JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

F.-H. GRONWALL

Sur les équations entre trois variables représentables par des monogrammes à points alignés

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 8 (1912), p. 59-102.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1912_6_8__59_0>

Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés;

Par T.-H. GRONWALL,

à Chicago.

INTRODUCTION.

Soit donnée une équation

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

où F est une fonction analytique des trois variables, et supposons-la ramenée, par des moyens quelconques, à la forme

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & h_1(x) \\ f_2(y) & g_2(y) & h_2(y) \\ f_3(z) & g_3(z) & h_3(z) \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Désignons par ξ, η des coordonnées cartésiennes; alors (2) exprime qu'en prenant, sur les trois courbes

$$\xi = \frac{f_i(t)}{h_i(t)}, \qquad \eta = \frac{g_i(t)}{h_i(t)} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3}$$

les points correspondant à $t = x$, $t = y$ et $t = z$ respectivement, ces trois points se trouvent en ligne droite. En marquant, sur chacune des courbes (3), les points correspondant à des valeurs rondes de t, on obtient trois *échelles* et en joignant par une droite les points correspondants à des valeurs données de x et y, par exemple, et lisant la valeur de z au point où cette droite coupe l'échelle des z, on a une résolution graphique de l'équation (1).

C'est là le principe des nomogrammes à points alignés de M. d'Ocagne, qui en a développé une théorie également remarquable par son élégance analytique et par son importance pratique, surtout pour l'art de l'ingénieur [1].

Le problème fondamental de cette théorie est évidemment de reconnaître si une équation donnée (1) peut être ramenée à la forme (2) ou non. Pour des classes particulières d'équations (1) qui embrassent, il est vrai, la plupart des équations rencontrées dans la pratique, on sait effectuer la réduction à la forme (2); mais dans le cas général, les conditions de réduction sont restées inconnues jusqu'ici [2].

Au paragraphe 1 du présent travail, je fais voir que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) puisse se ramener à la forme (2) consiste dans l'existence d'une intégrale commune à deux équations aux dérivées partielles. Dans le paragraphe 2, je donne les conditions additionnelles pour qu'une ou plusieurs des échelles soient rectilignes, cas important dans la pratique, et au paragraphe 3, on trouve une méthode pour tirer effectivement les fonctions f_i, g_i, h_i de l'intégrale du paragraphe 1 supposée connue. Cette méthode devient illusoire si deux des échelles sont rectilignes. Nous supposerons d'abord, au paragraphe 4, toutes les trois échelles rectilignes; il faut traiter ce cas séparément pour deux raisons : d'une part, l'équation donnée admet alors des représentations nomographiques essentiellement distinctes que je détermine toutes, et d'autre part, les formules des paragraphes suivants contiennent en dénominateur une expression qui s'annule dans le cas actuel. Il reste alors, comme échappant à la méthode du paragraphe 3, le cas de deux échelles rectilignes et la troisième courbe, qui fait l'objet du paragraphe 5. Au paragraphe 6 et dernier, je fais une étude spéciale des nomogrammes

(1) M. D'OCAGNE, *Traité de Nomographie*. Paris, Gauthier-Villars, 1899; *Calcul graphique et Nomographie*. Paris, Doin, 1908.

(2) Seulement M. Duporcq avait obtenu, sous la forme d'équations fonctionnelles, quelques conditions suffisantes (*Voir* D'OCAGNE, *Traité de Nomographie*, p. 427-431).

si remarquables de M. Clark où deux des échelles sont supportées par la même conique, la troisième étant quelconque.

Dans un travail ultérieur, je formerai explicitement l'intégrale commune des équations aux dérivées partielles du paragraphe 1, et je ferai voir que le cas du paragraphe 4 est le seul où l'équation donnée admette des représentations nomographiques essentiellement distinctes.

1. — Les conditions nécessaires et suffisantes.

En permutant, s'il y a lieu, les colonnes dans (2), nous pouvons faire de sorte que $h_1(x)$, $h_2(y)$, $h_3(z)$ ne s'annulent pas identiquement; en divisant alors chaque ligne par la fonction h correspondante, nous pouvons supposer $h_1 = h_2 = h_3 = 1$ et (2) devient

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & g_1(x) & 1 \\ f_2(y) & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Multiplions, avec M. d'Ocagne, l'équation (4) par un déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0;$$

après division par les éléments de la troisième colonne, il vient

$$\begin{vmatrix} \bar{f}_1(x) & \bar{g}_1(x) & 1 \\ \bar{f}_2(y) & \bar{g}_2(y) & 1 \\ \bar{f}_3(z) & \bar{g}_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{f}_i &= \frac{a_1 f_i + b_1 g_i + c_1}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3} \\ \bar{g}_i &= \frac{a_2 f_i + b_2 g_i + c_2}{a_3 f_i + b_3 g_i + c_3} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{6}$$

On obtient donc une équation équivalente à (4) en faisant sur les f_i, g_i la transformation homographique la plus générale.

Après cette remarque dont on verra dans la suite l'importance, nous développons (4) suivant la dernière ligne et obtenons

$$g_3(z) = u f_3(z) + v, \tag{7}$$

où

$$(8)\quad \begin{cases} u = \dfrac{g_1(x) - g_2(y)}{f_1(x) - f_2(y)}, \\[2mm] v = \dfrac{f_1(x)g_2(y) - f_2(y)g_1(x)}{f_1(x) - f_2(y)}, \end{cases}$$

et l'on a évidemment

$$(9)\quad \begin{cases} g_1(x) = uf_1(x) + v, \\ g_2(y) = uf_2(y) + v. \end{cases}$$

D'après (7) et (9), une transformation homographique (6) des f_i, g_i transforme u et v par l'homographie associée, et inversement, propriété capitale pour ce qui va suivre.

Nous allons obtenir d'abord une condition nécessaire pour que l'équation (1) puisse se ramener à la forme (4); pour cela, différentions la première équation (9) par rapport à y, et la deuxième par rapport à x :

$$(10)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial u}{\partial y} f_1(x) + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2mm] 0 = \dfrac{\partial u}{\partial x} f_2(y) + \dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Supposons d'abord $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$; alors, d'après (10), $\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire $u = u(x)$, $v = v(x)$ et (9) et (7) donnent

$$g_2(y) = u(x)f_2(y) + v(x),$$
$$g_3(z) = u(x)f_3(z) + v(x),$$

d'où, en faisant $x = \text{const.} = x_0$, $u(x_0) = u_0$, $v(x_0) = v_0$,

$$g_2(y) = u_0 f_2(y) + v_0,$$
$$g_3(z) = u_0 f_3(z) + v_0.$$

Par soustraction, on obtient

$$[u(x) - u_0]f_2(y) + v(x) - v_0 = 0,$$
$$[u(x) - u_0]f_3(z) + v(x) - v_0 = 0.$$

Si $u(x) = u_0$, $v(x) = v_0$, on a aussi $g_1(x) = u_0 f_1(x) + v_0$ et (4) se réduit à une identité; sinon, on aurait $f_2(y) = f_3(z) = \text{const.}$, $g_2(y) = g_3(z) = \text{const.}$, et (4) se réduirait encore à une identité. La même remarque s'applique au cas de $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

En laissant de côté ces cas triviaux, (10) donne

$$(11)\qquad \begin{cases} f_1(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}}, \\[2ex] f_2(y) = -\dfrac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}. \end{cases}$$

Différentiant la première de ces équations par rapport à y, et la deuxième par rapport à x, il vient

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Nous avons évidemment

$$\frac{\partial[g_3(z), z]}{\partial(x, y)} = 0;$$

en y substituant l'expression (7) et observant que

$$\frac{\partial[f_3(z), z]}{\partial(x, y)} = 0,$$

il vient

$$(13)\qquad f_3(z)\frac{\partial(u, z)}{\partial(x, y)} + \frac{\partial(v, z)}{\partial(x, y)} = 0.$$

L'hypothèse $\dfrac{\partial(u, z)}{\partial(x, y)} = 0$ donne $u = u(z)$ et, d'après (7), $v = v(z)$; le raisonnement que nous venons de faire nous apprend donc que (4) se réduit à une identité. Ce cas écarté, posons

$$(14)\qquad \begin{cases} \mathrm{M} = -\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}}, \\[2ex] \mathrm{N} = \dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} + \dfrac{1}{\mathrm{M}}\dfrac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} = \dfrac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial z}{\partial y}}; \end{cases}$$

l'équation (13) donne alors

$$(15)\qquad f_3(z) = -\frac{M\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}}{M\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}}.$$

Supposons que $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$; alors (10) donne

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}[f_1(x) - f_2(y)] = 0,$$

et (4) se réduirait à une identité. Nous pouvons donc poser

$$(16)\qquad \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\theta}.$$

Nous introduirons encore les notations

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}
A &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)e^{-\theta},\\
B &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)e^{-\theta},\\
C &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)e^{-\theta},\\
D &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-\theta}.
\end{aligned}\right.$$

Les expressions A, B, C et D sont invariantes pour une transformation homographique quelconque de u et v (¹), c'est-à-dire pour une transformation quelconque (6) des f_i et g_i.

Reprenons maintenant l'équation

$$\frac{\partial[f_3(z), z]}{\partial(x, y)} = 0,$$

et substituons-y l'expression (15); il vient, tous calculs faits,

$$M^3 A + B + M^2 C - MD + MN = 0,$$

(¹) E. Goursat, *Sur un système d'équations aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. CIV, 16 mai 1887, p. 1361-1363). — P. Painlevé, *Sur les équations linéaires simultanées aux dérivées partielles* (*Comptes rendus*, t. CIV, 31 mai 1887, p. 1497-1501).

ou bien, comme $A = B = 0$ en vertu de (12),

$$D = MC + N. \tag{18}$$

En différentiant (16) par rapport à x et y, nous obtenons

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = e^{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) = e^{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

et ces équations, jointes aux deux dernières de (17), donnent

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{3}\left(C + 2\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)e^{\theta},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}\left(C - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right)e^{\theta},\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{3}\left(D + 2\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)e^{\theta},\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{3}\left(D - \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)e^{\theta}.\end{aligned}\right.$$

Résolvant les équations (12) et (20) par rapport aux six dérivées du second ordre qui y figurent, nous obtenons, en ayant égard à (16),

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial \theta}{\partial x} + C\right)\frac{\partial u}{\partial x},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - D\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - C\right)\frac{\partial u}{\partial y},\\ &\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial \theta}{\partial y} + D\right)\frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\right.$$

et précisément le même système d'équations pour v.

Formons ensuite les conditions d'intégrabilité de ce système, savoir

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

en remplaçant les dérivées du second ordre par leurs valeurs tirées de (21), il vient

$$\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+3\frac{\partial C}{\partial y}+3\frac{\partial D}{\partial x}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$-\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-3\frac{\partial C}{\partial x}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}+2C\right)\right]\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}-3\frac{\partial D}{\partial y}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}+2D\right)\right]\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$-\left[3\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}+3\frac{\partial C}{\partial y}+3\frac{\partial D}{\partial x}-\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\right]\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Les mêmes équations étant satisfaites par v, et le déterminant fonctionnel de u et v étant différent de zéro, il s'ensuit que les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ s'annulent dans les équations précédentes, de sorte que

$$(22)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}+2C\right)+\dfrac{\partial C}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x}-C\right)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)-\dfrac{\partial C}{\partial y}-\dfrac{\partial D}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y}-D\right)\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial y}+2D\right)+\dfrac{\partial D}{\partial y}.\end{cases}$$

Formons encore les conditions d'intégrabilité de ce système savoir

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y},\qquad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2};$$

en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs, on voit que θ disparaît entièrement de ces équations qui deviennent

$$(23)\qquad\begin{cases}2\dfrac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 D}{\partial x^2}-C\left(2\dfrac{\partial C}{\partial y}+\dfrac{\partial D}{\partial x}\right)=0,\\[2mm] \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2}+2\dfrac{\partial^2 D}{\partial x\,\partial y}-D\left(\dfrac{\partial C}{\partial y}+2\dfrac{\partial D}{\partial x}\right)=0.\end{cases}$$

En y substituant la valeur de D donnée par (18), nous obtenons

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} &M\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}=\left(MC-2\frac{\partial M}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial x}+2C\frac{\partial C}{\partial y}\\ &\qquad\qquad+\frac{\partial M}{\partial x}C^2+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)C-\frac{\partial^2 N}{\partial x^2},\\ &2M\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}=2\left(M^2C+MN-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{\partial C}{\partial x}+\left(MC+N-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\frac{\partial C}{\partial y}\\ &\qquad\qquad+2M\frac{\partial M}{\partial x}C^2+2\left(N\frac{\partial M}{\partial x}+M\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}\right)C\\ &\qquad\qquad+2N\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Si, par suite, l'équation donnée (1) est réductible à la forme (4), les deux équations (24) possèdent une intégrale commune, que nous pouvons évidemment supposer analytique. Je dis que cette condition est aussi suffisante.

Pour le démontrer, commençons par transformer les équations (21) et (22) en un seul système linéaire. A cet effet, posons dans (21)

$$(25)\qquad u=e^{\frac{1}{3}\theta}\,\omega;$$

il vient, en ayant égard à (22),

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}&=\frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial x}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}C^2-\frac{\partial C}{\partial x}\right)\omega,\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y}&=-\frac{1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{1}{3}C\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}CD+\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)\omega,\\ \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}&=\frac{1}{3}D\frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}D^2-\frac{\partial D}{\partial y}\right)\omega.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, la substitution

$$(27)\qquad e^{-\frac{1}{3}\theta}=\omega,$$

transforme le système (22) dans le même système (26). Les conditions d'intégrabilité de (22) et (26) sont donc les mêmes, savoir les équations (23).

Supposons ces dernières équations vérifiées; comme (26) permet d'exprimer toute dérivée de ω en fonction linéaire de $\frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}$ et ω, il s'ensuit, d'après des théories bien connues, que toute intégrale de (26) s'exprime linéairement à coefficients constants en trois intégrales particulières ω_1, ω_2, ω_3,

$$\omega = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 + \gamma\omega_3,$$

le système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 étant tel que le déterminant

$$(28) \qquad \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{vmatrix} \omega_1 & \frac{\partial\omega_1}{\partial x} & \frac{\partial\omega_1}{\partial y} \\ \omega_2 & \frac{\partial\omega_2}{\partial x} & \frac{\partial\omega_2}{\partial y} \\ \omega_3 & \frac{\partial\omega_3}{\partial x} & \frac{\partial\omega_3}{\partial y} \end{vmatrix} = \omega_3^3 \frac{\partial\left(\frac{\omega_1}{\omega_3}, \frac{\omega_2}{\omega_3}\right)}{\partial(x, y)}$$

ne s'annule pas identiquement. De (28) et (26) il s'ensuit que

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x} = \frac{1}{3}C\Delta - \frac{1}{3}C\Delta = 0,$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial y} = -\frac{1}{3}D\Delta + \frac{1}{3}D\Delta = 0;$$

on a donc

$$(29) \qquad \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \text{const.} = \frac{1}{k^3} \neq 0.$$

Posons

$$(30) \qquad u = \frac{\omega_1}{\omega_3}, \qquad v = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \qquad \theta = -3\log(k\omega_3);$$

d'après (25), (27), (28) et (29), u, v et θ satisfont aux équations (16), (21 pour u), (21 pour v) et (22).

Soit $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$ un autre système fondamental de (26); on a

$$(31) \qquad \overline{\omega}_i = \alpha_i\omega_1 + \beta_i\omega_2 + \gamma_i\omega_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

et

$$(32) \qquad \Delta(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \overline{\omega}_3) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{\overline{k}^3} \neq 0.$$

En posant

$$(33)\qquad \bar u = \frac{\bar\omega_1}{\bar\omega_3}, \qquad \bar v = \frac{\bar\omega_2}{\bar\omega_3}, \qquad \bar\theta = -3\log(k\bar\omega_3).$$

$\bar u$, $\bar v$ et $\bar\theta$ satisfont aux mêmes équations que tout à l'heure et, en vertu de (31),

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar u &= \frac{\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}, \\ \bar v &= \frac{\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2}{\alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3}. \end{aligned}\right.$$

Soient inversement u, v et θ des fonctions satisfaisant à (16), (21 pour u), (21 pour v) et (22); en posant

$$(35)\qquad \omega_1 = u e^{-\frac{1}{3}\theta}, \qquad \omega_2 = v e^{-\frac{1}{3}\theta}, \qquad \omega_3 = e^{-\frac{1}{3}\theta},$$

ces expressions satisfont à (26) et en forment un système fondamental car (28) donne

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = 1.$$

Une solution quelconque $\bar u$, $\bar v$ et $\bar\theta$ des équations pour u, v et θ donne lieu, d'après (35), à un autre système fondamental $\bar\omega_1$, $\bar\omega_2$, $\bar\omega_3$; celui-ci étant lié au premier par des relations de la forme (31), on voit que $\bar u$ et $\bar v$ se déduisent de u et v par l'homographie (34).

Ces points établis, notre démonstration s'achève comme il suit. Si les deux équations (24) possèdent une intégrale commune C, les équations (23) en admettent une paire C, D liées par la relation (18). Il existe alors un système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 de (26), et les formules (30) déterminent un u et un v satisfaisant à (16), (21 pour u), (21 pour v), (22), ainsi qu'aux équations (19) dérivées de (16). De plus, u et v satisfont à (12) qui sont des combinaisons linéaires des équations précédentes. Déterminons maintenant deux fonctions f_1 et f_2 par les formules (11); d'après (12), f_1 sera fonction de x seul et f_2 de y seul.

Puis calculons deux fonctions g_1 et g_2 au moyen de (9); d'après (11), elles ne dépendront que de x et y respectivement. L'équation (15) donne lieu à un f_3 qui, en vertu de (18), est fonction de z seul; enfin (7) nous fournit un g_3 ne dépendant, d'après (15) ou (13), que de z. Comme (7) est identique à (4), nous avons donc réduit l'équation donnée (1) à la forme voulue.

En partant d'un autre système fondamental $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, nous aurions trouvé deux autres fonctions $\overline{u}$ et $\overline{v}$ et obtenu, de proche en proche et de la manière indiquée, d'autres fonctions $\overline{f_i}, \overline{g_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Mais, d'après (34), $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont des transformées homographiques de u et de v, et les $\overline{f_i}$, $\overline{g_i}$ sont, par suite, des transformées des f_i, g_i par l'homographie (6) associée à (34).

En résumé, nous avons établi le théorème fondamental suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation donnée (1) *puisse être ramenée à la forme* (4) *consiste dans l'existence d'une intégrale commune* C *aux deux équations aux dérivées partielles* (24).

Toutes les équations (4) *appartenant à une même valeur de* C *s'obtiennent de l'une quelconque d'entre elles par une homographie* (6), *et inversement, deux équations* (4) *homographiques conduisent à la même valeur de* C.

2. — Conditions pour qu'une ou plusieurs des échelles soient rectilignes.

Le tracé graphique d'un nomogramme se simplifie considérablement lorsqu'une ou plusieurs des échelles deviennent rectilignes, circonstance qu'on rencontre dans beaucoup d'équations fournies par la pratique.

Nous allons rechercher d'abord la condition nécessaire et suffisante pour que l'échelle des x soit rectiligne.

Par une transformation homographique convenable, on peut réduire la droite supportant l'échelle des x à être l'axe des η; dans l'équation (5), on a donc $f_1(x) = 0$. La première des équations (9) donne alors

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Comme $\dfrac{\partial v}{\partial x} \neq 0$ en vertu de (16), la deuxième des équations (21) donne

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = D, \tag{36}$$

et la deuxième équation (22)

$$\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x} = 0. \tag{37}$$

L'équation (37), jointe aux équations (18) et (23), forme donc une *condition nécessaire pour que l'échelle des x soit rectiligne*. Je dis que *cette condition est aussi suffisante*.

D'abord, les équations (23) et (37) sont équivalentes au système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = C\frac{\partial C}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Soit x_0, y_0 un point où C et D sont holomorphes; la seconde de ces équations donne, en intégrant par rapport à y entre les limites y_0 et y, et posant $C(x, y_0) = C_0$,

$$\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial C_0}{\partial x} = \frac{1}{2}(C^2 - C_0^2). \tag{39}$$

En ayant égard à (36), les équations (22) se réduisent à

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - C\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + 2C\right) + \frac{\partial C}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = D;$$

l'expression

$$\theta = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \left(\frac{3}{2}C_0 - \frac{1}{2}C\right) dx + D\,dy \tag{40}$$

forme une intégrale particulière du système précédent, car d'abord l'expression sous le signe intégral est une différentielle exacte en vertu de (37), et puis θ, qui satisfait visiblement à la seconde équation du système, satisfait aussi à la première en vertu de (39). En substituant cette valeur de θ dans le système (21), celui-ci devient

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= C_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} &= \frac{1}{2}(C_0 - C)\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= D \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

et il faut trouver un u et un v satisfaisant chacun à ce système, à (16) et enfin à $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Prenons pour v une intégrale quelconque du système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{\int_{x_0}^{x} C_0\, dx},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0;$$

l'équation (16) donne alors

$$(42)\quad \frac{\partial u}{\partial y} = - e^{\int_{x_0, y_0}^{x, y} \frac{1}{2}(C_0 - C)\, dx + D\, dy},$$

expression satisfaisant aux deux dernières équations (41), dont la première donne d'ailleurs

$$(43)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(y)\, e^{\int_{x_0}^{x} C_0\, dx}.$$

La condition d'intégrabilité de (42) et (43), savoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x},$$

donne pour déterminer φ l'équation

$$(44)\quad \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{1}{2}(C_0 - C)\, e^{\int_{x_0, y_0}^{x, y} -\frac{1}{2}(C_0 + C)\, dx + D\, dy}.$$

dont le membre droit est fonction de y seul, comme on le voit en différentiant par rapport à x et utilisant (39). En prenant pour u une intégrale particulière quelconque de (42) et (43), on a donc trois fonctions u, v, θ satisfaisant à (16), (21 pour u), (21 pour v) et (22), et d'ailleurs $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Déterminant ensuite les f_i, g_i $(i = 1, 2, 3)$ par les formules (11), (9), (15) et (7), on voit que $f_1(x) = 0$; l'échelle des x est, par suite, rectiligne.

En permutant x et y, les formules du paragraphe 1 font voir que

$$u, \quad v, \quad \theta, \quad C, \quad D, \quad M$$

se changent en

$$u, \quad v, \quad -\theta, \quad D, \quad C, \quad \frac{1}{M},$$

et il s'ensuit que *la condition nécessaire et suffisante pour que l'échelle des y soit rectiligne s'exprime par l'équation*

$$2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0, \tag{45}$$

jointe aux équations (18) *et* (23).

Afin de trouver enfin la condition pour que l'échelle des z soit rectiligne, il convient de prendre y et z pour variables indépendantes. En faisant, comme d'usage,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

et dénotant par $\frac{\delta}{\delta y}$, $\frac{\delta}{\delta z}$ les différentiations par rapport aux nouvelles variables indépendantes, ainsi que par M_x, N_x, θ_x, C_x, D_x les expressions qui remplacent M, N, θ, C, D, savoir

$$M_x = -\frac{\frac{\delta x}{\delta z}}{\frac{\delta x}{\delta y}}, \qquad N_x = \frac{\delta M_x}{\delta y} + \frac{1}{M_x}\frac{\delta M_x}{\delta z},$$

$$e^{\theta_x} = \frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta v}{\delta z} - \frac{\delta u}{\delta z}\frac{\delta v}{\delta y},$$

$$C_x = \left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2}\frac{\delta v}{\delta z} - \frac{\delta^2 v}{\delta y^2}\frac{\delta u}{\delta z} + 2\frac{\delta^2 u}{\delta y\,\delta z}\frac{\delta v}{\delta y} - 2\frac{\delta^2 v}{\delta y\,\delta z}\frac{\delta u}{\delta y}\right)e^{-\theta_x},$$

$$D_x = \left(\frac{\delta^2 v}{\delta z^2}\frac{\delta u}{\delta y} - \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}\frac{\delta v}{\delta y} + 2\frac{\delta^2 v}{\delta y\,\delta z}\frac{\delta u}{\delta z} - 2\frac{\delta^2 v}{\delta y\,\delta z}\frac{\delta u}{\delta z}\right)e^{-\theta_x}.$$

les formules élémentaires bien connues

$$\frac{\delta}{\delta y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{q}{p}\frac{\partial}{\partial x},$$
$$\frac{\delta}{\delta z} = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial x}$$

donnent, en tenant compte de (12) et (18),

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned}
&M_x = \frac{1}{q},\\
&N_x = -\frac{t}{q^2},\\
&e^{\theta_x} = -\frac{1}{p}e^{\theta},\\
&C_x = \frac{q}{p}C - \frac{qr}{p^2} + \frac{t}{q} = -D - \frac{2s}{p} + \frac{2t}{q},\\
&D_x = \frac{1}{p}C - \frac{r}{p^2} = -\frac{1}{q}D - \frac{2s}{pq} + \frac{t}{q^2},\\
&D_x = M_x C_x + N_x,\\
&2\frac{\delta C_x}{\delta z} + \frac{\delta D_x}{\delta y} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x}\right) + \frac{3}{p}\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y},\\
&\frac{\delta C_x}{\delta z} + 2\frac{\delta D_x}{\delta y} = \frac{1}{p}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right).
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs il est évident que les équations (23), par leur signification même comme conditions nécessaires et suffisantes [avec (18) qui, d'après (46), se transforme en elle-même] pour que (1) soit réductible à la forme (4), restent invariantes pour le changement de variables en question. Il s'ensuit, d'après (45) et (46), que *la condition nécessaire et suffisante* pour que l'échelle des z soit rectiligne s'exprime par l'équation

$$(47)\qquad \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial D}{\partial x} + 3\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

jointe, bien entendu, *aux équations* (18) *et* (23).

D'après ce qui précède, les conditions pour que plusieurs des échelles soient rectilignes s'obtiennent en combinant les conditions pour que les échelles individuelles le soient. Par exemple, les équations (37) et (45) donnent

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0, \tag{48}$$

et les équations (23) sont alors identiquement satisfaites ; il s'ensuit que (48) *et* (18) *expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les échelles des x et des y soient rectilignes à la fois.*

Enfin les équations (37), (45) et (47) donnent

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y} = 0, \tag{49}$$

L'équation

$$\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y} = 0, \tag{50}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation donnée (1) *admette une représentation nomographique à trois échelles rectilignes.*

On peut démontrer directement que les équations $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0$, $D = MC + N$ possèdent une intégrale commune lorsque $\frac{\partial^2 \log M}{\partial x \, \partial y} = 0$; cependant il vaut mieux, en vue des développements qui vont suivre au paragraphe 4, procéder de la manière suivante. L'intégrale de (50) est évidemment

$$M = -\frac{\psi'(y)}{\varphi'(x)},$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant des fonctions arbitraires. La première des équations (14) devient alors

$$\frac{\partial[z, \varphi(x) + \psi(y)]}{\partial(x, y)} = 0,$$

dont l'intégrale générale est visiblement

$$\varphi(x) + \psi(y) + \chi(z) = 0, \tag{51}$$

$\chi(z)$ désignant une nouvelle fonction arbitraire. Or (51) peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & -1 & 1 \\ \psi(x) & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2}\chi(z) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que la condition (50), nécessaire d'après (49), est aussi suffisante.

3. — Sur la détermination de u, v et θ lorsque C est connu.

Supposons que les échelles des x et des y soient courbes toutes les deux, c'est-à-dire que

$$(52) \qquad \frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x} \neq 0, \qquad 2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} \neq 0.$$

Nous allons voir maintenant comment, supposant C connu, u, v et θ, et par suite les f_i et g_i, s'obtiennent par des différentiations et éliminations. La question revient évidemment à la recherche d'un système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 de (26).

La première équation (26) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right) = \frac{2}{3}C\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right),$$

d'où

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega = \varphi(y)\, e^{\frac{2}{3}\int C\,dx}.$$

Or, d'après (52), la première des équations (23) peut s'écrire

$$(53) \qquad C = \frac{\partial}{\partial x}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

de sorte que nous obtenons

$$(54) \qquad \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega = \varphi(y)\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

L'intégrale générale de (54) est

$$\omega = e^{-\frac{1}{3}\int C\,dx}\left[\psi(y) + \varphi(y)\int e^{\frac{1}{3}\int C\,dx}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{2}{3}} dx\right],$$

ou, en vertu de (53),

$$\omega = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}} \left[\psi(y) + \varphi(y)\int\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)dx\right],$$

ou bien, en appliquant encore une fois (53),

$$(55)\quad \omega = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}} \left\{\psi(y) + \varphi(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]\right\}.$$

La deuxième équation (26) s'écrit aussi

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right) + \frac{1}{3}D\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{1}{3}C\omega\right) = \frac{1}{3}\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)\omega,$$

et en y substituant (54) et (55), il vient, après quelques réductions,

$$\psi(y) = 3\varphi'(y).$$

Nous obtenons, par suite, de (55)

$$(56)\quad \omega = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}} \left\{3\varphi'(y) + \varphi(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]\right\}.$$

En substituant cette expression dans la dernière équation (26), nous obtenons pour $\varphi(y)$ une équation différentielle linéaire et homogène du troisième ordre

$$H(\varphi;x,y) = 0,$$

dont les coefficients dépendent, *a priori*, de x et y. Or à un système fondamental ω_1, ω_2, ω_3 de (26) correspondent, dans (56), trois fonctions $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ linéairement indépendantes satisfaisant à $H = 0$; il s'ensuit que, dans cette dernière équation, les rapports des coefficients sont indépendants de x. On obtient donc une équation $H(\varphi; x_i, y) = 0$ équivalente à $H(\varphi; x, y) = 0$, en faisant, dans la dernière équation (26), $x = x_i =$ const. et y substituant l'expression (56) pour ω, après y avoir posé $x = x_i$. Mais en faisant $\omega(x_i, y) = 0$, c'est-à-dire, d'après (56),

$$(57)\qquad 3\varphi'(y) + \varphi(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]_{x=x_i} = 0,$$

la dernière équation (26) avec $x = x_i$ est satisfaite, et par suite, l'équation $H(\varphi; x_i, y) = 0$ ou son équivalente $H(\varphi; x, y) = 0$. Comme la deuxième équation (23) peut s'écrire

$$D = \frac{\partial}{\partial y} \log\left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right), \tag{58}$$

on voit qu'une intégrale particulière de (57) est donnée par l'expression

$$\varphi_i(y) = \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{1}{3}}}, \tag{59}$$

et, en vertu de (56), (57) et (59), les expressions

$$\begin{aligned}\omega_i = {} & \frac{1}{\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i}^{\frac{1}{3}} \left(2\frac{\partial C}{\partial y} + 2\frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}} \\ & \times \left\{ 2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D \right. \\ & \left. \qquad - \left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right]_{x=x_i} \right\} \qquad (i = 1, 2, 3)\end{aligned} \tag{60}$$

sont des intégrales particulières du système (26).

Peut-on déterminer, dans (60), les constantes x_1, x_2, x_3 de sorte que $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ forment un système fondamental? Pour cela, il faut et il suffit que $\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \neq 0$. En se reportant à (28), il est clair que

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{\rho^3}\Delta(\rho\omega_1, \rho\omega_2, \rho\omega_3),$$

quelle que soit la fonction ρ, et en faisant $\rho = \left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)^{\frac{1}{3}}$, (56) nous donne

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}} \begin{vmatrix} 3\varphi_i'(y) + \varphi_i(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right], \\ \varphi_i(y)\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right), \\ 3\varphi_i''(y) + \varphi_i'(y)\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right] \\ + \varphi_i(y)\left[2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + \frac{\partial D}{\partial y}\right], \end{vmatrix}_{(i=1,2,3)}$$

ou, en réduisant le déterminant,

$$\Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -9 \begin{vmatrix} \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ \varphi'_1(y) & \varphi'_2(y) & \varphi'_3(y) \\ \varphi''_1(y) & \varphi''_2(y) & \varphi''_3(y) \end{vmatrix}.$$

En posant $\varphi_i(y) = e^{\psi_i(y)}$, on trouve

$$(61) \qquad \Delta(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -9\, e^{\psi_1(y)+\psi_2(y)+\psi_3(y)} \begin{vmatrix} 1 \\ \psi'_i(y) \\ \psi''_i(y) + [\psi'_i(y)]^2 \end{vmatrix}_{i=1,2,3}$$

et, d'après (57),

$$\psi'_i(y) = -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right)_{x=x_i} - \frac{1}{3}D(x_i, y).$$

Choisissons d'abord x_1 et x_2 de sorte que

$$(62) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \psi'_1(y) & \psi'_2(y) \end{vmatrix} = \psi'_2(y) - \psi'_1(y) \neq 0,$$

ce qui est toujours possible, car autrement $2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D$ serait indépendant de x, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x}\right) + D\right] = 2\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial x} = 0,$$

contrairement à l'hypothèse (52). Avec ces valeurs de x_1 et x_2, supposons que l'expression (61) s'annule quel que soit x_3 ; en écrivant x au lieu de x_3, et $\psi_3(x, y)$ au lieu de $\psi_3(y)$, on aurait donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi'_1(y) & \psi'_2(y) & \dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} \\ \psi''_1(y) + \psi'_1(y)^2 & \psi''_2(y) + \psi'_2(y)^2 & \dfrac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} + \left[\dfrac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\right]^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant et tenant compte de (62),

$$(63) \qquad \frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y}\right]^2 = \alpha(y)\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} + \beta(y).$$

Différentions cette équation par rapport à x; comme nous avons

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{3}\left[2\frac{\partial}{\partial y}\log\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)+D\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y} = -\frac{1}{3}\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

il vient

$$(64)\qquad 2\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}+2D\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right) = -3\alpha(y)\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right).$$

Différentions encore une fois par rapport à x; en tenant compte de (23), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[C\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)\right]+2\frac{\partial D}{\partial x}\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)+2DC\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)$$
$$= -3\alpha(y)C\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right),$$

et en éliminant $\alpha(y)$ à l'aide de (64), il vient enfin

$$\left(\frac{\partial C}{\partial y}+2\frac{\partial D}{\partial x}\right)\left(2\frac{\partial C}{\partial y}+\frac{\partial D}{\partial x}\right)=0.$$

contrairement à l'hypothèse (52).

Par suite, si les échelles des x et des y sont courbes, on peut choisir les constantes x_1, x_2, x_3 de façon qu'en calculant ω_1, ω_2, ω_3 par la formule (60), ces fonctions forment un système fondamental de (26); les formules du paragraphe 1 donnent alors les f_i, g_i par des différentiations et éliminations.

Si, par exemple, l'échelle des x était rectiligne, celles des y et des z courbes, on prendrait y et z pour variables indépendantes; la méthode que nous venons de donner s'applique donc toutes les fois que l'une des échelles au plus est rectiligne. Le cas de deux échelles rectilignes et la troisième courbe sera traité au paragraphe 5; nous y verrons que les f_i, g_i s'obtiennent encore sans quadratures, par des différentiations et éliminations. Nous tournerons maintenant notre attention sur le cas où l'équation donnée admet une représentation nomographique à trois échelles rectilignes.

4. — Le cas de $\dfrac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y} = 0$.

Dans ce cas, en calculant M d'après l'équation donnée (1), on obtient une expression de la forme

$$M = \alpha(x)\beta(y). \tag{65}$$

En posant, pour arriver à l'équation (51),

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{\alpha(x)}, \qquad \psi(y) = -\int \beta(y)\,dy, \tag{66}$$

et prenant φ et ψ pour nouvelles variables indépendantes, l'équation (1) se réduit à une équation entre $\varphi + \psi$ et z, dont on tire

$$\varphi + \psi = -\chi(z).$$

Pour obtenir l'équation

$$\varphi(x) + \psi(y) + \chi(z) = 0, \tag{51}$$

il faut donc, en dehors des éliminations usuelles, les deux quadratures (66).

Par un changement de variables (51) se réduit à la forme

$$x + y + z = 0. \tag{67}$$

Nous en avons déjà rencontré, à la fin du paragraphe 2, une représentation nomographique; nous verrons qu'il en existe d'autres essentiellement différentes.

L'équation (67) donne

$$M = -1, \qquad N = 0;$$

par suite, d'après (18),

$$D = -C, \tag{68}$$

et introduisant cette valeur de D dans les équations (23), il vient

$$\left\{ \begin{aligned} & 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{2}C^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{1}{2}C^2\right) = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2}C^2\right) - 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{1}{2}C^2\right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{69}$$

Pour trouver toutes les représentations nomographiques de (67), il faut intégrer complètement ce système (69). On trouve immédiatement deux intégrales premières, savoir

$$(70)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial x} - \dfrac{1}{2}C^2 = -6\varphi(2x+y), \\ \dfrac{\partial C}{\partial y} + \dfrac{1}{2}C^2 = 6\psi(x+2y), \end{cases}$$

de sorte que ce système est équivalent au système (69). La condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}C^2 - 6\varphi\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(6\psi - \frac{1}{2}C^2\right)$$

donne, en tenant compte de (70),

$$(71)\qquad [\psi(x+2y) - \varphi(2x+y)]C = \varphi'(2x+y) + \psi'(x+2y).$$

Dans ce qui suit, il convient de distinguer les quatre cas suivants :

I. $\varphi' = \psi' = 0$;

II. $\varphi' = 0, \quad \psi' \neq 0$;

III. $\varphi' \neq 0, \quad \psi' = 0$;

IV. $\varphi' \neq 0, \quad \psi' \neq 0$.

Cas I : $\varphi' = \psi' = 0$. — On a $\varphi = \text{const.} = c_1$, $\psi = \text{const.} = c_2$, et pour $C \neq 0$, (71) donne $c_1 = c_2$, tandis que pour $C = 0$, (70) donne $c_1 = c_2 = 0$. On a donc toujours $c_1 = c_2 = -\frac{1}{3}c$; l'équation (71) se réduit à une identité, et (70) devient

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}C^2 + 2c,$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\left(\frac{1}{2}C^2 + 2c\right),$$

d'où

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = 0$$

et

$$(72)\qquad C = \chi(x-y), \qquad \chi'(x-y) = \frac{1}{2}[\chi(x-y)]^2 + 2c.$$

Il faut maintenant subdiviser notre cas de la manière suivante :

$$\mathrm{I}\alpha : c = 0; \qquad \mathrm{I}\beta : c > 0; \qquad \mathrm{I}\gamma : c < 0.$$

Cas Iα : $c = 0$. — Les équations (72) deviennent

$$(73) \qquad C = \chi(x-y), \qquad \chi' = \frac{1}{2}\chi^2.$$

Subdivisons encore ce cas en deux :

$$\mathrm{I}\alpha 1 : \chi = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{I}\alpha 2 : \chi \neq 0.$$

Cas Iα 1 : $\chi = 0$. — Les équations (73) donnent alors

$$(74) \qquad C = 0$$

et (68), $D = 0$; le système (22) admet l'intégrale particulière

$$\theta = 0,$$

et avec ce choix de θ, les équations (16) et (22) ont pour intégrales particulières

$$u = x - y, \qquad v = y.$$

En calculant les f_i et g_i par les formules (11), (9), (15) et (7), nous trouvons l'équation

$$(75) \qquad \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & y & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x+y+z) = 0.$$

Nous dirons, pour abréger, que deux nomogrammes appartiennent à la même famille quand leurs équations de définition (4) et (5) sont liées par l'homographie (6); à deux nomogrammes d'une famille correspond donc la même valeur de C et inversement (théorème fondamental du paragraphe 1), et nous appellerons *paramètres de la famille* les constantes arbitraires entrant dans l'expression de C. Nous dirons encore que toutes les équations obtenues en faisant varier les paramètres forment une classe.

L'équation (75) fait voir que le cas Iα 1 embrasse une famille de nomogrammes à trois échelles rectilignes et concourantes, et n'ayant pas de paramètre. Cette famille a été découverte depuis longtemps par M. d'Ocagne.

Cas Iα2 : $\chi \neq 0$. — La deuxième équation (73) donne alors en l'intégrant

$$-\frac{1}{\chi} = \frac{1}{2}(x - y) + \text{const.}$$

ou

$$-\frac{1}{\chi} = \frac{1}{2}\left(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}\right),$$

où, bien entendu, c'est la différence $x_0 - y_0$ qui est la constante arbitraire; la première équation (73) nous montre alors que

$$C = \frac{2}{\overline{y - y_0} - \overline{x - x_0}}. \tag{76}$$

Cette expression fait voir que les échelles des x et des y sont courbes; la méthode du paragraphe 3 fournit l'équation nomographique correspondante, et nous pouvons nous borner, par suite, à écrire cette équation et vérifier qu'elle donne bien la valeur (76) pour C.

Désignons, ici et dans la suite du paragraphe présent, par z_0 la constante déterminée par la condition

$$x_0 + y_0 + z_0 = 0; \tag{77}$$

l'équation en question s'écrit

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{x - x_0} & \frac{1}{(x - x_0)^2} & 1 \\ \frac{1}{y - y_0} & \frac{1}{(y - y_0)^2} & 1 \\ -\frac{1}{z - z_0} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\left(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}\right)(x + y + z)}{(x - x_0)^2 (y - y_0)^2 (z - z_0)} = 0. \tag{78}$$

Nous en tirons successivement, à l'aide de (8), (16) et (17),

$$u = \frac{1}{x - x_0} + \frac{1}{y - y_0},$$

$$v = -\frac{1}{(x - x_0)(y - y_0)},$$

$$e^{\theta} = \frac{\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}}{(x - x_0)^3 (y - y_0)^3},$$

$$e^{\theta} C = -\frac{2}{(x - x_0)^3 (y - y_0)^3},$$

d'où l'expression (76) pour C.

D'après (78), le cas Iα2 donne lieu à une classe de nomogrammes où les échelles des x et des y sont supportées par la même conique, l'échelle des z étant rectiligne et tangente à cette conique. Les familles contiennent un paramètre, savoir $x_0 - y_0$. Ces nomogrammes ont été découverts par M. Clark [1]. Vient ensuite le

Cas Iβ : $c > 0$. — En faisant $c = a^2$, où nous pouvons supposer par exemple $a > 0$, les équations (72) donnent

$$C = -2a \cot a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}), \tag{79}$$

et l'équation nomographique devient

$$\begin{vmatrix} \cot a(x - x_0) & \cot^2 a(x - x_0) & 1 \\ \cot a(y - y_0) & \cot^2 a(y - y_0) & 1 \\ -\cot a(z - z_0) & -1 & 1 \end{vmatrix} \tag{80}$$
$$= \frac{\sin a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}) \sin a(x + y + z)}{\sin^2 a(x - x_0) \sin^2 a(y - y_0) \sin a(z - z_0)} = 0,$$

dont nous tirons

$$\begin{aligned} u &= \cot a(x - x_0) + \cot a(y - y_0), \\ v &= -\cot a(x - x_0) \cot a(y - y_0), \\ e^\theta &= \frac{a^2 \sin a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0})}{\sin^3 a(x - x_0) \sin^3 a(y - y_0)}, \\ e^\theta C &= -\frac{2a^3 \cos a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0})}{\sin^3 a(x - x_0) \sin^3 a(y - y_0)}, \end{aligned}$$

et, par suite, l'expression (79) pour C.

L'équation (80) fait voir que le cas Iβ donne lieu à une classe de nomogrammes aux échelles des x et des y supportées par la même conique, l'échelle des z étant rectiligne et ne coupant pas ladite conique. Il y a deux paramètres, $x_0 - y_0$ et a. Ces nomogrammes, dans le cas particulier $a = 1$, sont également dus à M. Clark.

---

[1] *Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre* (*Revue de Mécanique*, 1907). — *Voir* aussi : R. Soreau, *Nouveaux types d'abaques*, etc. (*Mémoires et comptes rendus de la Société des Ingénieurs civils de France*, 1906). — d'Ocagne, *Calcul graphique et Nomographie*, p. 285 et suiv.

Cas Iγ : $c < 0$. — Il faut subdiviser ce cas en deux :

$$\mathrm{I}\gamma 1 : \frac{1}{2}\chi^2 + 2c = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{I}\gamma 2 : \frac{1}{2}\chi^2 + 2c \neq 0.$$

Cas Iγ1 : $\frac{1}{2}\chi^2 + 2c = 0$. — En désignant par a une constante réelle et différente de zéro, on aura alors

$$C = a. \tag{81}$$

Le système (22) admet l'intégrale particulière définie par

$$e^{\theta} = -a^2 e^{a(x-y)},$$

les équations (16) et (21) seront satisfaites en faisant

$$u = e^{-ay} - e^{ax}, \qquad v = e^{-ay},$$

et les formules (11), (9), (15) et (7) nous donnent l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & e^{ax} & 1 \\ 1 & e^{-ay} & 1 \\ \dfrac{1}{1-e^{az}} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{e^{-ay}(e^{a(x+y+z)} - 1)}{e^{az} - 1} = 0, \tag{82}$$

Par suite, le cas Iγ1 donne lieu à une classe de nomogrammes à trois échelles rectilignes non concourantes, classe renfermant un paramètre a. Pour $a = \pm 1$, ces nomogrammes ont été découverts par M. d'Ocagne, qui a d'ailleurs remarqué que les deux familles $a = 1$ et $a = -1$ sont différentes homographiquement, circonstance mise immédiatement en évidence par notre théorie générale.

Cas Iγ2 : $\frac{1}{2}\chi^2 + 2c \neq 0$. — Faisons $c = -a^2$, $a > 0$, et introduisons les fonctions hyperboliques

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &= -i \sin ix, \\ \operatorname{ch} x &= \cos ix, \\ \operatorname{coth} x &= i \cot ix, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

La comparaison du cas Iβ nous donne immédiatement

$$C = -2a \coth a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}), \tag{83}$$

$$\begin{vmatrix} \coth a(x - x_0) & \coth^2 a(x - x_0) & 1 \\ \coth a(y - y_0) & \coth^2 a(y - y_0) & 1 \\ -\coth a(z - z_0) & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{84}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} a(\overline{x - x_0} - \overline{y - y_0}) \operatorname{sh} a(x + y + z)}{\operatorname{sh}^2 a(x - x_0) \operatorname{sh}^2 a(y - y_0) \operatorname{sh} a(z - z_0)} = 0.$$

D'après (84), le cas Iγ2 donne lieu à une classe de nomogrammes renfermant deux paramètres, $x_0 - y_0$ et a. Les échelles des x et des y sont supportées par la même conique, laquelle est coupée en deux points par l'échelle rectiligne des z. Pour $a = 1$, ces nomogrammes ont été découverts par M. Clark.

Il faut envisager maintenant le

Cas II : $\varphi' = 0$, $\psi' \neq 0$. — Comme $\varphi = \text{const.} = c$, l'équation (71) donne

$$C = \frac{\psi'(x + 2y)}{\psi(x + 2y) - c};$$

or, d'après (67), $x + 2y = y - z$, de sorte que

$$C = \chi(y - z).$$

En prenant y et z pour variables indépendantes, les formules (46) font voir que $C_x = C$, de sorte que nous n'avons qu'à répéter, avec les nouvelles variables indépendantes, la discussion du cas I. Les cas Iα1 et Iγ1 ne nous donnent rien de nouveau, tandis que les autres cas conduisent aux classes suivantes de nomogrammes coniques :

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{x - x_0} & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{y - y_0} & \dfrac{1}{(y - y_0)^2} & 1 \\ \dfrac{1}{z - z_0} & \dfrac{1}{(z - z_0)^2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad C = \frac{2}{x - x_0 + 2(y - y_0)}, \tag{85}$$

$$\begin{vmatrix} -\cot a(x - x_0) & -1 & 1 \\ \cot a(y - y_0) & \cot^2 a(y - y_0) & 1 \\ \cot a(z - z_0) & \cot^2 a(z - z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{86}$$

et

$$C = 2a \cot a(\overline{x - x_0} + 2\overline{y - y_0}).$$

$$(87)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} -\coth a(x-x_0) & 1 & 1 \\ \coth a(y-y_0) & \coth^2 a(y-y_0) & 1 \\ \coth a(z-z_0) & \coth^2 a(z-z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ C = 2a \coth a(x - x_0 + 2\overline{y - y_0}). \end{array}\right.$$

Cas III : $\varphi' \neq 0$, $\psi' = 0$. — Un raisonnement analogue au précédent fait voir qu'en prenant z et x comme variables indépendantes

$$C = C_y = \chi(z - x);$$

nous obtenons les nouveaux nomogrammes coniques

$$(88)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{x-x_0} & \dfrac{1}{(x-x_0)^2} & 1 \\ -\dfrac{1}{y-y_0} & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{z-z_0} & \dfrac{1}{(z-z_0)^2} & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad C = \frac{2}{2\overline{x - x_0} + y - y_0},$$

$$(89)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \cot a(x-x_0) & \cot^2 a(x-x_0) & 1 \\ -\cot a(y-y_0) & -1 & 1 \\ \cot a(z-z_0) & \cot^2 a(z-z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ C = 2a \cot a(2\overline{x - x_0} + y - y_0), \end{array}\right.$$

$$(90)\quad \left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} \coth a(x-x_0) & \coth^2 a(x-x_0) & 1 \\ -\coth a(y-y_0) & 1 & 1 \\ \coth a(z-z_0) & \coth^2 a(z-z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ C = 2a \coth a(2\overline{x - x_0} + y - y_0). \end{array}\right.$$

Vient enfin le

Cas IV : $\varphi' \neq 0$, $\psi' \neq 0$. — Posant pour le moment $2x + y = \lambda$, $x + 2y = \mu$, l'équation (71) donne

$$(91)\qquad C = \frac{\varphi'(\lambda) + \psi'(\mu)}{\psi(\mu) - \varphi(\lambda)},$$

et, en substituant cette expression dans les équations (70), nous obtenons

$$(92)\quad \begin{cases} [\psi(\mu)-\varphi(\lambda)][2\varphi''(\lambda)+\psi''(\mu)]+\dfrac{3}{2}[\varphi'^2(\lambda)-\psi'^2(\mu)]=-6\varphi(\lambda)[\psi(\mu)-\varphi(\lambda)]^2, \\ [\psi(\mu)-\varphi(\lambda)][\varphi''(\lambda)+2\psi''(\mu)]+\dfrac{3}{2}[\varphi'^2(\lambda)-\psi'^2(\mu)]=\ \ 6\psi(\lambda)[\psi(\mu)-\varphi(\lambda)]^2. \end{cases}$$

En soustrayant et divisant par $\psi(\mu)-\varphi(\lambda)$, nous en tirons

$$\varphi''(\lambda)-\psi''(\mu)=6[\varphi^2(\lambda)-\psi^2(\mu)],$$

et par conséquent, λ et μ étant des variables indépendantes

$$\varphi''(\lambda)-6\varphi^2(\lambda)=\text{const.}=-\frac{1}{2}g_2,$$

$$\psi''(\mu)-6\psi^2(\mu)=-\frac{1}{2}g_2.$$

Multipliant la première de ces équations par $2\varphi'(\lambda)$, la seconde par $2\psi'(\mu)$ et intégrant, il vient

$$(93)\quad \begin{cases} \varphi'^2(\lambda)=4\varphi^3(\lambda)-g_2\varphi(\lambda)-g_3, \\ \psi'^2(\mu)=4\psi^3(\mu)-g_2\psi(\mu)-g'_3, \end{cases}$$

g_3 et g'_3 étant de nouvelles constantes, et substituant les expressions (93) dans l'une quelconque des équations (92), celle-ci se réduit à

$$(94)\qquad g'_3=g_3.$$

Introduisant la fonction elliptique $\wp u$ de Weierstrass, nous voyons que les intégrales générales des équations (93) deviennent, en ayant égard à (94),

$$\varphi(\lambda)=\wp(\lambda-\lambda_0;\,g_2,g_3),$$
$$\psi(\mu)=\wp(\mu-\mu_0;\,g_2,g_3),$$

où λ_0 et μ_0 sont des constantes arbitraires. En faisant $\lambda_0=2x_0+y_0$, $\mu_0=x_0+2y_0$, nous obtenons de (91)

$$(95)\quad C=\frac{\wp'(x-x_0+2\overline{y-y_0};\,g_2,g_3)+\wp'(2\overline{x-x_0}+y-y_0;\,g_2,g_3)}{\wp(x-x_0+2\overline{y-y_0};\,g_2,g_3)-\wp(2\overline{x-x_0}+y-y_0;\,g_2,g_3)},$$

expression renfermant quatre constantes arbitraires x_0, y_0, g_2, g_3.

En vertu de (67), l'expression précédente s'écrit aussi

$$C = \frac{p'(y - y_0 - \overline{z - z_0}) - p'(z - z_0 - \overline{x - x_0})}{p(y - y_0 - \overline{z - z_0}) - p(z - z_0 - \overline{x - x_0})},$$

et en appliquant la formule bien connue

$$\frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv} = \frac{\sigma'}{\sigma}(u+v) - \frac{\sigma'}{\sigma}u - \frac{\sigma'}{\sigma}v, \tag{96}$$

il vient

$$C = -2\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0 - \overline{y - y_0}) + \frac{\sigma'}{\sigma}(y - y_0 - \overline{z - z_0}) + \frac{\sigma'}{\sigma}(z - z_0 - \overline{x - x_0})\right] \tag{97}$$

ou, par une nouvelle application de (96),

$$\begin{aligned} C = &- \frac{p'(x - x_0) + p'(y - y_0)}{p(x - x_0) - p(y - y_0)} - \frac{p'(y - y_0) + p'(z - z_0)}{p(y - y_0) - p(z - z_0)} \\ &- \frac{p'(z - z_0) + p'(x - x_0)}{p(z - z_0) - p(x - x_0)}, \end{aligned} \tag{98}$$

formules symétriques en x, y, z.

L'équation nomographique correspondant à cette valeur de C est

$$\begin{vmatrix} p(x - x_0) & p'(x - x_0) & 1 \\ p(y - y_0) & p'(y - y_0) & 1 \\ p(z - z_0) & p'(z - z_0) & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{99}$$

En effet, cette équation est d'abord équivalente à (67), en vertu de la formule bien connue

$$\begin{vmatrix} pu & p'u & 1 \\ pv & p'v & 1 \\ pw & p'w & 1 \end{vmatrix} = \frac{2\,\sigma(u - v)\,\sigma(v - w)\,\sigma(w - u)\,\sigma(u + v + w)}{\sigma^3 u\,\sigma^3 v\,\sigma^3 w};$$

en second lieu, nous vérifierons de la manière suivante qu'elle conduit à la valeur (98) de C. Les équations (8) et (9) donnent

$$\begin{aligned} u &= \frac{p'(x - x_0) - p'(y - y_0)}{p(x - x_0) - p(y - y_0)} \\ &= 2\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0 + y - y_0) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0) - 2\frac{\sigma'}{\sigma}(y - y_0) \\ &= -2\left[\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(y - y_0) + \frac{\sigma'}{\sigma}(z - z_0)\right], \end{aligned} \tag{100}$$

$$v = p'(x - x_0) - u\,p(x - x_0) = p'(y - y_0) - u\,p(y - y_0);$$

d'où

$$(101)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2[\wp(x-x_0)-\wp(z-z_0)], & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2[\wp(y-y_0)-\wp(z-z_0)], \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}\wp(y-y_0), & \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}\wp(x-x_0), \end{cases}$$

$$(102)\quad \begin{aligned} e^{\theta} = 4[\wp(x-x_0)-\wp(y-y_0)]\,[\wp(y-y_0)-\wp(z-z_0)] \\ \times[\wp(z-z_0)-\wp(x-x_0)], \end{aligned}$$

$$(103)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2[\wp'(x-x_0)+\wp'(z-z_0)] = -\dfrac{\wp'(z-z_0)+\wp'(x-x_0)}{\wp(z-z_0)-\wp(x-x_0)}\,\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\wp(y-y_0) \qquad\qquad = -\dfrac{\wp'(z-z_0)+\wp'(x-x_0)}{\wp(z-z_0)-\wp(x-x_0)}\,\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

et enfin

$$(104)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 2\wp'(z-z_0), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\wp(x-x_0) - \dfrac{\partial u}{\partial y}\wp'(x-x_0). \end{cases}$$

De (103) et (101) nous obtenons

$$(105)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)e^{-\theta} \\ &\quad = -\frac{\wp'(z-z_0)+\wp'(x-x_0)}{\wp(z-z_0)-\wp(x-x_0)}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)e^{-\theta} \\ &\quad = -\frac{\wp'(z-z_0)+\wp'(x-x_0)}{\wp(z-z_0)-\wp(x-x_0)}, \end{aligned}$$

ainsi que de (104) et (101)

$$(106)\quad \begin{aligned} &2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\right)e^{-\theta} \\ &\quad = 2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}[\wp(x-x_0)-\wp(y-y_0)] \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\wp'(x-x_0)\right\}e^{-\theta} \\ &\quad = -\frac{2\wp'(z-z_0)}{\wp(y-y_0)-\wp(z-z_0)} - \frac{2\wp'(x-x_0)}{\wp(x-x_0)-\wp(y-y_0)} \\ &\quad = -\frac{\wp'(y-y_0)+\wp'(z-z_0)}{\wp(y-y_0)-\wp(z-z_0)} + \frac{\wp'(y-y_0)-\wp'(z-z_0)}{\wp(y-y_0)-\wp(z-z_0)} \\ &\qquad - \frac{\wp'(x-x_0)+\wp'(y-y_0)}{\wp(x-x_0)-\wp(y-y_0)} - \frac{\wp'(x-x_0)-\wp'(y-y_0)}{\wp(x-x_0)-\wp(y-y_0)} \\ &\quad = -\frac{\wp'(y-y_0)+\wp'(z-z_0)}{\wp(y-y_0)-\wp(z-z_0)} - \frac{\wp'(x-x_0)+\wp'(y-y_0)}{\wp(x-x_0)-\wp(y-y_0)}, \end{aligned}$$

car l'équation (99) peut s'écrire

$$\frac{p'(y-y_0)-p'(z-z_0)}{p(y-y_0)-p(z-z_0)}=\frac{p'(x-x_0)-p'(y-y_0)}{p(x-x_0)-p(y-y_0)}.$$

En faisant la somme des expressions (105) et (106) nous obtenons donc, en vertu de (17), la valeur (98) de C.

Nous voyons que le cas IV donne lieu à une classe de nomogrammes à quatre paramètres x_0, y_0, g_2, g_3, où les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 1, transformée homographique de la courbe

$$\eta^2=4\xi^3-g_2\xi-g_3.$$

Les cas particuliers où la fonction elliptique pu dégénère méritent d'être mentionnés. Ils sont caractérisés par la relation

$$g_2^3-27g_3^2=0,$$

ce qui conduit à distinguer trois cas.

Supposant d'abord $g_2>0$, $g_3>0$, on aura

$$g_2=\frac{4}{3}a^4, \qquad g_3=\frac{8}{27}a^6 \qquad (a>0).$$

$$pu=\frac{a^2}{\sin^2 au}-\frac{a^2}{3},$$

et l'équation (99) devient

$$(107)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sin^2 a(x-x_0)} & \dfrac{\cos a(x-x_0)}{\sin^3 a(x-x_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\sin^2 a(y-y_0)} & \dfrac{\cos a(y-y_0)}{\sin^3 a(y-y_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\sin^2 a(z-z_0)} & \dfrac{\cos a(z-z_0)}{\sin^3 a(z-z_0)} & 1 \end{vmatrix}=0.$$

L'équation (107) définit une classe de nomogrammes aux trois paramètres a, x_0, y_0, dont les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 0, homographique de

$$\eta^2=\xi^2(\xi-1),$$

et ayant, par conséquent, un point isolé.

Supposant, en second lieu, $g_2 > 0$, $g_3 < 0$, on aura

$$g_2 = \frac{4}{3} a^4, \qquad g_3 = -\frac{8}{27} a^6 \qquad (a > 0),$$

$$pu = \frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 au} + \frac{a^2}{3},$$

et l'équation (99) devient

$$(108) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 a(x-x_0)} & \dfrac{\operatorname{ch} a(x-x_0)}{\operatorname{sh}^3 a(x-x_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 a(y-y_0)} & \dfrac{\operatorname{ch} a(y-y_0)}{\operatorname{sh}^3 a(y-y_0)} & 1 \\ \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 a(z-z_0)} & \dfrac{\operatorname{ch} a(z-z_0)}{\operatorname{sh}^3 a(z-z_0)} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation (108) définit une classe de nomogrammes aux trois paramètres a, x_0, y_0, dont les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 0, homographique de

$$\eta^2 = \xi^2(\xi + 1),$$

et ayant, par conséquent, un point double à tangentes distinctes. Supposant enfin $g_2 = g_3 = 0$, on aura

$$pu = \frac{1}{u^2},$$

et l'équation (99) devient

$$(109) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{1}{(x-x_0)^2} & \dfrac{1}{(x-x_0)^3} & 1 \\ \dfrac{1}{(y-y_0)^2} & \dfrac{1}{(y-y_0)^3} & 1 \\ \dfrac{1}{(z-z_0)^2} & \dfrac{1}{(z-z_0)^3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation définit une classe de nomogrammes aux deux paramètres x_0, y_0, dont les trois échelles sont supportées par la même cubique de genre 0, homographique de

$$\eta^2 = \xi^3,$$

et ayant, par conséquent, un point double à tangentes confondues.

Les nomogrammes (107), (108), pour $a = 1$, et (109) ont été découverts par M. Clark (*loc. cit.*).

5. — Le cas de deux échelles rectilignes, la troisième étant courbe.

Par un choix convenable des variables indépendantes, nous pouvons supposer que les échelles rectilignes soient celles des x et des y.

Comme nous l'avons vu au paragraphe 2, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi s'exprime par les équations

$$D = MC + N,$$
$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0.$$

En substituant la valeur de D dans la dernière équation, il vient

$$M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

ou

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\frac{\partial \log M}{\partial x}C - \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Or nous avons, en vertu de $\frac{\partial C}{\partial y} = 0$,

$$0 = \frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \log M}{\partial x}C + \frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y}C - \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x},$$

d'où

$$C = -\frac{\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{M}\frac{\partial N}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y}}, \tag{110}$$

expression dont le dénominateur ne s'annule pas identiquement, car dans ce cas, l'échelle des z serait aussi rectiligne en vertu du paragraphe 4.

Pour que les échelles des x et des y soient rectilignes, celle des z étant courbe, il faut et il suffit donc que l'expression (110) *satisfasse aux équations*

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(MC + N) = 0. \tag{111}$$

Cette condition a été obtenue d'une manière toute différente par M. Massau ([1]).

Pour remonter de l'expression (110) aux f_i, g_i, M. Massau donne des formules qui exigent quatre quadratures et, depuis, M. Lecornu a donné d'autres formules n'en renfermant que trois ([1]).

Je ferai voir maintenant comment les f_i, g_i s'obtiennent sans aucune quadrature.

Par une transformation homographique convenable, nous pouvons faire coïncider les échelles des x et des y avec les axes des ξ et des η respectivement, de sorte que $g_1(x) = f_2(y) = 0$. L'équation (4) devient alors

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & 0 & 1 \\ 0 & g_2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{112}$$

ou bien

$$f_3 g_2 + f_1 g_3 - f_1 g_2 = 0. \tag{113}$$

Nous en tirons successivement

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{(g_3 - g_2) f_1'}{f_3' g_2 + g_3' f_1}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{(f_3 - f_1) g_2'}{f_3' g_2 + g_3' f_1}, \\ \mathrm{M} &= -\frac{f_3 - f_1}{g_3 - g_2} \frac{g_2'}{f_1'} \end{aligned} \right. \tag{114}$$

et

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x} &= -\frac{f_3' g_3 - g_3'(f_3 - 2f_1)}{(f_3 - f_1)(f_3' g_2 + g_3' f_1)} - \frac{f_1''}{f_1'}, \\ \frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial y} &= \frac{g_3' f_3 - f_3'(g_3 - 2g_2)}{(g_3 - g_2)(f_3' g_2 + g_3' f_1)} + \frac{g_2''}{g_2'}. \end{aligned} \right. \tag{115}$$

Nous obtenons ensuite

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x \, \partial y} = \frac{f_1' g_2' [g_3 f_1 + g_2 (f_3 - 2 f_1)] (f_3' g_3'' - g_3'' f_3')}{(f_3' g_2 + g_3' f_1)^3},$$

ou bien, en vertu de (113),

$$\frac{\partial^2 \log \mathrm{M}}{\partial x \, \partial y} = -\frac{f_1 g_2 f_1' g_2' (f_3'' g_3' - g_3'' f_3')}{(f_3' g_2 + g_3' f_1)^3}. \tag{116}$$

([1]) *Voir* D'OCAGNE, *Traité de Nomographie*, p. 422-427.

Les équations (114) et (116) donnent

$$\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y}} = \frac{(g_3 - g_2)^2 (f_3 - f_1)}{f_1 g_2 (f_3'' g_3' - g_3'' f_3')} f_1';$$

or, d'après (113),

$$g_3 - g_2 = -\frac{f_3 g_2}{f_1}, \qquad f_3 - f_1 = -\frac{f_1 g_3}{g_2},$$

de sorte que

$$(117) \qquad \frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y}} = -\frac{f_1'}{f_1^2} \frac{f_3^2 g_3}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'},$$

et, de la même manière, on obtient

$$(118) \qquad \frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y}} = -\frac{g_2'}{g_2^2} \frac{f_3 g_3^2}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'}.$$

Pour abréger, nous désignerons par les notations $(\Phi(x, y, z))_x$ et $(\Phi(x, y, z))_y$ ce qu'on obtient en éliminant de $\Phi(x, y, z)$, les variables x et y respectivement à l'aide de l'équation donnée (1).

Cela posé, les équations (117) et (118) nous apprennent que

$$(119) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y}}\right]_y = \varphi(x)\chi_1(z), \\ &\left[\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 \log M}{\partial x\, \partial y}}\right]_x = \psi(y)\chi_2(z), \end{aligned} \right.$$

où, bien entendu, φ, ψ, χ_1 et χ_2 s'obtiennent, de l'équation donnée, par des différentiations et éliminations. La comparaison de (117), (118) et (119) donne

$$(120) \qquad \left\{ \begin{aligned} &f_1' = \varphi f_1^2, & &g_2' = \psi g_2^2, \\ &\frac{f_3^2 g_3}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'} = -\chi_1, & &\frac{f_3 g_3^2}{f_3'' g_3' - g_3'' f_3'} = -\chi_2. \end{aligned} \right.$$

Remarquons, en passant, que la décomposition en facteurs la plus générale des membres gauches dans (119) s'obtient en remplaçant φ, ψ, χ_1, χ_2 par

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{c_1}\varphi, \qquad \bar{\chi}_1 = c_1\chi_1,$$

$$\bar{\psi} = \frac{1}{c_2}\psi, \qquad \bar{\chi}_2 = c_2\chi_2,$$

c_1 et c_2 étant deux constantes quelconques. Or, d'après (120), cela reviendrait à remplacer f_1, g_2, f_3, g_3 par $c_1 f_1$, $c_2 g_2$, $c_1 f_3$, $c_2 g_3$ respectivement, homographie laissant (112) invariante.

De l'équation (113) on tire

$$g_2 = -\frac{f_1 g_3}{f_3 - f_1},$$

et en substituant dans la première des équations (114)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f_3 g_3}{f'_3 g_3 - g'_3(f_3 - f_1)}\frac{f'_1}{f_1}.$$

En employant les formules

$$g_3 - g_2 = -\frac{f_3 g_2}{f_1}, \qquad f_3 - f_1 = -\frac{f_1 g_3}{g_2},$$

la dernière équation (114) donne

$$\mathrm{M} = -\frac{f_1^2 g_3}{g_2^2 f_3}\frac{g'_2}{f'_1},$$

d'où l'on tire, en employant la valeur de $\frac{\partial z}{\partial x}$ que nous venons de donner,

$$\frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x} = \left(\frac{g'_3}{g_3} - \frac{f'_3}{f_3}\right)\frac{f_3 g_3}{f'_3 g_3 - g'_3(f_3 - f_1)}\frac{f'_1}{f_1} + \frac{2f'_1}{f_1} - \frac{f''_1}{f'_1}$$

ou

$$\frac{\partial \log \mathrm{M}}{\partial x} = -\frac{f'_3 g_3 - g'_3 f_3}{f'_3 g_3 - g'_3(f_3 - f_1)}\frac{f'_1}{f_1} + \frac{2f'_1}{f_1} - \frac{f''_1}{f'_1}.$$

Or la première équation (120) donne

$$\frac{f'_1}{f_1} = \varphi f_1, \qquad \frac{f''_1}{f'_1} - \frac{2f'_1}{f_1} = \frac{\varphi'}{\varphi},$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$\left(\frac{\partial \log M}{\partial x}\right)_y = -\frac{(f'_3 g_3 - g'_3 f_3)\varphi f_1}{f'_3 g_3 - g'_3 f_3 + g'_3 f_1} - \frac{\varphi'}{\varphi},$$

ou bien

$$(121) \qquad -\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'}{\varphi} + \left(\dfrac{\partial \log M}{\partial x}\right)_y} = \frac{1}{f_1} + \frac{g'_3}{f'_3 g_3 - g'_3 f_3},$$

et l'on trouve d'une manière entièrement analogue

$$(122) \qquad \frac{\psi}{\left(\dfrac{\partial \log M}{\partial y}\right)_x - \dfrac{\psi'}{\psi}} = \frac{1}{g_2} - \frac{g'_3}{f'_3 g_3 - g'_3 f_3}.$$

Dans la formule (121), le membre droit est la somme d'une fonction de x et d'une fonction de z; (121) détermine par suite $\frac{1}{f_1}$ à une constante additive près, et la même remarque s'applique à la détermination de $\frac{1}{g_2}$ par (122). Soient f_1, g_2 et $\overline{f_1}, \overline{g_2}$ deux solutions des équations (121) (122); on aura

$$\frac{1}{\overline{f_1}} = \frac{1}{f_1} + c_1, \qquad \frac{1}{\overline{g_2}} = \frac{1}{g_2} + c_2,$$

et l'on passe, par conséquent, d'une solution à l'autre en appliquant à l'équation (112) la transformation homographique

$$\overline{f_i} = \frac{f_i}{c_1 f_i + c_2 y_i + 1}, \qquad \overline{g_i} = \frac{g_i}{c_1 f_i + c_2 g_i + 1} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

En définitive, nous avons obtenu la méthode suivante pour calculer les f_i, g_i : Effectuons, d'une manière quelconque, la décomposition (119), puis prenons pour f_1 et g_2 des solutions quelconques de (121) et (122), faisons $f_2 = g_1 = 0$ et calculons enfin f_3 et g_3 par les formules (15) et (7).

6. — Les nomogrammes coniques de Clark.

Dans ces nomogrammes deux des échelles sont supportées par la même conique, la troisième étant quelconque; en choisissant convenablement les variables indépendantes, on peut faire en sorte que les échelles des x et des y soient situées sur la même conique. Par une homographie convenable, nous pouvons transformer cette conique en la parabole

$$\eta = \xi^2,$$

et l'équation (4) prend alors la forme

$$(123) \qquad \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1^2(x) & 1 \\ f_2(y) & f_2^2(y) & 1 \\ f_3(z) & g_3(z) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nous recherchons d'abord une condition nécessaire pour que l'équation donnée (1) puisse être ramenée à la forme (123) et ferons voir ensuite que cette condition est aussi suffisante.

En partant de (123), les formules du paragraphe 1 nous donnent successivement

$$(124) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= f_1 + f_2, \\ v &= -f_1 f_2, \\ e^\theta &= f_1' f_2' (f_2 - f_1), \\ C &= \frac{f_1''}{f_1'} + \frac{2f_1'}{f_2 - f_1}, \\ D &= \frac{f_2''}{f_2'} - \frac{2f_2'}{f_2 - f_1}, \end{aligned} \right.$$

d'où nous tirons immédiatement la relation

$$(125) \qquad \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = -\frac{2f_1' f_2'}{(f_2 - f_1)^2} \neq 0.$$

En substituant $\frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial y}$ dans les équations (23), celles-ci deviennent

$$(126) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial x\, \partial y} &= C \frac{\partial C}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} &= D \frac{\partial C}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Éliminant enfin D à l'aide de (18), nous aurons

$$(127) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(MC + N), \\ \frac{\partial^2 C}{\partial x\, \partial y} &= C \frac{\partial C}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} &= (MC + N) \frac{\partial C}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations donne

$$(128)\qquad \frac{\partial C}{\partial y} = M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x},$$

la deuxième

$$(129)\qquad \frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = C\left(M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

et la troisième, en y substituant la valeur (128) de $\frac{\partial C}{\partial y}$,

$$M\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial y} + \frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y}C + \frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y}$$
$$= (MC + N)\left(M\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x}C + \frac{\partial N}{\partial x}\right),$$

ou en remplaçant $\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}$ et $\frac{\partial C}{\partial y}$ par leurs valeurs (129) et (128) et réduisant, en tenant compte de la relation (14) entre M et N,

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y}\right)C + \frac{\partial^2 N}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial N}{\partial x} = 0,$$

laquelle équation donne

$$(130)\qquad C = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{1}{M}\dfrac{\partial N}{\partial x}}{\dfrac{\partial^2 \log M}{\partial x\,\partial y}}.$$

Dans cette expression, le dénominateur ne s'annule pas identiquement, sinon nous aurions le cas du paragraphe 4, et l'échelle des z serait rectiligne.

D'après le calcul que nous venons de faire, *il faut, pour que l'équation donnée* (1) *soit réductible à la forme* (123), *que l'expression* (130) *de* C *satisfasse aux équations*

$$(131)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}(MC + N) = \dfrac{\partial D}{\partial x} \neq 0, \\ \dfrac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y} = C\dfrac{\partial C}{\partial y}. \end{cases}$$

Je dis que *cette condition est aussi suffisante.*

Pour le démontrer, il faut trouver deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(y)$ satisfaisant aux deux dernières équations (124); la méthode du paragraphe 3 conduit ici au but. Mais la formule finale étant d'une simplicité inattendue, il vaut mieux la démontrer directement.

Désignons par y_0 une constante telle que $\frac{\partial C}{\partial y} \neq 0$ pour $y = y_0$ (¹), et écrivons pour abréger

$$C_0 = C(x, y_0), \quad \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 = \left[\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\right]_{y=y_0}, \quad \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 = \left[\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}\right]_{y=y_0}, \text{ etc.}$$

La dernière équation (131) donne, en intégrant par rapport à y,

$$\frac{\partial C}{\partial x} - \left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2}(C^2 - C_0^2). \tag{132}$$

Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0}{C_0 - C}; \tag{133}$$

nous avons

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}\right)_0}{C_0 - C} - \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 \left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)_0 - \frac{\partial C}{\partial x}\right]}{(C_0 - C)^2},$$

ou, en vertu de (131) et (132),

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{C_0 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0}{C_0 - C} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 (C_0^2 - C^2)}{(C_0 - C)^2}$$

ou enfin

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0. \tag{134}$$

Cette équation donne évidemment

$$\frac{\partial^2 \varphi(x,y)}{\partial x \, \partial y} = 0.$$

(¹) Ce choix de la constante y_0 est possible; car si $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial x} = 0$, nous serions dans le cas du paragraphe 5 où les échelles des x et des y sont rectilignes, puisque l'expression (130) pour C coïncide avec l'expression (110) valable dans le cas indiqué.

Par suite, en posant

$$(135) \qquad f_1(x) - f_2(y) = \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0}{C_0 - C},$$

cette équation détermine f_1 et f_2 à la même constante additive près, et je dis que *les fonctions f_1 et f_2 ainsi déterminées peuvent figurer dans une équation* (123) *équivalente à l'équation donnée* (1). Pour le démontrer, il faut faire voir d'abord qu'elles satisfont à (124). Les équations (135), (134) et (131) donnent

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0, \qquad f_1''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = \frac{1}{2} C_0 \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0,$$

d'où

$$\frac{f_1''}{f_1'} + \frac{2f_1'}{f_2 - f_1} = C_0 + (C - C_0) = C;$$

d'autre part, (135) donne

$$f_2'(y) = -\frac{\left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)_0 \frac{\partial C}{\partial y}}{(C_0 - C)^2},$$

et comme $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = D\frac{\partial C}{\partial y}$ d'après la dernière équation (126) qui est une conséquence de (130) et (131),

$$\frac{d}{dy}\log f_2'(y) = D + \frac{2\frac{\partial C}{\partial y}}{C_0 - C},$$

de sorte que

$$\frac{f_2''}{f_2'} - \frac{2f_2'}{f_2 - f_1} = \left(D + \frac{2\frac{\partial C}{\partial y}}{C_0 - C}\right) - \frac{2\frac{\partial C}{\partial y}}{C_0 - C} = D.$$

Les équations (124) sont donc satisfaites et, par suite, les équations (8), (10), (12), (18), (21), (22) et (23). Les formules (9) donnent

$$g_1(x) = f_1'^2(x),$$
$$g_2(y) = f_2'^2(y),$$

et la réduction de l'équation donnée à la forme (123) s'achève en déterminant $f_3(z)$ et $g_3(z)$ par les formules (15) et (7).