} B_{P_2+m+1}.$$

Les arcs $A'_p A_{p+1}$, $B'_p B_{p+1}$ sont tous deux sur la courbe d'ordonnée $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$. On a donc

$$(1)\qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p - \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p = \int_{\nu'_{P_2}}^{n'_{P_2}} f_1(n)\, dn$$
$$- \int_{n'_{P_2}}^{\nu_{P_2+m+1}} (f_2 - f_1)\, dn - \int_{\nu_{P_2+m+1}}^{n_{P_2+m+1}} f_2(n)\, dn.$$

Évaluons l'intégrale médiane. $f_2 - f_1$ est nul si $n_p < n < \nu_{p+1}$. Si $\nu_p < n < n_p$,

$$f_2 - f_1 = \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right),$$

et par suite

$$0 < f_2 - f_1 < \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}, p-1\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) = v_p.$$

Donc

$$0 < \int_{\nu_p}^{n_p} (f_2 - f_1)\, dn < v_p,$$

d'après $n_p - \nu_p < 1$. Donc

$$0 < \int_{n'_{P_2}}^{\nu_{P_2+m+1}} (f_2 - f_1)\, dn < \sum_{P_2+1}^{P_2+m} v_p$$
$$= \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{P_2+1}}}, P_2\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+1}}}, P_2+1\right) + \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{P_2+2}}}, P_2+1\right)$$
$$- \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+2}}}, P_2+2\right) + \ldots - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+m}}}, P_2+m\right).$$

Le second membre est la somme des $2m$ premiers termes d'une série alternée à termes décroissants, elle est inférieure au premier terme

$$\left(\frac{r}{r_{\nu_{P_2+1}}}, P_2\right) < \varphi(1, P_2) < k,$$

k étant indépendant de P_2.

D'ailleurs

$$\int_{\nu'_{P_2}}^{n'_{P_2}} f_1(n)\, dn < \varphi(1, P_2) < k.$$

Quant au dernier terme de (1),

$$\int_{\nu_{P_2+m+1}}^{n_{P_2+m+1}} f_2(n)\,dn,$$

il tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Donc

$$(1)\qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p - \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p = \delta k - \eta(m) \qquad (\delta^2 < 1);$$

$\eta(m)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{m}$. Comme conséquence particulière, la série T_p à termes positifs converge en même temps que V_p.

On a enfin, θ_p étant positif inférieur à 1,

$$U_p = T_p + \theta_p\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{p+1}}}, p\right)\right] = T_p + \theta_p t_p.$$

Les formules sont les mêmes pour $p = P_2$ en remplaçant U_p, T_p, n_p par U'_{P_2}, T'_{P_2}, n'_{P_2}. Or

$$\begin{aligned}\sum_{P}^{P_2+m}{}' t_p = \varphi\left(\frac{r}{r_{n'_{P_2}}}, P_2\right) \\ - \sum_{P_2+1}^{P_2+m}\left[\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p+1\right)\right] - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{P_2+m+1}}}, P_2+m+1\right).\end{aligned}$$

Donc $\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' t_p$, qui est positif puisque t_p l'est, est inférieur à

$$\varphi\left(\frac{r}{r_{n'_{P_2}}}, P_2\right) < k.$$

Donc

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' U_p = \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p + \theta\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' t_p = \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p + \theta k.$$

En substituant la valeur de $\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' T_p$ dans (1), on trouve

$$(2)\qquad \sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p = \sum_{P}^{P_2+m}{}' U_p + 2\delta k - \eta(m).$$

Tel est le résultat que nous avions en vue. La série U_p est convergente si V_p l'est et les sommes des deux séries ne diffèrent que d'une quantité bornée.

Remarquons que nous avons supposé les nombres n_p distincts. Si n_p coïncide avec n_{p+1}, on a simplement

$$U_p = T_p = 0.$$

La différence $\sum_{P_1}^{P_1+m}{}'(V_p - U_p)$ a toujours les bornes que nous avons calculées.

43. Évaluons les termes de la série V_p. On a

$$V_p = (1-\theta\varepsilon)\int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \frac{dn}{p\left(1-\frac{r}{r_n}\right)},$$

et θ est compris entre 0 et 1 parce que $\frac{r}{r_n} < 1 - \frac{h}{p}$. Nous prenons pour nouvelle variable d'intégration x. Les limites sont x_p et x_{p+1}. dn devient $e^y y'\,dx$ et $\frac{y'}{p}$ est compris entre $1-\frac{\alpha}{p}$ et $1+\frac{1-\alpha}{p}$. Donc, p_0 étant assez grand,

$$e^{-Y} V_p = (1+2\delta\varepsilon)\int_{x_p}^{x_{p+1}} e^{y-Y+(p+1)(X-x)} \frac{dx}{1-e^{X-x}} \qquad (\delta^2 < 1).$$

Or, d'après

$$y' < p+1-\alpha \qquad \text{si} \qquad x_p \leqq x < x_{p+1},$$

nous avons

$$\begin{aligned} y - Y = \int_X^x y'\,dx &< (P+1-\alpha)(x_{P+1} - X) \\ &+ (P+2-\alpha)(x_{P+2} - x_{P+1}) + \ldots + (p+1-\alpha)(x - x_p). \end{aligned}$$

D'où

$$y - Y + (p+1)(X-x) < -\alpha(x-X) - \left[x_p + x_{p-1} + \ldots + x_{P+1} - \overline{p-P}X\right].$$

Au second membre la partie entre crochets est positive. Comme nous ne pouvons l'évaluer, nous la supprimons, ce qui renforce l'inégalité. Donc

$$V_p < (1+2\varepsilon)e^Y \int_{x_p}^{x_{p+1}} \frac{e^{-\alpha(x-X)}}{1-e^{X-x}}\,dx.$$

En donnant pour limites à l'intégrale X_2 et x_{P_2+1}, on a une limite supérieure de V'_{P_2}. Donc

$$\sum_{P_2}^{P_2+m}{}' V_p < (1+2\varepsilon)e^{Y} \int_{X_2}^{x_{P_2+m+1}} \frac{e^{-\alpha(x-X)}}{1-e^{X-x}}\,dx.$$

Ceci nous montre que la série V_p est convergente et nous donne une limite supérieure de sa somme. On a

$$e^{-Y} \sum_{P_2}^{\infty}{}' V_p < (1+2\varepsilon) \int_{X_2}^{\infty} \frac{e^{-\alpha(x-X)}}{1-e^{X-x}}\,dx.$$

L'intégrale du second membre devient par le changement de variable

$$\frac{r_n}{r} = e^{x-X} = u,$$

et si l'on pose $e^{X_2-X} = 1 + a$,

$$\int_{1+a}^{\infty} \frac{du}{u^{\alpha}(u-1)},$$

α étant fixe et a infiniment petit. Ceci est égal à $L\frac{1}{a} + C'_3$, C'_3 tendant vers une limite. Nous trouvons donc

$$e^{-Y} \sum_{P_2}^{\infty}{}' V_p < (1+2\varepsilon)\left(L\frac{1}{X_2 - X} + C'_3\right).$$

Comme $S_3 = \sum_{P_2}^{\infty}{}' U_p$ ne diffère de $\sum_{P_2}^{\infty}{}' V_p$ que d'une quantité bornée, on a, C_3 étant borné,

$$S_3 < (1+2\varepsilon)\left(L\frac{1}{X_2 - X} + C_3\right)e^{Y}.$$

44. *Calcul de* S_2. — On a

$$S_2 = \sum_{X_1}^{X_2-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n},\, p_n\right) = \sum_{X_1}^{X-1} + \sum_{X}^{X_2-1} = S'_2 + S''_2.$$

Évaluons d'abord S''_2. Chacun des termes de la somme S''_2 est inférieur à $\varphi(1, p_n)$ qui est inférieur à k, quel que soit p_n. Donc

$$S''_2 < (N_2 - N)k < (e^Y \overline{e^h - 1} + 2\theta)k, \qquad S''_2 = e^Y C''_2,$$

C''_2 est borné.

Étudions S'_2. Nous avons vu que, si $X_1 < x(n) < X$, $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ est borné, parce que $p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)$ l'est. En effet,

$$(X - x)(p - \alpha) < Y - y < h.$$

Or, *sans qu'il soit besoin d'utiliser la forme u^τ approchée de* $M(u)$, il résulte d'un théorème établi au premier Chapitre que, si $p(u - 1)$ est borné, $M(u)$ l'est également. Soit donc C'_1 la borne de φ.

Le nombre des termes de S'_2 étant à une unité près

$$e^Y(1 - e^{-h}),$$

on a

$$e^{-Y} S'_2 < C'_2(1 - e^{-h}),$$

et par suite

$$S_2 < C_2 e^Y,$$

C_2 étant borné.

45. *Calcul de* S_1. — Nous posons toujours

$$U_p = \sum_{n_p}^{n_{p+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$$

et

$$V_p = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn.$$

Soient

$$U'_{P_1} = \sum_{n_{P_1}}^{n'_{P_1+1}-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_1\right), \qquad V'_{P_1} = \int_{\nu_{P_1}}^{\nu'_{P_1+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_1\right)$$

(on a $\nu'_{P_1+1} = e^{Y_1}$). Nous notons

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p = \sum_{p_0}^{P_1-1} U_p + U'_{P_1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p = \sum_{p_0}^{P_1-1} V_p + V'_{P_1}.$$

Nous remplaçons $\sum_{p_0}^{p_1}{}' \mathrm{U}_p = \mathrm{S}_1$ par $\sum_{p_0}^{p_1}{}' \mathrm{V}_p$ en commettant une erreur que nous évaluerons ensuite.

Nous savons que, si $p_n[\mathrm{X} - x(n)]$ est supérieur à h, on a certainement

$$\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) = (1 + \theta\varepsilon)\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1} \frac{1}{p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)}.$$

Si donc nous remplaçons $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ par cette dernière expression dans chaque terme de S_1, nous obtenons la valeur de S_1 en négligeant cependant dans cette somme les nombres [1] pour lesquels $p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)$ est inférieur à h. Mais, pour ces termes, $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ a une certaine borne k_1. Ils sont en nombre certainement inférieur à e^{Y_1} et à plus forte raison à e^{Y}. Si donc

$$\mathrm{W}_p = \int_{\nu_p}^{\nu_{p+1}} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \frac{dn}{p\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)},$$

on a certainement

$$\sum_{p_0}^{p_1}{}' \mathrm{V}_p = (1 + \theta\varepsilon)\sum_{p_0}^{p_1}{}' \mathrm{W}_p + e^{\mathrm{Y}} k_1.$$

Or,

$$e^{-\mathrm{Y}}\mathrm{W}_p = \int_{x_p}^{x_{p+1}} e^{y-\mathrm{Y}+(p+1)(\mathrm{X}-x)} \frac{y'}{p} \frac{dx}{e^{\mathrm{X}-x} - 1};$$

$\frac{y'}{p}$ est inférieur à $1 + \frac{1-\alpha}{p_0}$. On peut supposer que le nombre fixe p_0 a été choisi assez grand pour que $\left(1 + \frac{1-\alpha}{p_0}\right)(1 + \varepsilon) < 1 + 2\varepsilon$. D'autre

[1] La fonction $p_n\left(\frac{r}{r_n} - 1\right)$ a relativement à r_n un sens de variation sur lequel nous ne pouvons rien affirmer *a priori*. Tandis que, pour $r_n > r$, elle est constamment décroissante, pour $r_n < r$, elle peut présenter des oscillations, par exemple, croître brusquement si, r_n restant sensiblement constant, p_n reçoit un grand accroissement subit, pour décroître ensuite lentement, si p_n varie très peu, pendant que r_n croît dans un certain intervalle.

part, d'après $y' \geqq p - \alpha$, si $x_p \leqq x < x_{p+1}$,

$$\begin{aligned} Y - y = \int_x^X y'\,dx > (p-\alpha)(x_{p+1} - x_p) \\ + (p+1-\alpha)(x_{p+2} - x_{p+1}) + \ldots + (P-\alpha)(X - x_P) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} y - Y + (p+1)(X - x) \\ < (1+\alpha)(X-x) - [\overline{P-p}X - x_P - x_{P-1} - \ldots - x_p]. \end{aligned}$$

Comme dans le calcul de S_3, nous supprimons le crochet, quantité positive, ce qui renforce l'inégalité

$$e^{-Y} W_p < \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon} \int_{x_p}^{x_{p+1}} e^{(1+\alpha)(X-x)} \frac{dx}{e^{X-x} - 1}.$$

Donc

$$e^{-Y} \sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p < (1+2\varepsilon) \int_{x_{p_0}}^{X_1} \frac{e^{(1+\alpha)(X-x)}}{e^{X-x}-1}\,dx + k_1.$$

Le changement de variable

$$\frac{r}{r_n} = e^{X-x} = u$$

et les notations

$$e^{X-x_{p_0}} = A, \qquad e^{X-X_1} = 1 + a$$

transforment l'intégrale en

$$I = \int_{1+a}^{A} \frac{u^\alpha\,du}{u-1}.$$

Cette intégrale devient infiniment grande par ses deux limites, A et $\frac{1}{a}$ étant eux aussi infiniment grands. Pour l'évaluer, nous écrivons

$$\begin{aligned} \int_{1+a}^{A} \frac{u^\alpha\,du}{u-1} = \int_{1+a}^{2} \frac{du}{u-1} + \int_{1+a}^{2} \frac{u^\alpha - 1}{u-1}\,du \\ + \int_2^A u^\alpha \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right) du + \int_2^A u^{\alpha-1}\,du. \end{aligned}$$

La première intégrale est $L\frac{1}{a}$. La seconde tend vers $\int_1^2 \frac{u^\alpha - 1}{u-1}\,du$ qui a un sens. La troisième vers $\int_2^\infty \frac{du}{u^{1-\alpha}(u-1)}$ qui a un sens, puisque $\alpha < 1$. La dernière est $\frac{1}{\alpha}(A^\alpha - 2^\alpha)$. Donc, notre intégrale est

$$L\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}A^\alpha + c'_1,$$

c'_1 tendant vers une limite pour X infini.

Or

$$a = e^{X-X_1} - 1 = (X - X_1)(1+\eta),$$

η tendant vers zéro avec $\frac{1}{X}$ puisque $X - X_1 < \frac{h}{P_1 - \alpha}$ tend vers zéro. D'après $A = e^{X - x_{p_0}}$, il vient pour expression de I

$$L\frac{1}{X - X_1} + \frac{1}{\alpha}e^{\alpha X - \alpha x_{p_0}} + c'_1.$$

p_0 qui est choisi une fois pour toutes peut être supposé assez grand pour que, α étant fixe, $\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x_{p_0}} < \varepsilon$. Donc

$$e^{-Y}\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p < (1+2\varepsilon)\left(L\frac{1}{X - X_1} + \varepsilon e^{\alpha X} + C_1\right),$$

et ceci est aussi, à une quantité bornée près, la limite supérieure de $e^{-Y}S_1$, sauf l'erreur introduite par la substitution de $\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p$ à $\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p$. C'est là le dernier point à examiner.

46. Mais auparavant, remarquons que S_2 *se trouve être négligeable à l'égard de* S_1 *et de* S_3. Pour les fonctions de genre fini au contraire, à croissance suffisamment régulière, il est possible de prendre h assez grand pour que, à ε près, on n'altère pas le maximum de la fonction en négligeant les zéros de rang extérieur à l'intervalle $\frac{n}{h}$ à nh. Pour les fonctions de genre infini, quelque grand que soit h fixe, les zéros de rang compris entre $\frac{n}{h}$ et nh apportent à la limite supérieure du module une contribution négligeable à l'égard de celle des autres zéros.

47. Évaluons la différence

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p.$$

Comme dans le cas de S_3, on voit immédiatement que $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ décroît, p étant fixe, quand n croît. Mais, ici, on a en général

$$\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) < \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p+1\right).$$

Posons, comme plus haut,

$$T_p = \int_{n_p}^{n_{p+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) dn,$$

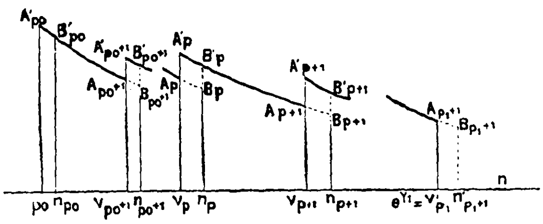
$$T'_{P_1} = \int_{n_{P_1}}^{n'_{P_1+1}} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_1\right) dn \quad \text{et} \quad \sum_{p_0}^{P_1}{}' T_p = T'_{P_1} + \sum_{p_0}^{P_1-1} T_p.$$

Écrivons

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p = \int_{n_{p_0}}^{\nu'_{P_1+1}} f_1(n)\, dn, \qquad \sum_{p_0}^{P_1}{}' T_p = \int_{n_{p_0}}^{n'_{P_1+1}} f_2(n)\, dn.$$

Voici le trajet des points représentatifs de f_1 et f_2.

Fig. 6.



Si A_p, B_p sont les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right)$ et d'abscisses respectives ν_p, n_p; A'_p, B'_p les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ et d'abscisses ν_p, n_p; A_{P_1+1}, B_{P_1+1} les points d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_1\right)$ et d'abscisses $\nu'_{P_1+1} = e^{Y_1}$, n'_{P_1+1}; le point représentatif de f_1 suit le trajet $A'_{p_0}A_{p_0+1}$, $A'_{p_0+1}A_{p_0+2}$, ..., $A'_{P_1}A_{P_1+1}$. Le point représentatif de f_2 suit le trajet $B'_{p_0}B_{p_0+1}$, ..., $B'_{P_1}B_{P_1+1}$, et les arcs A'_pA_{p+1}, B'_pB_{p+1} sont tous deux sur les courbes d'ordonnées $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$. On a

$$\sum{}' V_p - \sum{}' T_p = \int_{\nu_{p_0}}^{n_{p_0}} f_1\, dn + \int_{n_{p_0}}^{\nu'_{P_1+1}} (f_1 - f_2)\, dn - \int_{\nu'_{P_1+1}}^{n'_{P_1+1}} f_2\, dn.$$

Dans l'intégrale médiane, $f_1 - f_2$ est nul si $n_p < n < \nu_{p+1}$.
Si

$$\nu_p < n < n_p, \qquad f_1 - f_2 = \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p-1\right).$$

Soit $1 + \frac{\beta(p)}{p^2}$ la valeur non nulle de u telle que $M_{p+1}(u) = M_p(u)$ (*voir* p. 37). Nous ne savons pas si $\beta(p)$ est positif, mais certainement $\beta(p) < 1$, quel que soit p. D'ailleurs, en supposant $\beta(p) > 0$, si $1 < u < 1 + \frac{\beta(p)}{p^2}$,

$$M_{p+1}(u) - M_p(u) > -\frac{k'}{p^2},$$

k' étant un certain nombre fixe, en sorte que cette inégalité vaut quel que soit $u > 1$.

Si l'on remarque encore la croissance (¹) de $M_{p+1}(u) - M_p(u)$ relativement à u, pour $u > 1$, on a toujours

$$-\frac{k'}{(p-1)^2} < f_1(n) - f_2(n) < f_1(\nu_p) - f_2(\nu_p).$$

Si $(p-1)^2\left(\frac{r}{r_{\nu_p}} - 1\right) < \beta(\overline{p-1})$, les deux derniers membres de l'inégalité sont négatifs, mais en valeur absolue inférieurs à $\frac{k'}{p^2}$.

(¹) Voici la démonstration du fait que $M_{p+1}(u) - M_p(u)$ est croissant pour $u > 1$, p étant fixe. 1° si $u > 1 + \frac{1}{p}$, $M_{p+1}(u) - M_p(u) = \frac{u^{p+1}}{p+1}$ qui est croissant avec u; 2° si $1 + \frac{1}{p+1} < u < 1 + \frac{1}{p}$,

$$\frac{d}{du}[M_{p+1}(u) - M_p(u)] = \frac{u^{p+1}}{u-1} - u^p \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} \qquad \text{avec} \qquad u = \frac{\sin \overline{p+1}\,\theta}{\sin p\theta}.$$

Ceci a le signe de $u - (u-1)\frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \chi(u)$. Posons

$$u = 1 + \frac{\alpha}{p},$$

α est inférieur à 1;

$$\chi(u) > 1 - \alpha\frac{\sin p\theta}{p\sin\theta} > 1 - \alpha > 0;$$

Si $(p-1)^2\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}-1\right) > \beta(\overline{p-1})$, $|f_1-f_2|$ est certainement inférieur à l'un des nombres $\frac{k'}{(p-1)^2}$ et $f_1(\nu_p)-f_2(\nu_p)$ qui sont alors tous deux positifs. Donc, dans tous les cas,

$$|f_1-f_2| < \frac{2k'}{(p-1)^2} + f_1(\nu_p) - f_2(\nu_p),$$

et, comme l'intervalle d'intégration ν_p à n_p est inférieur à 1, c'est également là la borne du module de $\int_{\nu_p}^{n_p}(f_1-f_2)\,dn$.

D'ailleurs, dans l'expression de $\Sigma'(V_p-T_p)$, le dernier terme est borné. Car, nous avons déjà vu que $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, P_1\right)$ est borné, si $\nu'_{P_1+1} \leqq n$.

En résumé, si l'on pose $\varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_p}}, p-1\right) = w_p$,

---

3° si $u < 1 + \frac{1}{p+1}$,

$$\frac{d}{du}[M_{p+1}(u) - M_p(u)] = u^{p+1}\frac{\sin\overline{p+1}\,\theta_1}{\sin\theta_1} - u^p\frac{\sin p\theta}{\sin\theta},$$

avec $\frac{\sin(p+2)\theta_1}{\sin(p+1)\theta_1} = u$. Cette dérivée a le signe de

$$u\frac{\sin(p+1)\theta_1}{\sin\theta_1} - \frac{\sin p\theta}{\sin\theta} = \chi_1(u).$$

D'après $u > 1$, $(p+1)\theta_1 < \frac{\pi}{2}$, on a

$$\chi_1(u) > \frac{\sin p\theta_1}{\sin\theta_1} - \frac{\sin p\theta}{\sin\theta}.$$

D'après $\theta_1 < \theta$,

$$\chi_1(u) > 0.$$

Pour les valeurs de u inférieures à 1,

$$(p+1)[M_{p+1}(u) - M_p(u)] = u^{p+1}\cos(p+1)\theta'_1,$$

θ étant un nombre compris entre 0 et θ_1. Si $u = 1 + \frac{\alpha}{p}$, cette expression a pour partie principale $e^\alpha\cos\beta\left(\alpha = \beta\cot\beta,\ \frac{\pi}{2} < \beta < \pi\right)$. Cette partie principale a un minimum unique pour α négatif et égal à $\cos 2\beta$.

on trouve, k'' étant un certain nombre fixe,

$$\left|\sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' T_p\right| < 2k' \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{(p-1)^2} + \varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}, p_0\right) + \sum_{p_0+1}^{P_1} w_p + k''.$$

Examinons maintenant la différence $\sum\limits_{p_0}^{P_1}{}' T_p - \sum\limits_{p_0}^{P_1}{}' U_p$. D'après la décroissance de $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p\right)$ quand n croît, p étant fixe,

$$U_p = T_p + \theta_p\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_{p+1}}}, p\right)\right] \qquad 0 < \theta_p < 1.$$

L'égalité est encore valable pour $p = P_1$, en accentuant U, T et n_{P+1}. Donc

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p = \sum_{p_0}^{P}{}' T_p + \theta\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{n_{p_0}}}, p_0\right) + - \varphi\left(\frac{r}{r_{n'_{P_1+1}}}, P_1\right)\right] \theta \sum_{p_0+1}^{P_1} \tau_p,$$

en posant $\tau_p = \varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p\right) - \varphi\left(\frac{r}{r_{n_p}}, p-1\right)$. On a

$$\tau_p < w_p.$$

Donc

$$\sum_{p}^{P_1}{}' V_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p = 2\delta k' \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{(p-1)^2} + 2\delta\left[\varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}, p_0\right) + \sum_{p_0+1}^{P_1} w_p\right] + k''' \quad (\delta^2 < 1).$$

Au second membre, le premier terme est inférieur à $\frac{2k'}{p_0 - 1}$, en valeur absolue: D'autre part, $\varphi\left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}, p_0\right) < \left(\frac{r}{r_{\nu_{p_0}}}\right)^{p_0}$.

On peut joindre ce terme à S_0, il est infiniment petit relativement à S_1.

Donc, à partir d'une certaine valeur de X,

$$\sum_{p_0}^{P_1}{}' U_p - \sum_{p_0}^{P_1}{}' V_p = \delta(w_{p_0+1} + w_{p_0+2} + \ldots + w_{P_1}) + \varepsilon S_1.$$

Je dis que $\sum\limits_{p_0+1}^{P_1} w_p$ est infiniment petit relativement à S_1.

48. Nous avons évidemment, avec les notations du premier Chapitre,

$$|M_p(u) - M_{p-1}(u)| < \max_{u=\text{const.}} |U_p(u,\theta) - U_{p-1}(u,\theta)| < \frac{u^p}{p}.$$

On a donc

$$\left|\sum_{p_0+1}^{P_1} w_p\right| < \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{p}\left(\frac{r}{r_{v_p}}\right)^p = \sum_{p_0+1}^{P_1} \frac{1}{p} e^{p(X-x_p)} = \sigma_1.$$

Nous partageons les termes de σ_1 en deux catégories. Dans la première catégorie, nous mettons ceux pour lesquels on a

$$p(X - x_p) \leqq Y - l,$$

si $e^{-l} < \varepsilon$.

Leur somme est évidemment inférieure à $\sum_1^{P_1} \frac{e^{Y-l}}{p} = e^{Y-l}(LP_1 + \gamma)$, γ tendant vers une limite et par suite à $\varepsilon e^Y LP_1$.

Étudions les autres termes. Soit P'_1 la plus grande valeur de p parmi eux. Leur somme est inférieure à

$$\sum_1^{P'_1} \frac{1}{p} e^{p(X-x_p)} = \sigma'_1.$$

Multiplions ceci par $e^{-Y} = e^{-h} e^{-Y_1}$.

Si nous remplaçons X par X_1, nous diminuons l'exposant de e dans le $p^{\text{ième}}$ terme de la quantité $p(X - X_1) < h\frac{p}{p-\alpha} \leqq h\frac{p_0}{p_0 - \alpha}$.

Donc

$$e^{-Y}\sigma'_1 < e^{-h+h\frac{p_0}{p_0-\alpha}} e^{-Y_1} \sum_1^{P'_1} \frac{1}{p} e^{p(X_1-x_p)} = \gamma' e^{-Y_1}\sigma''_1,$$

γ' étant borné.

Évaluons $p(X_1 - x_p) - Y_1$.

1° Si $p = P'_1$, d'après

$$Y_1 > (P'_1 - \alpha)(X_1 - x_{P'_1}) + y_{P'_1},$$

cet exposant est inférieur à $\alpha(X_1 - x_{P'_1}) - y_{P'_1}$. Le terme correspondant est donc inférieur à $e^{\alpha X_1}\frac{e^{-\alpha x_{P'_1}-y_{P'_1}}}{P'_1}$. Le coefficient de $e^{\alpha X_1}$ est infiniment petit quand X_1 croît indéfiniment, et il l'est même relativement à $\alpha e^{-\alpha x_{p_0}}$. (Il est évident *a priori* que si P'_1 n'est pas infiniment grand les termes dont nous cherchons à limiter le module sont négligeables relativement à S_1.)

2° Si $p < P'_1$,

$$p(X_1 - x_p) - Y_1 = p(X_1 - x_{P'_1}) + p(x_{P'_1} - x_p) - Y_1.$$

Or

$$x_{P'_1} - x_p < \frac{y_{P'_1} - y_p}{p - \alpha} < \frac{y_{P'_1}}{p - \alpha},$$

car $y_{p_0} > 0$.

Donc

$$p(X_1 - x_p) - Y_1 < p(X_1 - x_{P'_1}) + \frac{\alpha}{p_0 - \alpha} y_{P'_1} - (P'_1 - \alpha)(X_1 - x_{P'_1}).$$

Or, $y_{P'_1}$ peut se borner facilement d'après $\frac{Y - l}{P'_1} < X - x_{P'_1}$. Comme le second membre est inférieur à $\frac{Y - y_{P'_1}}{P'_1 - \alpha}$, on a (ce qui démontre que $X - x_{P'_1}$ est infiniment grand avec X)

$$y_{P'_1} - l < (Y_1 - l)\frac{\alpha}{P'_1} < \alpha(X - x_{P'_1}).$$

Le dernier membre ne diffère de $\alpha(X_1 - x_{P'_1})$ que par un facteur tendant vers un. Donc, à partir d'une certaine valeur de X,

$$\frac{\alpha y_{P'_1}}{p_0 - \alpha} < \frac{2\alpha^2}{p_0 - \alpha}(X_1 - x_{P'_1}),$$

$$e^{-Y_1}\sigma''_1 < e^{-\left(P'_1 - \alpha - \frac{2\alpha^2}{p_0 - \alpha}\right)(X_1 - x_{P'_1})} \sum_{p_0}^{P'_1 - 1} \frac{1}{p} e^{p(X_1 - x_{P'_1})}.$$

Or la somme du second membre est inférieure à

$$\sigma'''_1 = \sum_{1}^{P'_1 - 1} \frac{1}{p} e^{p(X_1 - x_{P'_1})}.$$

Si $e^{X_1-x_{P'_1}} = u$, σ'''_1 devient

$$\frac{u^{P'_1-1}}{P'_1-1}+\frac{u^{P'_1-2}}{P'_1-2}+\ldots+\frac{u}{1}<u^{P'_1-1}-L(u-1).$$

u étant infiniment grand, $e^{-X}\sigma''_1$ est, à un facteur près tendant vers un, inférieur à $u^{-\left(1-\alpha-\frac{2\alpha^2}{p_0-\alpha}\right)}$.

J'ai supposé (¹) $\alpha<1$. Je peux donc supposer p_0 qui est choisi une fois pour toutes mais arbitraire, assez grand pour que

$$1-\alpha-\frac{2\alpha^2}{p_0-\alpha}>0.$$

Alors, $e^{-X}\sigma''_1$ tend vers zéro.

En totalisant les résultats, on voit qu'il existe certainement une valeur de X à partir de laquelle

$$\sigma_1<\varepsilon e^X\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha X_1-\alpha x_{p_0}}+LP_1\right),$$

et, comme $P_1<\dfrac{h+\varepsilon}{X-X_1}$,

$$\sigma_1<\varepsilon S_1.$$

49. *Résumé.* — Voici donc le résultat complet :

Étant donnée une suite de zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, si l'on pose $\log|a_n| = x(n)$, $\log n = y(n)$, *et si les points $x(n)$, $y(n)$ viennent se placer sur une courbe x, $y(x)$ jouissant de la propriété suivante : il existe un entier croissant p, tel que*, si $x_p \leqq x < x_{p+1}$,

$$p-\alpha\leqq y'<p+1-\alpha,$$

α étant fixe et positif, NOUS CHOISISSONS POUR EXPOSANT DE CONVERGENCE ATTACHÉ A CHAQUE ZÉRO a_n *tel que* $x_p\leqq \log r_n < x_{p+1}$, L'ENTIER p. *De plus, si je désigne* $\log r$ *par* X *et* $y(X)$ *par* Y, *à tout nombre* ε *je peux*

(¹) Si l'on suppose $\alpha>1$ et si $\alpha<m$, il faudra examiner à part les termes correspondant à $p=P'_1, P'_1-1, \ldots, P'_1-m+1$, puis la somme $\sum\limits_1^{P'_1-m}$.

faire correspondre un nombre h, tel que, si X_1 et X_2 sont les abscisses des points de la courbe x, y dont les ordonnées diffèrent de Y de la quantité h, le module maximum du produit formé avec les zéros a_1, a_2, ... et l'exposant p est certainement inférieur, à partir d'une certaine valeur de r, à

$$(1+\varepsilon)e^{Y}\left(\varepsilon e^{\alpha X} + L\frac{1}{X-X_1} + L\frac{1}{X_2-X}\right).$$

50. *L'exposant p est-il canonique?* — Il s'agit maintenant d'examiner si p est bien véritablement un exposant canonique, c'est-à-dire si les deux fonctions que nous avons appelées Π_1 et Π_2 ont bien le même ordre de grandeur. Π_1 est égal à $S_0 + S_1 + S'_2$, Π_2 à $S''_2 + S_3$. $\Pi_1 e^{-Y}$ a l'ordre de $\varepsilon e^{\alpha X} + L\frac{1}{X-X_1}$, $\Pi_2 e^{-Y}$ celui de $L\frac{1}{X_2-X}$; d'après

$$X - X_1 > \frac{h}{P+1-\alpha}, \qquad L\frac{1}{X-X_1} < LP + c,$$

c étant borné. Deux cas se présentent suivant que l'ordre de LP ou de LY' est supérieur ou inférieur à $e^{\alpha X}$.

51. Supposons d'abord $e^{\alpha X}$ négligeable à l'égard de LY'. Nous appliquerons ce résultat bien connu ([1]) : si v est une fonction croissante de u on a $v\left[u + \frac{h}{v(u)}\right] < (1+\beta)v(u)$, sauf peut-être pour certains points u, formant des intervalles dont la longueur totale est au delà de u inférieure à $\frac{kh}{\beta v(u)}$, k étant borné si h et β le sont. Rappelons-en la démonstration :

Posons

$$v(u_i) = v_i.$$

Soit u_{2n-1} un point tel que, si

$$u_{2n} = u_{2n-1} + \frac{h}{v_{2n-1}},$$

([1]) *Voir* BOREL, *Acta mathematica*, t. XX, 1896, p. 376. C'est M. Borel qui a le premier (dans ce même Mémoire) signalé l'existence de ces propriétés *communes à toutes les fonctions croissantes,* bornées tant que la variable l'est, et qui a montré le rôle essentiel qu'elles jouent dans la comparaison entre elles des fonctions croissantes.

on a

$$v_{2n} > (1+\beta) v_{2n-1}.$$

Soit u_{2n+1} le premier nombre supérieur ou égal à u_{2n} tel que, si

$$u_{2n+2} = u_{2n+1} + \frac{h}{v_{2n+1}},$$

on a

$$v_{2n+2} > (1+\beta) v_{2n+1}.$$

Posons

$$u_{2n} - u_{2n-1} = \delta_n.$$

D'après la croissance de v avec u, $v_{2n+1} > v_{2n}$, et par suite

$$v_{2n+1} > (1+\beta)^n v_1;$$

d'où

$$\sum_1^n \delta_n < \frac{h}{v_1} \frac{1+\beta}{\beta},$$

quel que soit n.

Or, quels sont les points u supérieurs à u_1 pouvant jouir de la propriété

$$v\left(u + \frac{h}{v}\right) > (1+\beta) v(u)?$$

Ce seront évidemment exclusivement des points intérieurs aux intervalles u_{2n-1} à u_{2n}. Pareillement les points u tels que

$$(1+\beta) v\left(u - \frac{h}{v}\right) < v(u)$$

avec $u > u_2$ sont tels que le point $u - \frac{h}{v}$ fait partie de l'un des intervalles précédents et, par suite, ces points sont compris dans les intervalles u_{2n} à $u_{2n} + \frac{h}{v_{2n-1}}$. Donc, les points u supérieurs à u_1 et tels qu'on ait soit

$$v\left(u + \frac{h}{v}\right) > (1+\beta) v(u),$$

soit

$$v\left(u - \frac{h}{v}\right) < (1+\beta)^{-1} v(u),$$

forment des intervalles de longueur totale inférieure à $\frac{k'}{v_1}\frac{h}{\beta}$ (k' borné avec h et β).

Appliquons ceci à la fonction $Y'(X)$. Comme

$$X - X_1 < \frac{h}{P_1 - \alpha} \qquad \text{et} \qquad X_2 - X < \frac{h}{P - \alpha},$$

comme Y', Y'_1, Y'_2 diffèrent de P, P_1, P_2 de moins d'une unité, on trouve que, en général,

$$(1+\beta)P_1 > P > (1-\beta)P_2,$$

sauf peut-être pour une suite d'intervalles dont la longueur totale est inférieure à $\frac{kh}{\beta}\frac{1}{P}$, à partir de X.

On montrerait d'une manière toute pareille que les points $x > X$ où l'on n'a pas $p_1^{1+\beta} > p > p_2^{1-\beta}$ forment des intervalles de longueur totale inférieure à $\frac{h}{P} + \frac{k}{\beta}\frac{h}{P^{1+\beta}}$.

52. Donc, les fonctions $\Pi_1(X)$, $\Pi_2(X)$ seront dans un rapport infiniment voisin de un pour P infini, sauf pour des points X dont l'ensemble a une longueur totale inférieure à $\frac{kh}{P}$ à partir d'un point X quelconque. Π_1 et Π_2 sont égaux, à ε près chacun, à $e^Y LP$, et l'on a

$$P(r) < (2+\varepsilon) n Lp,$$

n étant le nombre des zéros intérieurs au cercle $|z| = r$ et p l'exposant de convergence relatif au zéro le plus voisin du cercle.

Pour des croissances accidentées de p et des valeurs exceptionnelles de r, telles que l'ensemble des points $\log r$ a une longueur totale inférieure à $\frac{h}{p}$ à partir de $\log r$, la loi choisie pour p ne donne pas le même ordre de grandeur à Π_1 et à Π_2. Mais rien ne prouve *a priori* qu'il y en ait une résolvant ce problème. Pour les fonctions de genre fini, on peut concevoir des variations de $y(n)$ avec $p < y' < p+1$, telles que, le genre étant p, les deux fonctions Π_1 et Π_2 ne soient pas entre elles dans un rapport fini quel que soit r.

53. *L'exposant de convergence précisé.* — Les deux fonctions Π_1 et Π_2 se trouvent n'être pas du même ordre de grandeur dans un autre cas, si $e^{\alpha X}$ est d'un ordre supérieur à celui de LY', auquel cas $\Pi_1 > \Pi_2$. La condition $LY' < e^{\alpha X}$ exige que y soit d'ordre inférieur à $e^{e^{\alpha x}}$ ou que $r_n > \frac{1}{\alpha}\log_2 n$. Si donc la croissance de y se rapproche de celle des fonctions de genre fini plus que celle de e^{e^x}, nous devons préciser l'exposant de convergence de façon à réduire l'ordre du terme hétérogène $e^{\alpha X}$. Nous réalisons d'emblée la principale réduction possible en permettant à y' de se rapprocher davantage de $p+1$, comme il suit. Supposons que pour

$$x_p \leqq x < x_{p+1}, \qquad p \leqq y' + \frac{1+\alpha}{x} < p+1.$$

Dans la somme $\sum\limits_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$, nous conservons le même groupement des termes en S_0, S_1, S_2, S_3. Les nombres X_1 et X_2, définis par $Y - Y_1 = Y_2 - Y = h$, sont indépendants du système d'exposant de convergence choisi. Nous admettrons que

$$e^{-Y}S_1 = (1+\partial\varepsilon)\int_{x_{p_0}}^{X_1} e^{y-Y+(p+1)(X-x)}\frac{dx}{e^{X-x}-1},$$

$$e^{-Y}S_3 = (1+\partial\varepsilon)\int_{X_1}^{\infty} e^{y-Y+(p+1)(X-x)}\frac{dx}{1-e^{X-x}},$$

$$e^{-Y}S_2 = C_2,$$

C_2 étant borné et ∂^2, ∂'^2 étant inférieurs à 1 à partir d'une certaine valeur de X.

54. Calculons l'intégrale qui donne S_1. D'après $y' + \frac{1+\alpha}{x} \geqq p$, si $x_p \leqq x < x_{p+1}$, on a

$$\begin{aligned} Y - y = \int_x^X y'\,dx > &-(1+\alpha)\operatorname{Log}\frac{X}{x} \\ &+ p(X-x) + (\overline{P-p}X - x_{p+1} - x_{p+2} - \ldots - x_P). \end{aligned}$$

Donc, en supprimant au second membre le crochet qui est positif,

$$y - \mathrm{Y} + (p+1)(\mathrm{X} - x) < (1+\alpha)\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{X}}{x} + \mathrm{X} - x.$$

Par suite

$$(1+\varepsilon)^{-1} e^{-\mathrm{Y}} \mathrm{S}_1 < \int_{x_{p_0}}^{\mathrm{X}_1} e^{\mathrm{X} - x + (1+\alpha)\,\mathrm{Log}\,\frac{\mathrm{X}}{x}} \frac{dx}{e^{\mathrm{X}-x} - 1} = \mathrm{I}_1.$$

Pour étudier I_1, je pose $\mathrm{X} - x = u$. On a

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1}^{\mathrm{X}-x_{p_0}} \frac{\mathrm{X}^{1+\alpha}}{(\mathrm{X}-u)^{1+\alpha}} \frac{e^u}{e^u - 1}\, du.$$

Je décompose cette intégrale en trois autres :

$$\int_{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1}^{\mathrm{L}\,2} \frac{e^u}{e^u-1}\, du + \int_{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1}^{\mathrm{L}\,2} \frac{e^u}{e^u-1}\left[\left(1 - \frac{u}{\mathrm{X}}\right)^{-1-\alpha} - 1\right] du$$
$$+ \int_{\mathrm{L}\,2}^{\mathrm{X}-x_{p_0}} \frac{\mathrm{X}^{1+\alpha}}{(\mathrm{X}-u)^{1+\alpha}} \frac{e^u}{e^u-1}\, du.$$

La première intégrale est égale à $\mathrm{L}\,\frac{1}{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1}$. La seconde, d'après $\left(1 - \frac{u}{\mathrm{X}}\right)^{-1-\alpha} = 1 + \frac{uh}{\mathrm{X}}$, h étant borné si $u < \mathrm{L}\,2$, et si X est supérieur à 2, est égale à

$$\frac{h}{\mathrm{X}} \int_{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1}^{\mathrm{L}\,2} \frac{e^u}{e^u-1}\, u\, du,$$

qui tend vers zéro avec $\frac{1}{\mathrm{X}}$, puisque $\int_0^{\mathrm{L}\,2} \frac{u e^u}{e^u - 1} du$ a un sens. Dans la troisième $\frac{e^u}{e^u - 1}$ est inférieur à 2. Elle est donc inférieure à

$$2\,\frac{\mathrm{X}^{1+\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{x_{p_0}^{\alpha}} - \frac{1}{(\mathrm{X} - \mathrm{L}\,2)^{\alpha}}\right].$$

En résumé, si $\frac{2}{\alpha x_{p_0}^{\alpha}} < \varepsilon$,

$$e^{-\mathrm{Y}} \mathrm{S}_1 < (1+\varepsilon)\left(\varepsilon \mathrm{X}^{1+\alpha} + \mathrm{L}\,\frac{1}{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1}\right).$$

55. Limitons S_3. De même que S_1 a été réduit en un même point x par la diminution de p, de même S_3 se trouvera augmenté. D'après

$$y' + \frac{1+\alpha}{x} < p+1 \qquad \text{si} \qquad x_p \leqq x < x_{p+1},$$

on a, si $x > X$,

$$y - Y = \int_X^x y'\,dx < -(1+\alpha)\,\mathrm{Log}\frac{X}{x}$$
$$+ (p+1)(x - X) - \left[x_p + x_{p-1} + \ldots + x_1 - \overline{p-1}X\right]$$

et, en supprimant comme toujours la partie positive entre crochets,

$$y - Y + (p+1)(X - x) < -(1+\alpha)\,\mathrm{Log}\frac{x}{X}.$$

Donc

$$(1+\varepsilon)^{-1}e^{-Y}S_3 < \int_{X_2}^{\infty} e^{-(1+\alpha)\mathrm{Log}\frac{x}{X}} \frac{dx}{1 - e^{X-x}} = I_3.$$

Dans I_3, je change de variable $x = X + u$.

$$I_3 = \int_{X_2 - X}^{\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{u}{X}\right)^{1+\alpha}(1 - e^{-u})},$$

$$I_3 = \int_{X_2 - X}^{L2} \frac{du}{1 - e^{-u}} - \int_{X_2 - X}^{L2} \frac{du}{1 - e^{-u}}\left[1 - \left(1 + \frac{u}{X}\right)^{-1-\alpha}\right]$$
$$+ \int_{L2}^{\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{u}{X}\right)^{1+\alpha}} + \int_{L2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \frac{du}{\left(1 + \frac{u}{X}\right)^{1+\alpha}}.$$

La première intégrale est $L\frac{1}{X_2 - X}$. La seconde tend vers zéro. La troisième est

$$\frac{1}{\alpha}\frac{X^{1+\alpha}}{(X + L2)^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}X - L2 + \eta(X).$$

$\eta(X)$ tendant vers zéro. La dernière tend vers $\int_{L2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}}\,du = L2$. Donc

$$e^{-Y}S_3 < (1+\varepsilon)\left(\frac{X}{\alpha} + L\frac{1}{X_2 - X}\right).$$

56. Ce choix pour l'exposant p, notablement plus avantageux que le premier, si y' croît lentement, ne peut être perfectionné que faiblement, dans le sens qui diminue l'ordre total. Cette diminution ne peut s'obtenir qu'en rapprochant les ordres de S_1 et de S_3. Or, ces ordres sont ceux déjà voisins de $X^{1+\alpha}$ et X.

Si l'ordre de LY' est compris entre ceux-là, il peut être utile de restreindre le plus possible l'influence du terme hétérogène. Nous supposons alors que, si

$$x_p \leqq x < x_{p+1},$$

$$p \leqq y' + \frac{1}{x} + \frac{1}{x\log x} + \ldots + \frac{1}{x\log x \ldots \log_{h-1} x} + \frac{1+\alpha}{x \log x \ldots \log_h x},$$

α étant fixe, inférieur à 1 par exemple, et h étant un entier fixe. On trouve, pour $x < X$,

$$\begin{aligned} y - Y + p(X - x) &< \log X + \log_2 X + \ldots \\ &+ \log_h X + (1+\alpha)\log_{h+1} X - \log x - \log_2 x - \ldots - \log_h x - (1+\alpha)\log_{h+1} x. \end{aligned}$$

D'où

$$(1+\varepsilon)^{-1} e^{-Y} S_1 < \int_{x_{p_0}}^{X_1} \frac{X\log X \ldots \log_{h-1} X \log_h^{1+\alpha} X}{x \log x \ldots \log_{h-1} x \log_h^{1+\alpha} x} \frac{e^{X-x}}{e^{X-x} - 1}\, dx = I_1.$$

On trouve comme plus haut la valeur de I_1

$$I_1 = \frac{1}{\alpha} X \log X \ldots \log_{h-1} X \frac{\log_h^{1+\alpha} X}{\log_h^{\alpha} x_{p_0}} + L\frac{1}{X - X_1} + h_1.$$

De même

$$(1+\varepsilon)^{-1} e^{-Y} S_3 < \frac{1}{\alpha} X \log X \ldots \log_{h-1} X \log_h X + L\frac{1}{X_2 - X} + h_3$$

(h_1 et h_3 bornés).

57. Nous découvrons une famille de modes de croissance pour r_n, où s'opère la transition entre deux espèces différentes de produits canoniques. Pour les uns, dont font partie les produits de genre fini, il n'est pas indifférent que y' s'attarde ou non au voisinage des valeurs entières. Pour les autres, la perturbation due à cette cause est négli-

geable dans la croissance totale de la fonction. Les croissances de y séparatrices des deux classes de fonctions entières sont pour $Ly' = x$, $\log x$, ..., $x \log x \ldots \log_h x$, ... du côté de la classe qui comprend le genre fini, et

$$Ly' = x^{1+\alpha}, \qquad \ldots, \qquad x \log x \ldots \log_{h-1} x \log_h^{1+\alpha} x$$

du côté des fonctions plus croissantes, ou

$$y = e^x, \qquad e^{x \log x}, \qquad \ldots, \qquad e^{x \log x \ldots \log_h x}, \qquad \ldots.$$

ou

$$r_n = e^{\log_2 n}, \qquad e^{\frac{\log_2 n}{\log_3 n}}, \qquad \ldots, \qquad e^{\frac{\log_2 n}{L_3 n \ldots L_h n}}.$$

Supposons, ce qui arrivera fréquemment que, pour la classe la plus croissante, $\frac{Ly'}{Ly}$ tende vers 1. Alors, la limite supérieure de $\Pi(x)$ devient $(2 + \varepsilon) n L_2 n$. Pour la classe la moins croissante au contraire, cette limite sera $\varepsilon n \log r \log_2 r \ldots \log_h^{1+\alpha} r$, α étant un nombre fixe. La limite de croissance de y est la même que celle de la convergence ou de la divergence de

$$\int_x^\infty \frac{dx}{Ly'} \quad \text{ou de} \quad \int_x^\infty \frac{dx}{Ly} \quad \text{ou de} \quad \sum_1^\infty \frac{\log r_n}{n \log n \log_2^2 n}.$$

58. En somme, nous trouvons pour limiter supérieurement $\Pi(X)$ l'expression

$$(a) \qquad (1 + \varepsilon) e^X \left[\varepsilon \theta(X) + L \frac{1}{X - X_1} + L \frac{1}{X_2 - X} \right],$$

valable à partir d'une certaine valeur de X, $\theta(X)$ étant une fonction que nous pouvons supposer égale à $e^{\alpha X}$, $X^{1+\alpha}$, ..., $X \log X \ldots \log_h^{1+\alpha} X$, ..., suivant la lenteur ou l'irrégularité de la croissance de Y'. Si donc LY' croît plus vite que l'une des fonctions de cette suite, on se trouve avoir réalisé l'égalité des ordres de Π_1 et de Π_2.

59. *Exemples de fonctions atteignant la limite trouvée.* — Nous allons maintenant montrer une sorte de réciproque des formules précédentes à savoir : quelle que soit la loi choisie pour p parmi les précé-

dentes, il peut y avoir pour certains des produits canoniques formés en déterminant l'exposant p_n selon cette loi, une distribution des zéros telle que, pour des valeurs de X indéfiniment croissantes, le module maximum du produit canonique ait son logarithme $\text{H}(\text{X})$ supérieur à $(1-\varepsilon)\left[\varepsilon\theta(\text{X}) + \text{L}\frac{1}{\text{X}-\text{X}_1} + \text{L}\frac{1}{\text{X}_2-\text{X}}\right]$, ε étant un nombre fixe, et $\theta(\text{X})$ étant l'une des fonctions définies ci-dessus.

Deux causes empêchent que la limite supérieure trouvée pour $\text{H}(\text{X})$ soit effectivement atteinte. La première est que nous avons supposé que les zéros pouvaient être distribués de façon que le maximum du module de tous les facteurs sur le cercle $|z| = r$ puisse se faire au même point. Or, il est évident que, si je choisis un point du cercle $|z| = r$, la condition que $\left|\text{E}\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right|$ soit maximum en ce point détermine l'argument de a_n dont on a le module r_n. En effet, si $r_n\left(1+\frac{1}{p_n}\right) < r$, a_n devra avoir l'argument de z. Si $r_n\left(1+\frac{1}{p_n}\right) > r$, et si $z = re^{i\theta}$, $a_n = r_n e^{i\alpha_n}$, on devra avoir

$$\frac{r}{r_n} = \frac{\sin(p_n+1)(\theta-\alpha_n)}{\sin p_n(\theta-\alpha_n)},$$

avec

$$|\theta-\alpha_n| < \frac{\pi}{p_n+1},$$

ce qui donne deux valeurs pour α_n. La première catégorie de zéros, qui a un module inférieur à r, devra être placée sur le rayon qui va de l'origine au point z. Les zéros de la seconde catégorie seront sur une courbe ayant ce même rayon pour direction asymptotique. Il est évident que les arguments favorablement répartis pour un point choisi sur un cercle particulier $|z| = r$ se trouveront dans leur ensemble mal distribués pour tout point de tout autre cercle. Mais on voit immédiatement que, à toute valeur de X, on peut faire correspondre X' et X'' avec $\text{X}' < \text{X} < \text{X}''$, tels que, si $x < \text{X}'$ et si $x > \text{X}''$, la totalité des termes $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ correspondant à ces valeurs de x ont une somme négligeable, à ε' près, quel que soit ε' positif, fixe, relativement à celle des termes φ correspondant à x si $\text{X}' < x < \text{X}''$. Nous répartirons les zéros médians de façon que les facteurs correspondants aient tous leur maximum sur $|z| = e^{X}$ au même point. Distribuons arbitrairement les arguments des autres zéros. Comme le minimum de chacun des facteurs $\left|E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)\right|$ correspondants est supérieur à $e^{-\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)(1+\eta)}$, η étant infiniment petit avec $\frac{1}{X}$, si, pour $x < X'$ ou $x > X''$, $|X - x| p(x)$ est infiniment grand avec X, on se trouvera avoir en ce point

$$M(X) > (1 - 4\varepsilon') \sum_{1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right).$$

Soient X'_n et X''_n les nombres correspondants à X_n. Si $X'_{n+1} > X''_n$, il est évident que, X étant l'un quelconque des nombres X_n, l'inégalité précédente sera vérifiée.

On peut donc supposer, avec une erreur relative inférieure à $2\varepsilon'$, que M(X) atteint la valeur $\sum_{1}^{\infty} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ pour une infinité de valeurs de X.

60. Mais, dans l'évaluation de cette somme, nous avons introduit une cause d'erreur, en renforçant certaines inégalités par la suppression d'expressions de signes connus, telles que $\overline{p - P}\, X - x_{p+1} - x_{p+2} - \ldots - x_{P}$, si $x_{p+1} < X$, et $x_p + x_{p-1} + \ldots + x_{P+1} - \overline{p - P}\, X$, si $x_p > X$. Pour éviter cette cause d'erreur, nous supposerons que de X′ à X″ la valeur de p reste la même.

61. Cela étant, nous allons montrer qu'étant donnée une fonction croissante $\varphi(x)$, à dérivée toujours croissante, il est possible de définir une fonction $y = f(x)$ égale à $\varphi(x)$ pour une infinité croissante de valeurs de x et telle que si l'exposant p est déterminé par les inégalités

$$p \leq y' + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1 + \alpha'}{x \log x \ldots \log_{h-1} x} < p + 1 :$$

1° p est un nombre jamais décroissant; 2° il existe une infinité de valeurs croissantes de X, et un produit canonique dont le $n^{\text{ième}}$ zéro a son module donné par

$$\log n = f[x(n)],$$

telles que

$$(b) \qquad \mathrm{M}(\mathrm{X}) > (1-\varepsilon)\left[\varepsilon\theta(\mathrm{X}) + \mathrm{L}\frac{1}{\mathrm{X}-\mathrm{X}_1} + \mathrm{L}\frac{1}{\mathrm{X}_2-\mathrm{X}}\right],$$

ε étant fixe, et

$$\theta(\mathrm{X}) = \mathrm{X}\log\mathrm{X}\ldots\log_h^{1+\alpha}\mathrm{X}$$

avec $\alpha > \alpha'$.

Je définirai $y = f(x)$ par la condition que, pour $\mathrm{X}'_n < \mathrm{X}_n < \mathrm{X}''_n$, on ait

$$y' + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1+\alpha'}{x\log x\ldots\log_{h-1} x} = p.$$

Avec cette loi, de X' à X'' p restant constant, on a

$$(1) \qquad y - \mathrm{Y} + p(\mathrm{X} - x) = \log\frac{\mathrm{X}\log\mathrm{X}\ldots\log_{h-1}^{1+\alpha'}\mathrm{X}}{x\log x\ldots\log_{h-1}^{1+\alpha'} x}.$$

Je suppose que la courbe ainsi décrite et qui diffère peu d'une droite touche $y = \varphi(x)$ en un point. Les zéros dont le nombre $x(n)$ est compris entre X' et X donnent un total égal à

$$\mathrm{S} = e^{\mathrm{Y}}\left(\frac{1}{\alpha'\log^{\alpha'}\mathrm{X}'}\mathrm{X}\log\mathrm{X}\ldots\log_{h-1}^{1+\alpha'}\mathrm{X} + \mathrm{LP} + k\right).$$

Ceux pour lesquels x_n est inférieur à X' donnent dans la somme $\sum\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ un total infiniment petit relativement à cette expression quand X s'éloigne, si leur exposant est inférieur à p. A partir d'une certaine valeur de X, S sera à $\frac{\varepsilon'}{2}$ près la valeur de $\Pi_1(\mathrm{X})$. Je fais courir X, Y sur sa courbe jusqu'à ce que $\mathrm{S}e^{-\mathrm{Y}} + \mathrm{LP}$ devienne inférieur à $\frac{\varepsilon'}{2}\mathrm{X}\log\mathrm{X}\ldots\log^{1+\alpha}\mathrm{X}$. Lorsque ce résultat est atteint, j'obtiens X'' en prenant $\mathrm{X}'' \geqq \mathrm{X}' + 1$, parce que alors la somme des termes qui suivent X'' est inférieure à $e^{\mathrm{Y}}\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}du$.

A partir de X'', je mène tangentiellement à la courbe $y = \varphi(x)$ une courbe de la famille (1) avec une nouvelle valeur de p. Je la fais suivre par le point X, Y, jusqu'à ce que les termes inférieurs à X'' soient devenus négligeables. Je continue ma route jusqu'à ce que $\theta(X)$ prédomine sur $\log P$. Je place le nouvel X'' assez loin pour que les termes suivants soient négligeables, etc. Si $\varphi'(x)$ n'est jamais négligeable relativement à $x \log x \ldots \log_h^{1+\alpha} x$, les points X de la fonction où la formule (b) est exacte ne sont pas ceux où y touche φ. Dans le cas contraire, on peut choisir X tel que $y(X) = \varphi(X)$.

CHAPITRE III.

SECOND TYPE DE CROISSANCE. GRANDE RÉGULARITÉ.

62. Nous allons maintenant définir un mode de croissance du rang n considéré comme fonction de r_n, tel que l'expression $\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$, dont nous n'avons pu obtenir qu'une limite supérieure atteinte seulement dans les régions où le produit canonique a l'allure d'une fonction de genre fini, soit calculable asymptotiquement, du moins quant à sa partie principale. Nous ne ferons, pas plus que dans le précédent Chapitre, d'hypothèses sur l'expression même de $y(x)$; nous lui imposerons simplement une propriété fonctionnelle, n'apportant aucune limitation à la rapidité de la croissance de y, mais uniquement à son irrégularité; cette propriété appartiendra à une classe de fonctions beaucoup plus générale que celle qu'on obtient à partir de e^x et d'une constante, par addition, multiplication, composition, inversion, itération, effectuées dans des ordres divers et un nombre fini quelconque de fois.

Mais auparavant nous indiquerons la voie qui conduit à la valeur *environ* y' que nous avons indiquée pour p.

Expression asymptotique d'une série entière à termes positifs.

63. Nous ferons ce calcul dans le cas où les coefficients de cette série tendent vers zéro avec une certaine régularité, et où la croissance de la fonction entière somme de la série est supérieure à un certain ordre (inférieur à l'ordre de certaines fonctions d'ordre zéro).

Soit

$$F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$$

cette série. Donnons-nous comme au précédent Chapitre un nombre ε arbitrairement petit au moyen duquel nous mesurerons nos approximations. Nous voulons calculer $F(r)$ avec une erreur arbitrairement petite en même temps que ε. Je pose

$$a_n = e^{-A_n} \qquad \text{et} \qquad \log r = x.$$

A_n est une fonction de n qui n'est jusqu'ici définie que pour les valeurs entières de la variable. Nous supposons que, pour les valeurs non entières de n, on donne à A_n des valeurs telles que la fonction obtenue soit continue et dérivable aussi souvent (deux fois) qu'il soit nécessaire dans la suite.

Considérons la fonction $nx - A_n$, qui pour n entier coïncide avec le logarithme de l'un des termes de la série. Elle a un maximum pour $x = A'_n = \frac{dA_n}{dn}$. Nous supposerons, pour que cette égalité ne fasse correspondre à une valeur de x qu'une valeur de n, que A'_n varie toujours dans le même sens. La fonction étant entière, A'_n devra croître constamment et infiniment. On a $A''_n > 0$.

Je désigne par i la valeur de n définie par l'égalité $x = A'_n$. Nous posons $T(x) = e^{ix - A_i}$. Le terme maximum de la série a un rang différant de i de moins d'une unité, soit $i + \delta$ ($\delta^2 < 1$). Cherchons son rapport à $T(x)$ et pour cela formons la différence des logarithmes. On a

$$(i+\delta)x - A(i+\delta) = (i+\delta)x - A_i - \delta A'_i - \frac{\delta^2}{2} A''(i+\theta\delta), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Le défaut de ce terme relativement à $ix - A_i$ est, d'après $x = A'_i$,

$$\frac{\delta^2}{2} A''(i+\theta\delta).$$

Pour que le plus grand terme de la série soit dans un rapport tendant vers 1 avec $T(x)$, il faudra que, à partir d'une certaine valeur de n, quel que soit i entre m et $m+1$, il y ait des valeurs de A''_n inférieures à ε entre m et i d'une part, i et $m+1$ d'autre part. Nous exigerons que A''_n tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

D'après la décroissance de $r^n e^{-A_n}$ si $n > i$, et la croissance de la même fonction si $n < i$, on a

$$\mathrm{F}(r) = \int_1^\infty e^{nx - \mathrm{A}(n)}\, dn + 2\theta\,\mathrm{T}(x).$$

Donc

$$e^{-ix + \mathrm{A}(i)}\,\mathrm{F}(r) = \int_1^\infty e^{(n-i)x - \mathrm{A}(n) + \mathrm{A}(i)}\, dn + 2\theta = \mathrm{S} + 2\theta.$$

D'après la croissance de $\mathrm{A}'(n)$, si $n > i_2 > i$, on a, en intégrant l'inégalité $\mathrm{A}'(n)dn > \mathrm{A}'(i_2)dn$ entre les limites i_2 et n,

$$\mathrm{A}(n) - \mathrm{A}(i_2) > \mathrm{A}'(i_2)(n - i_2).$$

Donc

$$\begin{aligned} -\psi(n, i) &= (n - i)x - \mathrm{A}(n) + \mathrm{A}(i) \\ &< (n - i)x + \mathrm{A}(i) - \mathrm{A}(i_2) - \mathrm{A}'(i_2)(n - i_2) \\ &= (n - i_2)(x - \mathrm{A}'_{i_2}) + (i_2 - i)x - \mathrm{A}(i_2) + \mathrm{A}(i). \end{aligned}$$

Donc

$$\sigma_3 = \int_{i_2}^\infty e^{-\psi(n,i)}\, dn < e^{(i_2 - i)x - \mathrm{A}(i_2) + \mathrm{A}(i)} \frac{1}{\mathrm{A}'(i_2) - x}.$$

On montre d'une façon entièrement analogue que

$$\sigma_1 = \int_{n_0}^{i_1} e^{-\psi(n,i)}\, dn < e^{(i_1 - i)x - \mathrm{A}(i_1) + \mathrm{A}(i)} \frac{1}{x - \mathrm{A}'_{i_1}}.$$

D'ailleurs

$$\mathrm{A}(i_2) - \mathrm{A}(i) - \mathrm{A}'(i)(i_2 - i) = \frac{\mathrm{A}''(\lambda)}{2}(i_2 - i)^2$$

et

$$\mathrm{A}'(i_2) - \mathrm{A}'(i) = \mathrm{A}''(\lambda_1)(i_2 - i),$$

λ et λ_1 étant compris entre i et i_2, en supposant A'' continu.

64. Introduisons la condition que

$$(1) \qquad \lim_{i=\infty} \mathrm{A}''\left(i + \frac{\delta k}{\sqrt{\mathrm{A}''_i}}\right) : \mathrm{A}''_i = 1,$$

quelle que soit la façon dont δ varie entre -1 et $+1$ et quelque grand que soit le nombre fixe k. Nous ne spécifions rien sur le sens de la variation de A'' qui peut présenter une infinité de maxima ou de minima, bien que $\lim\limits_{i=\infty} A''_i = 0$. D'ailleurs la condition (1) est vérifiée pour toute valeur fixe de k dès qu'elle l'est pour une non nulle.

Supposons que k soit choisi assez grand pour qu'on ait

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{-\frac{k}{2}} e^{-u^2}\,du = \int_{\frac{k}{2}}^{\infty} e^{-u^2}\,du < \varepsilon;$$

k étant fixé, il existe un nombre n_k tel que $\dfrac{A''(n)}{A''(i)} = 1 + \delta\varepsilon$, si $|n - i| < \dfrac{k}{\sqrt{A''_i}}$, $i > n_k$. Posons alors

$$i_2 - i = i - i_1 = \frac{k}{\sqrt{A''(i)}}.$$

Alors, $A''(\lambda)$ et $A''(\lambda_1)$ sont égaux à $A''(i)(1 + \delta\varepsilon)$ et

$$\sigma_3 < \frac{e^{-\frac{k^2}{2}(1-\varepsilon)}}{k\sqrt{A''(i)}(1-\varepsilon)}.$$

La même expression limite σ_1. En supposant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, imposons à k une nouvelle limite inférieure par

$$(3) \qquad \frac{2e^{-\frac{k^2}{4}}}{k} < \varepsilon.$$

Alors,

$$S = \int_{i_1}^{i_2} e^{-\psi(n,i)}\,dn + \frac{2\theta\varepsilon}{\sqrt{A''(i)}} = S_1 + \frac{2\theta\varepsilon}{\sqrt{A''(i)}}.$$

D'ailleurs, si

$$i_1 < n < i_2, \qquad -\psi(n, i) = -\frac{A''(i)}{2}(1 + \delta\varepsilon)(n - i)^2.$$

Donc

$$S_1 = \int_{-\frac{k}{\sqrt{A''_i}}}^{\frac{k}{\sqrt{A''_i}}} e^{-\frac{A''(i)}{2}(1+\delta\varepsilon)u^2}\,du.$$

Au second membre, δ est évidemment une fonction de u.

Posons

$$\frac{A''(i)\,u^2}{2} = v^2;$$

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{A''(i)}}\,S'_1 \qquad \text{avec} \qquad S'_1 = \int_{-\frac{k}{\sqrt{2}}}^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-(1+\delta\varepsilon)v^2}\,dv.$$

Or

$$\int_{-\frac{k}{\sqrt{2}}}^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-(1+\varepsilon)v^2}\,dv < S'_1 < \int_{-\frac{k}{\sqrt{2}}}^{\frac{k}{\sqrt{2}}} e^{-(1-\varepsilon)v^2}\,dv;$$

d'où

$$S'_1 = \int_{-k\sqrt{\frac{1+\delta\varepsilon}{2}}}^{k\sqrt{\frac{1+\delta\varepsilon}{2}}} e^{-v^2}\,dv.$$

Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, S'_1, qui est inférieur à $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}dv = \sqrt{\pi}$, est supérieur à $\int_{-\frac{k}{2}}^{\frac{k}{2}} e^{-v^2}dv$, expression supérieure elle-même à $\sqrt{\pi} - 2\varepsilon$, d'après (2). Donc

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{A''(i)}}(\sqrt{\pi} - 2\theta\varepsilon).$$

et, par suite,

$$S = \sqrt{\frac{2}{A''(i)}}(\sqrt{\pi} + 2\delta\varepsilon).$$

Rappelons que cette dernière inégalité est valable (avec $\delta^2 < 1$) si, k ayant été choisi satisfaisant aux conditions (2) et (3), i est supérieur à la valeur n_k correspondante, ce qui aura lieu à partir d'une certaine valeur de x.

65. En résumé, en posant $\log r = x$, i étant la fonction de x définie par $x = A'_i$, la somme de la série $\frac{r^n}{e^{A_n}}$ est

$$F(r) = \sqrt{\frac{2\pi}{A''_i}}\,e^{iA'_i - A_i}[1 + \eta(x)],$$

$\eta(x)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

Pour les applications on pourra remarquer que

$$iA'_i - A_i = \int_{i_0}^{i} iA''_i\, di,$$

i_0 étant une certaine constante non arbitraire. Or, $dx = A''_i\, di$. Donc, l'expression devient, si $i(x)$ est connu,

$$F(r) = \sqrt{2\pi \frac{di}{dx}}\, e^{\int_{x_0}^{x} i\, dx} [1 + \eta(x)].$$

i_0, je le répète, est déterminé. C'est, si l'on veut, l'abscisse du point de la courbe $y(i) = A_i$ où la tangente passe par l'origine et x_0 est le coefficient angulaire de cette tangente. Dans cette formule i est une fonction de x qui, pour ses valeurs entières, coïncide avec le rang du terme maximum, qui est croissante et dont la dérivée $\frac{di}{dx} = i'$ satisfait à la condition équivalente à (1),

$$\lim_{x=\infty} i'\left(x + \frac{k}{\sqrt{i'}}\right) : i'(x) = 1.$$

Nous montrerons par la suite l'équivalence des deux conditions (¹).

La formule précédente donnera la somme de séries entières dont la croissance ne sera pas limitée dans le sens de la rapidité, mais seulement

---

(¹) M. Le Roy a obtenu (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900) cette même formule. Les hypothèses moyennant lesquelles M. Le Roy en affirme la validité ne sont pas entièrement les mêmes que ci-dessus. La décroissance de A'' et la croissance infinie de $i^2 A''_{(i)}$ remplacent la condition (1). Les hypothèses

$$\lim_{i=\infty} A''_i = 0, \qquad \lim_{i=\infty} i^2 A'' = \infty$$

ne suffisent pas si l'on ne suppose pas en outre que le *sens de variation de* A'' *et de* $i^2 A''$ est constant. En revanche, *l'ensemble de ces hypothèses entraîne la condition* (1). Mais la condition que je donne est plus générale, puisque, bien qu'elle contraigne $i^2 A''$ à tendre vers l'infini, *elle n'implique rien sur le sens de variation de* A'' ni de $i^2 A''$. J'ai obtenu la formule sans connaître le travail de M. Le Roy. D'ailleurs, le calcul ci-dessus n'offre pour mon objet aucun intérêt en lui-même; il n'a représenté pour moi qu'une étape nécessaire dans la recherche de l'exposant de convergence et dans celle des caractères de grande régularité.

dans le sens de l'irrégularité et de la lenteur. La formule ne peut convenir que si A'' tend vers zéro. Si donc $f(r) = \sum \frac{r^m}{q^{m^2}}$, il faudra que q soit infiniment petit avec $\frac{1}{m}$.

Recherche conduisant au choix de l'exposant de convergence.

66. Je vais exposer sommairement la marche qui m'a conduit au choix de l'exposant p. J'ai eu besoin pour cela d'étudier la somme d'une série entière à termes positifs avec moins de détails que dans l'analyse précédente, mais de façon à en retenir surtout la remarque suivante : *si A_i croît avec une assez grande régularité, le terme maximum de la série la divise en deux parties équivalentes.*

Or, rappelons l'observation primordiale d'où découle le choix de p.

D'après la valeur de $\varphi(1, p)$ qui tend vers une limite pour p infini, il est naturel de partager les facteurs du produit pour chaque valeur de r en deux catégories, suivant que $r(n) < r$ ou que $r(n) > r$. La valeur du ou des termes médians [s'il en existe, $r(n) = r$] est sensiblement indépendante de la loi de croissance de l'exposant interposé ρ_n. Si je donne à ρ_n les valeurs les plus petites possibles, assurant strictement la convergence, la première partie du produit qui est un produit d'exponentielles de variables très grandes $\frac{r}{r_i}$ à exposants le plus faibles possible, sera relativement peu croissante. Le reste au contraire, puisque la convergence sera strictement assurée, sera très important, et d'autant plus que la convergence sera plus médiocrement assurée, c'est-à-dire que ρ_h sera moins croissant. Si, à partir de ce choix de ρ_h, qui sera par exemple

$$\rho_h = (1 + \alpha)\frac{\log h}{\log r_h},$$

je remplace ρ_h par une fonction plus croissante, la première partie du produit devient plus grande, tandis que, la convergence étant améliorée, le reste est moins important. Si je prends pour ρ_h des fonctions de plus en plus croissantes, je rends le produit infini de plus en plus convergent, je diminue donc le reste; mais j'augmente alors la première partie.

Donc la fonction ρ_n qui nous donnera la croissance totale la plus restreinte sera telle que la première partie et le reste séparés par le facteur correspondant à $r_h = r$ soient du même ordre de grandeur.

67. On sait que la convergence absolue du produit canonique est assurée si l'on choisit $p_n = \mathrm{E}(\rho_n)$ avec

$$\rho_n = k\frac{\log n}{\log r(n)}, \qquad k > 1 + \alpha > 1.$$

α fixe. $\mathrm{E}(\rho)$ est la valeur de ρ à une unité près par défaut. On peut même prendre $k = 1 + \frac{\mathrm{A}_n}{\log r(n)}$, si A_n croît indéfiniment, avec $p \geqq \rho_n$.

Je suppose que, i étant un entier arbitraire, il y a un nombre n_i tel que $\rho_{n_i} \geqq i$ si $n \geqq n_i$, $\rho_n < i$, si $n < n_i$. Ceci aura lieu en particulier si $k\frac{\log n}{\log r(n)}$ est croissant. Nous supposons que ρ_{n_i} est très sensiblement égal à i, et nous posons $\mathrm{R}_i = r(n_i)$.

Limitons supérieurement le logarithme de chaque facteur par l'inégalité $\mathrm{M}_p(u) < u^{p+1}$. Dans $\sum\limits_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) r^{i+1}$ est alors en facteur devant la somme de termes $\sum\limits_{n_i}^{n_{i+1}-1} \frac{1}{r^{i+1}(n)}$.

Cette somme, d'après $r_m^{\rho_m} = m^k$, est inférieure à $\sum\limits_{n_i}^\infty \frac{1}{m^k}$, ou à

$$\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{n_i^{k-1}}.$$

Donc, $\sum\limits_1^\infty \varphi$ est inférieur à la série entière à termes positifs

$$\frac{1}{k-1}\sum_1^\infty \frac{r^{i+1}}{n_i^{k-1}}.$$

C'est ici que s'est présentée pour moi la nécessité d'étudier la somme d'une série entière à termes positifs. D'après la remarque faite plus haut, le terme maximum de cette série doit être tel que les termes situés avant lui correspondent à des valeurs de $r(n_i)$ inférieures à r et que les termes situés après lui correspondent à des valeurs de $r(n_i)$ supérieures à r.

68. La série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r^i}{n_i^{k-1}}$ sera mise sous la forme $\sum r^i e^{-A_i}$ si l'on pose

$$A_i = (k-1)\log n_i.$$

Il s'agit d'interpoler A_i pour toutes les valeurs non entières de i. Supposons $r(m)$ interpolé pour toutes les valeurs de m. Quel que soit m, nous supposons que i soit égal au nombre $k\frac{\log m}{\log r(m)}$ que nous avons désigné (quand m est entier) par ρ. Inversement, si nous supposons $k\frac{\log m}{\log r(m)}$ croissant, l'égalité $i = k\frac{\log m}{\log r(m)}$ nous définit une valeur bien déterminée de m, pour chaque valeur donnée, entière ou non, de i. Remplaçons de même $\log n_i$ par $\log m$. Nous n'aurons plus de difficulté à faire correspondre à chaque valeur de i une valeur de A_i. Nous verrons ensuite dans quel cas la fonction continue A_i satisfait aux conditions complémentaires.

Le rang i du terme maximum est fourni par

$$\log r = \frac{d}{di}A_i. \tag{1}$$

Or, nous voulons que le rang (interpolé) $n_i = m$ de ce terme maximum soit tel que $\log r(m) = \log r$. L'égalité (1) doit donc pouvoir s'écrire

$$\log r = \log r(n_i) = \log r(m).$$

Nous arrivons donc à la condition

$$\log r(m) = \frac{dA_i}{di}. \tag{2}$$

Or

$$A_i = k\log m - \log m = i\log r(m) - \log m.$$

Donc

$$\frac{dA_i}{di} = \log r(m) + i\frac{d\log r(m)}{di} - \frac{d\log m}{di}.$$

L'égalité (2) se réduit à

$$i = \frac{d\log m}{d\log r(m)}. \tag{3}$$

Posons

$$\log r(m) = x, \qquad \log m = y;$$

on a

$$i = y'.$$

Mais nous ne sommes assurés que le terme maximum divise la série entière en deux parties équivalentes que moyennant certaines conditions :

1° $A'' > 0$; 2° $\lim\limits_{i=\infty} A''(i) = 0$; 3° $\lim\limits_{i=\infty} A''\left(i + \frac{\theta k}{\sqrt{A''_i}}\right) : A''_i = 1$.

Traduisons ces conditions au moyen de la fonction $y(x)$.

On a

$$A_i = i \log r(m) - \log m = xy' - y.$$

Puis

$$\frac{dA_i}{di} = x,$$

d'après

$$\frac{dA_i}{dx} = xy'', \qquad \frac{dx}{di} = \frac{1}{y''},$$

$$\frac{d^2 A_i}{di^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dA_i}{di}\right)\frac{dx}{di} = \frac{1}{y''}.$$

La condition $A''_i > 0$ se traduit donc par $y'' > 0$. La seconde condition impose à y'' de croître indéfiniment. Étudions la troisième. Elle consiste en ceci que, y' s'augmentant de $\frac{\theta k}{\sqrt{A''_i}}$, l'altération relative de A''_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Donc, si y' s'augmente de $\theta k \sqrt{y''}$, l'altération relative de y'' tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Soit x_1 le nombre (unique, puisque y' est croissant) tel que

$$y'(x_1) = y'(x) + h\sqrt{y''(x)}.$$

On a, si x est supérieur à un certain nombre X_k,

$$y''(x_1) = y''(x)(1 + \delta\varepsilon),$$

avec $\delta^2 < 1$, pour toutes les valeurs de h comprises entre zéro et le nombre fixe k. En multipliant les termes de cette égalité par dx_1 et en intégrant entre les limites x et x_1, il vient

$$y'(x_1) - y'(x) = y''(x)(x_1 - x)(1 + \delta\varepsilon).$$

Donc

$$x_1 - x = \frac{h}{(1 + \delta\varepsilon)\sqrt{y''(x)}}.$$

La troisième condition imposée à A''_i exige donc que

$$y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x)$$

tende vers 1 pour x infini, k étant fixe et θ arbitraire entre 0 et 1.

Réciproquement, si l'on suppose cette condition vérifiée, on démontre aisément que : 1° bien que k ne soit plus en général indépendant de m (d'après $k = \frac{d \log y}{d \log x}$, k est fixe si $r_n = e^{(\log n)^\alpha}$, α étant fixe inférieur à 1), la série $\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{r}{r(m)}\right]^{p_m+1}$ est égale, avec une erreur infiniment petite, à $\frac{r}{k(n_i) - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r^i}{n_i^{k-1}}$; 2° cette dernière série est évaluée asymptotiquement par la formule donnée plus haut, et son terme maximum la divise en deux parties équivalentes.

Nous n'insistons pas sur ces points, car nous verrons que l'hypothèse

$$\lim_{x=\infty} y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x) = 1$$

permet l'évaluation asymptotique de la somme $\sum \varphi\left(\frac{r}{r(m)}, p_m\right)$ elle-même, et non plus seulement de son expression trop grossièrement approchée $\sum \left(\frac{r}{r(m)}\right)^{p_m+1}$.

En réalité, je ne suis pas arrivé aussi directement au résultat. Je me suis aidé de l'observation suivante :

69. Supposons la fonction entière mise sous la forme $\sum \left(\frac{r}{B_n}\right)^n$, B_n croissant indéfiniment avec n. Alors, *si i_1 est le rang du nombre* B_n

égal à r, si le rang du terme maximum est $i = \frac{i_1}{e + \alpha_i}$, α_i tend vers zéro avec $\frac{1}{i}$, moyennant une certaine condition (2) *de régularité.*

En effet, le maximum de $\left(\frac{r}{B_n}\right)^n$ est pour $n = i$ si

$$\log r = \log B_i + i\frac{d\log B_i}{di} = \log B_i + \frac{d\log B_i}{d\log i},$$

ce qui détermine i, si le second membre est croissant ; supposons donc

$$(1) \qquad \frac{d\log B_i}{d\log i} + \frac{d^2\log B_i}{(d\log i)^2} > 0.$$

Or formons $B_{ie^{1+\alpha}}$. $\frac{d^2\log B_n}{(d\log n)^2}$ étant supposé continu, on a

$$\log B_{ie^{1+\alpha}} = \log B_i + (1+\alpha)\frac{d\log B_i}{d\log i} + \frac{(1+\alpha)^2}{2}\,\frac{d^2\log B_{ie^{\theta(1+\alpha)}}}{(d\log i)^2}.$$

Supposons, ce qui entraîne la condition (1), que

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{d^2\log B_n}{(d\log n)^2} : \frac{d\log B_n}{d\log n} = 0 \quad (^1).$$

Si ce quotient est inférieur en valeur absolue à ε pour $i > i_0$, on a, si $i_2 > i$,

$$\frac{d\log B_{i_2}}{d\log i_2} = \frac{d\log B_i}{d\log i}e^{\delta\varepsilon(\log i_2 - \log i)} \qquad (\delta^2 < 1).$$

et par suite, si $i_2 = ie^{\theta(1+\alpha)}$,

$$\left|\frac{d^2\log B_{i_2}}{(d\log i_2)^2}\right| < \varepsilon\, e^{\varepsilon(1+\alpha)}\frac{d\log B_i}{d\log i}.$$

Donc

$$\log B_{ie^{1+\alpha}} = \log B_i + (1+\alpha)(1+h\varepsilon)\frac{d\log B_i}{d\log i},$$

h étant borné si α l'est, et si $\varepsilon < 1$. Il n'y a qu'un seul nombre i_1 tel que $B_{i_1} = r$. Or, il est visible que l'on peut satisfaire à cette égalité en prenant pour α une certaine valeur tendant vers zéro avec $\frac{1}{i}$. Donc,

(¹) Si la série est mise sous la forme $r^i e^{-A_i}$, cette condition est remplie si iA''_i tend vers zéro en décroissant, ce qui borne inférieurement l'ordre de croissance de la fonction entière.

si $i_1 = i(e+\alpha_i)$, α_i tend vers zéro et est comparable à α. α a pour partie principale

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2\log B_i}{(d\log i)^2}:\frac{d\log B_i}{d\log i}.$$

En mettant la série $\sum\limits_1^\infty \frac{r^i}{n_i^{k-1}}$ sous la forme $\sum\limits_1^\infty\left[\frac{r}{(R_i)^{\frac{k-1}{k}}}\right]^i [R_i = r(n_i)]$, on trouve que

$$\log R_i = \left[1-\frac{1}{k(i_1)}\right]\log R_{i_1},$$

i_1 étant un nombre dont la partie principale est ei.

C'est de cette condition, nécessaire dans des cas d'assez grande régularité, que j'avais tout d'abord déduit $p = \frac{d\log m}{d\log r(m)}$.

70. Ouvrons une parenthèse pour citer une autre propriété analogue du nombre e. *Soit une fonction* $\varphi(n)$, *telle que* $\frac{d^2\varphi(n)}{(d\log n)^2}:\frac{d\varphi(n)}{d\log n}$ *tende vers zéro. Si l'on pose*

$$\varphi(N)+\varphi(N+1)+\ldots+\varphi(n) = n\varphi(hn),$$

N *étant fixe*, h *tend pour* n *infini vers* $\frac{1}{e}$. Posons

$$\varphi(e^y) = \psi(y).$$

Notre hypothèse est que $\frac{\psi''}{\psi'}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$. Il en résulte d'abord que ψ' a un signe constant et que $\int_N^n \varphi(n)\,dn$ diverge. En effet il existe, par hypothèse, un nombre $n_0 = e^{y_0}$ tel que, pour $y > y_0$, on ait $-\varepsilon < \frac{\psi''}{\psi'} < \varepsilon$. De là résulte

$$e^{-\varepsilon(y-y_0)} < \frac{\psi'(y)}{\psi'(y_0)} < e^{\varepsilon(y-y_0)}.$$

Donc, pour $y > y_0$, $\psi'(y)$ a le signe de $\psi'(y_0)$. D'ailleurs

$$J = \int_N^n \varphi(n)\,dn = \int_Y^y \psi(y)\,e^y\,dy \qquad (n = e^y;\ N = e^Y)$$

diverge manifestement. Cela étant, puisque $\varphi(n)$ varie toujours dans le même sens,

$$S_n = \sum_{N}^{n} \varphi(n) = \theta\,|\,\varphi(n) - \varphi(N)\,| + J.$$

Or

$$J = \int^{y} \psi(y)\, e^{y}\, dy = [\psi(y)\, e^{y}]_{Y}^{y} - \int_{Y}^{y} \psi'\, e^{y}\, dy$$

et

$$J_1 = \int_{Y}^{y} \psi'\, e^{y}\, dy = (\psi' e^{y})_{Y}^{y} - \int_{Y}^{y} \psi''\, e^{y}\, dy.$$

Puisque $\frac{\psi''}{\psi'}$ tend vers zéro, J_1 qui croît indéfiniment est égal à $\psi' e^{y}$ avec une erreur relative infiniment petite avec $\frac{1}{y}$. Si

$$J_1 = \psi' e^{y}(1 + \delta\varepsilon),$$

δ^2 étant inférieur à 1 à partir d'une certaine valeur de y, on a

$$S_n = e^{y}\,\psi(y) - e^{y}\,\psi'(y)(1 + \delta\varepsilon) + \theta\,|\,\psi(y) - \psi(Y)\,|.$$

Or $e^{y}\psi'$ et $e^{y}\frac{\psi'}{\psi}$ sont infiniment grands. Donc

$$S_n\, e^{-y} = \psi(y) - \psi'(y)(1 + 2\delta\varepsilon),$$

δ^2 étant inférieur à 1 à partir d'une certaine valeur de y. Or, nous avons vu que, si l'on écrit le second membre sous la forme $\psi(y - 1 + \eta)$, η tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$ $\left(\text{à cause de } \lim_{y=\infty} \frac{\psi''}{\psi'} = 0\right)\cdot$ En remplaçant e^{y} par n, on voit que

$$S_n = n\,\varphi\left(\frac{n}{e + \eta'}\right),$$

η' tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$ C. Q. F. D.

La croissance de φ est limitée par ce fait que $\frac{\log\varphi}{\log n}$ doit tendre vers zéro, positivement ou négativement d'ailleurs. La formule vaut pour $\varphi = (Ln)^{\alpha}$, quel que soit α, positif ou négatif, et donne

$$\sum_{2}^{n} (Ln)^{\alpha} = n[Ln - 1 - \eta(n)]^{\alpha}, \qquad \lim \eta(n) = 0.$$

Elle vaut pour $L_2 n, \ldots, L_k n, \ldots$ ou, encore, vers les plus grandes croissances pour $\varphi = e^{\alpha (L n)^\beta}$, si $\beta < 1$, α étant arbitraire fixe, positif ou négatif. Mais déjà, pour $\varphi = n$,

$$\sum_1^n \varphi(n) = \frac{n(n+1)}{2} \neq \frac{n^2}{e + \eta(n)}.$$

La formule ne convient pas si l'une des séries $[\varphi(n)]^{p+1}$ ou $\frac{1}{[\varphi(n)]^{p+1}}$ converge pour une valeur assez grande de p, mais elle vaut dès que la divergence se produit pour toute valeur de p, et évidemment, moyennant les conditions de régularité. En appelant *genre* d'une série $\varphi(n)$ le plus petit entier p positif, négatif ou nul, tel que $[\varphi(n)]^{p+1}$ converge, il semble que la manière dont se comporte h relativement à e quand n croît indéfiniment puisse différencier les séries de genre fini d'avec les séries de genre infini.

Si l'on ne voulait pas interpoler explicitement la fonction $\varphi(n)$ pour prendre ses dérivées, on pourrait énoncer le théorème suivant :

Soit $\frac{v_n}{n}$ le terme général d'une série divergente, telle que $u_n = \sum_1^n \frac{v_n}{n}$ soit infiniment grand relativement à v_n (¹). *Soit*

$$\varphi(n) = \sum_1 \frac{u_n}{n}.$$

Alors,

$$\sum_1^n \varphi(n) = n\varphi\left[\frac{n}{e + \eta(n)}\right],$$

$\eta(n)$ tendant vers zéro.

71. *Seconde voie conduisant à la valeur de p.* — Voici une autre voie totalement indépendante de la première, et conduisant, elle aussi,

---

(¹) Si l'on suppose $\frac{v_n}{n}$ et $\frac{v_n}{u_n}$ décroissants, ceci se traduit par la condition *nécessaire et suffisante* que voici : à tout membre ε, je peux faire correspondre N, tel que, si $N < n' < n$, on a : $\frac{v_n}{v_{n'}} < \left(\frac{n}{n'}\right)^\varepsilon$. (*Voir* aux *Comptes rendus* ma Note du 13 avril 1909.)

à la valeur approchée $i = \frac{d \log m}{d \log r(m)}$. Mais ici la valeur optima de i n'est pas obtenue par une analyse de la condition $\Pi_1 \sim \Pi_2$, mais en perfectionnant une loi choisie *a priori* pour p.

Soit ρ_m l'exposant attaché à r_m. D'après la formule $u^\tau > M(u)$ nous ne supposerons pas ρ_m entier, mais variant continûment avec r_m si l'on a interpolé la fonction $m = \varphi(r)$ pour toutes les valeurs de r. *Nous cherchons à choisir ρ_m tel que*

$$(1) \qquad \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} \leqq \frac{V(r)}{m^k},$$

pour $r_m > r$, k étant supérieur à 1 et fixe.

On a, en faisant tendre r_m vers r,

$$V(r) \geqq [\varphi(r)]^k.$$

C'est une condition nécessaire. Choisissons

$$V(r) = [\varphi(r)]^k.$$

Nous voulons que

$$\left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} \leqq \left[\frac{\varphi(r)}{\varphi(r_m)}\right]^k,$$

quel que soit $r_m > r$. Les deux membres sont égaux pour $r_m = r$. Il faut donc encore que la dérivée par rapport à r_m du premier soit inférieure à celle du second pour $r_m = r$. Il vient

$$\rho(r_m)\, d \log r_m \geqq k\, d \log \varphi(r_m).$$

Prenons

$$\rho(r_m) = k \frac{d \log m}{d \log r_m},$$

et cherchons à quelle condition l'inégalité (1) où tout est connu sera vérifiée, quel que soit m. Il faut que, quel que soit $r' = r_m > r$,

$$(\log r' - \log r) \frac{d \log \varphi(r')}{d \log r'} > \log \varphi(r') - \log \varphi(r), \qquad \text{si} \qquad r' > r.$$

Or, ceci exprime simplement que la courbe dont les points ont pour abscisse $\log r$ et pour ordonnée $\log \varphi(r)$ tourne sa concavité vers les $\log \varphi(r)$ positifs. Si l'on pose en effet

$$\log \varphi(r) = y, \qquad \log r = x,$$

la condition précédente s'écrit, si $x_1 < x_2$,

$$y'_2(x_2 - x_1) > y_2 - y_1$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} (y'_2 - y')\,dx > 0.$$

Si, quel que soit le couple de points x_2, $x < x_2$, on n'a pas $y' < y'_2$, il sera possible de trouver un intervalle où y' décroisse; en prenant x_2 et x_1 dans cet intervalle, on aurait $y'_2(x_2 - x_1) < y_2 - y_1$. Donc, y' croît constamment. Donc $y'' \geqq 0$. Réciproquement, l'hypothèse $y'' \geqq 0$ nous donne, si y'' n'est pas continuellement nul dans un intervalle, $y'_2 - y' > 0$, si $x < x_2$ et par suite

$$y'_2(x_2 - x_1) > y_2 - y_1.$$

Donc, moyennant $y'' > 0$, on a, avec $\rho_m = k\dfrac{d\log m}{d\log r_m} = ky'$,

$$\left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} \leqq \left[\frac{\varphi(r)}{m}\right]^k \qquad \text{si} \qquad m \geqq \varphi(r).$$

Donc

$$\sum_{\varphi(r)}^{\infty} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} < [\varphi(r)]^k \sum_{\varphi(r)}^{\infty} \frac{1}{m^k} = \frac{1}{k-1}\varphi(r).$$

Évaluons la somme des termes pour lesquels $r_m < r$.

$$\sum_{1}^{\varphi(r)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} = \int_1^{\varphi(r)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} dm = \int_1^{Y} e^{ky'(X-x)+y}\,dy,$$

en posant

$$X = \log r \qquad \text{et} \qquad Y = \log\varphi(r).$$

Cette dernière intégrale est inférieure, d'après $y'(X - x) < Y - y$, à

$$e^{kY}\int_1^Y e^{-(k-1)y}\,dy = h[\varphi(r)]^k,$$

h étant égal à

$$\int_1^Y e^{-(k-1)y}\,dy < \int_1^{\infty} e^{-(k-1)y}\,dy$$

qui est borné. La limite inférieure pouvant être prise arbitrairement grande, mais fixe cependant, la somme des termes pour lesquels $x < X$ est égale à $\eta(r)[\varphi(r)]^k$, η tendant vers zéro.

72. L'égalité des ordres de la première partie et du reste n'est pas réalisée. On peut en approcher davantage, si l'on suppose que la courbe d'abscisse $\log r$ et d'ordonnée $\log \psi(r)$, avec

$$\psi(r) = \varphi(r) \log \varphi(r) \ldots \log_{h-1} \varphi(r) \log_h^k \varphi(r),$$

tourne sa concavité vers les $\log \psi(r)$ positifs.

Cherchons à déterminer ρ_m par la condition

$$\left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} \cdot \frac{\mathrm{X}(r)}{m \log m \ldots \log_{h-1} m \log_h^k m}.$$

On voit comme ci-dessus que la question est résolue en posant

$$\mathrm{X}(r) = \psi(r) \qquad \text{et} \qquad \rho_m = \frac{d \log \psi[r(m)]}{d \log r(m)}.$$

Moyennant ces hypothèses

$$\sum_{m=\varphi(r)}^{\infty} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} < \frac{1}{k-1} \frac{\psi(r)}{\log_h^{k-1} \varphi(r)},$$

et

$$\sum_{1}^{\varphi(r)} \left(\frac{r}{r_m}\right)^{\rho_m} = \int_{y_0}^{Y} e^{(X-x)\frac{d \log \psi}{dx} + y} dy.$$

Or

$$(X - x) \frac{d \log \psi}{dx} < \log \Psi - \log \psi.$$

D'après

$$\log \psi = y + \log y + \ldots + \log_{h-1} y + k \log_h y,$$

l'intégrale est inférieure à

$$\psi(r) \int_{y_0}^{Y} \frac{dy}{y \log y \ldots \log_{h-2} y \log_{h-1}^k y} \qquad \text{ou à} \qquad \varepsilon \psi(r).$$

Les deux parties du produit ne sont toujours pas d'ordre équivalent; la première surpasse la seconde, mais leur rapport égal à $\log_h^{k-1} \varphi(r)$ est faiblement croissant relativement à l'ordre de la plus grande.

Seulement on s'aperçoit, quand la précision est poussée à ce point, que l'erreur commise en limitant $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ par $\left(\frac{r}{r_n}\right)^\tau$ devient prépondérante, et, en reprenant le problème à pied d'œuvre avec $p = y' + \alpha$, et la seule hypothèse que y' soit sensiblement croissant, on arrive aux calculs et aux résultats développés dans le Chapitre II.

Expression asymptotique de $\Pi(X)$ dans le cas des croissances très régulières.

73. Soit une fonction $y(x)$ telle que, pour toutes les valeurs $x(n)$ de x, y coïncide avec $y(n)$, et qui réalise l'hypothèse suivante que nous désignerons sous le nom d'hypothèse B : 1° y possède une dérivée seconde y''; 2° quel que soit le nombre k choisi, arbitraire et fixe, et quelle que soit la façon dont θ varie entre 0 et 1, on a ([1])

$$\lim_{x=\infty} y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x) = 1. \tag{1}$$

Nous allons voir que cette hypothèse B permet d'obtenir l'expression asymptotique exacte de

$$\Pi(X) = \sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right) \qquad (X = \log r),$$

pour toutes les valeurs de r. Au contraire, la limite supérieure de Π

([1]) Voici l'interprétation géométrique de cette condition analytique. Supposons construite la courbe représentative de la fonction $y(x)$. Menons la tangente T au point X, Y, la droite Δ parallèle à T, et ayant une ordonnée à l'origine qui excède de k celle de T. Δ est la corde d'un arc AB. J'opère une certaine transformation homographique du plan des xy en le plan des $\xi\eta$, de façon que T se transforme en $O\xi$, la droite $x = X$ en $O\eta$, les droites de l'infini des deux plans étant homologues. Si enfin le point B est assujetti à venir se placer au point de coordonnées $\left(\frac{k^2}{2}, k\right)$, la transformation homographique est déterminée et le transformé de l'arc AB tend, si X croît indéfiniment, vers l'arc de parabole $2\eta = \xi^2$, compris entre les droites $\xi = \pm k$. Il est à remarquer que, si y'' est infiniment grand, la projection de AB sur Ox, égale à $\frac{2k}{\sqrt{y''}}$, est infiniment petite.

trouvée au Chapitre I, moyennant l'hypothèse A et obtenue en négligeant certaines quantités que nous ne pouvions pas évaluer, n'est l'expression asymptotique exacte de II que dans le cas exceptionnel où l'exposant reste constant sur une très grande étendue de r_n, dans laquelle est choisi r. Ceci est évidemment insuffisant lorsque n et par suite p_n croissent très régulièrement en fonction de r_n, par exemple, si n est composé en r_n d'exponentielles, de logarithmes, etc., en nombre fini.

74. *Étude de l'hypothèse* B. — L'hypothèse B, qui exprime une condition suffisante pour que le calcul ci-dessus proposé soit possible, définit une famille de fonctions évidemment beaucoup plus générale que la précédente. D'ailleurs, si l'existence d'une dérivée seconde jouissant de la propriété imposée implique une assez grande régularité locale de la fonction y, cette fonction dans son ensemble peut être très irrégulière. Car les fonctions pour lesquelles $y'' = \left(a - \frac{\varepsilon}{k}x\right)^{2}$ ou $y'' = \left(a + \frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-2}$ sont telles que les courbes x, y correspondantes aient, la première une asymptote verticale, la seconde une asymptote de pente finie, bien que

$$y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) = y''(x)\frac{1}{1 \pm \theta\varepsilon}$$

($-\theta\varepsilon$ pour la première, $+\theta\varepsilon$ pour la seconde). Il est donc possible d'avoir

$$y''\left[x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''(x)}}\right] : y''(x) = 1 + \eta(x)$$

avec

$$\lim_{x=\infty} \eta(x) = 0,$$

et de faire décrire à y des arcs sur des courbes à asymptotes tour à tour verticales ou à pente finie.

Nous allons rechercher de quelle façon précise l'hypothèse B se trouve contraindre la fonction y.

75. *Je dis que* $\frac{y''}{y'^2}$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{x}$. Le choix de l'exposant 2

pour y' n'est pas arbitraire. Car, si on le remplace par $2-\alpha$, quelque petit que soit α, positif fixe, il est possible, avec une fonction conforme à l'hypothèse B, d'obtenir pour le rapport $\frac{y''}{y'^{2-\alpha}}$ des valeurs de plus en plus grandes pour une infinité de valeurs croissantes de x.

En faisant coïncider alternativement y'' avec les fonctions $\left(a-\frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-2}$ et $\left(a+\frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-2}$, les ε décroissant de chaque arc au suivant, comme il vient d'être indiqué (voir aussi Chap. II, p. 55), on a sur l'un des premiers arcs

$$\frac{y''}{y'^{2-\alpha}}=\left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{2-\alpha}\left(a-\frac{\varepsilon}{k}x\right)^{-\alpha}.$$

Si l'on fait approcher suffisamment x de $\frac{ka}{\varepsilon}$, on peut évidemment rendre ce rapport supérieur à tout nombre fixé d'avance.

Le rapport $\frac{y''}{y'^{2-\alpha}}$ pourrait même, pour une fonction y satisfaisant à l'hypothèse B, surpasser une fonction arbitrairement croissante donnée $\varphi(x)$ pour une infinité de valeurs de x. C'est donc un fait non évident *a priori* que $\frac{y''}{y'^2}$ tende vers zéro. Démontrons-le.

L'hypothèse B exprime que, k étant choisi fixe arbitrairement grand, il existe un nombre ξ_0 tel que, pour $x>\xi_0$,

$$y''\left(x+\frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right)=(1+\delta\varepsilon)y''(x) \qquad (\delta^2<1).$$

Considérons la suite des nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ définie par la loi de récurrence

$$\xi_{n+1}=\xi_n+\frac{k}{\sqrt{y''_n}},$$

avec

$$y''_n=y''(\xi_n).$$

On a, si

$$\xi_n \leq x \leq \xi_{n+1}, \qquad y''=(1+\delta\varepsilon)y''_n;$$

d'où, en intégrant,

$$y'_{n+1}-y'_n=(1+\delta\varepsilon)y''_n(\xi_{n+1}-\xi_n)=(1+\delta\varepsilon)k\sqrt{y''_n}$$

et

$$y'_{n+1} = y'_0 + (1+\delta\varepsilon)k(\sqrt{y''_0} + \sqrt{y''_1} + \ldots + \sqrt{y''_n}).$$

Avant de former le rapport $\frac{y''_{n+1}}{y'^2_{n+1}}$, remplaçons les variables y''_i qui y figurent et *qui ne sont pas indépendantes* les unes des autres puisque toute modification dans le champ de variation de l'une entraîne une modification dans le champ de toutes les suivantes, par les variables $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ définies par

$$y''_{n+1} = t_n y''_n.$$

Les variables t_i sont rigoureusement indépendantes, chacune varie à son gré dans le champ $1-\varepsilon$ à $1+\varepsilon$. L'artifice de ce changement de variable va nous conduire au résultat cherché. On a

$$\frac{y''_{n+1}}{y'^2_{n+1}} = \frac{y''_0 t_1 t_2 \ldots t_n}{\left[y'_0 + (1+\delta\varepsilon)k\sqrt{y''_0}(1+\sqrt{t_1}+\sqrt{t_1 t_2}+\ldots+\sqrt{t_1\ldots t_n})\right]^2}.$$

Or, si nous remarquons que $\frac{x}{(A\sqrt{x}+B)^2}$, où A et B sont positifs, est une fonction croissante de x, puisque c'est $\frac{1}{\left(A+\frac{B}{\sqrt{x}}\right)^2}$, nous augmentons la valeur du second membre, chaque fois que nous y remplaçons l'un des t_i par $1+\varepsilon$. On aura donc une limite supérieure de $\frac{y''_{n+1}}{y'^2_{n+1}}$ en faisant

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1+\varepsilon,$$

en prenant $\delta = -1$ et en supprimant au dénominateur y'_0 supposé positif. Donc

$$\frac{\sqrt{y''_{n+1}}}{y'_{n+1}} < \frac{1-(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(1-\varepsilon)k\left[1-(1+\varepsilon)^{-\frac{n+1}{2}}\right]}.$$

Le second membre tend pour n infini vers $\frac{1}{1-\varepsilon}\,\frac{1-(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{k}$ inférieur à $\frac{\varepsilon}{2k(1-\varepsilon)}$ [d'après $(1+x)^m > 1+mx$ si x est positif, quel que soit m]. Il y a donc une valeur n_0 calculable au moyen de k et ε seuls, telle que, si $n > n_0$, on a certainement $\left(\text{en supposant } \varepsilon < \frac{1}{2}\right)$

$$\frac{y''_n}{y'^2_n} < \frac{\varepsilon^2}{k^2}.$$

D'ailleurs, si $n > n_0$, d'après

$$y' - y'_n = (1 + \delta\varepsilon)\theta' k\sqrt{y''_n},$$

moyennant $\xi_n < x < \xi_{n+1}$, on a

$$y' = y'_n[1 + \overline{1 + \delta\varepsilon}\,\theta''\varepsilon].$$

Donc, si $\xi_n < x < \xi_{n+1}$, et si $n > n_0$,

$$\frac{y''}{y'^2} < \frac{\varepsilon^2}{k^2}(1 + \varepsilon).$$

Comme

$$\begin{aligned}\xi_{n_0+1} &= \xi_0 + k\left(\frac{1}{\sqrt{y''_0}} + \frac{1}{\sqrt{y''_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n_0}}}\right)\\ &< \xi_0 + \frac{k}{\sqrt{y''_0}}\left[1 + \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}} + \ldots + \frac{1}{(1-\varepsilon)^{\frac{n_0}{2}}}\right] = \xi'_0,\end{aligned}$$

si $x > \xi'_0$, qui est calculable au moyen de ξ_0, y''_0, n_0 (ou k et ε) seuls, on aura certainement

$$\frac{y''}{y'^2} < \frac{\varepsilon^2}{k^2}(1 + \varepsilon).$$

Comme ε ou $\frac{1}{k}$ au choix peuvent être pris arbitrairement petits, ceci exprime que $\frac{y''}{y'^2}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

Montrons de même que

$$y'\left(x + \frac{\theta k}{y'}\right) : y'(x)$$

tend vers 1. En effet,

$$x + \frac{\theta k}{y'} = x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}},$$

à partir de la valeur de x ou $y'' < y'^2$. Or, nous avons vu ci-dessus que

$$y'\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y'(x)$$

tend vers 1.

76. Il nous sera enfin utile d'établir le fait suivant : *$x\sqrt{y''}$ croît indéfiniment avec x.*

Montrons d'abord qu'il en est de même de $\xi_n\sqrt{y''_n}$. On a

$$\xi_{n+1} = \xi_0 + k\left(\frac{1}{\sqrt{y''_0}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_n}}\right),$$

d'où, avec les notations employées,

$$\xi_{n+1}\sqrt{y''_{n+1}} = \left(\xi_0 + \frac{k}{\sqrt{y''_0}}\,\overline{1 + \frac{1}{\sqrt{t_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{t_1\ldots t_n}}}\right)\sqrt{t_1 t_2 \ldots t_n y''_0}.$$

Le second membre est linéaire et à coefficients positifs par rapport à chacune des variables $\sqrt{t_i}$. Il est minimum pour

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 1 - \varepsilon.$$

En supprimant ξ_0 au second membre, il vient, tous calculs effectués,

$$\xi_{n+1}\sqrt{y''_{n+1}} > k\,\frac{1-(1-\varepsilon)^{\frac{n+1}{2}}}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}.$$

Quand n croît indéfiniment, le second membre tend vers $\dfrac{k}{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}$. Pour $n > n_0$, si ε est assez petit, on a donc

$$\xi_{n+1}\sqrt{y''_{n+1}} > \frac{k}{\varepsilon}.$$

Il résulte de là que $\xi_n\sqrt{y''_n}$ croît indéfiniment. Si $\xi_n < x < \xi_{n+1}$, on a

$$x = \xi_n + \frac{\theta k}{\sqrt{y''_n}} = \xi_n\left(1 + \frac{\theta k}{\xi_n\sqrt{y''_n}}\right).$$

Donc, $\dfrac{x}{\xi_n}$ tend vers 1, de même que $\dfrac{y''(x)}{y''(\xi_n)}$. Donc, $x\sqrt{y''(x)}$ est infiniment grand avec x.

On achèverait le raisonnement avec précision en montrant que, connaissant ξ_0, y''_0 et n_0 déduit de k, ε, on peut calculer un nombre ξ''_0 tel que, si $x > \xi''_0$,

$$x\sqrt{y''} > \frac{k}{2\varepsilon}.$$

$\dfrac{1}{k}$ et $\dfrac{1}{\varepsilon}$ étant, séparément au moins, arbitrairement petits, ceci exprime que $x\sqrt{y''}$ est infiniment grand avec x.

77. *Calcul de* $\Pi(X)$. — Nous allons calculer la fonction $\Pi(X)$ quand on définit p par les inégalités $p \leqq y' < p + 1$.

Étant donné un nombre ε positif fixe arbitrairement petit au moyen duquel nous mesurerons nos approximations, rappelons que nous avons décomposé

$$\Pi(X) = \sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$$

en quatre parties :

$$\sum_1^{N_0-1} + \sum_{N_0}^{N_1-1} + \sum_{N_1}^{N_2-1} + \sum_{N_2}^{\infty} = S_0 + S_1 + S_2 + S_3.$$

Le nombre des termes de la première partie est indépendant de r, N_0 est choisi aussi grand que l'exigent certaines inégalités où figure ε, mais, comme N_0 est fixe, S_0 devient négligeable relativement à la partie restante. N_1 et N_2 sont respectivement les valeurs, à une unité près par excès, de e^{Y_1} et e^{Y_2}. Au précédent Chapitre Y_1 et Y_2 étaient définis par

$$Y - Y_1 = Y_2 - Y = h.$$

Ici, nous les définirons par

$$X - X_1 = X_2 - X = \frac{h}{Y'}.$$

Les modifications apportées à Y_1 et à Y_2 sont de la sorte infiniment petites avec $\frac{1}{Y'}$. Car

$$Y - Y_1 = (X - X_1) y'(\lambda) = h\frac{y'(\lambda)}{Y'},$$

λ étant un certain nombre compris entre X_1 et X. Mais de

$$\lambda = X - \frac{\theta h}{Y'},$$

il résulte

$$\lim_{X=\infty} y'(\lambda) : Y' = 1.$$

Donc, $Y - Y_1$ et pareillement $Y_2 - Y$ ne diffèrent de h que par une quantité infiniment petite avec $\frac{1}{X}$. Ceci nous montre que

$$\sum_{N_1}^{N_2-1} \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$$

est inférieur à $C_2 e^X$, C_2 étant borné. Je dis que, si $x < X_1$, le produit $(X - x)y'$ est supérieur à un nombre qui tend vers h pour X infini.

En effet, puisque $\frac{y''}{y'^2}$ tend vers zéro, supposons X_0 assez grand pour que, si $x > X_0$,

$$h\frac{y''}{y'^2} < \frac{1}{2}.$$

Alors, $x + \frac{h}{y'}$ est croissant si $x > X_0$, et ne prend qu'une fois chaque valeur supérieure à X_0. Soit x'_1 le nombre tel que

$$x'_1 + \frac{h}{y'_1} = X \qquad [y'_1 = y'(x'_1)].$$

D'après

$$x'_1 + \frac{h}{Y'} < X \qquad (Y' > y'_1 \text{ d'après } x'_1 < X),$$

x'_1 est inférieur à X_1. Mais, d'une part, pour $x < x'_1$,

$$y'(X - x) > h.$$

Pour $x'_1 < x < X_1$,

$$y'(X - x) > y'_1(X - x'_1) > y'_1(X - X_1) = h\frac{y'_1}{Y'}.$$

Or, $\frac{Y'}{y'_1}$ tend vers 1, d'après la relation qui lie X à x'_1. En rapprochant de ceci le fait que $\frac{y'}{p}$ tend vers 1, on en conclut que h puis X_0 peuvent être pris assez grands pour que, si $X_0 < x < X_1$, $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ puisse être remplacé par $\frac{1}{p}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\frac{1}{\frac{r}{r_n} - 1}$ avec une erreur relative inférieure à ε.

De même, $x - \frac{h}{y'}$ est toujours croissant et ne prend par suite qu'une fois la valeur X. Si

$$x'_2 - \frac{h}{y'_2} = X \qquad [y'_2 = y'(x'_2)],$$

on a

$$x'_2 < X + \frac{h}{Y'}$$

et par suite, pour $x > X_2$,

$$(X - x)y' > h.$$

Nous pouvons donc supposer h et X_0 (limités inférieurement une première fois) assez grands pour que $\varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ puisse être, à ε près, remplacé par $\frac{1}{p+1}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1} \frac{1}{1-\frac{r}{r_n}}$, si $x > X_2$. Nous écrivons donc

$$S_1 = (1 + \delta\varepsilon)\int_{X_0}^{X - \frac{h}{Y'}} e^{y - Y + (p+1)(X-x)} \frac{dx}{e^{X-x} - 1},$$

$$S_3 = (1 + \delta\varepsilon)\int_{X + \frac{h}{Y'}}^{\infty} e^{y - Y + (p+1)(X-x)} \frac{dx}{1 - e^{X-x}}.$$

Évaluons ces intégrales. Occupons-nous d'abord de S_3. Pour plus de commodité, désignons par $\varphi(x, X)$ les coefficients différentiels de S_1 et de S_3; φ est parfaitement déterminé selon qu'on suppose $x < X$ ou $x > X$.

78. Examinons l'intégrale

$$\int_{X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}}^{\infty} \varphi(x, X)\, dx.$$

Montrons en particulier que, si $\sqrt{Y''}$ est limité inférieurement, cette intégrale est infiniment petite avec $\frac{1}{k}$.

Posons

$$\xi_1 = X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}.$$

Soit X'_0 un nombre tel que, pour $x > X'_0$,

$$y''\left(x + \frac{\theta k}{\sqrt{y''}}\right) : y''(x) = 1 + \delta\varepsilon, \qquad \delta^2 < 1.$$

Soient

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{k}{\sqrt{y''_1}}, \qquad \ldots, \qquad \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{k}{\sqrt{y''_n}}, \qquad \ldots$$

avec

$$y''_n = y''(\xi_n).$$

Calculons

$$\Phi_n = \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} e^{y - Y + y'(x - X)} \frac{dx}{1 - e^{X - x}}.$$

On a

$$\Phi_n > \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \varphi(x, X)\, dx,$$

d'après $y' < p + 1$.

On a, si

$$-\psi(x, X) = y - Y + y'(X - x),$$

$$\psi(x, X) = \psi(\xi_n, X) + \frac{\partial\psi(\xi, X)}{\partial\xi}(x - \xi_n),$$

ξ étant un nombre compris entre ξ_n et x.

D'après

$$\frac{\partial\psi(x, X)}{\partial x} = y''(x - X) \qquad \text{et} \qquad y''(\xi) = (1 + \delta\varepsilon) y''_n,$$

$$-\psi(x, X) = \eta_n - Y - y'_n(\xi_n - X) - (x - \xi_n)(\xi - X) y''_n (1 + \delta\varepsilon),$$

en posant $\eta_n = y(\xi_n)$.

D'ailleurs,

$$\xi - X = \xi_n - X + \theta(x - \xi_n).$$

Donc,

$$(x - \xi_n)(\xi - X) y''_n = (x - \xi_n)(\xi_n - X) y''_n + \theta(x - \xi_n)^2 y''_n,$$

et, en supprimant dans $-\psi(x, X)$ le terme négatif $-\theta(x - \xi_n)^2 y''_n$ qui est d'ailleurs supérieur à $-k^2$,

$$\Phi_n < \frac{e^{\eta_n - Y - y'_n(\xi_n - X)}}{1 - e^{X - \xi_n}} \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} e^{-(x - \xi_n)(\xi_n - X) y''_n (1 - \varepsilon)}\, dx.$$

Si

$$(\xi_n - X) y''_n (1 - \varepsilon) = B,$$

l'intégrale qui figure au second membre est égale à $\frac{1}{B}(1 - e^{-B(\xi_{n+1} - \xi_n)})$. D'après $1 - e^{-u} < u$, quel que soit u, ceci est inférieur à

$$\xi_{n+1} - \xi_n = \frac{k}{\sqrt{y''_n}}.$$

Cette expression simplifiée sera assez exacte si $Y'' > 1$. Mais, si $Y'' < 1$, nous remarquons que

$$B(\xi_{n+1} - \xi_n) = k(\xi_n - X)\sqrt{y''_n}(1 - \varepsilon) > k^2(1 - 2\varepsilon).$$

En tous cas,

$$\Phi_n < \frac{k}{\sqrt{y''_n}} \frac{e^{\eta_n - Y - y'_n(\xi_n - X)}}{1 - e^{X - \xi_n}} = \psi_n.$$

Totalisons $\psi_1 + \ldots + \psi_n$ et pour cela faisons le rapport de chaque terme au précédent. Le rapport $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ est égal au produit de plusieurs rapports : d'abord $\frac{\sqrt{y''_n}}{\sqrt{y''_{n+1}}} < \sqrt{1 + \varepsilon}$; en second lieu $\frac{1 - e^{X - \xi_n}}{1 - e^{X - \xi_{n+1}}} < 1$; enfin, $e^{\psi(\xi_n, X) - \psi(\xi_{n+1}, X)}$. L'exposant de e est égal à $\psi'_\xi(\xi, X)(\xi_{n+1} - \xi_n)$, ξ étant compris entre ξ_n et ξ_{n+1}. Or,

$$\psi'_x = y''(x - X), \qquad y''(\xi) = y''_n(1 + \delta\varepsilon), \qquad \xi - X > \xi_n - X.$$

L'exposant de e est donc inférieur à $-k(1 - \varepsilon)\sqrt{y''_n}(\xi_n - X)$. En résumé,

$$\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} < \sqrt{1 + \varepsilon}\, e^{-k(1 - \varepsilon)\sqrt{y''_n}(\xi_n - X)}.$$

D'ailleurs

$$\xi_n - X > \xi_n - \xi_{n-1} > \frac{k}{\sqrt{y''_{n-1}}} > \frac{k}{(1 + \varepsilon)\sqrt{y''_n}}$$

(si $n = 1$, nous remplaçons ξ_{n-1} par X et y''_{n-1} par Y''). Donc

$$\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} < \sqrt{1 + \varepsilon}\, e^{-k^2 \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}}.$$

En réalité, un raisonnement analogue à celui qui nous a montré

$$\lim \frac{y''}{y'^2} = 0$$

donnerait, pour limite supérieure du rapport $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$, $\sqrt{1+\varepsilon\, e^{-\frac{k^2}{\varepsilon}}}$; mais le résultat que nous avons nous suffit. Si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, et si $2e^{-\frac{k^2}{3}} < \frac{1}{2}$, le rapport $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ sera inférieur à $\frac{1}{2}$. Donc, la série $\psi_1 + \psi_2 + \ldots$ a ses termes inférieurs à ceux d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Elle ne diffère que par un facteur inférieur à 2 de son premier terme

$$\frac{k}{\sqrt{y''_1}} \frac{e^{\eta_1 - Y - y'_1(\xi_1 - X)}}{1 - e^{X - \xi_1}}.$$

La convergence de S_3 est ainsi démontrée. Évaluons

$$\eta_1 - Y - y'_1(\xi_1 - X).$$

On a, si $x \leqq X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}$,

$$y - Y = Y'(x - X) + \frac{Y''}{2}(x - X)^2(1 + \delta\varepsilon),$$
$$y' = Y' + Y''(x - X)(1 + \delta\varepsilon).$$

Donc

$$y - Y + y'(X - x) = -(x - X)^2 \frac{Y''}{2}(1 + 3\delta\varepsilon),$$

et enfin

$$\eta_1 - Y - y'_1(\xi_1 - X) = -\frac{k^2}{2}(1 + 3\delta\varepsilon).$$

Donc,

$$\psi_1 + \psi_2 + \ldots < 2\frac{k}{\sqrt{Y''}} \frac{e^{-\frac{k^2}{2}(1-3\varepsilon)}}{1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}.$$

Si alors $\sqrt{Y''} > 1$, il est manifeste que le second membre est borné et arbitrairement petit en même temps que $\frac{1}{k}$. Si $\sqrt{Y''} < 1$, nous voyons en tous cas que le second membre peut être supposé arbitrairement petit relativement à $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$.

79. Évaluons de même dans quelle mesure il est loisible de remplacer S_1 par

$$\int_{X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}}^{X-\frac{k}{Y'}} \varphi(x, X)\, dx.$$

Nous avons vu que $x\sqrt{y''}$ croît indéfiniment avec x. De là résulte que le nombre $x - \frac{A}{\sqrt{y''}}$, quel que soit A fixe, s'éloigne indéfiniment avec x. Car, si $y'' > 1$, il est supérieur à $x - A$, qui croît indéfiniment. Si $y'' < 1$, il est supérieur à $x\sqrt{y''} - A$ qui croît aussi indéfiniment.

Examinons

$$R_1 = \int_{X_0}^{X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}} \varphi(x, X)\, dx.$$

Nous augmentons cette intégrale en y remplaçant $p+1$ par $y'+1$. Posons

$$\xi_{-1} = X - \frac{k}{\sqrt{Y''}}, \qquad \ldots, \qquad \xi_{-n-1} = \xi_{-n} - \frac{k}{\sqrt{y''_{-n}}}, \qquad \ldots,$$

avec

$$y''_{-n} = y''(\xi_{-n}).$$

Si

$$x < \xi_{-1}, \qquad \frac{e^{X-x}}{e^{X-x}-1} < \frac{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}-1},$$

$$R_1 < \frac{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}{e^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}-1} \int_{x_0}^{X-\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{y-Y+y'(X-x)}\, dx.$$

Posons

$$\chi_{-n} = \int_{\xi_{-n-1}}^{\xi_{-n}} e^{-\psi(x,X)}\, dx.$$

Si

$$\xi_{-n-1} < x < \xi_{-n},$$

$$y - Y + y'(X - x) = \eta_{-n} - Y + y'_{-n}(X - \xi_{-n}) + (x - \xi_{-n})(X - \xi')\, y''(\xi')$$

avec

$$x < \xi' < \xi_{-n},$$

et d'après

$$X - \xi' = X - \xi_{-n} + \theta(\xi_{-n} - x),$$

$$y - Y + y'(X - x)$$
$$= -\psi(\xi_{-n}, X) + y''_{-n}(x - \xi_{-n})(X - \xi_{-n})(1 + \delta\varepsilon) - \theta k^2(1 + \delta\varepsilon).$$

Donc

$$\chi_{-n} < e^{-\psi(\xi_{-n}, X)} \int_{\xi_{-n-1}}^{\xi_{-n}} e^{B_{-n}(x - \xi_{-n})} \, dx$$

avec

$$B_{-n} = y''_{-n}(1 - \varepsilon)(X - \xi_{-n}).$$

L'intégrale est égale à

$$\frac{1}{B_{-n}} \left[1 - e^{-B_{-n}(\xi_{-n} - \xi_{-n-1})} \right]$$

qui est inférieur à

$$\xi_{-n} - \xi_{-n-1} = \frac{k}{\sqrt{y''_{-n}}}.$$

On voit comme ci-dessus que la série $\chi_{-1} + \chi_{-2} + \ldots + \chi_{-n_0+1} + \chi'_{-n_0}$ $\left(\text{si } \xi_{-n_0-1} \leqq x_0 < \xi_{-n_0} \text{ et si } \chi'_{-n_0} = \int_{x_0}^{\xi_{-n_0}}\right)$ a ses termes inférieurs à ceux d'une progression géométrique de raison inférieure à un nombre fixe, soit $\frac{1}{2}$, inférieur à 1.

Elle est donc de l'ordre de son premier terme qui est inférieur à

$$\frac{k}{\sqrt{Y''}} e^{-y_{-1} - Y + y'_{-1}(\xi_{-1} - X)} = \frac{k}{\sqrt{Y''}} e^{-\frac{k^2}{2}(1 - 3\delta\varepsilon)}.$$

Donc

$$R_1 < \frac{k}{\sqrt{Y''}} e^{-\frac{k^2}{2}(1 - 3\varepsilon)} \frac{1}{1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}}}.$$

R_1 est borné et arbitrairement petit avec $\frac{1}{k}$, si $\sqrt{Y''} > 1$. Si $Y'' < 1$, R_1 est arbitrairement petit avec $\frac{1}{k}$, relativement à $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$.

80. Évaluons maintenant

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\mathrm{X}-\frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}}^{\mathrm{X}-\frac{h}{\mathrm{Y}'}} \varphi(x, \mathrm{X})\,dx \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_3 = \int_{\mathrm{X}+\frac{h}{\mathrm{Y}'}}^{\mathrm{X}+\frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}} \varphi(x, \mathrm{X})\,dx.$$

Nous avons, à partir d'une certaine valeur de X,

$$y'' = \mathrm{Y}''(1 + \delta\varepsilon),$$

quand x varie de $\mathrm{X} - \frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}$ à $\mathrm{X} + \frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}$. D'après

$$p + 1 = y' + \theta,$$

θ étant positif et inférieur *ou égal* à 1, comme

$$y - \mathrm{Y} + y'(\mathrm{X} - x) = -\frac{\mathrm{Y}''}{2}(x - \mathrm{X})^2(1 + \delta\varepsilon),$$

nous trouvons, en faisant le changement de variable $\mathrm{X} - x = u$ dans I_1 et $x - \mathrm{X} = u$ dans I_3,

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\frac{h}{\mathrm{Y}'}}^{\frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}} e^{-\frac{\mathrm{Y}''}{2}(1+\delta\varepsilon)u^2 + \theta u} \frac{du}{e^u - 1}$$

et

$$\mathrm{I}_3 = \int_{\frac{h}{\mathrm{Y}'}}^{\frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}} e^{-\frac{\mathrm{Y}''}{2}(1+\delta\varepsilon)u^2 - \theta u} \frac{du}{1 - e^{-u}}.$$

L'une et l'autre intégrales sont comprises entre

$$\mathrm{J} = \int_{\frac{h}{\mathrm{Y}'}}^{\frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}} e^{-\frac{\mathrm{Y}''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{du}{1 - e^{-u}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J}' = \int_{\frac{h}{\mathrm{Y}'}}^{\frac{k}{\sqrt{\mathrm{Y}''}}} e^{-\frac{\mathrm{Y}''}{2}(1+\varepsilon)u^2} \frac{du}{e^u - 1}.$$

81. *Supposons d'abord* $\mathrm{Y}'' > 1$. — Afin de mettre en évidence la partie principale de l'élément différentiel de J et de J′ au voisinage de $u = 0$, j'écris

$$\frac{1}{1 - e^{-u}} = \frac{1}{u} + \frac{u - 1 + e^{-u}}{u(1 - e^{-u})} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} + \frac{u + 1 - e^u}{u(e^u - 1)}.$$

On a

$$J = J_0 + J_1,$$

en posant

$$J_0 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{du}{u}, \qquad J_1 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{u - 1 + e^{-u}}{u(1-e^{-u})} du.$$

La seconde intégrale est bornée puisque

$$u < \frac{k}{\sqrt{Y''}} < k.$$

La première, par le changement de variable

$$\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2 = v^2,$$

devient

$$J_0 = \int_{h\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\frac{\sqrt{Y''}}{Y'}}^{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}} e^{-u^2} \frac{du}{u} = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_0,$$

C_0 étant borné en même temps que h, indépendamment de k.

J' est comme J égal à $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C'$, C' étant borné. Comme I_1 et I_3 sont compris entre J et J', I_1 et I_3 ont pour valeur asymptotique

$$L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}.$$

Remarquons que la condition $Y'' > 1$ peut être réalisée avec des croissances telles que $y = ax^2$, a étant constant. Cette fois, nous n'avons pas de terme hétérogène, ni indépendant de la répartition des zéros (comme $X^{1+\alpha}$) pour des croissances même égales à celle de ax^2, tandis que ces termes hétérogènes figuraient déjà pour la croissance $y = e^x$ avec le seul secours des hypothèses du Chapitre **II**.

82. *Supposons en second lieu* $Y'' < 1$. — Le calcul présente plus de difficultés.

Prenons la première intégrale J. Pendant que sa limite inférieure $\frac{h}{Y'}$ tend vers zéro, sa limite supérieure $\frac{k}{\sqrt{Y''}}$ prend des valeurs arbitrairement grandes (si elle pouvait être bornée, les calculs faits pour $Y''>1$ seraient évidemment valables). Nous décomposons J en $J_0=\int_{\frac{h}{Y'}}^{1}$ et $J_1=\int_{1}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}$.
Dans l'intervalle d'intégration de J_0, nous écrivons

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=\frac{1}{u}+\frac{u-1+e^{-u}}{u(1-e^{-u})},$$

et dans celui de J_1,

$$\frac{1}{1-e^{-u}}=1+\frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}.$$

Chacune des intégrales J_0 et J_1 se trouve décomposée en deux autres que nous écrirons J_{00} et J_{01}, J_{10} et J_{11}. On a

$$J_{00}=\int_{\frac{h}{Y'}}^{1}e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\frac{du}{u}=\int_{h\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}\frac{\sqrt{Y''}}{Y'}}^{\sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)Y''}}}e^{-u^2}\frac{du}{u}.$$

Si l'on sépare, dans J_{00} dont la limite inférieure est infiniment petite, les deux limites par $\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}$, la valeur de la première partie J_{000} s'obtient en remplaçant e^{-u^2} par $1-(1-e^{-u^2})$ et l'on trouve

$$L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}+C_{000},$$

C_{000} étant borné.

La valeur de la seconde partie

$$J_{001}=\int_{\sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}}}^{\sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)Y''}}}e^{-u^2}\frac{du}{u}$$

est bornée par

$$C_{001}=\int_{\sqrt{2}}^{\infty}e^{-u^2}\frac{du}{u}.$$

Finalement,

$$J_{00} = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_{00},$$

C_{00} étant borné.

On a

$$J_{01} = \int_{\frac{h}{Y'}}^{1} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{u-1+e^{-u}}{u(1-e^{-u})}\,du < \int_0^1 \frac{u-1+e^{-u}}{u(1-e^{-u})}\,du,$$

qui existe et a une certaine valeur numérique C_{01}.

Donc

$$J_0 = J_{00} + J_{01} = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_0.$$

C_0 étant borné.

Évaluons

$$J_1 = \int_1^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\left(1 + \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\right)du,$$

qui se décompose en J_{10} et J_{11}. On a

$$J_{10} = \int_1^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-Y''\frac{1-\varepsilon}{2}u^2}\,du,$$

intégrale qui n'est altérée que d'une quantité bornée si je lui donne zéro pour limite inférieure. Donc

$$J_{10} = \sqrt{\frac{2}{Y''(1-\varepsilon)}}\int_0^{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{2}}} e^{-u^2}\,du + \gamma_{1.0} \qquad (\gamma_{1.0} \text{ borné}).$$

Le coefficient de $\sqrt{\frac{2}{Y''}}$ diffère, si k a été choisi assez grand, arbitrairement peu de $\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il reste

$$J_{10} = \sqrt{\frac{\pi}{2Y''}}(1+2\delta\varepsilon) + C_{1.0} \qquad (\delta^2 < 1).$$

Enfin

$$J_{11} = \int_1^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}}\,du < \frac{1}{1-\frac{1}{e}}\int_1^{\infty} e^{-u}\,du.$$

Donc

$$J_1 = J_{1.0} + J_{1.1} = (1 + 3\delta\varepsilon)\sqrt{\frac{\pi}{2Y''}},$$

δ^2 étant inférieur à 1 à partir d'une certaine valeur de X.

Finalement,

$$J = J_0 + J_1 = (1 + 4\delta\varepsilon)\left(LY' + \sqrt{\frac{\pi}{2Y''}}\right),$$

en supprimant dans la parenthèse $L\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ qui est positif et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$.

La formule

$$(1 + 2\delta'\varepsilon)\left(L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + \sqrt{\frac{\pi}{2Y''}}\right)$$

représenterait aussi bien J dans le premier cas, puisque $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ est alors borné.

Étudions maintenant

$$J' = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2}\frac{du}{e^u - 1}.$$

Je décompose J' en $J'_0 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{1}$ et $J'_1 = \int_{1}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}}$. J'_1 est borné et inférieur à $\int_1^\infty \frac{du}{e^u - 1}$. J'_0 est égal à $LY' + C'_0$. Donc

$$J' = LY' + C',$$

C' étant borné.

Donc ici les deux expressions asymptotiques des limites J et J' de S_1 et S_3 diffèrent, tout au moins d'aspect. Elles ne coïncident que si $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ est infiniment petit relativement à LY'.

Soit $y = \frac{x^2}{(Lx)^{2+\alpha}}$, α étant fixe. Si $\alpha < 0$, LY' est prépondérant relativement à $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$, et l'expression asymptotique de J et de J' est LY'.

Si $\alpha > 0$, c'est au contraire $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ qui prédomine dans J et la valeur asymptotique reste à préciser, d'autant plus que les termes correspondant à des valeurs de x telles que $|x - X| > \frac{k}{\sqrt{Y''}}$ qui peuvent être supposés négligeables, à ε près, à l'égard de $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ ne le sont plus nécessairement à l'égard de LY'. Ici, il n'y a pas d'expression asymptotique à forme analytique unique. On montrerait facilement que, le terme en $\frac{1}{\sqrt{Y''}}$ est exact si y' est voisin d'une valeur entière, tandis que, si y' est suffisamment voisin d'un multiple impair de $\frac{1}{2}$, il ne doit rester que LY'. Ceci concerne les croissances de r_n telles que

$$r_n = (\log n)^{A\sqrt{\log n}},$$

A croissant indéfiniment.

83. En résumé, $2S_1$, $2S_3$ *et par suite* $\mathrm{H}(X)$ *ont pour expression asymptotique :*

1° Si $Y'' > 1$,

$$e^Y L \frac{Y'^2}{Y''};$$

2° Si $Y'' < 1$,

$$e^Y\left(LY'^2 + \theta\sqrt{\frac{2\pi}{Y''}}\right), \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < 1,$$

sans qu'on puisse, d'après les calculs précédents, préciser autrement la valeur de θ qui doit certainement osciller jusqu'à ces limites quand X croît indéfiniment.

84. *Limite inférieure du module maximum d'un produit canonique.* — Donnons une limite inférieure du module maximum du produit $F(z)$. Cette limite est, d'après le théorème de M. Jensen, $\frac{r^N}{r_1 r_2 \ldots r_N}$, si $r_N \leq r < r_{N+1}$. Donc

$$M(r) > N \log r - \log r_1 - \ldots - \log r_N.$$

Supposons que la suite $y(n)$ fonction de la suite $x(n)$ soit interpolée par une fonction $y(x)$ satisfaisant à l'hypothèse A. S'il n'en était pas ainsi, on substituerait à la fonction $y(n)$ une autre fonction moins croissante et jouissant des propriétés invoquées, comme il a été expliqué au début du Chapitre II, et c'est cette fonction qui serait désignée par $y(x)$. Soient Y la valeur correspondant à X et N la partie entière de e^Y. On a, *a fortiori*,

$$M(r) > NX - \int_1^N x\,dn - \theta[X - x(1)].$$

En remplaçant N par $e^Y - \theta_1$, et en remarquant que $\int_N^{e^Y} x dn = \theta_2 X$, il vient

$$M > e^Y X - \int_1^{e^Y} x\,dn - 2\delta X + h \qquad (h \text{ étant borné}).$$

D'après

$$\int_1^{e^Y} x\,dn = (nx)_{x_0}^X - \int_{x_0}^X n\,dx,$$

en posant

$$x(1) = x_0,$$

il reste

$$M > \int_{x_0}^X e^y\,dx - 2\delta X + h.$$

Or, nous savons que, si $x < X$,

$$Y - y + (P + 1 - \alpha)(x - X) < 0,$$

ou

$$y > Y - (P + 1 - \alpha)(X - x).$$

Donc

$$\int_{x_0}^X e^y\,dx > e^Y \int_{x_0}^X e^{-(P+1-\alpha)(X-x)}\,dx = \frac{e^Y}{P+1-\alpha}\left(1 - e^{-(P+1-\alpha)(X-x_0)}\right).$$

Le rapport de cette dernière expression à $\frac{e^Y}{P}$ tend vers 1 quand X croît indéfiniment. Donc, pourvu que $\frac{n}{p.r}$ soit infiniment grand,

$$\mathrm{M}(r) > \frac{\mathrm{N}}{p}(1-\varepsilon).$$

Si l'on suppose que le point X, Y passe successivement par toutes les positions $x(n)$, $y(n)$, les fonctions Y utilisées pour chercher une limite supérieure et une limite inférieure de M(X) sont les mêmes, et cette limite inférieure s'écrit $\frac{n}{p}$.

85. *Tolérance dans le choix de p.* — Nous avons défini p par la relation $p+\omega=y'$, avec $0 \leqq \omega < 1$. En réalité, le choix de p comporte plus d'arbitraire, sans que l'on modifie l'ordre de grandeur de $\sum_1^\infty \varphi\left(\frac{r}{r_n}, p_n\right)$ et sans que Π_1 et Π_2 cessent d'être du même ordre de grandeur.

Supposons p croissant, mais simplement assujetti aux inégalités $p \leqq y' + \lambda\sqrt{y''}$, et $p+1 > y' - \lambda\sqrt{y''}$.

Nous allons voir (en supposant $Y'' > 1$) que λ peut être pris quelconque, arbitrairement grand positif, s'il est fixe.

Les intégrales I_1 et I_3 sont comprises entre

$$\mathrm{J} = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2+\lambda\sqrt{Y''}u} \frac{du}{1-e^{-u}}$$

et

$$\mathrm{J}' = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1+\varepsilon)u^2-\lambda\sqrt{Y''}u} \frac{du}{e^u-1}.$$

Dans J, nous remplaçons $\frac{1}{1-e^{-u}}$ par $\frac{1}{u}+\frac{1-u-e^{-u}}{u(1-e^{-u})}$. Nous décomposons J en deux intégrales J_0 et J_1. On a

$$\mathrm{J}_0 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2+\lambda\sqrt{Y''}u} \frac{du}{u} = \int_{\frac{h\sqrt{Y''}}{Y'}}^{k} e^{-\frac{(1-\varepsilon)}{2}v^2+\lambda v} \frac{dv}{v},$$

λ étant fixe,

$$J_0 = L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}} + C_0,$$

C_0 étant borné. De même

$$J_1 = \int_{\frac{h}{Y'}}^{\frac{k}{\sqrt{Y''}}} e^{-\frac{Y''}{2}(1-\varepsilon)u^2+\lambda\sqrt{Y''}u} \frac{1-ue^{-u}}{u(1-e^{-u})}du$$

est borné en même temps que k, λ étant fixe.

On démontre exactement de même que l'expression asymptotique de J' est encore $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}$.

Pour être assurés que S_1 et S_3 ont encore la même expression asymptotique, il faudrait montrer que

$$\int_{X+\frac{k}{\sqrt{Y''}}}^{\infty} e^{y-Y+(y'-\lambda\sqrt{y''})(X-x)} \frac{dx}{1-e^{x-X}}$$

et la quantité analogue relative à S_1 sont infiniment petites relativement à $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}$. La démonstration ne présente aucune difficulté nouvelle. Il n'en serait pas de même si l'on voulait envisager des valeurs infiniment grandes de λ, par exemple la valeur $\sqrt{2L_2\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}}$ qui laisse à J et J' les mêmes expressions asymptotiques.

Enfin, il convient de rappeler que les intégrales qui remplacent S_1 et S_3 ont été obtenues avec l'hypothèse que $\frac{y'}{p}$ tend vers 1. Si

$$p = y' + \delta\lambda\sqrt{y''},$$

$\frac{y'}{p}$ tend vers 1, si λ est borné, puisque $\frac{\sqrt{y''}}{y'}$ tend vers zéro.

86. *Zéros dont la répartition n'influe pas sur le module maximum.* — Cherchons, pour les produits dont les zéros ont des modules satisfaisant à l'hypothèse B, hors de quelles limites toutes les variations possibles des arguments des zéros sont sans influence sur le module

maximum du produit canonique $F(z)$. Ce module maximum est certainement supérieur à $\frac{e^Y}{Y'}$. Si donc

$$\int_{X_0}^{\xi_1} \varphi(x, X)\,dx$$

et

$$\int_{\xi_2}^{\infty} \varphi(x, X)\,dx$$

sont infiniment petits à l'égard de $\frac{1}{Y'}$, comme ces expressions changées de signes limitent inférieurement, avec une erreur infiniment petite, le logarithme total du module des facteurs dont les zéros correspondent à des x inférieurs à ξ_1 ou supérieurs à ξ_2, ξ_1 et ξ_2 seront de part et d'autre de X les limites cherchées aux logarithmes des modules des zéros.

Posons

$$-\psi_{n+1} = \eta_{n+1} - Y + y'_{n+1}(X - \xi_{n+1});$$

en posant

$$\xi_1 = X + \frac{k}{\sqrt{Y''}}, \qquad \ldots, \qquad \xi_{n+1} = \xi_n + \frac{k}{\sqrt{y''_n}}, \qquad \ldots.$$

L'erreur commise en arrêtant la somme $\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots$ (*voir* p. 116) au terme Φ_n est inférieure, à un facteur borné près, à

$$\frac{k}{\sqrt{y''_{n+1}}}\,\frac{e^{-\psi_{n+1}}}{1 - e^{X-\xi_{n+1}}}.$$

Calculons ψ_{n+1}. On a

$$\eta_{n+1} = \eta_n + y'_n(\xi_{n+1} - \xi_n) + \frac{y''_n}{2}(1 + \delta\varepsilon)(\xi_{n+1} - \xi_n)^2,$$

$$y'_{n+1} = y'_n + y''_n(1 + \delta\varepsilon)(\xi_{n+1} - \xi_n).$$

Donc

$$\begin{aligned} -\psi_{n+1} &= -\psi_n + \frac{k^2}{2}(1 + \delta\varepsilon) - k\sqrt{y''_n}(1 + \delta\varepsilon)(X - \xi_{n+1}) \\ &= -\psi_n - \frac{k^2}{2}(1 + 3\delta\varepsilon) - k\sqrt{y''_n}(1 + \delta\varepsilon)(X - \xi_n). \end{aligned}$$

Donc, d'après $\psi_0 = 0$, si $\xi_0 = X$, et

$$X - \xi_n = k\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \frac{1}{\sqrt{y''_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-1}}}\right),$$

$$-\psi_{n+1} = -n\frac{k^2}{2}(1+3\delta\varepsilon) - k^2(1+\delta\varepsilon)$$
$$\times\left[\sqrt{y''_n}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \frac{1}{\sqrt{y''_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-1}}}\right) + \sqrt{y''_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-2}}}\right) + \ldots + \sqrt{y''_1}\frac{1}{\sqrt{Y''}}\right].$$

Supposons que

$$(2)\qquad \sqrt{y''_{n-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{y''_{n-2}}}\right) + \ldots + \sqrt{y''_1}\frac{1}{\sqrt{Y''}} < \frac{LY'}{k^2(1-\varepsilon)}$$
$$\leqq \sqrt{y''_n}\left(\frac{1}{\sqrt{Y''}} + \ldots\right) + \ldots + \sqrt{y''_1}\frac{1}{\sqrt{Y''}}.$$

Alors, la somme $\sum_{n+1}^{\infty}\Phi_p$ est inférieure à

$$\frac{k}{\sqrt{y''_{n+1}}}\,\frac{e^{-n\frac{k^2}{2}(1-3\varepsilon)}}{1-e^{X-\xi_n}}\,\frac{1}{Y'}.$$

Or, limitons inférieurement $\alpha_{n+1} = \sqrt{y''_{n+1}}(1-e^{X-\xi_n})$. Si $y''_{i+1} = t_i^2 y''_i$, cette expression est égale à

$$\sqrt{Y''}\,t_1 t_2 \ldots t_n\left[1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}\left(1+\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_1 t_2}+\ldots+\frac{1}{t_1\ldots t_n}\right)}\right].$$

Or, on se rend compte aisément que $x\left(1 - e^{-\frac{A}{x}-B}\right)$ est croissant avec x, si A et B sont positifs. Le minimum de l'expression est donc pour

$$t_i = 1 - \varepsilon' = \sqrt{1-\varepsilon}$$

et il est égal à

$$\sqrt{Y''}(1-\varepsilon')^n\left[1 - e^{-\frac{k}{\sqrt{Y''}}\frac{(1-\varepsilon')^{-n}-1}{\varepsilon'}(1-\varepsilon')}\right].$$

Cette expression varie dans le même sens que Y''. Si $Y'' > 1$, et si $e^{-\frac{k^2}{2}(1-3\varepsilon)} < 2(1-\varepsilon')$, la somme $\sum_{n+1}^{\infty}\Phi_p$ sera inférieure à $\frac{1}{Y'}$. Si $Y'' < 1$, nous prendrons dans les inégalités (2) le terme médian égal à $L\frac{Y'}{\sqrt{Y''}}$;

alors

$$\sum_{n+1}^{\infty} \Phi_p < \frac{k\sqrt{Y''}}{Y'} \alpha_{n+1} e^{-n\frac{k^2}{2}} < \frac{1}{Y'} k e^{-n\frac{k^2}{2}} (1-\varepsilon')^{-\frac{n}{2}} (1+\theta\varepsilon),$$

qui est inférieur à $\frac{1}{Y'}$, si k est choisi convenablement.

Reprenons l'inégalité (2). On a, la notation $E(u)$ au second membre signifiant que le premier est inférieur à u pour n, et supérieur à u pour $n+1$,

$$(2') \quad t_1 t_2 \ldots t_n \left(1 + \frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_1 \ldots t_{n-1}}\right)$$
$$+ t_1 \ldots t_{n-1} \left(1 + \ldots + \frac{1}{t_1 \ldots t_{n-2}}\right) + \ldots + t_1 t_2 \left(1 + \frac{1}{t_1}\right) + t_1 = E\left(\frac{LY'}{k^2}\right)$$

et

$$(3) \qquad \xi_n - X = \frac{k}{\sqrt{Y''}} \left(1 + \frac{1}{t_1} + \ldots + \frac{1}{t_1 \ldots t_{n-1}}\right).$$

Le premier membre de (2') croît avec chaque t_i, et le second membre de (3) décroît.

Soient N la valeur de n telle que $t_i = 1 - \varepsilon' = \sqrt{1-\varepsilon}$, et ξ_N la valeur de ξ_n correspondante. Si certains t_i sont supérieurs à $1-\varepsilon'$, la valeur de n correspondante est certainement inférieure à N, le second membre de (3) contient moins de termes, et ceux qu'il contient sont inférieurs aux termes de même rang de x_N. Donc, pour avoir le maximum de $\xi_n - X$ (en même temps que celui de n), je fais $t_i = 1 - \varepsilon'$. Le premier membre de l'équation (2') devient

$$\frac{(1-\varepsilon') - (1-\varepsilon')^{n+1}}{\varepsilon'} + \frac{(1-\varepsilon') - (1-\varepsilon')^{n}}{\varepsilon'} + \ldots + \frac{(1-\varepsilon') - (1-\varepsilon')^{3}}{\varepsilon'}$$
$$= n\frac{1-\varepsilon'}{\varepsilon'} - \frac{(1-\varepsilon')^2 - (1-\varepsilon')^{n+2}}{\varepsilon'^2}.$$

Donc N a pour partie principale : $\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\frac{LY'}{k^2}$, à un facteur près tendant vers 1. Alors

$$x_N - X = \frac{k}{\sqrt{Y''}} \frac{(1-\varepsilon')^{-N} - 1}{\varepsilon'} (1-\varepsilon') = \frac{k(1-\varepsilon')}{\varepsilon'\sqrt{Y''}} e^{\varepsilon' N (1+\delta\varepsilon')},$$

δ^2 étant inférieur à 1, si N est assez grand,

$$x_N - X = \frac{k}{\varepsilon'} \frac{1}{\sqrt{Y''}} e^{\frac{\varepsilon'^2}{k^2} LY'(1+3\delta\varepsilon')}.$$

Si je donne à k une valeur arbitraire fixe, et à $\frac{\varepsilon}{k}$ une valeur α aussi petite que je veux,

$$\xi_N - X = \frac{1}{\alpha}\frac{Y'^{\alpha}}{\sqrt{Y''}} < \frac{Y'^{2\alpha}}{\sqrt{Y''}},$$

dès que X dépasse une certaine valeur. Donc

$$\xi_n - X < \frac{Y'^{\varepsilon}}{\sqrt{Y''}}.$$

On trouverait que les nombres ξ_{-n} limitant inférieurement les valeurs de x qui peuvent influer sur le maximum de $|F(z)|$ sont supérieurs à $X - \frac{Y'^{\varepsilon}}{\sqrt{Y''}}$.

Donc, *seuls peuvent influer sur la valeur du maximum de* $F(z)$ *les zéros tels que* $|x - X| < \frac{Y'^{\varepsilon}}{\sqrt{Y''}}$.

Si l'on suppose que Y'' croisse constamment, la valeur de N s'obtient en faisant $t_i = 1$ dans l'égalité (2'). On trouve

$$N = \sqrt{\frac{[2+\eta(x)]LY'}{k}} \qquad \text{et} \qquad |\xi_n - X| < \frac{\sqrt{(2+\varepsilon)LY'}}{\sqrt{Y''}}.$$

87. *Application aux fonctions à croissance très régulière et rapide.* — Est-il possible qu'on ait, pour toutes les valeurs de x supérieures à un nombre fixe, $y^{1-\varepsilon} > y'$ ou $y' > y^{1+\varepsilon}$. La seconde inégalité nous conduirait à cette conclusion que y doit être infini pour une valeur finie de x, la première à ceci que y croîtrait moins vite qu'une certaine puissance de x. Si $y'' > y'^{1+\varepsilon}$, y' devient infini pour une certaine valeur de x; si $y'' < y'^{1-\varepsilon}$, y croît moins vite qu'une certaine puissance de x.

De même si le rapport $\frac{y'^2}{yy''}$ est supposé constamment supérieur à $1 + \varepsilon$, pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0, en intégrant l'inégalité $\frac{y'}{y} > (1+\varepsilon)\frac{y''}{y'}$, on trouve, si $x > x_0$,

$$\frac{y}{y_0} > \left(\frac{y'}{y'_0}\right)^{1+\varepsilon},$$

et l'on a la première relation examinée entre y et y'. Si le rapport $\frac{y'^2}{yy''}$

restait inférieur à $1-\varepsilon$ pour $x > x_0$, on aurait $\frac{y'}{y'_0} > \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\varepsilon}$, et y devrait devenir infini pour une valeur finie de x.

D'ailleurs, la condition $\lim\limits_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = 1$ entraîne la condition

$$\lim_{x=\infty} y''\left(x + \frac{k}{\sqrt{y''}}\right) = y''(x) = 1,$$

si $|k|$ est borné. En effet, ε étant donné, il existe un nombre ξ tel que, si $x > \xi$,

$$1 - \varepsilon < \frac{yy''}{y'^2} < 1 + \varepsilon.$$

On tire de là, si $\xi < x_0 < x$,

$$(1) \qquad \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1-\varepsilon} < \frac{y'}{y'_0} < \left(\frac{y}{y_0}\right)^{1+\varepsilon},$$

ou encore en prenant à part chacune de ces inégalités et par intégration entre les limites x_0 et x,

$$\left[1 + \varepsilon \frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)\right]^{\frac{1}{\varepsilon}} < \frac{y}{y_0} < \left[1 - \varepsilon \frac{y'_0}{y_0}(x - x_0)\right]^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Or, soit $x = x_0 + \frac{k}{\sqrt{y''_0}}\cdot$ On a

$$x = x_0 + k' \frac{\sqrt{y_0}}{y'_0},$$

k' étant borné en même temps que k. Donc

$$(2) \qquad \left(1 + \varepsilon \frac{k'}{\sqrt{y_0}}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} < \frac{y}{y_0} < \left(1 - \varepsilon \frac{k'}{\sqrt{y_0}}\right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}.$$

ε étant fixe et k' borné, si x_0 et par suite y_0 croissent indéfiniment, les nombres extrêmes tendent vers 1. D'après (1), $\frac{y'}{y'_0}$ tend aussi vers 1, et d'après $\lim\limits_{x=\infty} \frac{yy''}{y'^2} = 1$, il en est de même de $\frac{y''}{y''_0}\cdot$

Si donc nous nous bornons aux fonctions telles que y soit plus croissant que x^n, quel que soit n, et telles que $\lim\limits_{x=\infty} \frac{y'^2}{yy''} = 1$, nous sommes assurés que les résultats acquis dans le présent Chapitre sont applicables.

88. Nos formules deviennent

$$p = y' + \delta h \sqrt{y''} = y'\left(1 + \delta h \frac{\sqrt{y''}}{y'}\right)$$

ou

$$p = \frac{d \log n}{d \log r}\left(1 + \delta \frac{h}{\sqrt{\log n}}\right),$$

h étant fixe. La tolérance relative sur l'exposant p est $\frac{h}{\sqrt{\log n}}$,

$$\Pi(X) = [1 + \eta(x)]\, n L p = [1 + \eta(r)]\, n L_2 n,$$
$$Q(X) = [1 + \eta(X)] \frac{n}{p} = n \frac{d \log r}{d \log n}.$$

Remarquons que la limite de $\Pi(X)$ fournie au second Chapitre par la simple hypothèse A était seulement *deux fois* trop forte.

Soit, par exemple,

$$r_n = (\log_k n)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Si e_k est la fonction inverse de $\log_k$, on a

$$y = e_k(\sigma x),$$
$$p = \sigma \log n \ldots \log_k n \left(1 + \delta \frac{h}{\sqrt{\log n}}\right),$$

et le module maximum du produit canonique est à partir d'une certaine valeur de r, ε étant fixe, inférieur à

$$(1 + \varepsilon) e_k(r^\sigma)\, e_{k-2}(r^\sigma)$$

et supérieur à

$$\frac{1}{\sigma + \varepsilon} \frac{e_k(r^\sigma)}{e_{k-1}(r^\sigma)\, e_{k-2} \ldots e_1(r^\sigma)\, r^\sigma}.$$

La première de ces limites, où je remplace ε par $-\varepsilon$, peut être dépassée pour une infinité de valeurs croissantes de r, moyennant une répartition convenable des arguments des zéros.

Les formules sont valables même pour $k = 1$, en faisant $e_{-1} = \log n$.

Ces fonctions ont déjà été étudiées par M. Boutroux, qui a remarqué que, pour $k = 1$, l'exposant de convergence $h \log n$ donne la croissance minima pour $h = \sigma$.

Les exemples pourraient être aisément multipliés. On pourrait varier à l'infini les combinaisons d'exponentielles, de logarithmes, de constantes numériques. Tant qu'on ne créerait pas de types de croissance échappant aux conditions de régularité précédentes, toutes les formules qu'on trouverait rentreraient dans les trois que nous venons d'écrire.