JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. PLATRIER

Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 9 (1913), p. 233-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1913_6_9__233_0>

Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires;

PAR CH. PLATRIER.

INTRODUCTION.

L'équation intégrale linéaire

$$a(x)\varphi(x) - \lambda \int_{\alpha}^{\beta} b(x, s)\varphi(s)\,ds = c(x), \tag{1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue; $a(x)$, $b(x, s)$, $c(x)$ des fonctions bornées et intégrables dans le domaine $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\alpha \leqq s \leqq \beta$; α, β, λ des constantes, se rencontre fréquemment, en Mécanique et en Physique mathématique, sous une forme plus ou moins explicite.

C'est Abel qui, pour la première fois, en 1826, posa et résolut une équation particulière de ce type. Mais trois quarts de siècle devaient s'écouler avant que le problème en question fût nettement posé.

En 1894, M. J. Le Roux (¹) proposait de trouver une fonction $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation

$$\int_{\alpha}^{x} b(x, s)\varphi(s)\,ds = c(x) \tag{2}$$

et résolvait cette question par la méthode des approximations successives.

(¹) J. LE ROUX, Thèse : *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, p. 19.

Le problème de M. Le Roux était repris par M. V. Volterra [1] en 1896. L'équation (2) est d'ailleurs devenue classique sous le nom d'*équation de Volterra*.

C'est seulement en 1903 que M. Ivar Fredholm [2], dans son remarquable Mémoire *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, étudia l'équation (1) pour $a(x) = 1$, équation à laquelle il fut conduit par l'étude du problème de Dirichlet, lorsqu'on cherche à représenter le potentiel inconnu par le potentiel de double couche.

Les résultats essentiels de M. Fredholm eurent un universel retentissement. M. Picard en a fait cet incomparable éloge : « Ils avaient la beauté des choses simples et définitives [3]. »

M. Fredholm a induit, de la solution d'un système d'équations linéaires en nombre fini, la solution du problème transcendant traduit par l'équation (1). Il a ensuite, par une méthode synthétique, vérifié l'exactitude de son induction dans le cas des équations de seconde espèce, c'est-à-dire quand $a(x)$ peut être supposé égal à l'unité.

M. Fredholm met ainsi en évidence le rôle que joue dans la résolution de (1) une certaine fonction entière $D(\lambda)$, qu'il appelle *fonction déterminante* par analogie avec le déterminant des coefficients d'un système d'équations linéaires en nombre fini. Il définit ensuite les mineurs de la déterminante et associe à la fonction dite *noyau* $b(x, s)$, une fonction $b(x, s, \lambda)$, méromorphe en λ, dite *résolvante*, dont la connaissance permet de résoudre l'équation (1) quand $a(x) = 1$.

Aussitôt après l'apparition du Mémoire de M. Fredholm, un grand nombre de géomètres apportèrent leur contribution à l'étude de l'équation (1). Les travaux sur ce sujet se sont succédé depuis sans interruption.

Nous citerons seulement ceux dont nous utiliserons les résultats dans la suite :

M. D. Hilbert, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linea-*

---

(1) V. Volterra, *Sulla inverzione degli integrali definiti* (*Atti della reale Accademia delle Scienze di Torino*, 8 mars, 26 avril 1896, p. 311, 400, 557, 693).

(2) I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles* (*Acta mathematica*, t. XXVII, 1903).

(3) T. Lalesco, *Introduction à la théorie des intégrales* (Préface de M. E. Picard, 1912).

ren Integralgleichungen (*Göttings Nachrichten*, 1, 2, 3, 4, 5, 6 Mitteilung), a montré la légitimité de la hardie induction de Fredholm, étudié spécialement le noyau $b(x, s)$, symétrique en x et s, et mis en évidence l'analogie entre l'étude des noyaux et l'étude des formes bilinéaires et quadratiques.

MM. E. Goursat, *Recherches sur les équations intégrales linéaires* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1908); Bryon Heywood, *Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm* (Thèse), et T. Lalesco, *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXIX, 1911, p. 95), ont fait l'étude détaillée des noyaux et des résolvantes. M. Goursat, notamment, a mis en évidence la notion de fonction principale et les propriétés caractéristiques de ces fonctions.

M. E. Picard, *Sur les équations intégrales de troisième espèce* (*Annales de l'École Normale*, 1911), a établi d'importants théorèmes généraux concernant les équations intégrales de troisième espèce, c'est-à-dire celles pour lesquelles $a(x)$ est nul pour des valeurs particulières de x comprises entre α et β.

H. Poincaré, dans ses *Remarques diverses sur l'équation de Fredholm* (*Acta mathematica*, t. XXXIII, 1909), s'est occupé en particulier de mettre en évidence quelles différences il y a, en ce qui concerne les équations intégrales linéaires de première espèce, entre le cas où les limites α, β sont infinies et celui où elles sont finies; à ce propos, il a étudié (p. 81) certaines équations intégrales linéaires de seconde espèce à limites infinies, dont M. E. Picard, *Sur une équation fonctionnelle du type de Fredholm* (*Comptes rendus*, 13 octobre 1910), a signalé d'importantes particularités.

Le présent travail comprend deux Parties.

Dans la première Partie, nous nous sommes proposé de compléter l'étude de la déterminante et de la résolvante d'un noyau donné par l'étude des propriétés des mineurs de la déterminante. Nous avons exprimé algébriquement un mineur d'ordre quelconque en fonction de la déterminante et de la résolvante et mis en évidence le rôle des diviseurs élémentaires de la déterminante; l'analogie entre l'étude des formes bilinéaires et l'étude des noyaux trouve une nouvelle confirmation dans l'interprétation des exposants de ces diviseurs élémentaires.

La seconde Partie a pour objet l'étude des systèmes d'équations intégrales linéaires

$$(3)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left[a_{\mu\nu}(x)\,\varphi_\nu(x)-\lambda\int_\alpha^\beta b_{\mu\nu}(x,s)\,\varphi_\nu(s)\,ds\right]=c_\mu(x)\qquad(\mu=1,2,\ldots,m),$$

où $\varphi_\nu(x)$ sont des fonctions inconnues; $a_{\mu\nu}(x)$, $b_{\mu\nu}(x,s)$, $c_\mu(x)$ des fonctions bornées et intégrables dans le domaine $\alpha\leqq x\leqq\beta$, $\alpha\leqq s\leqq\beta$; α, β, λ des constantes et m un entier positif.

Nous étudierons spécialement les systèmes de deuxième et de troisième espèce, c'est-à-dire ceux pour lesquels le déterminant

$$(4)\qquad A(x)=\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1m}(x)\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ a_{m1}(x) & \ldots & a_{mm}(x)\end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul dans l'intervalle $\alpha\leqq x\leqq\beta$.

Dans le cas où $A(x)$ ne s'annule pas entre α et β et peut être supposé égal à l'unité, le système (3) est dit de seconde espèce. M. Fredholm a montré, dans son Mémoire fondamental, qu'on peut le ramener à une équation unique. Cette remarque, jointe à l'expression algébrique des mineurs en fonction de la déterminante et de la résolvante, nous permettra de discuter complètement l'existence des solutions du système de seconde espèce et de donner ces solutions le cas échéant.

La résolution des systèmes de seconde espèce sans second membre trouve une application naturelle dans la recherche des fonctions principales d'un noyau, telles qu'elles ont été définies par M. Goursat. Dans le quatrième Chapitre, nous donnerons l'expression générale de ces fonctions.

La méthode suivie par Fredholm pour réduire un système de seconde espèce à une équation unique s'applique aux systèmes de troisième espèce et conduit à faire, corrélativement à l'étude de ces systèmes, celle de l'équation intégrale linéaire de troisième espèce du type (1). Supposant que les limites α, β comprennent le point $x=a$, nous nous occuperons spécialement du cas où $a(x)=(x-a)^p$, en nous plaçant au point de vue de M. E. Picard (1). Nous rattacherons

(1) E. Picard, *Annales de l'École Normale*, 1911. Mémoire déjà cité.

à ce cas l'étude, dans le domaine complexe, d'une classe particulière d'équations intégrales de deuxième espèce du type

$$(z-a)^p[\varphi(z)-c(z)]=\lambda\int_\Lambda b(z,t)\varphi(t)\,dt,$$

où p est entier et Λ un contour complexe ne passant pas par le point a; cette classe a déjà été considérée par M. T. Lalesco (¹), quand $p=1$.

Nous terminerons cette seconde Partie par deux Notes. Dans une première, nous appliquerons les résultats précédents à certaines équations intégro-différentielles, notamment à une classe étudiée par M. Boutnisky (²). Dans une seconde, nous achèverons succinctement la discussion du système (3), en résumant les principales particularités qui se présentent quand $\Lambda(x)$ est identiquement nul.

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

FONCTION DÉTERMINANTE ET FONCTION RÉSOLVANTE D'UN NOYAU DONNÉ. LEURS PRINCIPALES PROPRIÉTÉS.

Afin de ne pas renvoyer à des Ouvrages écrits avec des notations variées et à des points de vue différents, nous résumerons tout d'abord les résultats antérieurs essentiels concernant la fonction déterminante et la fonction résolvante d'un noyau $H(x,y)$.

1. Nous supposerons que l'on a choisi les limites d'intégration α et β égales respectivement à 0 et 1, et nous désignerons par $D(\lambda)$ et

(¹) T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, 1912. Ouvrage déjà cité.

(²) Boutnisky, *Sur une classe d'équations intégrales* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1908).

$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ les séries entières en λ,

$$(5) \qquad D(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_{\varpi}\, H\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{matrix}\right),$$

$$(6) \quad D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, x_q \end{matrix} \middle| \lambda\right)$$
$$= \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_{\varpi}\, H\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q; s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ y_1, y_2, \ldots, y_q; s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{matrix}\right),$$

$H\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{matrix}\right)$ représentant le déterminant

$$\begin{vmatrix} H(s_1, t_1) & H(s_1, t_2) & \ldots & H(s_1, t_n) \\ H(s_2, t_2) & H(s_2, t_2) & \ldots & H(s_2, t_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ H(s_n, t_1) & H(s_n, t_2) & \ldots & H(s_n, t_n) \end{vmatrix}.$$

$D(\lambda)$ est la *fonction déterminante* relative au noyau $H(x, y)$ supposé fini et intégrable en x et y dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ est le *mineur d'ordre* q de cette fonction déterminante.

D'une part, Fredholm a montré que la fonction déterminante $D(\lambda)$ et son mineur du premier ordre $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ satisfont aux relations caractéristiques

$$(7) \quad \begin{cases} D(0) = 1, & (7') \\ -\dfrac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \displaystyle\int_0^1 D\left(\begin{matrix} s \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds, & (7'') \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) - H(x, y) D(\lambda) = \lambda \displaystyle\int_0^1 H(x, s)\, D\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds, & (8') \\ \qquad = \lambda \displaystyle\int_0^1 H(s, y)\, D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds. & (8'') \end{cases}$$

D'autre part, Fredholm a établi :

1° Que si $D(\lambda) \neq 0$, ce que nous exprimerons en disant que λ n'est pas un nombre fondamental, l'équation intégrale linéaire

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \tag{9}$$

où $f(x)$ est donnée, finie et intégrable dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$, λ un paramètre donné et $\varphi(x)$ inconnue, admet une solution unique

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x, s, \lambda) f(s)\, ds. \tag{10}$$

$\mathcal{H}(x, y, \lambda)$ étant la fraction

$$\mathcal{H}(x, y, \lambda) = \frac{\mathrm{D}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\!\!\left| \lambda \right)}{\mathrm{D}(\lambda)}. \tag{11}$$

Il résulte des relations (8) que la fonction $\mathcal{H}(x, y, \lambda)$, dite *résolvante* du noyau $\mathrm{H}(x, y)$, satisfait aux deux relations

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} -\mathrm{H}(x, y) + \mathcal{H}(x, y, \lambda) &= \lambda \int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \mathcal{H}(s, y, \lambda)\, ds, && (12') \\ &= \lambda \int_0^1 \mathrm{H}(s, y)\, \mathcal{H}(x, s, \lambda)\, ds. && (12'') \end{aligned} \right.$$

2° Que si, pour $\lambda = c$, $\mathrm{D}(\lambda)$ est nul ainsi que tous ses mineurs d'ordre $q - 1$, son mineur d'ordre q étant différent de zéro, ce que nous exprimerons en disant que c est *nombre fondamental de genre* q, les équations intégrales linéaires homogènes

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0, \tag{13}$$

$$\psi(y) - \lambda \int_0^1 \mathrm{H}(s, y)\, \psi(s)\, ds = 0, \tag{14}$$

dites *associées*, admettent respectivement les q solutions indépendantes

$$(15)\quad \varphi(x) = \Phi_\theta(x) = \frac{\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{\theta-1}, x, x_{\theta+1}, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_q \end{matrix}\,\middle|\, c\right)}{\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_q \end{matrix}\,\middle|\, c\right)} \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, q)$$

et

$$(16)\quad \psi(y) = \Psi_\theta(y) = \frac{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_{\theta-1}, y, y_{\theta+1}, \ldots, y_q \end{pmatrix}\!\Big| c}{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_q \end{pmatrix}\!\Big| c} \quad (\theta = 1, 2, \ldots, q).$$

Les q solutions $\Phi_\theta(x)$ sont linéairement indépendantes, et il n'y a pas d'autre solution indépendante des q précédentes pour l'équation (13) et la valeur c de λ. Ces solutions sont appelées *solutions fondamentales* relatives au point c.

3° Que, pour $\lambda = c$, nombre fondamental de genre q, l'équation (9) n'a pas, en général, de solution; les conditions nécessaires et suffisantes pour que des solutions existent sont les q conditions

$$(17)\qquad \int_0^1 \Psi_\theta(s) f(s)\, ds = 0 \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, q).$$

Ces conditions supposées remplies, toutes les solutions de l'équation (9) pour $\lambda = c$ sont définies par l'égalité

$$(18)\qquad \varphi(x) = f(x) + c\int_0^1 K(x, s) f(s)\, ds + \sum_{\theta=1}^{\theta=q} a_\theta \Phi_\theta(x),$$

où $K(x, y)$ désigne la fonction

$$(19)\qquad K(x, y) = \frac{D\begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y, y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\!\Big| c}{D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots, y_q \end{pmatrix}\!\Big| c}$$

et où les a_θ sont q constantes arbitraires.

2. L'étude des noyaux $H(x, y)$ et de leurs résolvantes a été faite par MM. Goursat [1] et Bryon Heywood [1], et complétée par M. Lalesco [1]. Rappelons les principaux résultats de cette étude.

Deux noyaux, $H(x, y)$ et $K(x, y)$, sont dits *orthogonaux* s'ils satisfont aux deux conditions

$$(20)\qquad \int_0^1 H(x, s)\, K(s, y)\, ds = \int_0^1 H(s, y)\, K(x, s)\, ds = 0.$$

---

(1) Mémoires déjà cités.

Première proposition. — Si un noyau $H(x,y)$ donné est la somme de plusieurs noyaux composants orthogonaux deux à deux : 1° la fonction déterminante du noyau $H(x,y)$ est le produit des fonctions déterminantes des noyaux composants; 2° la fonction résolvante du noyau $H(x,y)$ est la somme des fonctions résolvantes des noyaux composants.

Deuxième proposition. — Désignons par $h_c(x,y,\lambda)$ la partie de la fonction méromorphe $\mathcal{H}(x,y,\lambda)$, résolvante du noyau $H(x,y)$, qui devient infinie pour $\lambda = c$, et soient c_1 et c_2 deux nombres fondamentaux du noyau $H(x,y)$. On peut poser

$$\mathcal{H}(x,y,\lambda) = h_{c_1}(x,y,\lambda) + h_{c_2}(x,y,\lambda) + h(x,y,\lambda).$$

Les noyaux $h_{c_1}(x,y,0)$, $h_{c_2}(x,y,0)$, $h(x,y,0)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux et admettent comme résolvantes respectives $h_{c_1}(x,y,\lambda)$, $h_{c_2}(x,y,\lambda)$, $h(x,y,\lambda)$.

Les deux propositions ci-dessus montrent qu'on peut étudier séparément la partie du noyau $h_c(x,y,0)$ et la partie de la résolvante $h_c(x,y,\lambda)$, relatives au nombre fondamental c.

Soit c un nombre fondamental de genre q annulant p fois $D(\lambda)$. $h_c(x,y,\lambda)$ peut être considérée comme la somme de q fonctions

$$(21)\quad h_c^{(\theta)}(x,y,\lambda) = \frac{\varphi_{n_\theta}^{(\theta)}(x,y)}{(c-\lambda)^{n_\theta}} + \frac{\varphi_{n_\theta-1}^{(\theta)}(x,y)}{(c-\lambda)^{n_\theta-1}} + \ldots + \frac{\varphi_1^{(\theta)}(x,y)}{c-\lambda} \qquad (\theta = 1, 2, \ldots, q),$$

les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n_\theta}$ étant définies à l'aide des constantes arbitraires $a_i^{(\theta)}$ par les relations

$$(22)\quad \begin{cases} \varphi_1^{(\theta)}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta} \alpha_i^{(\theta)}(x)\,\beta_i^{(\theta)}(y), \\ \varphi_2^{(\theta)}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta-1} a_i^{(\theta)}\alpha_i^{(\theta)}(x)\,\beta_{i+1}^{(\theta)}(y), \\ \varphi_3^{(\theta)}(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_\theta-2} a_i^{(\theta)}a_{i+1}^{(\theta)}\alpha_i^{(\theta)}(x)\,\beta_{i+2}^{(\theta)}(y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n_\theta}^{(\theta)}(x,y) = a_1^{(\theta)}a_2^{(\theta)}\ldots a_{n_\theta-1}^{(\theta)}\alpha_1^{(\theta)}(x)\,\beta_{n_\theta}^{(\theta)}(y). \end{cases}$$

$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p$ et les $2p$ fonctions $\alpha_i^{(0)}(x)$ et $\beta_i^{(0)}(y)$ qui existent, quel que soit le choix des constantes $a_i^{(0)}$, forment un système de fonctions biorthogonales.

$h_c^{(0)}(x, y, 0)$ est dit *noyau canonique* d'ordre n_0, $h_c^{(0)}(x, y, \lambda)$ *résolvante canonique* d'ordre n_0 correspondant à ce noyau.

De plus, la fonction déterminante du noyau $h_c^{(0)}(x, y, 0)$ est $\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_0}$.

Dans la première Partie de la présente étude, nous définirons les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_0$.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LES MINEURS DE LA FONCTION DÉTERMINANTE DE FREDHOLM.

CHAPITRE I.

EXPRESSION ALGÉBRIQUE DES MINEURS DE LA DÉTERMINANTE EN FONCTION DE LA DÉTERMINANTE ET DE LA RÉSOLVANTE.

3. Nous établirons tout d'abord une formule importante de la théorie des déterminants, formule qui sera une généralisation de la formule bien connue

$$\text{(23)} \qquad P \frac{\partial^2 P}{\partial a_{r_1 s_1} \partial a_{r_2 s_2}} = \frac{\partial P}{\partial a_{r_1 s_1}} \frac{\partial P}{\partial a_{r_2 s_2}} - \frac{\partial P}{\partial a_{r_1 s_2}} \frac{\partial P}{\partial a_{r_2 s_1}},$$

où P désigne le déterminant

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et r_1, r_2; s_1, s_2, deux combinaisons simples 2 à 2 des nombres 1, 2, ..., n.

La généralisation que nous avons en vue est la suivante : désignons par $P_{r_1, r_2, \ldots, r_q}^{s_1, s_2, \ldots, s_q}$ le déterminant obtenu en supprimant dans P les lignes r_1,

$r_2, \dots, r_q$ et les colonnes $s_1, s_2, \dots, s_q$; nous nous proposons d'établir la formule

$$(24)\quad \mathrm{P}\big[\mathrm{P}^{s_1, s_2, \dots, s_q}_{r_1, r_2, \dots, r_q}\big]^{q-1} = \begin{vmatrix} \mathrm{P}^{s_q, s_{q-1}, \dots, s_2}_{r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} & \mathrm{P}^{s_1, s_q, s_{q-1}, \dots, s_3}_{r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1}_{r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} \\ \mathrm{P}^{s_q, s_{q-1}, \dots, s_2}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \dots, r_3} & \mathrm{P}^{s_1, s_q, s_{q-1}, \dots, s_3}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \dots, r_3} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \dots, r_3} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \mathrm{P}^{s_q, s_{q-1}, \dots, s_2}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1} & \mathrm{P}^{s_1, s_q, s_{q-1}, \dots, s_3}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1} \end{vmatrix},$$

$r_1, r_2, \dots, r_q$; $s_1, s_2, \dots, s_q$ désignant deux combinaisons simples q à q des nombres $1, 2, \dots, n$.

La formule (23) peut s'écrire

$$(25)\qquad \mathrm{P} \times \mathrm{P}^{r_1, r_2}_{s_1, s_2} = \begin{vmatrix} \mathrm{P}^{s_2}_{r_2} & \mathrm{P}^{s_1}_{r_2} \\ \mathrm{P}^{s_2}_{r_1} & \mathrm{P}^{s_1}_{r_1} \end{vmatrix}$$

et n'est autre que la formule (24) dans le cas de $q = 1$.

Supposons donc la formule (24) vraie jusqu'à une certaine valeur de q et démontrons qu'elle est encore vraie pour la valeur $q + 1$.

Pour cela, prenons la dérivée des deux membres de (24) par rapport à $a_{r_{q+1} s_{q+1}}$, en supposant r_{q+1} différent des nombres $r_1, r_2, \dots, r_q$ et s_{q+1} différent des nombres $s_1, s_2, \dots, s_q$.

Nous obtenons, en multipliant les deux membres par $(-1)^{r_{q+1}+s_{q+1}}$,

$$(26)\quad \mathrm{P}(q-1)\big[\mathrm{P}^{s_1, s_2, \dots, s_q}_{r_1, r_2, \dots, r_q}\big]^{q-2}\mathrm{P}^{s_1, s_2, \dots, s_{q+1}}_{r_1, r_2, \dots, r_{q+1}} + \mathrm{P}^{s_{q+1}}_{r_{q+1}}\big[\mathrm{P}^{s_1, s_2, \dots, s_q}_{r_1, r_2, \dots, r_q}\big]^{q-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=q} \begin{vmatrix} \mathrm{P}^{s_q, s_{q-1}, \dots, s_2}_{r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} & \dots & \mathrm{P}^{s_{i-2}, s_{i-3}, \dots, s_1, s_q, \dots, s_i}_{r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} & \mathrm{P}^{s_{i-1}, s_{i-2}, \dots, s_1, s_{q+1}, s_q, \dots, s_{i+1}}_{r_{q+1}, r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} & \mathrm{P}^{s_i, s_{i-1}, \dots, s_1, s_q, \dots, s_{i+2}}_{r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1}_{r_q, r_{q-1}, \dots, r_2} \\ \mathrm{P}^{s_q, s_{q-1}, \dots, s_2}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \dots, r_3} & \dots & \mathrm{P}^{s_{i-2}, s_{i-3}, \dots, s_1, s_q, \dots, s_i}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \dots, r_3} & \mathrm{P}^{s_{i-1}, s_{i-2}, \dots, s_1, s_{q+1}, s_q, \dots, s_{i+1}}_{r_1, r_{q+1}, r_q, \dots, r_3} & \mathrm{P}^{s_i, s_{i-1}, \dots, s_1, s_q, \dots, s_{i+2}}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \dots, r_3} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1}_{r_1, r_q, r_{q-1}, \dots, r_3} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \mathrm{P}^{s_q, s_{q-1}, \dots, s_2}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1} & \dots & \mathrm{P}^{s_{i-2}, s_{i-3}, \dots, s_1, s_q, \dots, s_i}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1} & \mathrm{P}^{s_{i-1}, s_{i-2}, \dots, s_1, s_{q+1}, s_q, \dots, s_{i+1}}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1, r_{q+1}} & \mathrm{P}^{s_i, s_{i-1}, \dots, s_1, s_q, \dots, s_{i+2}}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1} \end{vmatrix}.$$

D'une part, remarquons qu'en vertu de (24) on a

$$\mathrm{P}^{s_{q+1}}_{r_{q+1}}\big[\mathrm{P}^{s_1, s_2, \dots, s_{q+1}}_{r_1, r_2, \dots, r_{q+1}}\big]^{q-1} = \begin{vmatrix} \mathrm{P}^{s_{q+1}, s_q, \dots, s_2}_{r_{q+1}, r_q, \dots, r_2} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1, s_{q+1}}_{r_{q+1}, r_q, \dots, r_2} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \mathrm{P}^{s_{q+1}, s_q, \dots, s_2}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1, r_{q+1}} & \dots & \mathrm{P}^{s_{q-1}, s_{q-2}, \dots, s_1, s_{q+1}}_{r_{q-1}, r_{q-2}, \dots, r_1, r_{q+1}} \end{vmatrix}.$$

D'autre part, multiplions le terme général du second membre de (26) par $\big[\mathrm{P}^{r_1, r_2, \dots, r_{q+1}}_{s_1, s_2, \dots, s_{q+1}}\big]^{q-1}$. Pour cela, multiplions les $(i-1)$ premières colonnes et les $q-j$ dernières par ce déterminant à la première puissance en tenant compte de la formule (25).

Soit j le rang d'une des colonnes considérées, elle peut être remplacée par la colonne suivante :

$$
(27)\quad\left\{
\begin{array}{l}
P^{s_{j-1},s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_2}\,P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_q,\ldots\ldots,r_2,r_1}-P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_q,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_2,r_1}\,P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2}, \\
P^{s_{j-1},s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_3}\,P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_1,r_q,\ldots\ldots,r_2}-P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_1,r_q,\ldots\ldots\ldots\ldots,r_2}\,P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_1,r_{q+1},\ldots\ldots,r_3}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
P^{s_{j-1},s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots\ldots\ldots,r_1,r_{q+1}}\,P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_q}-P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots\ldots,r_1,r_q}\,P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}.
\end{array}\right.
$$

Le déterminant du terme général du second membre de (26) ainsi multiplié peut alors être remplacé par 2^{q-1} déterminants partiels et tous ceux de ces déterminants partiels qui contiennent deux colonnes provenant des termes soustractifs des sommes (27) sont nuls comme ayant deux colonnes proportionnelles.

Le déterminant du terme général du second membre de (26) multiplié par $[P^{s_1,s_2,\ldots,s_{q+1}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{q+1}}]^{q-1}$ est donc finalement égal à la somme des q termes suivants :

1° Le produit

$$
[P^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}]^{q-1}
\begin{vmatrix}
P^{s_{q+1},s_q,\ldots,s_2}_{r_{q+1},r_q,\ldots,r_2} & \ldots & P^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P^{s_{q+1},s_q,\ldots,s_2}_{r_{q-1},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & P^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}
\end{vmatrix}.
$$

2° Les $(q-1)$ produits

$$
-P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},s_q,\ldots,s_{j+1}}_{r_q,r_{q-1},\ldots\ldots\ldots\ldots,r_1}\,[P^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}]^{q-2}\,A_j
$$

obtenus en faisant varier j de 1 à $i-1$ et de $i+1$ à q et où A_j représente le déterminant

$$
\begin{vmatrix}
P^{s_{q+1},s_q,\ldots\ldots,s_2}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & \ldots & P^{s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_j}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots\ldots,r_2} & P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & P^{s_j,\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+2}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & \ldots & P^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} \\
P^{s_{q+1},s_q,\ldots\ldots,s_2}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} & \ldots & P^{s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_j}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_3} & P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} & P^{s_j,\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+2}}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} & \ldots & P^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_1,r_{q+1},r_q,\ldots,r_3} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
P^{s_{q+1},s_q,\ldots\ldots,s_2}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & P^{s_{j-2},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_q,\ldots,s_j}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & P^{s_j,\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+2}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & P^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}
\end{vmatrix}.
$$

En vertu des remarques ci-dessus, la formule (26) peut s'écrire, après multiplication des deux membres par $\dfrac{[P^{s_1,s_2,\ldots,s_{q+1}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{q+1}}]^{q-1}}{(q-1)[P^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}]^{q-2}}$,

$$
P[P^{s_1,s_2,\ldots,s_{q+1}}_{r_1,r_2,\ldots,r_{q+1}}]^{q+1}=P^{s_1,s_2,\ldots,s_q}_{r_1,r_2,\ldots,r_q}
\begin{vmatrix}
P^{s_{q+1},s_q,\ldots\ldots,s_2}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} & \ldots & P^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q+1},r_q,\ldots\ldots,r_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P^{s_{q+1},s_q,\ldots\ldots,s_2}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}} & \ldots & P^{s_{q-1},s_{q-2},\ldots,s_1,s_{q+1}}_{r_{q-1},r_{q-2},\ldots,r_1,r_{q+1}}
\end{vmatrix}
$$

$$
-\sum_{j=1}^{j=q}[P^{s_{j-1},\ldots,s_1,s_{q+1},\ldots,s_{j+1}}_{r_q,r_{q-1},\ldots\ldots\ldots,r_1}]\,A_j.
$$

Cette égalité n'est autre que l'égalité déduite de (24) en remplaçant q par $q+1$ et développant le déterminant du second membre par rapport à sa dernière ligne.

L'égalité (24) est donc générale. C. Q. F. D.

4. Nous nous proposons d'appliquer la formule précédente à la fonction déterminante $D(\lambda)$ d'un noyau $H(x, y)$ et à ses mineurs.

Auparavant, nous reprendrons la démonstration d'un théorème dû à Hilbert [1].

Supposons $|H(xy)|$ moindre que M et considérons les déterminants :

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{2}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{2}{n}\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{3}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{2}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{3}{n}\right) & \cdots & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{n}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda\right)$$

$$= \begin{vmatrix} H(x_1,y_1) & H(x_1,y_2) & \cdots & H(x_1,y_q) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_1,\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_1,\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_1,\frac{n}{n}\right) \\ H(x_2,y_1) & H(x_2,y_2) & \cdots & H(x_2,y_q) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_2,\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_2,\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_2,\frac{n}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H(x_q,y_1) & H(x_q,y_2) & \cdots & H(x_q,y_q) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_q,\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_q,\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(x_q,\frac{n}{n}\right) \\ H\left(\frac{1}{n},y_1\right) & H\left(\frac{1}{n},y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{1}{n},y_q\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{1}{n},\frac{n}{n}\right) \\ H\left(\frac{2}{n},y_1\right) & H\left(\frac{2}{n},y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{2}{n},y_q\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{1}{n}\right) & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{2}{n}\right) & \cdots & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{2}{n},\frac{n}{n}\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ H\left(\frac{n}{n},y_1\right) & H\left(\frac{n}{n},y_2\right) & \cdots & H\left(\frac{n}{n},y_q\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{1}{n}\right) & \frac{-\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{2}{n}\right) & \cdots & 1-\frac{\lambda}{n}H\left(\frac{n}{n},\frac{n}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

---

[1] HILBERT, *Mémoire* déjà cité (Erste Mitteilung).

THÉORÈME. — *Lorsque n entier croît indéfiniment $\Delta_n(\lambda)$ et*

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

tendent respectivement vers $D(\lambda)$ *et*

$$D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right).$$

Développons en effet les déterminants $\Delta_n(\lambda)$ et $\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ par rapport aux puissances croissantes de λ; on obtient

$$\Delta_n(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=n}\left(\frac{-\lambda}{n}\right)^{\varpi}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\varpi}^{1 \text{ à } n}\frac{1}{\varpi!}\begin{vmatrix} H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

$$= \sum_{\varpi=0}^{\varpi=n}\left(\frac{-\lambda}{n}\right)^{\varpi}\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\varpi}^{1 \text{ à } n}\frac{1}{\varpi!}\begin{vmatrix} H(x_1, y_1) & H(x_1, y_2) & \ldots & H(x_1, y_q) & H\left(x_1, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(x_1, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(x_1, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H(x_2, y_1) & H(x_2, y_2) & \ldots & H(x_2, y_q) & H\left(x_2, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(x_2, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(x_2, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H(x_q, y_1) & H(x_q, y_2) & \ldots & H(x_q, y_q) & H\left(x_q, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(x_q, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(x_q, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H\left(\frac{i_1}{n}, y_1\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, y_2\right) & \ldots & H\left(\frac{i_1}{n}, y_q\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ H\left(\frac{i_2}{n}, y_1\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, y_2\right) & \ldots & H\left(\frac{i_2}{n}, y_q\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(\frac{i_2}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H\left(\frac{i_\varpi}{n}, y_1\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, y_2\right) & \ldots & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, y_q\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_1}{n}\right) & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_2}{n}\right) & \ldots & H\left(\frac{i_\varpi}{n}, \frac{i_\varpi}{n}\right) \end{vmatrix}.$$

Nous désignerons par δ_n^{ϖ} le coefficient de $(-\lambda)^{\varpi}$ dans $\Delta_n(\lambda)$ et par $\delta_n^{\varpi}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}$ le coefficient de $(-\lambda)^{\varpi}$ dans $\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$.

D'autre part, nous désignerons par d^{ϖ} le coefficient de $(-\lambda)^{\varpi}$ dans $D(\lambda)$ et par $d^{\varpi}\begin{pmatrix} x_1 & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{pmatrix}$ le coefficient de $(-\lambda)^{\varpi}$ dans $D\left(\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right)$.

Démontrons que

$$D\left(\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \lim_{n=\infty} \Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right).$$

On démontrerait la formule

$$D(\lambda) = \lim_{n=\infty} \Delta_n(\lambda)$$

de la même manière en faisant $q = 0$ dans les raisonnements qui vont suivre.

Remarquons que, en vertu du théorème de M. Hadamard sur la valeur absolue d'un déterminant [1], $(-\lambda)^{\varpi}\delta_n^{\varpi}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{pmatrix}$ et $(-\lambda)^{\varpi} d^{\varpi}\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{pmatrix}$ sont moindres en valeur absolue que

$$u_{\varpi} = \frac{|\lambda|^{\varpi}\left[\sqrt{\varpi+q}\,M\right]^{\varpi+q}}{\varpi!},$$

terme général d'une série à termes positifs convergente puisque

$$\lim_{\varpi=\infty} \frac{u_{\varpi+1}}{u_{\varpi}} = \lim_{\varpi=\infty} |\lambda| M \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varpi+q}\right)^{\varpi+q}} \frac{\sqrt{\varpi+q+1}}{\varpi+1} = 0.$$

On peut donc déterminer ϖ suffisamment grand pour que, quel que soit n, on ait simultanément les deux inégalités

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \sum_{i=0}^{i=\varpi}(-\lambda)^i \delta_n^i\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{pmatrix}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \\ &\left|D\left(\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right) - \sum_{i=0}^{i=\varpi}(-\lambda)^i d^i\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_q \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q \end{pmatrix}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}\right.$$

---

[1] La valeur absolue d'un déterminant d'ordre ϖ dont tous les éléments sont $< M$ en valeur absolue est inférieure à $M^{\varpi}\omega^{\frac{\varpi}{2}}$ (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1893, p. 240).

ε étant une quantité positive aussi petite que l'on veut donnée à l'avance et λ ayant une valeur donnée.

D'autre part, il résulte de la définition même de l'intégrale définie qu'on pourra déterminer n suffisamment grand pour que les $\varpi + 1$ inégalités

$$\left|(-\lambda)^i \delta_n^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix} - (-\lambda)^i d_n^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3\varpi+1}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, \varpi)$$

soient vérifiées pour une valeur de λ donnée. Ces dernières inégalités entraînent la suivante :

$$(29)\quad \left|\sum_{i=0}^{i=\varpi}(-\lambda)^i \delta_n^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix} - \sum_{i=0}^{i=\varpi}(-\lambda)^i d^i\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Des inégalités (28) et (29) résulte l'inégalité

$$\left|D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) - \Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)\right| < \varepsilon$$

pour n suffisamment grand; d'où l'égalité

$$\lim_{n=\infty} \Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) = D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right).$$

C. Q. F. D.

5. Appliquons maintenant la formule (24) au déterminant

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$

en prenant pour $r_1, r_2, \ldots, r_q$ et $s_1, s_2, \ldots, s_q$ la combinaison $1, 2, \ldots, q$, on obtient

$$\Delta_n\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)[\Delta_n(\lambda)]^{q+1} = \begin{vmatrix} \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_q \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) \\ \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_1 \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_q \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_q \\ y_1 \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_q \\ y_2 \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & \Delta_n\left(\begin{smallmatrix} x_q \\ y_q \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) \end{vmatrix}.$$

Faisons maintenant croître n indéfiniment et appliquons le théorème d'Hilbert, nous obtenons la formule que nous avions en vue

$$(30)\qquad D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\!\lambda\Big)[D(\lambda)]^{q-1}$$
$$= \begin{vmatrix} D\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\!\lambda\Big) & D\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\!\lambda\Big) & \ldots & D\begin{pmatrix} x_1 \\ y_q \end{pmatrix}\!\lambda\Big) \\ D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_1 \end{pmatrix}\!\lambda\Big) & D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\!\lambda\Big) & \ldots & D\begin{pmatrix} x_2 \\ y_q \end{pmatrix}\!\lambda\Big) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ D\begin{pmatrix} x_q \\ y_1 \end{pmatrix}\!\lambda\Big) & D\begin{pmatrix} x_q \\ y_2 \end{pmatrix}\!\lambda\Big) & \ldots & D\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \end{pmatrix}\!\lambda\Big) \end{vmatrix}$$

et dont nous nous proposons de faire un important usage.

Écrite sous la forme

$$(31)\qquad D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) = D(\lambda)\begin{vmatrix} \mathcal{H}(x_1, y_1, \lambda) & \mathcal{H}(x_1, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}(x_1, y_q, \lambda) \\ \mathcal{H}(x_2, y_1, \lambda) & \mathcal{H}(x_2, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}(x_2, y_q, \lambda) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{H}(x_q, y_1, \lambda) & \mathcal{H}(x_q, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}(x_q, y_q, \lambda) \end{vmatrix},$$

elle donne l'*expression algébrique des mineurs de la déterminante en fonction de la déterminante et de la résolvante.*

6. Comme application immédiate de la formule (30), calculons l'expression de la résolvante $\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu)$ relative au noyau $\mathcal{H}(x, y, \lambda)$ et au paramètre μ.

En vertu de (31)

$$\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu) = \frac{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\, D\left(\begin{matrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{matrix}\middle|\lambda\right)}{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\, D\left(\begin{matrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \end{matrix}\middle|\lambda\right)}.$$

Le terme en $\lambda^{\varpi_1}\mu^{\varpi_2}$ du numérateur a pour coefficient

$$\frac{(-1)^{\varpi_1+\varpi_2}}{\varpi_1!\,\varpi_2!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi_1+\varpi_2}\, H\begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2} \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2} \end{pmatrix},$$

et le terme en $\lambda^{\varpi_1} \mu^{\varpi_2}$ du dénominateur a pour coefficient

$$\frac{(-1)^{\varpi_1+\varpi_2}}{\varpi_1!\,\varpi_2!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi_1+\varpi_2}\,\mathrm{H}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi_1+\varpi_2}\end{pmatrix}.$$

On voit donc que

$$\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu) = \frac{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty}\frac{(-1)^{\varpi}(\lambda+\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\,\mathrm{H}\begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}\end{pmatrix}}{\displaystyle\sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty}\frac{(-1)^{\varpi}(\lambda+\mu)^{\varpi}}{\varpi!}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 ds_{\varpi}\,\mathrm{H}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi} \\ s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}\end{pmatrix}},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{H}(x, y, \lambda, \mu) = \mathcal{H}(x, y, \overline{\lambda+\mu}), \tag{32}$$

formule bien connue.

7. Considérons la fonction

$$\mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \frac{\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)}{\mathrm{D}(\lambda)},$$

relative au noyau $\mathrm{H}(x, y)$ et au paramètre λ; désignons par

$$\mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda, \mu\right)$$

la même fonction relative au noyau $\mathcal{H}(x, y, \lambda)$ et au paramètre μ.

Il résulte des formules (31) et (32) que

$$\mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\lambda, \mu\right) = \mathcal{H}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q\end{matrix}\middle|\,\overline{\lambda+\mu}\right), \tag{33}$$

généralisation de la formule (32).

8. L'égalité (30) est un cas particulier de l'égalité

$$\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_1, y_2, \ldots, y_q; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\left[\mathrm{D}\left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\right]^{q-1}$$
$$= \begin{vmatrix} \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) & \ldots & \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_q, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_1, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right) & \ldots & \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_q, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \\ y_q, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\end{matrix}\middle|\,\lambda\right)\end{vmatrix}$$

qui s'établira de la même façon.

CHAPITRE II.

SUR L'ORDRE DES PÔLES DE LA RÉSOLVANTE D'UN NOYAU DONNÉ.

9. Théorème I. — *Si l'on considère deux noyaux orthogonaux* $H'(x, y)$ *et* $H''(x, y)$, *le mineur d'ordre* q *de la déterminante* $D(\lambda)$ *du noyau* $H(x, y) = H'(x, y) + H''(x, y)$ *est fonction linéaire et homogène des mineurs d'ordre* o *à* q *de chacune des déterminantes* $D'(\lambda)$ *et* $D''(\lambda)$ *des noyaux respectifs* $H'(x, y)$ *et* $H''(x, y)$.

En effet, en vertu de la formule (31) et des propriétés des noyaux orthogonaux (nº **2**),

$$(34)\quad D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = D'(\lambda)\,D''(\lambda)\begin{vmatrix} \mathcal{H}'(x_1, y_1, \lambda) + \mathcal{H}''(x_1, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_1, y_q, \lambda) + \mathcal{H}''(x_1, y_q, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{H}'(x_q, y_1, \lambda) + \mathcal{H}''(x_q, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_q, y_q, \lambda) + \mathcal{H}''(x_q, y_q, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Le déterminant du second membre peut se décomposer en 2^q déterminants. Si nous faisons cette décomposition, nous obtenons une somme de termes de la forme

$$D'(\lambda)\,D''(\lambda)\begin{vmatrix} \mathcal{H}'(x_1, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_1, y_\varpi, \lambda) & \mathcal{H}''(x_1, y_{\varpi+1}, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}''(x_1, y_q, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{H}'(x_q, y_1, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}'(x_q, y_\varpi, \lambda) & \mathcal{H}''(x_q, y_{\varpi+1}, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}''(x_q, y_q, \lambda) \end{vmatrix},$$

une permutation quelconque des variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$ pouvant être substituée à la permutation $y_1, y_2, \ldots, y_q$.

En développant le déterminant du terme précédent par rapport aux ϖ premières colonnes, d'après la règle de Laplace, on voit immédiatement, en vertu de la formule (31), que ce terme est une somme de produits de deux facteurs dont l'un est un mineur d'ordre ϖ de la déterminante $D'(\lambda)$ et l'autre un mineur d'ordre $q - \varpi$ de la déterminante $D''(\lambda)$. En faisant varier ϖ de o à q, on démontrera donc le théorème I.

10. De plus, en vertu de la règle de Laplace, on voit que le second membre de (34) peut être formé de la façon suivante :

Soient

$$(i) \qquad i_1, \; i_2, \; \ldots, \; i_q,$$
$$(j) \qquad j_1, \; j_2, \; \ldots, \; j_q,$$

deux permutations simples quelconques des nombres 1, 2, ..., q et soient i, j les nombres d'inversions respectifs de ces permutations

$$D\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}\!\lambda\Bigr) = \sum \frac{(-1)^{i+j}}{\alpha!\,\beta!} D'\begin{pmatrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha} \\ y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_\alpha} \end{pmatrix}\!\lambda\Bigr) D''\begin{pmatrix} x_{i_{\alpha+1}}, x_{i_{\alpha+2}}, \ldots, x_{i_q} \\ y_{j_{\alpha+1}}, y_{j_{\alpha+2}}, \ldots, y_{j_q} \end{pmatrix}\!\lambda\Bigr),$$

la somme du second membre étant étendue à toutes les permutations simples (i), (j) et à toutes les valeurs des nombres entiers positifs ou nuls α, β tels que $\alpha + \beta = q$.

11. *Corollaire.* – La règle précédente se généralise facilement si l'on suppose

$$H(x, y) = H'(x, y) + H''(x, y) + \ldots + H^{(0)}(x, y),$$

les θ noyaux composants $H(x, y)$ étant orthogonaux deux à deux. On a avec la notation précédente

$$\begin{aligned} D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) = \sum & \frac{(-1)^{i+j}}{\alpha!\,\beta!\ldots\sigma!\,\tau!} \\ & \times D'\left(\begin{matrix} x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\alpha} \\ y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_\alpha} \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \\ & \times D''\left(\begin{matrix} x_{i_{\alpha+1}}, x_{i_{\alpha+2}}, \ldots, x_{i_{\alpha+\beta}} \\ y_{j_{\alpha+1}}, y_{j_{\alpha+2}}, \ldots, y_{j_{\alpha+\beta}} \end{matrix}\middle|\,\lambda\right) \\ & \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \times D^{(0)}\left(\begin{matrix} x_{i_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+1}}, x_{i_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+2}}, \ldots, x_{i_q} \\ y_{j_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+1}}, y_{j_{\alpha+\beta+\ldots+\sigma+2}}, \ldots, y_{j_q} \end{matrix}\middle|\,\lambda\right). \end{aligned}$$

La somme du second membre est étendue à toutes les permutations (i) et (j) et à toutes les valeurs des θ nombres entiers positifs ou nuls $\alpha, \beta, \ldots, \sigma, \tau$, tels que $\alpha + \beta + \ldots + \sigma + \tau = q$.

12. Théorème II. — *Étant donné un noyau* $H(x, y) = h_c(x, y, 0)$, *somme de q noyaux canoniques relatifs au nombre fondamental c*

(n° **2**), *le mineur d'ordre q de la déterminante* $D(\lambda)$ *de ce noyau n'est pas identiquement nul pour* $\lambda = c$.

On a vu (n° **2**) que la déterminante $D^{(0)}(\lambda)$ du noyau $h_c^{(0)}(x, y, 0)$ est

$$D^{(0)}(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_0}.$$

Il résulte de là et du corollaire précédent que les termes qui ne contiennent pas $(\lambda - c)$ en facteur dans $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ sont tous compris dans la somme

$$\Sigma(-1)^{i+j} D^{(1)}\left(\begin{matrix} x_{i_1} \\ y_{j_1} \end{matrix}\middle|\lambda\right) D^{(2)}\left(\begin{matrix} x_{i_2} \\ y_{j_2} \end{matrix}\middle|\lambda\right) \ldots D^{(q)}\left(\begin{matrix} x_{i_q} \\ y_{j_q} \end{matrix}\middle|\lambda\right),$$

(i) et (j) étant les permutations définies ci-dessus, et cette somme étant étendue à toutes les permutations simples (i), (j).

Par suite, en se reportant aux formules (21) et (22), on voit que les termes en question sont tous compris dans la somme

$$S = \frac{P(a)}{c^p} \sum_{(i)(j)} (-1)^{i+j} \alpha_1^{(1)}(x_{i_1}) \beta_{n_1}^{(1)}(y_{j_1}) \alpha_1^{(2)}(x_{i_2}) \beta_{n_2}^{(2)}(y_{j_2}) \ldots \alpha_1^{(q)}(x_{i_q}) \beta_{n_q}^{(q)}(y_{j_q}),$$

$P(a)$ désignant le produit des constantes $a_\eta^{(\theta)}$ ($\theta = 1, 2, \ldots, q$ et $\eta = 1, 2, \ldots, n_\theta - 1$).

Cette somme peut s'écrire

$$S = \frac{P(a)}{c^p} \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}(x_1) & \alpha_1^{(2)}(x_1) & \ldots & \alpha_1^{(q)}(x_1) \\ \alpha_1^{(1)}(x_2) & \alpha_1^{(2)}(x_2) & \ldots & \alpha_1^{(q)}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(1)}(x_q) & \alpha_1^{(2)}(x_q) & \ldots & \alpha_1^{(q)}(x_q) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \beta_{n_1}^{(1)}(y_1) & \beta_{n_2}^{(2)}(y_1) & \ldots & \beta_{n_q}^{(q)}(y_1) \\ \beta_{n_1}^{(1)}(y_2) & \beta_{n_2}^{(2)}(y_2) & \ldots & \beta_{n_q}^{(q)}(y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_{n_1}^{(1)}(y_q) & \beta_{n_2}^{(2)}(y_q) & \ldots & \beta_{n_q}^{(q)}(y_q) \end{vmatrix}.$$

Je dis que les deux déterminants qui entrent dans cette expression ne sont ni l'un ni l'autre identiquement nuls; car, si le premier par exemple était identiquement nul, on pourrait déterminer des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_q$ non toutes nulles et telles que

$$a_1 \alpha_1^{(1)}(x) + a_2 \alpha_1^{(2)}(x) + \ldots + a_q \alpha_1^{(q)}(x) \equiv 0.$$

Or, ceci est impossible, les fonctions $a_1^{(\theta)}(x)$ formant avec les fonctions $b_1^{(\theta)}(y)$ un système biorthogonal [1].

S est donc différent de zéro et cette proposition entraîne le théorème II.

13. Théorème III. — *Étant donné un noyau $h_c(x, y, o)$ somme de q noyaux canoniques relatifs au nombre fondamental c, le mineur d'ordre $\theta < q$ de la déterminante $D(\lambda)$ s'annule*

$$n_{\theta+1} + n_{\theta+2} + \ldots + n_q$$

fois pour $\lambda = c$, si l'on suppose

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_q.$$

Nous fixerons les idées en supposant

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_{\theta-i-1} > n_{\theta-i},$$
$$n_{\theta-i} = n_{\theta-i+1} = \ldots = n_\theta = n_{\theta+1} = \ldots = n_{\theta+j},$$
$$n_{\theta+j} > n_{\theta+j+1} \geqq n_{\theta+j+2} \geqq \ldots \geqq n_q.$$

Soit, d'autre part,

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_{i+1}$$

une combinaison simple quelconque $i+1$ à $i+1$ des $i+j+1$ nombres $(\theta - i)\,(\theta - i + 1)\ldots(\theta + j)$.

Le corollaire du théorème I montre que les termes de moindre degré en $(c - \lambda)$ dans $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ sont donnés par l'expression

$$E = \left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^{n_{\theta+1}+n_{\theta+2}+\ldots+n_q} \sum_{(u)} D^{(u)}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right),$$

le terme sous le signe $\sum$ désignant le mineur d'ordre θ de la déterminante du noyau

$$h_c^{(1)}(x, y, o) + h_c^{(2)}(x, y, o) + \ldots + h_c^{(\theta-i-1)}(x, y, o)$$
$$+ h_c^{(u_1)}(x, y, o) + h_c^{(u_2)}(x, y, o) + \ldots + h_c^{(u_{i+1})}(x, y, o),$$

et la somme $\sum$ étant étendue à toutes les combinaisons (u).

---

[1] *Voir* à ce sujet Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, p. 35.

Cette somme ne saurait être identiquement nulle pour $\lambda = c$. Il résulte en effet du théorème II que $D^{(u)}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ contient un terme non nul pour $\lambda = c$, lequel est le produit d'une constante par le produit de deux déterminants non nuls

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)}(x_1) & \ldots & \alpha_1^{(\theta-i-1)}(x_1) & \alpha_1^{(u_1)}(x_1) & \ldots & \alpha_1^{(u_{i+1})}(x_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^{(1)}(x_q) & \ldots & \alpha_1^{(\theta-i-1)}(x_q) & \alpha_1^{(u_1)}(x_q) & \ldots & \alpha_1^{(u_{i+1})}(x_q) \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} \beta_{n_1}^{(1)}(y_1) & \ldots & \beta_{n_{\theta-i-1}}^{(\theta-i-1)}(y_1) & \beta_{n_{u_1}}^{(u_1)}(y_1) & \ldots & \beta_{n_{u_{i+1}}}^{(u_{i+1})}(y_1) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \beta_{n_1}^{(1)}(y_q) & \ldots & \beta_{n_{\theta-i-1}}^{(\theta-i-1)}(y_q) & \beta_{n_{u_1}}^{(u_1)}(y_q) & \ldots & \beta_{n_{u_{i+1}}}^{(u_{i+1})}(y_q) \end{vmatrix}.$$

Par suite, si la somme

$$\sum_{(u)} D^{(u)}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\theta \\ y_1, y_2, \ldots, y_\theta \end{matrix}\middle| \lambda\right)$$

était identiquement nulle, il existerait une relation linéaire à coefficients constants $a_1, a_2, \ldots, a_{\theta+j}$ non tous nuls, tels que

$$a_1 \alpha_1^{(1)}(x) + a_2 \alpha_1^{(2)}(x) + \ldots + a_{\theta+j} \alpha^{(\theta+j)}(x) \equiv 0,$$

ce qui est impossible en vertu de la biorthogonalité des fonctions $\alpha_1^{(\theta)}(x)$ et $\beta_1^{(\theta)}(y)$.

On voit donc que E est divisible par la puissance $n_{\theta+1} + n_{\theta+2} + \ldots + n_q$ de $(\lambda - c)$ et n'est pas divisible par une puissance supérieure. Le théorème III en résulte immédiatement.

14. Nous sommes maintenant à même, pour un noyau donné, de préciser la signification de l'ordre des pôles des résolvantes canoniques composant la partie du noyau relative à un nombre fondamental.

Soit un noyau $H(x, y)$ tel que pour $\lambda = c$ sa fonction déterminante s'annule p fois et tel que le mineur d'ordre θ de cette déterminante s'annule p_θ fois.

En vertu de l'orthogonalité de la partie $h_c(x, y, 0)$ du noyau $H(x, y)$ relative au pôle c et de la partie $H(x, y) - h_c(x, y, 0)$, il résulte du théorème I que les nombres p et p_θ sont les mêmes pour le noyau $h_c(x, y, 0)$ que pour le noyau $H(x, y)$.

Si donc $h_c(x, y, \lambda)$ est défini par les égalités (21) et (22), on déduira des théorèmes II et III les égalités suivantes :

$$(35)\qquad \begin{cases} n_1 = p \quad - p_1, \\ n_2 = p_1 \quad - p_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ n_\theta = p_{\theta-1} - p_\theta, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ n_q = p_{q-1}, \\ p_q = 0. \end{cases}$$

Ces égalités définissent les ordres des pôles des résolvantes canoniques.

Par analogie avec la théorie des diviseurs élémentaires d'un déterminant dont tous les termes sont fonctions linéaires d'un paramètre λ, nous traduirons les égalités ci-dessus en disant que : *les ordres des pôles des résolvantes canoniques sont les exposants des diviseurs élémentaires de la fonction déterminante.*

15. Il est notable : 1° que

$$p > p_1 > p_2 > \ldots > p_{q-1} \quad (^1);$$

2° que

$$n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_q.$$

De ces inégalités et des égalités (35) résultent un certain nombre d'inégalités intéressantes :

1° On a

$$p_{\theta-1} = n_\theta + n_{\theta+1} + \ldots + n_q,$$

d'où

$$p_{\theta-1} \geqq n_\theta + q - \theta;$$

cette inégalité a été donnée par M. B. Heywood pour $\theta = 1$.

La somme du genre d'un nombre fondamental et de son ordre comme pôle de la résolvante est inférieure à son degré de multiplicité comme zéro de la déterminante.

2° Comme $n_1 \geqq n_q$,

$$p - p_1 \geqq p_{q-1}.$$

---

(1) *Voir* à ce sujet B. HEYWOOD, *Thèse* déjà citée.

Un nombre fondamental de genre q est un pôle de la résolvante d'ordre au moins égal à son degré de multiplicité comme zéro du mineur d'ordre $q-1$ de la déterminante.

3° Comme $n_\theta \geqq n_{\theta-1}$,

$$p_{\theta-1}-p_\theta \geqq p_\theta - p_{\theta+1},$$

d'où

$$p_\theta \leqq \frac{p_{\theta+1}+p_{\theta-1}}{2}.$$

La multiplicité d'un nombre fondamental comme zéro d'un mineur d'ordre θ de la déterminante est inférieure ou au plus égale à la moyenne arithmétique des multiplicités de ce nombre fondamental comme zéro des mineurs d'ordre $\theta-1$ et d'ordre $\theta+1$.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES.

16. Dans cette seconde Partie nous nous proposons d'étudier les systèmes d'équations intégrales linéaires du type suivant :

$$(36)\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=m}\left[a_{\mu\nu}(x)\,\theta_\nu(x)-\lambda\int_0^1 b_{\mu\nu}(x,s)\,\theta_\nu(s)\,ds\right]=c_\mu(x)\quad(\mu=1,2,\ldots,m),$$

où $a_{\mu\nu}(x)$, $b_{\mu\nu}(x,s)$, $c_\mu(x)$ sont des fonctions bornées et intégrables dans le domaine $0\leqq x\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$; λ un paramètre donné et $\theta_\nu(x)$ des fonctions inconnues que l'on se propose de définir dans le domaine $0\leqq x\leqq 1$.

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1m}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1}(x) & \ldots & a_{mm}(x)\end{vmatrix},$$

et supposons qu'il ne soit pas identiquement nul dans le domaine $0\leqq x\leqq 1$

et ne s'y annule que pour des valeurs de x isolées et en nombre fini.

Faisons pour un instant l'hypothèse que les fonctions $\theta_\nu(x)$ aient été remplacées par leurs valeurs sous le signe $\int_0^1$ et résolvons le système (36) comme un système d'équations linéaires en $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, ..., $\theta_\nu(x)$.

Nous obtenons le système équivalent

$$A(x)\,\theta_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 K_{\mu\nu}(x, s)\,\theta_\nu(s)\,ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Posons

$$A(x)\,\theta_\mu(x) = \varphi_\mu(x)$$

et

$$(37) \qquad \frac{K_{\mu\nu}(x, s)}{A(s)} = H_{\mu\nu}(x, s).$$

La résolution du système (36) est équivalente à la résolution du système

$$(38) \qquad \varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 H_{\mu\nu}(x, s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Fredholm a montré que *la résolution du système* (38) *peut être ramenée à la résolution d'une équation unique*. Pour cela il pose

$$(39) \qquad \begin{cases} H(x, s) = H_{\mu\nu}(x - \mu + 1,\ s - \nu + 1), & \text{pour } 0 < \begin{matrix} x - \mu + 1 \\ s - \nu + 1 \end{matrix} < 1, \\ f(x) = f_\mu(x - \mu + 1), & \text{pour } 0 < x - \mu + 1 < 1, \end{cases}$$

et considère l'équation

$$(40) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^m H(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x).$$

A toute solution $\varphi(x)$ de (40) valable dans le domaine $0 \leqq x \leqq m$ correspond une solution du système (38); elle est définie par les égalités

$$(41) \qquad \varphi(x) = \varphi_\mu(x - \mu + 1), \qquad \text{pour } 0 < x - \mu + 1 < 1.$$

Réciproquement, les égalités (41) montrent qu'à toute solution du système (38) valable dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$ correspond une solution de l'équation (40) valable dans le domaine $0 \leqq x \leqq m$.

La résolution du système (38) est donc équivalente à la résolution de l'équation (40).

Or, l'équation (40) est de troisième ou de deuxième espèce suivant que les fonctions $A(s-\nu+1)$ s'annulent ou non dans l'intervalle $0 < s-\nu+1 < 1$, c'est-à-dire suivant que $A(s)$ s'annule ou non dans l'intervalle $0 < s < 1$.

Nous dirons également que le système (36) est de troisième ou de deuxième espèce suivant que $A(s)$ s'annule ou non pour s compris entre 0 et 1.

CHAPITRE III.

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

17. Nous allons discuter complètement dans ce Chapitre le système d'équations (38) en supposant que $f_\mu(x)$ et $H_{\mu\nu}(x, y)$ sont bornés et intégrables dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq 1, \qquad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Nous conviendrons de représenter par

$$H^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} H_{\mu_1,\nu_1}(x_1, y_1) & H_{\mu_1,\nu_2}(x_1, y_2) & \ldots & H_{\mu_1,\nu_q}(x_1, y_q) \\ H_{\mu_2,\nu_1}(x_2, y_1) & H_{\mu_2,\nu_2}(x_2, y_2) & \ldots & H_{\mu_2,\nu_q}(x_2, y_q) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ H_{\mu_q,\nu_1}(x_q, y_1) & H_{\mu_q,\nu_2}(x_q, y_2) & \ldots & H_{\mu_q,\nu_q}(x_q, y_q) \end{vmatrix}.$$

Si l'on se reporte alors, d'une part aux égalités (39) et d'autre part à l'égalité (5), on voit que la déterminante $D(\lambda)$ de l'équation de Fredholm (40), à laquelle le système (38) est équivalent, peut s'écrire

$$(42)\quad D(\lambda) = \sum_{a, b, \ldots, l}^{0 \text{ à } l'\infty} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{a!\, b! \ldots l!}$$
$$\times \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_\varpi\, H^{\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{a \text{ fois.}},\ \overbrace{2, 2, \ldots, 2}^{b \text{ fois.}},\ \ldots,\ \overbrace{m, m, \ldots, m}^{l \text{ fois.}}}_{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a \text{ fois.}},\ \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{b \text{ fois.}},\ \ldots,\ \underbrace{m, m, \ldots, m}_{l \text{ fois.}}}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix},$$

avec la condition $\varpi = a + b + \ldots + t$ et la somme doit être étendue à toutes les valeurs possibles des entiers positifs ou nuls $a, b, c, \ldots, t$.

Nous dirons que $D(\lambda)$ est la *fonction déterminante* du système de noyaux $H_{\mu\nu}(x, y)$.

De même quand

$$0 < \frac{x - \mu + 1}{y - \nu + 1} < 1,$$

le mineur du premier ordre de la déterminante de l'équation (40) a pour expression, en vertu de (39) et de (6),

$$(43) \qquad D_\nu^\mu\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \sum_{a, b, \ldots, t}^{0 \text{ à } l'\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{a!\, b! \ldots t!} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \ldots \int_0^1 ds_\varpi$$
$$\times H^{\mu, \overbrace{1,1,\ldots,1}^{a \text{ fois}}, \overbrace{2,2,\ldots,2}^{b \text{ fois}}, \ldots, \overbrace{m,m,\ldots,m}^{t \text{ fois}}}_{\nu, \underbrace{1,1,\ldots,1}_{a \text{ fois}}, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{b \text{ fois}}, \ldots, \underbrace{m,m,\ldots,m}_{t \text{ fois}}}\begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}.$$

Nous dirons que les fonctions $D_\nu^\mu\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ sont les *mineurs du premier ordre* de la déterminante $D(\lambda)$.

La relation (30) va nous permettre maintenant de donner une définition du mineur d'ordre q, $D\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$, de la déterminante de l'équation (40) pour

$$0 < \frac{x_1 - \mu_1 + 1}{y_1 - \nu_1 + 1} < 1, \quad 0 < \frac{x_2 - \mu_2 + 1}{y_2 - \nu_2 + 1} < 1, \quad \ldots, \quad 0 < \frac{x_q - \mu_q + 1}{y_q - \nu_q + 1} < 1.$$

Cette fonction $D^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{pmatrix}$, que l'on sait être entière en λ, peut être définie par la relation

$$(44) \qquad D^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) [D(\lambda)]^{q-1}$$
$$= \begin{vmatrix} D^{\mu_1}_{\nu_1}\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & D^{\mu_1}_{\nu_2}\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D^{\mu_1}_{\nu_q}\left(\begin{matrix} x_1 \\ y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) \\ D^{\mu_2}_{\nu_1}\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & D^{\mu_2}_{\nu_2}\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D^{\mu_2}_{\nu}\left(\begin{matrix} x_2 \\ y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ D^{\mu_q}_{\nu_1}\left(\begin{matrix} x_q \\ y_1 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & D^{\mu_q}_{\nu_2}\left(\begin{matrix} x_q \\ y_2 \end{matrix}\middle|\lambda\right) & \ldots & D^{\mu_q}_{\nu_q}\left(\begin{matrix} x_q \\ y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right) \end{vmatrix}.$$

Nous dirons que les fonctions $D^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ sont les *mineurs d'ordre q* de la déterminante $D(\lambda)$.

18. Ceci posé, nous sommes à même d'étudier complètement le système d'équations (38) en suivant pas à pas les résultats obtenus concernant la discussion de l'équation unique de Fredholm (n° **1**), en étendant ces résultats à l'équation (40) par substitution des limites $(0, m)$ aux limites $(0, 1)$, puis en tenant compte des relations (41).

On obtient finalement les résultats suivants :

D'une part, *la fonction déterminante* $D(\lambda)$ *et ses mineurs du premier ordre* $D^{\mu}_{\nu}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ *satisfont aux relations caractéristiques*

$$(45) \quad \begin{cases} D(0) = 1 & (45') \\ -\dfrac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \int_0^1 D^{\mu}_{\mu}\left(\begin{matrix} s \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds & (45'') \end{cases}$$

$$(46) \quad \begin{cases} D^{\mu}_{\nu}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) - H_{\mu,\nu}(x, y)\, D(\lambda) = \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} \int_0^1 H_{\mu,i}(x, s)\, D^{i}_{\nu}\left(\begin{matrix} s \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds & (46') \\ \qquad = \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} \int_0^1 H_{i\nu}(s, y)\, D^{\mu}_{i}\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda\right) ds & (46'') \end{cases}$$

D'autre part :

1° Si $D(\lambda) \neq 0$, ce que nous exprimerons en disant que λ n'est pas un nombre fondamental du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$, *le système d'équations intégrales linéaires* (38) *admet la solution unique*

$$(47) \qquad \varphi_{\mu}(x) = f_{\mu}(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, s, \lambda) f_{\nu}(s)\, ds,$$

$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda)$ étant la fonction

$$(48) \qquad \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) = \frac{D^{\mu}_{\nu}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)}.$$

Il résulte des relations (46) que les fonctions $\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda)$, dont l'ensemble est le *système de résolvantes du système de noyaux*

$H_{\mu,\nu}(x, y)$, satisfont aux deux systèmes de relations

$$(49)\begin{cases} -H_{\mu,\nu}(x,y)+\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x,y,\lambda)=\lambda\sum_{i=1}^{i=m}\int_0^1 H_{\mu,i}(x,s)\,\mathcal{H}_{i,\nu}(s,y,\lambda)\,ds & (49') \\ =\lambda\sum_{i=1}^{i=m}\int_0^1 H_{i,\nu}(s,y)\,\mathcal{H}_{\mu,i}(x,s,\lambda)\,ds & (49'') \end{cases}$$

2° Si, pour $\lambda = c$, $D(\lambda)$ est nul ainsi que tous ses mineurs d'ordres $1, 2, \ldots, \overline{q-1}$, un de ses mineurs d'ordre q étant différent de zéro, par exemple le mineur

$$D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle|\lambda\right),$$

ce que nous exprimerons en disant que c est un *nombre fondamental de genre* q, *les deux systèmes d'équations intégrales linéaires homogènes*

$$(50)\quad \varphi_\mu(x)-\lambda\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\int_0^1 H_{\mu,\nu}(x,s)\,\varphi_\nu(s)\,ds=0 \qquad (\mu=1,2,\ldots,m),$$

$$(51)\quad \psi_\nu(y)-\lambda\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\int_0^1 H_{\mu,\nu}(s,y)\,\psi_\mu(s)\,ds=0 \qquad (\nu=1,2,\ldots,m),$$

dits systèmes associés, *admettent respectivement les* q *solutions*

$$(52)\quad \varphi_\mu(x)=\Phi^{(\theta)}_\mu(x)=\frac{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{\theta-1},\mu,\mu_{\theta+1},\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{\theta-1}, x, x_{\theta+1}, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_q \end{matrix}\middle| c\right)}{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| c\right)} \qquad (\theta=1,2,\ldots,q),$$

$$(53)\quad \psi_\nu(y)=\Psi^{(\theta)}_\nu(y)=\frac{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_{\theta-1},\nu,\nu_{\theta+1},\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_{\theta-1}, y, y_{\theta+1}, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| c\right)}{D^{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_q}_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_q}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| c\right)} \qquad (\theta=1,2,\ldots,q).$$

Si l'on pose

$$\Phi_\theta(x)=\Phi^{(\theta)}_\mu(x) \qquad \text{pour } 0 < x-\mu+1 < 1,$$

les q fonctions $\Phi_0(x)$ sont linéairement indépendantes, ce qui revient à dire qu'*il ne peut exister une même relation linéaire à coefficients constants non tous nuls* $a_1, a_2, \ldots, a_q$

$$a_1 \Phi_\mu^{(1)}(x) + a_2 \Phi_\mu^{(2)}(x) + \ldots + a_q \Phi_\mu^{(q)}(x) \equiv 0,$$

vérifiée quel que soit x *compris entre* 0 *et* 1 *pour les* m *valeurs* 1, 2, …, m *de l'indice* μ.

Nous exprimerons ce fait en disant que les q solutions $\Phi_\mu^{(0)}(x)$ du système (50) sont *linéairement indépendantes.*

Dans le cas qui nous occupe, le système (50) admet q solutions linéairement indépendantes (52) et q seulement.

3° Pour $\lambda = c$, *nombre fondamental de genre* q, *le système d'équations* (38) *n'a pas, en général, de solution;* les conditions nécessaires et suffisantes pour que des solutions existent sont les q conditions

$$(54) \qquad \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \int_0^1 \Psi_\mu^{(0)}(s) f_\mu(s)\, ds = 0 \qquad (0 = 1, 2, \ldots, q).$$

Ces conditions supposées remplies, toutes les solutions du système (38) pour $\lambda = c$ sont définies par les égalités

$$(55) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + c \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 K_{\mu,\nu}(x,s) f_\nu(s)\, ds + \sum_{0=1}^{0=q} a_0 \Phi_\mu^{(0)}(x) \\ \qquad\qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \end{array} \right.$$

où $K_{\mu,\nu}(x, y)$ désignent les fonctions

$$(56) \qquad K_{\mu,\nu}(x,y) = \frac{D^{\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\left(\begin{array}{l} x, x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y, y_1, y_2, \ldots, y_q \end{array} \middle| c \right)}{D^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q}_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q}\left(\begin{array}{l} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{array} \middle| c \right)},$$

et où les a_0 sont q constantes arbitraires, les mêmes quel que soit μ

19. Les résultats de l'étude des noyaux et de la résolvante d'une équation unique s'étendront également aux systèmes de noyaux et de résolvantes d'un système d'équations intégrales linéaires.

Deux systèmes de m^2 noyaux $H_{\mu,\nu}(x, y)$ et $K_{\mu,\nu}(x, y)$ seront dits *orthogonaux*, s'ils satisfont aux deux systèmes de conditions

$$(57) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} \int_0^1 H_{\mu,i}(x, s)\, K_{i,\nu}(s, y)\, ds \equiv 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m} \int_0^1 H_{i,\nu}(s, y)\, K_{\mu,i}(x, s)\, ds \equiv 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ \nu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Si un système de m^2 noyaux $H_{\mu,\nu}(x,y)$ donné est tel que chacun de ses noyaux est la somme de deux noyaux de mêmes indices μ, ν de deux systèmes orthogonaux de m^2 noyaux composants : 1° la fonction déterminante du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x,y)$ est le produit des fonctions déterminantes des systèmes de noyaux composants; 2° les fonctions résolvantes $\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x,y,\lambda)$ du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x,y)$ sont les sommes des fonctions résolvantes de mêmes indices μ, ν des systèmes de noyaux composants.

Désignons par $h_{\mu,\nu,c}(x,y,\lambda)$ la partie de la fonction méromorphe $\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x,y,\lambda)$ résolvante d'indices μ, ν du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x,y)$ qui devient infinie pour $\lambda = c$, et soient c_1 et c_2 deux nombres fondamentaux du système de noyaux $H_{\mu,\nu}(x,y)$. On peut poser

$$\mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) = h_{\mu,\nu,c_1}(x, y, \lambda) + h_{\mu,\nu,c_2}(x, y, \lambda) + h_{\mu,\nu}(x, y, \lambda).$$

Les trois systèmes de m^2 noyaux $h_{\mu,\nu,c_1}(x,y,0)$; $h_{\mu,\nu,c_2}(x,y,0)$; $h_{\mu,\nu}(x,y,0)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux et admettent comme résolvantes respectives $h_{\mu,\nu,c_1}(x, y, \lambda)$; $h_{\mu,\nu,c_2}(x, y, \lambda)$; $h_{\mu,\nu}(x,y,\lambda)$.

Finalement, on peut étudier séparément les parties des noyaux $h_{\mu,\nu,c}(x,y,0)$ et les parties des résolvantes $h_{\mu,\nu,c}(x,y,\lambda)$ relatives au nombre fondamental c.

Soit c un nombre fondamental de genre q annulant p fois $D(\lambda)$; $h_{\mu,\nu,c}(x,y,\lambda)$ peut être considéré comme la somme de q fonctions

$$h^{(\theta)}_{\mu,\nu,c}(x, y, \lambda) = \frac{\varphi^{(\theta)}_{\mu,\nu,n_\theta}(x, y)}{(c-\lambda)^{n_\theta}} + \frac{\varphi^{(\theta)}_{\mu,\nu,n_\theta-1}(x, y)}{(c-\lambda)^{n_\theta-1}} + \ldots + \frac{\varphi^{(\theta)}_{\mu,\nu,1}(x, y)}{c-\lambda},$$

les fonctions $\varphi^{(\theta)}_{\mu,\nu,1}$, $\ldots$, $\varphi^{(\theta)}_{\mu,\nu,n_\theta}$ étant définies à l'aide des constantes arbitraires $a_i^{(0)}$ par les relations

$$\varphi_{\mu,\nu,1}^{(0)}(x,y)=\sum_{i=1}^{i=n_0}\alpha_{\mu,i}^{(0)}(x)\,\beta_{\nu,i}^{(0)}(y),$$

$$\varphi_{\mu,\nu,2}^{(0)}(x,y)=\sum_{i=1}^{i=n_0-1}a_i^{(0)}\,\alpha_{\mu,i}^{(0)}(x)\,\beta_{\nu,i+1}^{(0)}(y),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_{\mu,\nu,n_0}^{(0)}(x,y)=a_1^{(0)}a_2^{(0)}\dots a_{n_0-1}^{(0)}\,\alpha_{\mu,1}^{(0)}(x)\,\beta_{\nu,n_0}^{(0)}(y),$$

$n_1+n_2+\ldots+n_q=p$ et les $2m$ systèmes de fonctions $\alpha_{\mu,i}^{(0)}(x)$ et $\beta_{\mu,i}^{(0)}(y)$, qui existent, quel que soit le choix des constantes $a_i^{(0)}$, sont tels que si l'on définit les fonctions

$$\begin{aligned}\alpha_i^{(0)}(x)&=\alpha_{\mu,i}^{(0)}(x-\mu+1)\qquad\text{pour } 0<x-\mu+1<1,\\ \beta_i^{(0)}(y)&=\beta_{\nu,i}^{(0)}(y-\nu+1)\qquad\text{pour } 0<y-\nu+1<1,\end{aligned}$$

ces $2p$ fonctions $\alpha_i^{(0)}(x)$, $\beta_i^{(0)}(y)$ forment un système biorthogonal dans l'intervalle d'intégration $(0-m)$.

$h_{\mu,\nu,c}^{(0)}(x,y,0)$ forment un système de m^2 *noyaux canoniques* d'ordre n_0; $h_{\mu,\nu,c}^{(0)}(x,y,\lambda)$ sont dits *résolvantes canoniques* d'ordre n_0 de ce système de noyaux.

De plus, la fonction déterminante du système de m^2 noyaux $h_{\mu,\nu,c}^{(0)}(x,y,0)$ est $\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^{n_0}$.

Enfin, si l'on appelle p_0 le plus grand commun diviseur des exposants du binome $(\lambda-c)$ en facteur dans les mineurs d'ordre 0 de la déterminante $\mathrm{D}(\lambda)$, on a

$$(58)\qquad\left\{\begin{aligned}n_1&=p\quad\;-p_1,\\ n_2&=p_1\quad-p_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ n_0&=p_{0-1}-p_0,\\ &\dots\dots\dots\dots,\\ n_q&=p_{q-1},\\ p_q&=0.\end{aligned}\right.$$

Notons que, pour i et 0 donnés, l'une au moins des m fonctions $\alpha_{\mu,i}^{(0)}(x)$ n'est pas identiquement nulle pour $0\leqq x\leqq 1$, puisque $\alpha_i^{(0)}(x)$ ne saurait être identiquement nul entre o et m. De même, l'une des m fonctions $\beta_{\nu,i}^{(0)}(y)$ n'est pas identiquement nulle pour $0 \leqq y \leqq 1$.

On ne saurait donc d'une part avoir simultanément

$$\varphi_{1,\nu,1}^{(0)}(x,y) \equiv \varphi_{2,\nu,1}^{(0)}(x,y) \equiv \ldots \equiv \varphi_{m,\nu,1}^{(0)}(x,y) \equiv 0,$$

sinon il existerait une relation linéaire à coefficients constants non tous nuls entre les fonctions $\alpha_1^{(0)}(x)$, $\alpha_2^{(0)}(x)$, ..., $\alpha_{n_0}^{(0)}(x)$, ce qui est impossible, celles-ci étant biorthogonales aux fonctions $\beta_1^{(0)}(y)$, $\beta_2^{(0)}(y)$, ..., $\beta_{n_0}^{(0)}(y)$ dans l'intervalle $(0 - m)$.

Nous pouvons donc énoncer que *m résolvantes canoniques au moins admettent le pôle $\lambda = c$*, et, si nous désignons par μ_1, ν_1; μ_2, ν_2; ...; μ_m, ν_m leurs indices μ, ν, ils sont tels que $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, et $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$, sont deux permutations des nombres $1, 2, \ldots, m$.

Nous traduirons d'autre part les égalités (58) en disant que *les ordres des pôles des résolvantes canoniques sont inférieurs ou au plus égaux aux exposants des diviseurs élémentaires de la fonction déterminante; ils sont égaux à ces exposants pour une au moins des m^2 résolvantes canoniques.*

Nous remarquerons, enfin, qu'en vertu de (45)

$$(59) \qquad -\frac{d\log D(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \int_0^1 \mathcal{H}_{\mu,\mu}(s,s,\lambda)\,ds;$$

donc *c est un pôle pour l'une au moins des m résolvantes* $\mathcal{H}_{\mu,\mu}(x,y,\lambda)$, car il est nécessairement un pôle simple de $\dfrac{d\log D(\lambda)}{d\lambda}$.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES FONCTIONS PRINCIPALES D'UN NOYAU DONNÉ ADMETTANT DES POLES DONNÉS.

20. Considérons un seul noyau $H(x,y)$, et conservons les notations du n° **2**.

Les fonctions $\alpha_i^{(0)}(x)$, $\beta_i^{(0)}(y)$, qui entrent dans la formation des noyaux canoniques $h_c^{(0)}(x, y, o)$, sont des fonctions dites *principales* relatives au noyau $H(x, y)$ et à son nombre fondamental c.

Dans ses remarquables recherches sur les équations intégrales linéaires, M. Goursat (¹) a montré qu'on peut définir de la façon suivante les *fonctions principales* :

Étant donné un nombre fondamental de genre q du noyau $H(x, y)$ annulant p fois la déterminante de ce noyau et p^2 constantes $a_{i,j}$ telles que

$$(60) \qquad \Delta(r) \equiv \begin{vmatrix} a_{1,1}-r & a_{12} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-r & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \dots & a_{p,p}-r \end{vmatrix} \equiv (1-r)^p,$$

il existe des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_p(x)$ satisfaisant au système d'équations intégrales linéaires homogènes

$$(61) \quad \begin{cases} c\displaystyle\int_0^1 H(x,s)\,\varphi_1(s)\,ds = a_{1,1}\,\varphi_1(x) + a_{1,2}\,\varphi_2(x) + \dots + a_{1,p}\,\varphi_p(x), \\ c\displaystyle\int_0^1 H(x,s)\,\varphi_2(s)\,ds = a_{2,1}\,\varphi_1(x) + a_{2,2}\,\varphi_2(x) + \dots + a_{2,p}\,\varphi_p(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ c\displaystyle\int_0^1 H(x,s)\,\varphi_p(s)\,ds = a_{p,1}\,\varphi_1(x) + a_{p,2}\,\varphi_2(x) + \dots + a_{p,p}\,\varphi_p(x), \end{cases}$$

système de seconde espèce, puisque

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,p} \end{vmatrix} = 1,$$

en vertu de (60).

D'une part, chacune des fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_p(x)$ est dite *fonction principale* relative au noyau $H(x, y)$, à la variable x et au nombre fondamental c; d'autre part, l'ensemble de ces p fonctions constitue un *groupe principal* relatif au noyau $H(x, y)$, à la variable x et au nombre fondamental c.

(¹) *Ann. de la Fac. de Toulouse*, 1908. Mémoire déjà cité.

Lorsque l'on connaît un groupe principal relatif à un noyau $H(x, y)$, à la variable x et au nombre fondamental c, on obtient tous les autres en effectuant sur celui connu une substitution linéaire à coefficients constants dont le déterminant est différent de zéro.

Nous nous proposons, dans ce Chapitre, d'appliquer les résultats du n° **18** à la recherche d'une solution d'un système particulier (61), et, par suite, à la détermination d'un groupe principal; la dernière proposition que nous venons de rappeler nous permettra d'en déduire tous les autres.

21. Dans ce but, faisons un choix particulier des constantes $a_i^{(0)}$ qui entrent dans les formules (22); prenons-les toutes égales à c et appelons $A_i^{(0)}(x)$, $B_i^{(0)}(y)$ les nouvelles fonctions principales $\alpha_i^{(0)}(x)$, $\beta_i^{(0)}(y)$, correspondant à ce choix de constantes.

Nous allons *former le système d'équations du type* (61) *auquel satisfont les fonctions* $A_i^{(0)}(x)$.

Les formules (21) et (22) permettent d'écrire

$$(62)\qquad c\,h_c^{(0)}(x, y, \lambda) = \sum_{j=0}^{j=n_0-1} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_0-j} A_i^{(0)}(x)\,B_{i+j}^{(0)}(y)}{\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right)^{j+1}}.$$

Si, après avoir fait $\lambda = 0$ dans cette égalité, on multiplie les deux membres par $A_i^{(0)}(y)\,dy$ et intègre entre 0 et 1, on obtient, en vertu de la biorthogonalité des fonctions $A_i^{(0)}(x)$ et $B_i^{(0)}(y)$, la relation

$$(63)\qquad c\int_0^1 h_c^{(0)}(x, s, 0)\,A_i^{(0)}(s)\,ds = A_1^{(0)}(x) + A_2^{(0)}(x) + \ldots + A_i^{(0)}(x).$$

D'autre part, posons

$$\begin{aligned} H(x, y) &= h_c(x, y, 0) + K(x, y) \\ &= h_c^{(1)}(x, y, 0) + h_c^{(2)}(x, y, 0) + \ldots + h_c^{(q)}(x, y, 0) + K(x, y), \end{aligned}$$

les $q+1$ noyaux $h_c^{(0)}(x, y, 0)$ et $K(x, y)$ sont orthogonaux deux à deux.

Cette orthogonalité entraîne les identités [1]

$$\int_0^1 \mathrm{K}(x, s)\, h_c^{(0)}(s, y, \lambda) \quad ds \equiv 0,$$

$$\int_0^1 h_c^{(\varpi)}(x, s, 0)\, h_c^{(0)}(s, y, \lambda)\, ds \equiv 0, \qquad \text{pour } \varpi \neq 0,$$

quels que soient x, y et λ.

Tenant compte de l'indépendance des fonctions $\mathrm{B}_i^{(0)}(y)$, il en résultera les identités

$$(64) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 \mathrm{K}(x, s)\, \mathrm{A}_i^{(0)}(s) \quad ds \equiv 0, \\ &\int_0^1 h_c^{\varpi}(x, s, 0)\, \mathrm{A}_i^{(0)}(s)\, ds \equiv 0. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (63) et (64) montrent que la fonction $\mathrm{A}_i^{(0)}(x)$ satisfait à l'équation

$$(65) \qquad c\int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \mathrm{A}_i^{(0)}(s)\, ds = \mathrm{A}_1^{(0)}(x) + \mathrm{A}_2^{(0)}(x) + \ldots + \mathrm{A}_i^{(0)}(x).$$

En faisant varier θ de 1 à q et i de 1 à n_0, on obtient p relations qui constituent un système du type (61) *auquel satisfont les fonctions principales* $\mathrm{A}_i^{(0)}(x)$.

22. Considérons maintenant le système d'équations intégrales linéaire homogène du second ordre

$$(66) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \varphi_1(s)\, ds, \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \varphi_2(s)\, ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_i(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \varphi_i(s)\, ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_{n_1}(x) &= c\int_0^1 \mathrm{H}(x, s)\, \varphi_{n_1}(s)\, ds. \end{aligned} \right.$$

---

[1] *Voir* Bryon Heyvood, *Thèse* déjà citée.

Si l'on suppose $n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_q$, ce système admet les n_θ solutions définies par le Tableau ci-dessous :

Solutions.	φ_1.	φ_2.	...	$\varphi_{n_1-n_\theta}$.	$\varphi_{n_1-n_\theta+1}$.	$\varphi_{n_1-n_\theta+2}$.	$\varphi_{n_1-n_\theta+3}$.	...	φ_{n_1-1}.	φ_{n_1}.
1re...	0	0	...	0	$A_1^{(\theta)}$	$A_2^{(\theta)}$	$A_3^{(\theta)}$	...	$A_{n_\theta-1}^{(\theta)}$	$A_{n_\theta}^{(\theta)}$
2e....	0	0	...	0	0	$A_1^{(\theta)}$	$A_2^{(\theta)}$	...	$A_{n_\theta-2}^{(\theta)}$	$A_{n_\theta-1}^{(\theta)}$
3e....	0	0	...	0	0	0	$A_1^{(\theta)}$	...	$A_{n_\theta-3}^{(\theta)}$	$A_{n_\theta-2}^{(\theta)}$
......	.	.	...	.	.	.	...	...	.....	.....
$n_\theta^{\text{ième}}$..	0	0	...	0	0	0	0	...	0	$A_1^{(\theta)}$

et ceci est vrai pour $\theta = 1, 2, \ldots, q$. Donc le système (66) admet

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p \text{ solutions.}$$

Ces p solutions sont linéairement indépendantes dans le sens donné à ce mot (n° **18**); cela en vertu de l'indépendance des fonctions $A_i^{(\theta)}(x)$.

Si donc l'on considère le système d'équations intégrales linéaire du second ordre

$$(67)\quad \begin{cases} \varphi_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_0^1 H(x,s)\,\varphi_1(s)\,ds, \\ \varphi_2(x) = f_2(x) + \lambda \int_0^1 H(x,s)\,[\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]\,ds, \\ \varphi_3(x) = f_3(x) + \lambda \int_0^1 H(x,s)\,[\varphi_3(s) - \varphi_2(s)]\,ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{n_1}(x) = f_{n_1}(x) + \lambda \int_0^1 H(x,s)\,[\varphi_{n_1}(s) - \varphi_{n_1-1}(s)]\,ds, \end{cases}$$

lequel se réduit au système (66) pour $\lambda = c$, et

$$f_1(x) \equiv f_2(x) \equiv \ldots \equiv f_{n_1}(x) \equiv 0,$$

la déterminante de ce système s'annule pour $\lambda = c$ ainsi que tous ses mineurs d'ordre 1 à $p-1$ inclusivement.

23. Nous nous proposons d'établir maintenant que tous les mineurs d'ordre p de cette déterminante ne sont pas nuls.

Nous commencerons pour cela par exprimer la valeur de cette déterminante $D(\lambda)$ et celle des résolvantes du système (67) en fonction de la déterminante $D_H(\lambda)$ et de la résolvante $\mathcal{H}(x,y,\lambda)$ du noyau unique de Fredholm $H(x,y)$.

Supposons que λ n'annule pas $D_H(\lambda)$ et résolvons la première équation (67) en $\varphi_1(x)$, nous obtenons

$$\varphi_1(x) = f_1(x) + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x,s,\lambda) f(s)\, ds.$$

Remplaçons $\varphi_1(x)$ par cette valeur dans la seconde équation (67) et résolvons-la en $\varphi_2(x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) = f_2(x) - \lambda \int_0^1 \left[\mathcal{H}(x,s,\lambda) + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x,t,\lambda)\, \mathcal{H}(t,s,\lambda)\, dt\right] f_1(s)\, ds \\ + \lambda \int_0^1 \mathcal{H}(x,s,\lambda)\, f_2(s)\, ds.\end{aligned}$$

En opérant de proche en proche et désignant par $f_k(x,y)$ la $(k-1)^{\text{ième}}$ fonction itérée de la fonction $f(x,y)$, on obtient comme résolvantes du système (67)

$$(68) \qquad \mathcal{H}_{\mu\nu}(x,y,\lambda) = (-1)^{\mu-\nu}[\lambda^{\mu-\nu}\mathcal{H}_{\mu-\nu+1}(x,y,\lambda) + \lambda^{\mu-\nu-1}\mathcal{H}_{\mu-\nu}(x,y,\lambda)].$$

Les formules (7″) et (45″) donnent alors

$$-\frac{d\log D(\lambda)}{d\lambda} = n_1 \int_0^1 \mathcal{H}(s,s,\lambda)\, ds = -n_1 \frac{d \log D_H(\lambda)}{d\lambda},$$

d'où, en vertu de (7′) et de (45′),

$$(69) \qquad D(\lambda) = [D_H(\lambda)]^{n_1}.$$

Les formules (69) *et* (68) *donnent les expressions cherchées de la déterminante et des résolvantes du système* (67).

24. D'un autre côté :

1° La formule (62) permet d'écrire

$$(70) \qquad c^k h^{(0)}_{c,k}(x,y,\lambda) = \sum_{j=0}^{j=n_0-1} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_0-j} \Gamma^{k-1}_{j+1} A^{(0)}_i(x)\, B^{(0)}_{i+j}(y)}{\left(1-\dfrac{\lambda}{c}\right)^{j+k}},$$

Γ_p^q désignant le nombre des permutations à répétitions de p lettres q à q.

Cette formule se réduit à (62) pour $k = 1$.

Supposons-la vraie pour k et démontrons qu'elle est encore vraie pour $k+1$. Il suffit de multiplier les deux membres par $ch_c^{(\theta)}(y, z, \lambda)\,dy$, remplacer $h_c^0(y, z, \lambda)$ par son expression (62) dans le second membre et intégrer entre 0 et 1 les deux membres de la nouvelle égalité ainsi obtenue en tenant compte de la biorthogonalité des fonctions $A_i^0(x)$, $B_i^0(y)$. On obtient facilement la formule (70) où k a été remplacé par $k+1$. C. Q. F. D.

2° L'orthogonalité deux à deux des $q+1$ noyaux $h_c^{(\theta)}(x, y, 0)$ et $K(x, y)$ entraîne (¹) l'orthogonalité deux à deux de leurs résolvantes $h_c^{(\theta)}(x, y, \lambda)$ et $\mathcal{K}(x, y, \lambda)$ et par suite les égalités

$$\int_0^1 h_{c,k}^{(\theta)}(x, s, \lambda)\, h_c^{(\varpi)}(s, y, \lambda)\, ds = \int_0^1 h_c^{(\theta)}(x, s, \lambda)\, h_{ck}^{(\varpi)}(s, y, \lambda)\, ds \equiv 0$$

$$(\text{pour } \theta \neq \varpi)$$

et

$$\int_0^1 h_{ck}^{(\theta)}(x, s, \lambda)\, \mathcal{K}(s, y, \lambda)\, ds = \int_0^1 h_c^{(\theta)}(x, s, \lambda)\, \mathcal{K}_k(s, y, \lambda)\, ds \equiv 0;$$

ces égalités permettent d'écrire

$$(71)\quad \begin{aligned} \mathcal{H}_k(x, y, \lambda) &= h_{ck}^{(1)}(x, y, \lambda) + h_{ck}^{(2)}(x, y, \lambda) + \ldots + h_{ck}^{(q)}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_k(x, y, \lambda) \\ &= h_{ck}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_k(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

3° Posons d'une façon générale

$$(72)\quad f_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) = (-1)^{\mu-\nu}[\lambda^{\mu-\nu} f_{\mu-\nu+1}(x, y, \lambda) + \lambda^{\mu-\nu-1} f_{\mu-\nu}(x, y, \lambda)].$$

Les égalités (70) et (71) permettent d'écrire respectivement

$$(73)\quad h_{c,\mu,\nu}^{(\theta)}(x, y, \lambda) = \frac{(-\lambda)^{\mu-\nu-1}}{c^{\mu-\nu}} \sum_{j=0}^{j=n_0-1} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n_0-j} \Gamma_{j+1}^{\mu-\nu} A_i^{(\theta)}(x)\,[B_{i+j}^{(\theta)}(y) - B_{i+j+1}^{(\theta)}(y)]}{\left(1 - \dfrac{\lambda}{c}\right)^{j+\mu-\nu}}$$

[avec la convention $B_{n_\theta+1}^{(\theta)}(y) \equiv 0$] et

$$(74)\quad \begin{aligned} \mathcal{H}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) &= h_{c,\mu,\nu}^{(1)}(x, y, \lambda) + h_{c,\mu,\nu}^{(2)}(x, y, \lambda) + \ldots \\ &\quad + h_{c,\mu,\nu}^{(q)}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda) \\ &= h_{c,\mu,\nu}(x, y, \lambda) + \mathcal{K}_{\mu,\nu}(x, y, \lambda). \end{aligned}$$

(¹) *Voir* BRYON HEYWOOD, *Thèse* déjà citée.

23. Nous sommes maintenant à même d'établir que *tous les mineurs d'ordre p de la déterminante* $D(\lambda)$ *ne sont pas identiquement nuls pour* $\lambda = c$.

Considérons en effet le mineur

$$P\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{pmatrix} \lambda\Bigg) = D^{\overbrace{n_1, n_1, \ldots, n_1}^{p \text{ fois}}}_{\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{p \text{ fois}}} \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{pmatrix} \lambda\Bigg).$$

La formule (44) permet d'écrire

$$P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$
$$= [D_{11}(\lambda)]^{n_1} \begin{vmatrix} \mathcal{H}_{n_1,1}(x_1, y_1, \lambda) & \mathcal{H}_{n_1,1}(x_1, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}_{n_1,1}(x_1, y_p, \lambda) \\ \mathcal{H}_{n_1,1}(x_2, y_1, \lambda) & \mathcal{H}_{n_1,1}(x_2, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}_{n_1,1}(x_2, y_p, \lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathcal{H}_{n_1,1}(x_p, y_1, \lambda) & \mathcal{H}_{n_1,1}(x_p, y_2, \lambda) & \ldots & \mathcal{H}_{n_1,1}(x_p, y_p, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Remplaçons la fonction $\mathcal{H}_{n_1,1}(x, y, \lambda)$ par sa valeur (74). Le déterminant en facteur dans le second membre peut être considéré comme la somme de $(q+1)^p$ déterminants.

Formons un déterminant de cette somme et multiplions-le par $[D_{11}(\lambda)]^{n_1}$. Supposons que ce déterminant partiel contienne : a_1 colonnes de fonctions $h^{(1)}_{c,n_1,1}$, a_2 colonnes de fonctions $h^{(2)}_{c,n_1,1}$, etc., a_q colonnes de fonctions $h^{(q)}_{c,n_1,1}$ et a_{q+1} colonnes de fonctions $\mathcal{K}_{n_1,1}$,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_q + a_{q+1} = p.$$

1° Supposons $a_{q+1} \neq 0$ et, à l'aide de la règle de Laplace, développons le déterminant partiel considéré par rapport aux a_{q+1} colonnes contenant des termes en $\mathcal{K}_{n_1,1}$. Nous obtiendrons $C_p^{a_{q+1}}$ termes correspondants T qui entrent dans la somme composante $P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ ($C_p^{a_{q+1}}$ désigne le nombre de combinaisons simples de p lettres a_{q+1} à a_{q+1}).

Un des termes T est décomposable en deux facteurs : le premier n'est pas infini pour $\lambda = c$, il consiste en un déterminant formé avec des termes des a_{q+1} colonnes contenant $\mathcal{K}_{n_1,1}$ multiplié par la puissance $n_1^{\text{ième}}$ de la déterminante du noyau $K(x, y)$; à chaque premier facteur ainsi déterminé correspond une somme de termes T dont la somme des seconds facteurs est un mineur d'ordre $< q$ du système d'équations (67) où l'on a remplacé $H(x, y)$ par $H(x, y) - K(x, y)$, et l'on sait (n° **22**) que ce mineur est identiquement nul pour $\lambda = c$.

Donc l'ensemble des termes T est identiquement nul pour $\lambda = c$.

2° Supposons $a_{q+1} = 0$. La formule (73) montre que

$$h^{(0)}_{c, n_1, 1}(x, y, \lambda) = u_1(x) v_1(y) + u_2(x) v_2(y) + \ldots + u_{n_0}(x) v_{n_0}(y).$$

Donc, si l'on considère un déterminant partiel tel que $a_0 > n_0$, en développant ce déterminant à l'aide de la règle de Laplace par rapport aux a_0 colonnes contenant $h^{(0)}_{c, n_1, 1}$, on voit qu'il se compose d'une somme de termes identiquement nuls.

Les termes T' de $P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ correspondant aux déterminants partiels considérés dans cette seconde hypothèse sont donc identiquement nuls pour $\lambda = c$.

3° Finalement pour trouver l'expression de $P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| c\right)$, on aura seulement à considérer les valeurs suivantes des nombres a :

$$a_1 = n_1, \qquad a_2 = n_2, \qquad \ldots, \qquad a_q = n_q, \qquad a_{q+1} = 0.$$

Désignons par $D_K(\lambda)$ la fonction déterminante du noyau unique $K(x, y)$, on obtient alors en vertu de (73)

$$P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{matrix} \middle| c\right) = \frac{(-1)^{p(n_1-1)}}{c^p} [D_K(c)]^{n_1} \begin{vmatrix} A_1(x_1) & A_2(x_2) & \ldots & A_p(x_1) \\ A_1(x_2) & A_2(x_2) & \ldots & A_p(x_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ A_1(x_p) & A_2(x_p) & \ldots & A_p(x_p) \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} B_1(y_1) & B_2(y_1) & \ldots & B_p(y_1) \\ B_1(y_2) & B_2(y_2) & \ldots & B_p(y_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ B_1(y_p) & B_2(y_p) & \ldots & B_p(y_p) \end{vmatrix},$$

$A_1(x), A_2(x), \ldots, A_p(x)$ désignant les p fonctions $A_i^{(0)}(x)$ et $B_1(y), B_2(y), \ldots, B_p(y)$ désignant les p fonctions $B_i^{(0)}(y)$.

Les deux déterminants du second membre de cette dernière égalité ne sont pas identiquement nuls, en vertu de l'indépendance, d'une part des p fonctions $A_i(x)$, d'autre part des p fonctions $B_i(y)$.

Donc

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_p \end{pmatrix}\!\!\left| c \right) \lessgtr 0.$$

Cette inégalité établit la proposition énoncée au début du n° **25**.

26. Nous pouvons enfin résoudre le problème objet du présent Chapitre.

D'une part on déduit de la résolution des systèmes d'équations intégrales linéaires homogènes de deuxième espèce (n° **18**) que les fonctions $\varphi_{n_1}(x)$ qui satisfont au système (66) sont des fonctions linéaires homogènes à coefficients constants des p fonctions

$$\mathrm{P}_i(x) = \frac{\mathrm{P}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_p \end{matrix}\middle| c\right)}{\mathrm{P}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_p \end{matrix}\middle| c\right)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

D'autre part les fonctions $\varphi_{n_1}(x)$ sont des fonctions linéaires et homogènes à coefficients constants des p fonctions linéairement indépendantes $\mathrm{A}_i(x)$, puisque (n° **20**) on obtient tous les groupes principaux par une substitution linéaire à coefficients constants effectuée sur l'un d'entre eux.

Or les p fonctions $\mathrm{P}_i(x)$ sont linéairement indépendantes; en effet supposons qu'il existe une relation de la forme

$$a_1 \mathrm{P}_1(x) + a_2 \mathrm{P}_2(x) + \ldots + a_p \mathrm{P}_p(x) \equiv 0,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant des constantes non toutes nulles; faisons $x = x_i$ dans cette équation et remarquons que $\mathrm{P}_i(x_i) = 1$ et $\mathrm{P}_j(x_i) = 0$ pour $i \neq j$, on aura

$$a_i = 0 \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, p,$$

égalités contraires à nos hypothèses.

Nous concluons de tout ceci que les fonctions $\mathrm{P}_i(x)$ se déduisent des fonctions $\mathrm{A}_i(x)$ par une substitution linéaire à coefficients constants, le déterminant de la substitution étant différent de zéro.

Les fonctions $\mathrm{A}_i(x)$ constituant un groupe principal, les fonctions $\mathrm{P}_i(x)$ en constituent un second.

Finalement *on aura tous les groupes principaux relatifs au noyau*

$H(x, y)$, *au nombre fondamental c et à la variable x en effectuant une substitution linéaire à coefficients constants sur les p fonctions* $P_i(x)$, *le déterminant de la substitution étant différent de zéro.*

De même *on aura tous les groupes principaux relatifs au noyau* $H(x, y)$ *au nombre fondamental c et à la variable y en effectuant une substitution linéaire à coefficients constants sur les p fonctions*

$$Q_i(y) = \frac{P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_p \end{matrix} \middle| c\right)}{P\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_p \\ y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_p \end{matrix} \middle| c\right)},$$

le déterminant de la substitution étant différent de zéro.

CHAPITRE V.

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE TROISIÈME ESPÈCE.

27. Nous avons vu (n° **16**) que l'étude des systèmes d'équations intégrales linéaires de troisième espèce

$$(75) \qquad \varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 \frac{K_{\mu\nu}(x, s)}{A(s)} \varphi_\nu(s)\, ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

où $A(s)$ s'annule pour des valeurs isolées de s en nombre fini comprises entre o et 1, est corrélative de celle de l'équation intégrale linéaire de troisième espèce

$$(76) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^m H(x, s)\, \varphi(s)\, ds,$$

les fonctions $f(x)$, $H(x, s)$ étant définies par les relations (39).

En conséquence, nous nous proposons de reprendre ici, en les complétant sur certains points, quelques théorèmes déjà connus concernant l'équation intégrale linéaire unique de troisième espèce. Nous appliquerons ensuite ces théorèmes au système (75) en utilisant les résultats du troisième Chapitre.

28. Nous étudierons tout d'abord ce que devient la solution de l'équation

$$(77) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{K(x,s)}{(s-a)^p} \varphi(s)\, ds$$

quand a est compris entre o et 1.

Nous nous placerons au point de vue de M. E. Picard [1]. Nous supprimerons du champ d'intégration (o — 1) l'intervalle $a - \varepsilon$ à $a + \eta$ (ε et η étant deux quantités positives aussi petites qu'on veut et non nulles); nous désignerons par E le nouveau champ ainsi défini; l'équation de seconde espèce

$$(78) \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E \frac{K(x,s)}{(s-a)^p} \varphi(s)\, ds$$

admettra en général une solution unique. Nous chercherons ensuite s'il existe une ou plusieurs limites de la solution en question quand ε et η tendent vers zéro.

Nous considérerons successivement et uniquement les cas particuliers suivants :

Premier cas. — $p < 1$ et $f(x)$, $K(x,y)$ fonctions bornées et intégrables dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Deuxième cas. — p quelconque et $f(x)$, $K(x,y)$ fonctions holomorphes de x et y dans le domaine complexe à contour simple (S) du plan de ces variables contenant le segment réel (o, 1).

29. Premier cas. — $p < 1$ et $f(x)$, $K(x,y)$ *bornés et intégrables dans le domaine* $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Soit $|K(x,y)| \leqq M$ dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$.

Considérons la série définie par l'égalité (5) et relative à l'équation (78). Désignons-la par $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$. Son terme général de rang ϖ : $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$ a un module moindre que

$$\frac{\lambda^\varpi M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}}{\varpi} \left\{ \left| \int_0^{a-\varepsilon} \frac{ds}{(s-a)^p} \right| + \left| \int_{a+\eta}^1 \frac{ds}{(s-a)^p} \right| \right\}^\varpi,$$

d'après le théorème de M. Hadamard sur la valeur absolue d'un déter-

---

(1) E. Picard, *Annales de l'École Normale*, 1911. Mémoire déjà cité.

minant et d'après la formule élémentaire (¹)

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx < A\int_a^b \varphi(x)\,dx,$$

où $a < b$, A limite supérieure de $f(x)$ et $\varphi(x)$ fonction positive entre a et b.

Or le terme entre accolades est inférieur à

$$A = \frac{1}{1-p}\left(|a^{1-p}| + |\overline{1-a}^{1-p}| + 2|\alpha^{1-p}|\right)$$

pour toutes valeurs de ε et η moindres que α quantité positive inférieure à $|a|$ et $|1-a|$, et la série de modules

$$u_\varpi = \frac{|\lambda|^\varpi M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}} A^\varpi}{\varpi!}$$

est convergente, car

$$\lim_{\varpi=\infty} \frac{u_{\varpi+1}}{u_\varpi} = \lim_{\varpi=\infty}\left\{|\lambda| M A \sqrt{\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)^\varpi}\,\frac{1}{\sqrt{\varpi+1}}\right\} = 0.$$

Il en résulte que la série $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$ est d'une part entière en λ, d'autre part absolument et uniformément convergente, quels que soient ε et η compris entre 0 et α.

On sait de plus que $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$ a une limite quand ε et η tendent vers zéro puisque $p < 1$ et

$$\left|K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}\right| < M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}.$$

On peut donc déterminer un nombre θ_ϖ positif, plus petit que α et tel que, si

$$\theta_\varpi \geqq \varepsilon \geqq \varepsilon_1, \qquad \theta_\varpi \geqq \eta \geqq \eta_1,$$

on ait

$$|T_\varpi(\varepsilon, \eta) - T_\varpi(\varepsilon_1, \eta_1)| \leqq \frac{\mu}{3p+1},$$

μ étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée à l'avance.

(¹) *Voir* E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, p. 7.

Soit θ le plus petit des nombres $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_p$ et supposons

$$\theta \geqq \varepsilon, \qquad \theta \geqq \eta;$$

on aura

$$\left| \sum_0^p \mathrm{T}_\varpi(\varepsilon, \eta) - \sum_0^p \mathrm{T}_\varpi(\varepsilon_1, \eta_1) \right| \leqq \frac{\mu}{3}$$

pour toutes valeurs de ε_1, η_1 satisfaisant aux inégalités

$$\varepsilon_1 < \varepsilon, \qquad \eta_1 < \eta.$$

Comme il résulte de la convergence uniforme de la série $\mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ qu'on peut choisir p tel que simultanément

$$\left| \mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta) - \sum_0^p \mathrm{T}_\varpi(\varepsilon, \eta) \right| \leqq \frac{\mu}{3},$$

$$\left| \mathrm{D}(\lambda, \varepsilon_1, \eta_1) - \sum_0^p \mathrm{T}_\varpi(\varepsilon_1, \eta_1) \right| \leqq \frac{\mu}{3},$$

on en conclura que

$$| \mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta) - \mathrm{D}(\lambda, \varepsilon_1, \eta_1) | \leqq \mu.$$

Cette inégalité met en évidence que la suite $\mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée quand ε et η tendent vers zéro.

On établirait de même que $\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix} \middle| \lambda, \varepsilon, \eta \right)$ mineur du $q^{\text{ième}}$ ordre de $\mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ tend vers une limite finie et déterminée quand ε et η tendent vers zéro.

De là la proposition suivante :

La méthode de Fredholm, pour la résolution de l'équation intégrale linéaire de seconde espèce, s'applique sans modification à la résolution des équations de troisième espèce du type (77) *quand* $p < 1$, et lorsqu'on entend par résoudre (77) chercher la limite de la solution de (78) pour ε et η tendant vers zéro.

30. Nous rattacherons à ce cas un important théorème de Henri Poincaré [1], au sujet de l'équation de Fredholm de seconde espèce à limites infinies.

---

[1] H. POINCARÉ, *Acta mathematica*, t. XXXIII. Mémoire déjà cité.

Considérons l'équation

$$(79) \qquad \psi(y) - \lambda \int_1^{\infty} \mathrm{H}(y, t)\psi(t)\,dt = g(y),$$

où

$$|\mathrm{H}(y, t)| < \mathrm{M}t^{-q},$$

M étant une quantité finie, y et t pouvant varier de 1 à l'∞, q étant un nombre plus grand que 1.

H. Poincaré a montré qu'*avec ces hypothèses l'équation* (79) *est résoluble par la méthode de Fredholm.*

Pour établir à nouveau ce théorème, posons

$$x = \frac{1}{y}, \qquad s = \frac{1}{t},$$

$$\varphi(x) = \psi\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f(x) = g\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\mathrm{H}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{s}\right) = s^q \mathrm{K}(x, s).$$

L'équation (79) peut s'écrire

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \frac{\mathrm{K}(x, s)}{s^{2-q}}\varphi(s)\,ds = f(x)$$

et de plus $|\mathrm{K}(x, s)| < \mathrm{M}$ et $2 - q < 1$.

L'équation (79) est donc ramenée à une équation du type étudié dans le numéro précédent et le théorème de H. Poincaré résulte immédiatement de cette remarque.

31. Deuxième cas. — *p quelconque; $f(x)$ et $\mathrm{K}(x, y)$ fonctions holomorphes de x et y dans* (S).

Désignons encore par $\mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ la fonction déterminante de l'équation (78) et par $\mathrm{D}\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_q \\ y_1, y_2, \ldots, y_q \end{matrix}\middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right)$ son mineur d'ordre q.

La solution de (78) est en général donnée par la formule

$$(80) \qquad \varphi(x, \varepsilon, \eta) = f(x) + \frac{\lambda \displaystyle\int_{\mathrm{E}} \mathrm{D}\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right) f(s)\,ds}{\mathrm{D}(\lambda, \varepsilon, \eta)}.$$

Nous allons chercher ce que devient le second terme de cette somme quand ε et η tendent vers zéro.

32. Nous ferons la remarque préliminaire suivante sur la fonction $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}$.

Si l'on fait $x_i = x_j$ dans cette fonction, elle devient identiquement nulle, car le déterminant qui la définit a deux lignes identiques.

Il en résulte que $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}$ *est divisible par le déterminant de Vandermonde :*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{\varpi-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{\varpi-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \dots\dots \\ 1 & x_\varpi & x_\varpi^2 & \dots & x_\varpi^{\varpi-1} \end{vmatrix},$$

lequel est identique à

$$\begin{vmatrix} 1 & (x_1 - a) & (x_1 - a)^2 & \dots & (x_1 - a)^{\varpi-1} \\ 1 & (x_2 - a) & (x_2 - a)^2 & \dots & (x_2 - a)^{\varpi-1} \\ \cdot & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ 1 & (x_\varpi - a) & (x_\varpi - a)^2 & \dots & (x_\varpi - a)^{\varpi-1} \end{vmatrix}$$

quel que soit a.

Il suffit de développer ce dernier déterminant pour en déduire que $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}$ peut être mis sous la forme

$$\sum_{(i)} (x_{i_1} - a)(x_{i_2} - a)^2 \dots (x_{i_{\varpi-1}} - a)^{\varpi-1} \alpha_{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_\varpi; y_1, y_2, \dots, y_\varpi),$$

(i) désignant une permutation simple $i_0, i_1, i_2, \dots, i_{\varpi-1}$ des ϖ nombres $1, 2, \dots, \varpi$ et $\alpha_{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_\varpi; y_1, y_2, \dots, y_\varpi)$ une fonction holomorphe des 2ϖ variables x_j, y_j.

Il en résulte que si $\varpi \geqq q$ et q entier, on peut écrire

$$(81) \qquad \frac{K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}}{(x_1 - a)^q (x_2 - a)^q \dots (x_\varpi - a)^q} = \sum_{(i)} \frac{A_{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_\varpi; y_1, y_2, \dots, y_\varpi)}{(x_{i_0} - a)^q (x_{i_1} - a)^{q-1} (x_{i_2} - a)^{q-2} \dots (x_{i_{q-1}} - a)},$$

$A_{(i)}$ étant une fonction holomorphe des 2ϖ variables x_j, y_j.

33. Supposons q entier tel que

$$q-1<p\leqq q\leqq \varpi,$$

et considérons le terme général $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$ de $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$.

En raison : 1° de la symétrie en $s_1, s_2, \ldots, s_\varpi$ de l'intégrale multiple entrant dans l'expression de $T_\varpi(\varepsilon, \eta)$; 2° de la non-importance du nom des variables au point de vue de l'intégration, et 3° de la formule (81), on peut écrire

$$\begin{aligned}T_\varpi(\varepsilon, \eta) = \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!}\int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_\varpi \\ \times \frac{B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)(s_{q+1}-a)^{q-p}(s_{q+2}-a)^{q-p}\ldots(s_\varpi-a)^{q-p}}{(s_1-a)^{p-q+1}(s_2-a)^{p-q+2}\ldots(s_q-a)^p},\end{aligned}$$

$B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)$ étant une fonction holomorphe en $s_1, s_2, \ldots, s_\varpi$ dans l'aire (S) du plan de chacune de ces variables.

Cherchons une limite supérieure de $B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)$.

Pour cela reportons-nous à l'égalité (81) et dans $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi\end{pmatrix}$ remplaçons $K(x, y)$ par le développement en série de Taylor limitée :

$$\begin{aligned}K(a, y) + \frac{x-a}{1}K'_x(a, y) + \ldots \\ + \frac{(x-a)^{q-1}}{(q-1)!}K_{x^{q-1}}^{(q-1)}(a, y) + \frac{(x-a)^q}{q!}K_{x^q}^{(q)}[a+\theta(x-a), y)].\end{aligned}$$

Nous considérerons ensuite chaque ligne du déterminant

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi\end{pmatrix}$$

comme la somme de $q+1$ lignes et nous le décomposerons en une somme de $\overline{q+1}^\varpi$ déterminants : les uns seront nuls comme ayant deux lignes identiques, les autres nous permettent de calculer les fonctions $A_{(i)}$.

Les termes des fonctions $A_{(i)}$ que donnent ces derniers déterminants sont chacun en valeur absolue inférieurs à $M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}$ (M désigne ici une limite supérieure de $K(x, y)$ et de ses q premières dérivées par rapport à x pour $0\leqq x\leqq 1$ et $0\leqq y\leqq 1$).

De ces remarques on peut donc conclure que

$$|B_q^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi)|\leqq(q+1)^\varpi M^\varpi \varpi^{\frac{\varpi}{2}}.$$

Posons alors

$$u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta)$$
$$= \int_E ds_{q+1} \int_E ds_{q+2} \ldots \int_E ds_{\varpi} (s_{q+1} - a)^{q-p} (s_{q+2} - a)^{q-p} \ldots (s_{\varpi} - a)^{q-p}$$
$$\times B_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi})$$

et

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) = \sum_{\varpi=q}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!} u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta).$$

Cette série est, d'une part, entière en λ, et d'autre part absolument et uniformément convergente pour ε et η positifs ou nuls inférieurs à $|a|$ et $|1 - a|$ et pour $s_1, s_2, \ldots, s_q$ situés dans le domaine S du plan de chacune de ces variables.

En effet, la valeur absolue de chacun de ses termes est alors inférieure au terme correspondant de la série à termes positifs indépendants de $\varepsilon, \eta, s_1, s_2, \ldots, s_q$,

$$\sum_{\varpi=q}^{\varpi=\infty} \frac{|\lambda|^{\varpi}}{\varpi!} (q+1)^{\varpi} M^{\varpi} \varpi^{\frac{\varpi}{2}},$$

et cette dernière série est convergente, car le rapport d'un terme au précédent

$$|\lambda| (q+1) M \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\varpi}\right)^{\varpi}} \frac{1}{\sqrt{\varpi + 1}}$$

tend vers zéro quand ϖ croît indéfiniment.

Ceci posé, on sait que $u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta)$ fonction holomorphe de $s_1, s_2, \ldots, s_q$ a pour limite $u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0)$ quand ε et η tendent vers zéro. On peut donc déterminer un nombre θ_{ϖ} tel que si ε et η sont inférieurs à θ_{ϖ}, on ait

$$\frac{|\lambda^{\varpi}|}{\varpi!} | u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta) - u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0) | \leq \frac{\mu}{3n+1},$$

μ étant une quantité positive, aussi petite que l'on veut, donnée à l'avance.

Soit θ le plus petit des nombres $\theta_q, \theta_{q+1}, \ldots, \theta_{q+n}$ et supposons

$$\varepsilon \leq \theta, \qquad \eta \leq \theta,$$

on aura

$$\left|\sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n}\frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!}u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta)-\sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n}\frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!}u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0)\right| \leq \frac{\mu}{3}.$$

Comme il résulte de la convergence uniforme de la série

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$$

qu'on peut choisir n de telle sorte qu'on ait simultanément les inégalités

$$\left|U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)-\sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n}\frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!}u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, 0, 0)\right| \leq \frac{\mu}{3},$$

$$\left|U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)-\sum_{\varpi=q}^{\varpi=q+n}\frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!}u_q^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_q, \varepsilon, \eta)\right| \leq \frac{\mu}{3},$$

on en conclura que

$$|U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)-U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)| < \mu,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}} U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) = U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0).$$

Notons enfin que les séries

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta) \quad \text{et} \quad U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$$

sont formées de termes qui sont des fonctions holomorphes de s_1, s_2, ..., s_q dans le domaine (S) du plan de chacune de ces variables. Comme, de plus, ce sont des séries uniformément convergentes, les séries en question sont elles-mêmes des fonctions holomorphes de s_1, s_2, ..., s_q dans les mêmes domaines respectifs (S).

Finalement, *on peut écrire*

$$\begin{aligned}(82)\quad D(\lambda, \varepsilon, \eta) = 1 &+ \sum_{\varpi=1}^{\varpi=q-1}\frac{(-\lambda)^{\varpi}}{\varpi!}\\ &\times\int_E ds_1\int_E ds_2\ldots\int_E ds_{\varpi}\frac{u_{\varpi}^{\varpi}(s_1, s_2, \ldots, s_{\varpi}, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-\varpi+1}(s_2-a)^{p-\varpi+2}\ldots(s_{\varpi}-a)^{p}}\\ &+\int_E ds_1\int_E ds_2\ldots\int_E ds_q\frac{U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-q+1}(s_2-a)^{p-q+2}\ldots(s_q-a)^{p}},\end{aligned}$$

les fonctions $u_\varpi^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, \varepsilon, \eta)$ *et la série entière en* λ

$$U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$$

étant, pour ε *et* η *suffisamment petits positifs ou nuls, des fonctions holomorphes en* $s_1, s_2, \ldots, s_q$ *dans le domaine* (S), *qui tendent respectivement vers les fonctions* $u_\varpi^\varpi(s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, 0, 0)$ *et la série entière en* λ $U_q(s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$ *quand* ε *et* η *tendent vers zéro.*

34. On établirait d'une façon analogue que l'*on peut écrire :*

$$(83)\quad D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda, \varepsilon, \eta\right)$$
$$= \frac{K(x, y)}{(y-a)^p} + \sum_{\varpi=1}^{\varpi=q-1} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!}$$
$$\times \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_\varpi \frac{v_\varpi^\varpi(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-\varpi+1}(s_2-a)^{p-\varpi+1}\ldots(s_\varpi-a)^p}$$
$$+ \sum_{\varpi=1}^{\varpi=q-1} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_\varpi$$
$$\times \sum_{i=1}^{i=\varpi} \frac{v_\varpi^{\varpi, i}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-\varpi+1}\ldots(s_{i-1}-a)^{p-\varpi+i-1}(y-a)^{p-\varpi+i}(s_{i+1}-a)^{p-\varpi+i+1}\ldots(s_\varpi-a)^p}$$
$$+ \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \frac{V_q(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-q+1}(s_2-a)^{p-q+2}\ldots(s_q-a)^p}$$
$$+ \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q$$
$$\times \sum_{i=1}^{i=\varpi} \frac{V_q^i(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{p-q+1}\ldots(s_{i-1}-a)^{p-q+i-1}(y-a)^{p-q+i}(s_{i+1}-a)^{p-q+i+1}\ldots(s_q-a)^p}$$

les fonctions $v_\varpi^\varpi(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, \varepsilon, \eta)$, $v_\varpi^{\varpi i}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, \varepsilon, \eta)$, *et les séries entières en* λ, $V_q(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $V_q^i(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$, *étant, pour* ε *et* η *suffisamment petits positifs ou nuls, des fonctions, holomorphes en* $x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q$ *dans le domaine* S *du plan de ces variables, qui tendent respectivement vers les fonctions* $v_\varpi^\varpi(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, 0, 0)$, $v_\varpi^{\varpi i}(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_\varpi, 0, 0)$, *et vers les séries entières en* λ, $V_q(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$, $V_q^i(x, y, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$ *quand* ε *et* η *tendent vers zéro.*

55. Nous sommes maintenant à même d'étudier la limite de la fonction

$$R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{\lambda \int_E D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right) f(s)\, ds}{D(\lambda, \varepsilon, \eta)},$$

quand ε et η tendent vers zéro.

Remplaçons dans ce quotient les fonctions $D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix} \middle| \lambda, \varepsilon, \eta\right)$ et $D(\lambda, \varepsilon, \eta)$ par leurs expressions (82) et (83). Le numérateur et le dénominateur se composent d'une somme d'intégrales multiples (I) et les fonctions à intégrer par rapport à $s, s_1, s_2, \ldots, s_q$ sont de la forme

$$\text{(F)} \qquad \frac{f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s-a)^{\alpha}(s_1-a)^{\alpha_1}(s_2-\alpha)^{\alpha_2}\ldots(s_q-a)^{\alpha_q}},$$

$f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$ étant holomorphe en $s, s_1, s_2, \ldots, s_q$ et tendant vers $f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, 0, 0)$ quand ε et η tendent vers zéro.

Soient $\beta, \beta_1, \ldots, \beta_q$ les entiers immédiatement supérieurs à α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Nous développerons les fonctions $f(s, s_1, s_2, \ldots, s_q, \lambda, \varepsilon, \eta)$ en série de Taylor limitée aux termes de rang β par rapport à s, puis les termes obtenus en séries de Taylor limitées aux termes de rang β_1 par rapport à s_1, etc., de proche en proche jusqu'à la variable s_q.

Les fractions (F) se décomposent ainsi en une somme de fractions; effectuons sur chacune de ces fractions composantes entrant dans les intégrales (I) les intégrations par rapport à celles des variables s, $s_1, \ldots, s_q$ qui ne figurent pas dans leurs dénominateurs.

Le quotient $R(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$ se présentera alors sous la forme suivante

$$R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{\displaystyle\sum_{(i)} \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \frac{a_{(i)}(x, \lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{i_1}(s_2-a)^{i_2}\ldots(s_q-a)^{i_q}}}{\displaystyle\sum_{(i)} \int_E ds_1 \int_E ds_2 \ldots \int_E ds_q \frac{b_{(i)}(\lambda, \varepsilon, \eta)}{(s_1-a)^{i_1}(s_2-a)^{i_2}\ldots(s_q-a)^{i_q}}}$$

avec la convention $\displaystyle\int_E \frac{ds}{(s-a)^p} = 1$.

(i) représente ici le groupement des q nombres $i_1, i_2, \ldots, i_q$ et les sommes $\sum_{(i)}$ sont étendues à tous les groupements (i) obtenus en donnant à $i_1, i_2, \ldots, i_q$ les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{l} i_1 : 0,\ 1+p-q, \\ i_2 : 0,\ 1+p-q,\ 2+p-q, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ i_q : 0,\ 1+p-q,\ 2+p-q,\ \ldots,\ q+p-q. \end{array}$$

Les fonctions $a_{(i)}(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $b_{(i)}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ sont entières en λ et tendent respectivement vers les fonctions entières en λ, $a_{(i)}(x, \lambda, 0, 0)$, $b_{(i)}(\lambda, 0, 0)$ quand ε et η tendent vers zéro.

Nous désignerons spécialement par $A(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $B(\lambda, \varepsilon, \eta)$ celles des fonctions $a_{(i)}(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $b_{(i)}(\lambda, \varepsilon, \eta)$ qui correspondent au groupement (i),

$$i_1 = 1+p-q, \quad i_2 = 2+p-q, \quad i_3 = 3+p-q, \quad \ldots, \quad i_q = q+p-q,$$

et par $A_1(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$, $B_1(\lambda, \varepsilon, \eta)$ celles qui correspondent au groupement (i),

$$i_1 = 0, \quad i_2 = 2+p-q, \quad i_3 = 3+p-q, \quad \ldots, \quad i_q = q+p-q.$$

Quand ε et η tendent vers zéro $R(x, \lambda, \varepsilon, \eta)$ se présente en général sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Mais, si $\log\frac{\varepsilon}{\eta}$ tend vers un nombre C ni nul, ni infini, le numérateur et le dénominateur de cette fraction croissent en général tous deux, comme la même puissance de $\frac{1}{\varepsilon}$, et l'on a alors :

1° D'une part, si p non entier,

$$\lim R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{A(x, \lambda, 0, 0)}{B(\lambda, 0, 0)};$$

2° D'autre part, si p entier égal à q,

$$\lim R(x, \lambda, \varepsilon, \eta) = \frac{A_1(x, \lambda, 0, 0) + CA(x, \lambda, 0, 0)}{B_1(\lambda, 0, 0) + CB(\lambda, 0, 0)}.$$

En rapprochant ces résultats du cas de $p < 1$ (n° **29**), on peut énoncer le théorème suivant :

La solution $\varphi(x, \varepsilon, \eta)$ [formule (80)] *de l'équation* (78) *tend vers une limite finie quand* ε *tend vers zéro et la quantité* $\log\frac{\varepsilon}{\eta}$ *vers une limite ni nulle, ni infinie* C.

Cette solution dépend homographiquement du paramètre C *quand* p *est entier.*

Si $p \geqq 1$, cette conclusion suppose $K(x, y)$ holomorphe pour x et y dans le domaine (S). Si $p < 1$, elle suppose uniquement cette fonction bornée et intégrable dans (S).

Remarquons enfin que pour $p = 1$ cette proposition n'est autre que le théorème bien connu de M. E. Picard (¹).

36. Nous allons maintenant étudier dans le domaine complexe une classe particulière d'équations intégrales de deuxième espèce ayant des rapports importants avec certaines équations du type (77) où p est entier, et cela en nous plaçant à un point de vue auquel s'est déjà placé M. Lalesco (²) quand $p = 1$.

Soient $g(z)$ et $K(z, t)$ des fonctions holomorphes en z et t dans le domaine (S) du plan de ces variables et soit p un entier. La classe en question a pour type l'équation

$$(z - a)^p [\theta(z) - g(z)] = \lambda \int_\Lambda K(z, t)\, \theta(t)\, dt,$$

où Λ désigne un contour d'extrémités fixes A, B du plan complexe de la variable t, tout entier situé dans le domaine S du plan de cette variable et ne passant pas par le point $t = a$ du domaine S, mais pouvant entourer ce point n_1 fois dans le sens positif et n_2 fois dans le sens négatif.

En posant

$$(z - a)^p\, \theta(z) = \varphi(z),$$

on peut écrire l'équation en question

$$\varphi(z) = (z - a)^p g(z) + \lambda \int_\Lambda \frac{K(z, t)}{(t - a)^p} \varphi(t)\, dt. \tag{84}$$

Pour Λ donné la fonction $\varphi(z)$ est en général définie dans le domaine (S) du plan de la variable z par l'égalité

$$\varphi(z) = (z - a)^p g(z) + \lambda \int_\Lambda \frac{D_\Lambda\left(\begin{matrix} z \\ t \end{matrix} \middle| \lambda\right)}{D_\Lambda(\lambda)} (t - a)^p g(t)\, dt, \tag{85}$$

(¹) E. Picard, *Annales de l'École Normale*, 1911. Mémoire déjà cité.

(²) T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, p. 120.

où

$$(86)\quad D_\Lambda\left(\begin{matrix} z_1, z_2, \ldots, z_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{matrix}\middle|\lambda\right)$$
$$= \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} \frac{(-\lambda)^\varpi}{\varpi!} \int_\Lambda ds_1 \int_\Lambda ds_2 \ldots \int_\Lambda ds_\varpi \frac{K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \ldots, z_q; s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \\ t_1, t_2, \ldots, t_q; s_1, s_2, \ldots, s_\varpi \end{pmatrix}}{(t_1-a)^p \ldots (t_q-a)^p (s_1-a)^p \ldots (s_\varpi-a)^p}.$$

La méthode de résolution de l'équation de Fredholm est, en effet, applicable à l'équation (85), à condition de substituer aux intégrales rectilignes $\int_0^1$ les intégrales curvilignes $\int_\Lambda$.

Nous allons chercher comment varie la fonction $D_\Lambda(\lambda)$ et ses mineurs et par suite la fonction $\varphi(z)$ quand Λ varie, A et B restant fixes.

Partageons pour cela la ligne Λ en deux parties, l'une comprenant toutes les boucles de Λ entourant le point $t = a$, nous l'appellerons C; l'autre constituée par une ligne L joignant A et B sans entourer le point a.

L'égalité (86) nous permet d'écrire

$$D_\Lambda(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} (-\lambda)^\varpi \sum_{\substack{\alpha+\beta=\varpi \\ \beta=\varpi \text{ à } 0 \\ \alpha=0 \text{ à } \varpi}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \int_C ds_1 \int_C ds_2 \ldots \int_C ds_\alpha \int_L dt_1 \int_L dt_2 \ldots \int_L dt_\beta$$
$$\times \frac{K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_\alpha; t_1, t_2, \ldots, t_\beta \\ s_1, s_2, \ldots, s_\alpha; t_1, t_2, \ldots, t_\beta \end{pmatrix}}{(s_1-a)^p \ldots (s_\alpha-a)^p (t_1-a)^p \ldots (t_\beta-a)^p}.$$

Effectuons les intégrations suivant la ligne d'intégration C en appliquant le théorème des résidus et en posant $n = n_1 - n_2$

$$(87)\quad D_\Lambda(\lambda) = \sum_{\varpi=0}^{\varpi=\infty} (-\lambda)^\varpi \sum_{\substack{\alpha+\beta=\varpi \\ \beta=\varpi \text{ à } 0 \\ \alpha=0 \text{ à } \varpi}} \frac{1}{\alpha!\,\beta!} \int_L dt_1 \int_L dt_2 \ldots \int_L dt_\beta$$
$$\times \frac{\left[\dfrac{2n\pi i}{(p-1)!}\right]^\alpha}{(t_1-\alpha)^p (t_2-\alpha)^p \ldots (t_\beta-\alpha)^p}$$
$$\times \left[\frac{\partial^{\alpha(p-1)} K\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_\alpha; t_1, \ldots, t_\beta \\ s_1, \ldots, s_\alpha; t_1, \ldots, t_\beta \end{pmatrix}}{\partial s_1^{p-1}\, \partial s_2^{p-1} \ldots \partial s_\alpha^{p-1}}\right]_{s_i=a}.$$

Étudions le terme général de cette nouvelle série et pour cela formons le Tableau

$$(\mathrm{T})\begin{cases} \dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_1^{\overline{p-1}}}, & \dfrac{(p-1)!}{1!(p-2)!}\dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_1^{\overline{p-2}}\partial y_1}, & \dfrac{(p-1)!}{2!(p-3)!}\dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_1^{\overline{p-3}}\partial y_1^2}, & \dots, & \dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial y_1^{\overline{p-1}}}, \\ \dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_2^{\overline{p-1}}}, & \dfrac{(p-1)!}{1!(p-2)!}\dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_2^{\overline{p-2}}\partial y_2}, & \dfrac{(p-1)!}{2!(p-3)!}\dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_2^{\overline{p-3}}\partial y_2^2}, & \dots, & \dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial y_2^{\overline{p-1}}}, \\ \dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots, \\ \dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_\alpha^{\overline{p-1}}}, & \dfrac{(p-1)!}{1!(p-2)!}\dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_\alpha^{\overline{p-2}}\partial y_\alpha}, & \dfrac{(p-1)!}{2!(p-3)!}\dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial x_\alpha^{\overline{p-3}}\partial y_\alpha^2}, & \dots, & \dfrac{\partial^{\overline{p-1}}}{\partial y_\alpha^{\overline{p-1}}}, \end{cases}$$

constitué par $p\alpha$ symboles de dérivations précédés d'un coefficient numérique. Prenons un symbole et un seul dans chaque ligne et faisons le produit π_j des α termes ainsi choisis comme si les ∂ des numérateurs n'étaient pas des symboles, mais des quantités. Soient S la somme d'un certain nombre de produits π_j et g une fonction des 2α variables $x_1, \dots, x_\alpha, y_1, \dots, y_\alpha$. Nous conviendrons de représenter par Sg l'opération qui consiste : 1° à effectuer successivement sur g la dérivation et la multiplication par un facteur numérique que représente chaque symbole de la somme S; 2° à ajouter ensuite tous les résultats obtenus. Il y a p^α produits π_j et parmi eux

$$\theta = p(p-1)\dots(p-\alpha+1)$$

produits π'_c qui ne contiennent pas deux facteurs d'une même colonne du Tableau T.

Posons

$$\Delta_\alpha^p = \sum_1^{p^\alpha} \pi_j, \qquad \delta_\alpha^p = \sum_1^{\theta} \pi'_c.$$

On pourra écrire

$$(88)\qquad \frac{\partial^{\alpha(p-1)} \mathrm{K}\begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_\alpha; t_1, t_2, \dots, t_\beta \\ s_1, s_2, \dots, s_\alpha; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\beta \end{pmatrix}}{\partial s_1^{\overline{p-1}}\partial s_2^{\overline{p-1}}\dots\partial s_\alpha^{\overline{p-1}}} = \left[\Delta_\alpha^p \mathrm{K}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\alpha; t_1, t_2, \dots, t_\beta \\ y_1, y_2, \dots, y_\alpha; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\beta \end{pmatrix}\right]_{x_i=y_i=s_i}.$$

Remarquons que si l'on prend la dérivée du déterminant

$$\mathrm{K}\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \dots, y_\varpi \end{pmatrix}$$

h fois par rapport à x_i, puis h fois par rapport à x_j et si l'on fait $x_i = x_j$, on obtient un déterminant ayant deux lignes identiques, donc

$$\left[\frac{\partial^{2h} K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}}{\partial x_i^h \, \partial x_j^h}\right]_{x_i = x_j} \equiv 0. \tag{89}$$

De même

$$\left[\frac{\partial^{2h} K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}}{\partial y_i^h \, \partial y_j^h}\right]_{y_i = y_j} \equiv 0. \tag{90}$$

Si maintenant on tient compte de ce que $\delta_\alpha^p = 0$ pour $\alpha > p$, car alors $0 = 0$, l'égalité (87) peut s'écrire, en vertu de (88), (89) et (90),

$$\begin{aligned} D_\Lambda(\lambda) = D_L(\lambda) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \frac{1}{\alpha!}\left[\frac{-2n\pi i\lambda}{(p-1)!}\right]^\alpha \\ \times \left\{ \delta_\alpha^p \left[(y_1-a)^p (y_2-a)^p \ldots (y_\alpha - a)^p \, D_L\left(\begin{matrix} x_1, x_2, \ldots, x_\alpha \\ y_1, y_2, \ldots, y_\alpha \end{matrix} \middle| \lambda\right)\right]\right\}_{x_i = y_i = a}. \end{aligned}$$

On démontrerait de même que

$$\begin{aligned} & D_\Lambda\left(\begin{matrix} z_1, z_2, \ldots, z_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{matrix} \middle| \lambda\right) \\ & = D_L\left(\begin{matrix} z_1, z_2, \ldots, z_q \\ t_1, t_2, \ldots, t_q \end{matrix} \middle| \lambda\right) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=p} \frac{1}{\alpha!}\left[\frac{-2n\pi i\lambda}{(p-1)!}\right]^\alpha \\ & \quad \times \left\{ \delta_\alpha^p \left[(y_1 - a)^p (y_2 - a)^p \ldots (y_\alpha - a)^p \right.\right. \\ & \qquad \left.\left. \times D_L\left(\begin{matrix} z_1, z_2, \ldots, z_q;\ x_1, x_2, \ldots, x_\alpha \\ t_1, t_2, \ldots, t_q;\ y_1, y_2, \ldots, y_\alpha \end{matrix} \middle| \lambda\right)\right]\right\}_{x_i = y_i = a}. \end{aligned}$$

De ces deux dernières égalités et des formules (85) et (86) résulte le théorème suivant (¹) :

La solution (85) de l'équation (84) dans le domaine complexe (S) du plan z est une fonction polymorphe, en général quotient de deux polynomes de degré p par rapport à un paramètre entier arbitraire n.

(¹) Ce théorème a été inséré aux *Comptes rendus*, t. 154, séance du 25 mars 1912, p. 808.

Ce théorème n'est au fond qu'une nouvelle conséquence de la propriété de la fonction $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}$ qui a fait l'objet du n° **32**.

Remarquons qu'il s'applique également à l'équation

$$(z-a)^p[\theta(z)-g(z)] = \lambda \int_A^{\cdot} K(z,t)\,\theta(t)\,dt,$$

qui a même résolvante que l'équation (84). En faisant $p=1$ dans cette dernière équation, on retrouve alors le théorème énoncé par M. Lalesco (¹).

37. La conclusion du n° **29** concernant les noyaux de la forme $\frac{K(x,y)}{(y-a)^p}$ où $p<1$ et $|K(x,y|<M$ s'étendra facilement aux noyaux de la forme $\frac{K(x,y)}{(y-a_1)^{p_1},\ldots,(y-a_k)^{p_k}}$ si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sont compris entre 0 et 1 et $p_1, p_2, \ldots, p_k$ également inférieurs à 1.

Si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont quelconques et $K(x,y)$ holomorphe en x et y dans le domaine (S) contenant le segment réel $(0, 1)$, on étendra également aux noyaux $\frac{K(x,y)}{(y-a_1)^{p_1},\ldots,(y-a_k)^{p_k}}$ les conclusions du n° **33**.

En effet, soient alors $q_1, q_2, \ldots, q_k$ les entiers immédiatement supérieurs aux nombres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Nous avons vu (n° **32**) que $K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_\varpi \\ y_1, y_2, \ldots, y_\varpi \end{pmatrix}$ était divisible par le déterminant de Vandermonde en $x_1, x_2, \ldots, x_\varpi$, lequel est à un facteur constant près égal à

$$\begin{vmatrix} P_1(x_1) & P_2(x_1) & \ldots & P_\varpi(x_1) \\ P_1(x_2) & P_2(x_2) & \ldots & P_\varpi(x_2) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ P_1(x_\varpi) & P_2(x_\varpi) & \ldots & P_\varpi(x_\varpi) \end{vmatrix},$$

$P_1(x), \ldots, P_\varpi(x)$ étant ϖ polynomes en x linéairement indépendants que nous choisirons ainsi : les $q_1+q_2+\ldots+q_k=\theta$ polynomes

$$Q_i^j(x) = (x-a_1)^{q_1}\ldots(x-a_{i-1})^{q_{i-1}}(x-a_i)^{j-1}(x-a_{i+1})^{q_{i+1}}\ldots(x-a_k)^{q_k}$$
$$(i \text{ variant de } 1 \text{ à } k \text{ et } j \text{ de } 1 \text{ à } q_i)$$

(¹) T. Lalesco, *Introduction de la théorie des équations intégrales* (Ouvrage déjà cité).

et les $\varpi - \theta$ polynomes

$$R_l(x) = (x-a_1)^{q_1}\dots(x-a_k)^{q_k}x^{l-1}$$
$$(l \text{ variant de } 1 \text{ à } \varpi - \theta).$$

Cette remarque faite, il suffira de répéter en quelque sorte les raisonnements des nos **31** à **35** inclusivement pour établir la proposition suivante :

Soit E *le champ*

$$(0 \text{ à } a_1-\varepsilon_1,\ a_1+\eta_1 \text{ à } a_2-\varepsilon_2,\ a_2+\eta_2 \text{ à } a_3-\varepsilon_3,\ \dots,\ a_k+\eta_k \text{ à } 1)$$

et soit $\varphi(x, \mathrm{E})$ *la solution de l'équation*

$$\varphi(x,\mathrm{E}) = f(x) + \lambda \int_{\mathrm{E}} \frac{\mathrm{K}(x,s)}{(s-a_1)^{p_1}(s-a_2)^{p_2}\dots(s-a_k)^{p_k}}\varphi(s,\mathrm{E})\,ds,$$

quand λ *n'est pas nombre fondamental.*

La fonction $\varphi(x, \mathrm{E})$ *tend en général vers une limite fonction méromorphe de* λ *quand le champ* E *et les quantités* $\log\frac{\varepsilon_1}{\eta_1}$, $\log\frac{\varepsilon_2}{\eta_2}$, …, $\log\frac{\varepsilon_k}{\eta_k}$ *tendent respectivement vers le champ* (0 — 1) *et vers les constantes finies non nulles* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_k$.

La limite de $\varphi(x, \mathrm{E})$ *est homographique par rapport à ceux des paramètres* $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \dots, \mathrm{C}_k$ *dont les indices sont égaux à ceux des exposants* $p_1, p_2, \dots, p_k$ *entiers; elle est indépendante des autres.*

Si $p \geqq 1$, cette proposition suppose $\mathrm{K}(x,y)$ holomorphe pour x et y dans le domaine (S) ; si $p < 1$, elle suppose uniquement cette fonction bornée et intégrable dans (S).

38. Si $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des entiers et $a_1, a_2, \dots, a_k$ des points réels ou non du domaine (S), si la fonction $f(z)$ admet les points $a_1, a_2, \dots, a_k$ comme zéros d'ordres respectifs $p_1, p_2, \dots, p_k$ et si les points A et B extrémités d'une ligne Λ toute entière dans (S) et ne passant pas par $a_1, a_2, \dots, a_k$ sont fixes, on généralisera d'autre part la conclusion du no **36** en montrant, par des raisonnements calqués sur ceux de ce numéro, que la *solution de l'équation intégrale linéaire de deuxième* *espèce*

$$\varphi(z) = f(z) + \int_\lambda \frac{K(z, t)}{(t-a_1)^{p_1} \dots (t-a_k)^{p_k}} \varphi(t)\, dt,$$

où λ n'est pas nombre fondamental, est dans (S) *une fonction polymorphe dépendant de k nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$; de plus, cette solution considérée comme fonction de n_i est en général le quotient de deux polynomes de degré p_i.*

39. Élargissons maintenant les conditions restrictives imposées au domaine (S) et aux fonctions $K(x, y)$ et $f(x)$.

Soient m contours simples Σ_i (i variant de 1 à m) qui limitent des domaines S_i du plan complexe et qui ne se coupent pas.

Soient Λ_i et L_i deux lignes d'extrémités A_i et B_i, et l_i un segment d'axe réel tout entier situés dans le domaine S_i.

Soient enfin $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des points situés dans les domaines S_i et par où ne passent point les lignes Λ_i et L_i. Dans ce qui va suivre nous pourrons, sans nuire à la généralité des raisonnements, supposer toujours $a_1, a_2, \ldots, a_k$ réels.

Considérons deux fonctions $K'(z, t)$ et $f'(z)$ que nous supposerons d'une part holomorphes en z et t pour toutes les valeurs de z et t intérieures au domaine $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_m$ du plan de ces variables et d'autre part ne pouvant présenter que des discontinuités finies quand z ou t traversent $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_m$.

Tous les raisonnements des n^{os} **28** à **35** inclus s'appliquent si l'on substitue à $K(x, y)$, $f(y)$ respectivement $K'(x, y)$ et $f'(y)$ et au champ d'intégration $(0-1)$ le champ $l_1 + l_2 + \ldots + l_m$. Tous ceux du n° **36** s'appliquent également si l'on substitue à $K(z, t)$, $f(t)$ respectivement $K'(z, t)$ et $f'(t)$, $f'(t)$ admettant les points $a_1, a_2, \ldots, a_k$ comme zéros d'ordres respectifs $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et si l'on pose $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \ldots + \Lambda_m$ et $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_m$.

En reprenant tous ces raisonnements, on voit qu'ils subsistent encore quand les points A_i, B_i ou les extrémités de l_i sont sur le contour Σ_i et quand deux contours consécutifs Σ_i, Σ_{i+1} ont une partie commune.

40. Ces remarques faites, nous allons revenir à l'étude des systèmes d'équations intégrales linéaires (75) et voir comment se généralisent les propositions que nous avons obtenues dans ce Chapitre concernant l'équation unique.

Soit (S_1) un domaine complexe limité par un contour simple Σ_1 et tout entier compris entre les deux parallèles à l'axe imaginaire qui passent par les points réels o et 1. Nous ne nuirons pas à la généralité des raisonnements qui vont suivre en supposant que Σ_1 passe par les points o et 1.

Nous désignerons par (S_i) le domaine obtenu en faisant subir au domaine (S_1) dans la direction de l'axe réel positif une translation de longueur $i-1$ et nous désignerons respectivement par A_i, Λ_i le point et la ligne correspondant au point A_1 et à la ligne Λ_1 après la translation en question.

Soient m^2 noyaux $K_{\mu\nu}(x,y)$ (μ et ν variant de 1 à m) et $f_\mu(x)$ m fonctions holomorphes pour toutes valeurs de x et y comprises à l'intérieur du domaine (S_1) et sur son contour.

Soit enfin $A(y) = (y-a_1)^{p_1}(y-a_2)^{p_2}\dots(y-a_k)^{p_k}$, $a_1, a_2, \dots, a_k$ étant des points réels intérieurs à (S_1).

Les relations

$$H(x,y) = \frac{K_{\mu\nu}(x-\mu+1,\, y-\nu+1)}{A(y-\nu+1)},$$
$$f(x) = f_\mu(x-\mu+1),$$

valables pour toutes valeurs de x intérieures à S_μ et pour toutes valeurs de y intérieures à S_ν, permettent (n° **16**) :

1° De substituer à la résolution du système (75) pour $0 \leqq x \leqq 1$ la résolution de l'équation (76) pour $0 \leqq x \leqq m$, équation où la fonction $H(x,y)$ devient infinie comme $[y-\overline{a_j+\nu-1}]^{p_j}$ quand $y = a_j+\nu-1$;

2° De substituer à la résolution, pour z dans S_1, du système

$$\varphi_\mu(z) = f_\mu(z) + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \int_{\Lambda_1} \frac{K_{\mu\nu}(z,t)}{A(t)} \varphi_\nu(t)\, dt \qquad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

[où Λ_1 désigne une ligne de (S_1) d'extrémités A_1B_1, ne passant pas par $a_1, a_2, \dots, a_k$ et $f_\mu(z)$ une fonction qui admet respectivement $p_1, p_2, \dots, p_k$ fois les zéros $a_1, a_2, \dots, a_k$] la résolution pour z dans

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_m$$

de l'équation

$$\varphi(z) = f(z) + \lambda \int_{\Lambda} \mathrm{H}(z, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{91}$$

où $\mathrm{H}(z, t)$ admet en général p_j fois les m pôles $t = a_j + \nu - 1$, où la fonction $f(z)$ admet p_j fois les points $a_j + \nu - 1$ pour zéros et où $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_m$ se compose de tronçons Λ_i d'extrémités fixes A_i, B_i ne passant pas par les pôles de $\mathrm{H}(z, t)$.

Les remarques des paragraphes **58** et **59** appliquées aux équations (76) et (91) nous permettent alors d'énoncer les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Soit* E *le champ* (0 à $a_1 - \varepsilon_1$, $a_1 + \eta_1$ à $a_2 - \varepsilon_2$, $a_2 + \eta_2$ à $a_3 - \varepsilon_3$, ..., $a_k + \eta_k$ à 1) *et soit* $\varphi_1(x, \mathrm{E})$, $\varphi_2(x, \mathrm{E})$, ..., $\varphi_m(x, \mathrm{E})$ *la solution du système d'équations*

$$\varphi_\mu(x, \mathrm{E}) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_{\mathrm{E}} \frac{\mathrm{K}_{\mu\nu}(x, s)}{(s - a_1)^{p_1} \ldots (s - a_k)^{p_k}}\, \varphi_\nu(s, \mathrm{E})\, ds$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

quand λ *n'est pas nombre fondamental.*

Les m fonctions $\varphi_1(x, \mathrm{E})$, ..., $\varphi_m(x, \mathrm{E})$ *tendent en général vers des limites finies fonctions méromorphes de* λ *quand le champ* E *et les quantités* $\log \frac{\varepsilon_1}{\eta_1}$, $\log \frac{\varepsilon_2}{\eta_2}$, ..., $\log \frac{\varepsilon_k}{\eta_k}$ *tendent respectivement vers le champ* (0, 1) *et vers les constantes finies non nulles* C_1, C_2, ..., C_k.

Les limites de $\varphi_1(x, \mathrm{E})$, $\varphi_2(x, \mathrm{E})$, ..., $\varphi_m(x, \mathrm{E})$ *sont les quotients de deux polynomes de degré m par rapport à ceux des paramètres* C_1, C_2, ..., C_k *dont les indices sont égaux à ceux des exposants* p_1, p_2, ..., p_k *entiers; elle est indépendante des autres.*

Si un des nombres p_1, p_2, ..., p_k est ≥ 1, cette proposition suppose que les fonctions $\mathrm{K}_{\mu\nu}(x, y)$ sont holomorphes pour x et y dans le domaine (S_1); si tous ces nombres sont < 1, elle suppose uniquement ces fonctions bornées et intégrables dans (S_1).

Théorème II. — *Le système d'équations intégrales de seconde* *espèce*

$$\varphi_\mu(z) = f_\mu(z) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_{\Lambda_1} \frac{K_{\mu\nu}(z, t)}{(t-a_1)^{p_1}(t-a_2)^{p_2}\dots(t-a_k)^{p_k}} \varphi_\nu(t)\, dt$$
$$(\mu = 1, 2, \dots, m),$$

où

$$f_\mu(z) = (z-a_1)^{p_1}(z-a_2)^{p_2}\dots(z-a_k)^{p_k} g_\mu(z),$$

$p_1, p_2, \dots, p_k$ entiers et λ non fondamental, a pour solution dans (S_1) m fonctions polymorphes $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_m(z)$. Ces m fonctions dépendent de k nombres entiers $n_1, n_2, \dots, n_k$, et, considérées comme fonctions de n_i, elles sont en général le quotient de deux polynomes de degré mp_i.

NOTE SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES.

41. Rappelons *quelques propriétés bien connues des équations différentielles linéaires.*

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + p_n(x) u = 0. \tag{92}$$

Soient $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, n solutions linéaires indépendantes de cette équation; faisons-leur correspondre respectivement les fonctions $v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)$ définies par l'égalité

$$v_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}, \tag{93}$$

où $\Delta(x)$ désigne le déterminant

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ \frac{du_1}{dx} & \frac{du_2}{dx} & \dots & \frac{du_n}{dx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dx^{n-1}} & \frac{d^{n-1}u_2}{dx^{n-1}} & \dots & \frac{d^{n-1}u_n}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}$$

et $\Delta_i(x)$ le mineur de ce déterminant correspondant au terme de la colonne i de la dernière ligne.

On sait que

$$(94) \qquad \Delta(x) = Ce^{-\int p_1(x)\,dx},$$

où C désigne une constante et que $v_1(y)$, $v_2(y)$, ..., $v_n(y)$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation adjointe (¹) à l'équation (92)

$$(95) \qquad (-1)^n \frac{d^n v}{dy^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}[p_1(y)v]}{dy^{n-1}} + \ldots + \frac{d^2[p_{n-2}(y)v]}{dy^2} - \frac{d[p_{n-1}(y)v]}{dy} + p_n(y)v = 0.$$

Nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que l'équation (92) admet, dans le champ (S) de la variable complexe x contenant le segment réel (0, 1), n solutions holomorphes u_1, u_2, ..., u_n; le théorème de Fuchs permet (²) de fixer les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ pour qu'il en soit ainsi.

Nous supposerons, en outre, que la fonction $p_1(x)$ est holomorphe dans le domaine (S). Il résultera de la formule (94) que $\frac{1}{\Delta(x)}$ sera holomorphe dans le même domaine.

Les formules (93) montrent alors que les p fonctions $v_1(x)$, $v_2(x)$, ..., $v_n(x)$ sont holomorphes dans le domaine (S) et que, par suite, la fonction

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} u_i(x)\, v_i(y)$$

est holomorphe en x et y dans le domaine (S) du plan de chacune de ces variables.

Cette fonction $z(x, y)$ joue un rôle analogue par rapport aux deux équations (92) et (95). Considérée comme fonction de x par exemple, elle est, dans le domaine (S), la solution de l'équation (92) qui, pour

(¹) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, Liv. IV, Chap. V.

(²) G. Humbert, *Cours d'Analyse*, t. II, 3ᵉ Partie, Chap. V.

$x=y$, s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-2$ inclusivement, la dérivée d'ordre $n-1$ étant égale à l'unité.

Cauchy a montré que la fonction $z(x,y)$ est telle que la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)u = V(x),$$

pour x compris dans (S), est donnée par la formule

$$u(x) = U(x) + \int_0^x z(x,t)\,V(t)\,dt, \tag{96}$$

$U(x)$ désignant l'intégrale générale de l'équation (92).

42. Considérons maintenant la *classe d'équations intégro-différentielles linéaires*

$$\frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)u = \psi(x) + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \int_0^1 k_{\nu+1}(x,s)\frac{d^\nu u}{ds^\nu}\,ds,$$

les fonctions $\psi(x)$ et $k_{\nu+1}(x,s)$ étant holomorphes en x dans le domaine (S).

La formule (96) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} u(x) = U(x) &+ \int_0^x z(x,t)\psi(t)\,dt \\ &+ \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \int_0^1 \left[\int_0^x z(x,t)\,k_{\nu+1}(t,s)\,dt\right] \frac{d^\nu u}{ds^\nu}\,ds. \end{aligned}$$

Posons

$$U(x) + \int_0^x z(x,t)\psi(t)\,dt = g(x)$$

et

$$\int_0^x z(x,t)\,k_{\nu+1}(t,s)\,dt = h_{\nu+1}(x,s).$$

Ces fonctions sont holomorphes par rapport à x dans le domaine (S) en vertu des hypothèses faites et *la fonction $u(x)$ est définie*, dans ce domaine, *par l'équation intégro-différentielle suivante rentrant dans le type étudié par M. Boutnisky* (¹) :

$$(97) \qquad u(x) = g(x) + \lambda \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \int_0^1 h_{\nu+1}(x, s) \frac{d^\nu u(s)}{ds^\nu} ds.$$

43. Nous allons donner une *nouvelle méthode pour résoudre cette équation.*

Dérivons $m - 1$ fois les deux membres de cette équation par rapport à x et posons

$$\frac{d^\mu u(x)}{dx^\mu} = \varphi_{\mu+1}(x), \qquad \frac{d^\mu h_\nu(x, s)}{dx^\mu} = H_{\mu+1,\nu}(x, s), \qquad \frac{d^\mu g(x)}{dx^\mu} = f_{\mu+1}(x).$$

L'équation (97) jointe aux $m - 1$ équations ainsi obtenues forme le système d'équations

$$\varphi_\mu(x) = f_\mu(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \int_0^1 H_{\mu\nu}(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

système d'équations intégrales linéaires de deuxième ou de troisième espèce que nous avons étudié dans les Chapitres précédents.

NOTE SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES DE PREMIÈRE ESPÈCE.

44. Dans l'étude que nous avons faite (nº **16**) des systèmes d'*équations intégrales linéaires du type* (36), nous avons laissé de côté le *cas où* A (x) *est identiquement nul.*

Pour compléter cette étude, nous allons indiquer sommairement les principales particularités qui se présentent dans ce cas.

Supposons donc que A $(x) \equiv 0$ ainsi que ses mineurs d'ordre

(¹) Boutnisky, *Bull. des Sciences math.*, 1908. Mémoire déjà cité.

$p+1,\ p+2,\ \ldots,\ m$, mais que le mineur

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1p}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{p1}(x) & \ldots & a_{pp}(x) \end{vmatrix}$$

ne s'annule que pour des valeurs particulières isolées dans le domaine $0 \leqq x \leqq 1$.

1° Supposons $\theta_{p+1}(x), \theta_{p+2}(x), \ldots, \theta_m(x)$ connus dans les p premières équations du système; elles peuvent être considérées comme un système Σ d'équations intégrales linéaires d'ordre p en $\theta_1(x)$, $\theta_2(x), \ldots, \theta_p(x)$, système de seconde ou de troisième espèce du type étudié dans la seconde Partie.

2° Supposons $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_m(x)$ remplacés par leurs valeurs sous les signes $\int_0^1$; les m équations du système proposé forment un système d'équations linéaires en $\theta_1(x), \theta_2(x), \ldots, \theta_m(x)$ qui seront compatibles si $m-p$ conditions de la forme

$$\sum_{\nu=p+1}^{\nu=m} \int_0^1 \mathrm{H}_{\mu\nu}(x,s)\,\theta_\nu(s)\,ds = f_\mu(x) \qquad (\mu = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ m)$$

sont satisfaites. Appelons Σ' ce système de conditions et supposons que

$$\mathrm{H}_{\mu\nu}(x,s) \equiv 0$$

pour tous les systèmes de valeurs

$$\begin{array}{llll} \nu = p+q+1, & p+q+2, & \ldots, & m. \\ \mu = p+1, & p+2, & \ldots, & m. \end{array}$$

Les q premières équations du système Σ' forment un système d'équations intégrales linéaires en $\theta_{p+1}(x), \theta_{p+2}(x), \ldots, \theta_{p+q}(x)$ que nous désignerons par Σ_1.

Les $m - \overline{p+q} = r$ dernières équations du système Σ' constituent r conditions auxquelles sont astreintes les p fonctions $\theta_{p+1}(x)$, $\theta_{p+2}(x), \ldots, \theta_{p+q}(x)$. Nous désignerons l'ensemble de ces r conditions par Σ_2.

Pour résoudre le système (36) nous aurons à résoudre d'abord le système Σ_1, à vérifier ensuite que les solutions de ce système, si elles existent, satisfont aux conditions Σ_2; enfin, si les conditions Σ_2 sont remplies, à résoudre le système Σ où nous choisirons arbitrairement les r fonctions $\theta_{p+q+1}(x)$, $\theta_{p+q+2}(x)$, ..., $\theta_m(x)$.

45. En dehors des conditions Σ_2, l'existence des solutions du système (36) est donc subordonnée à l'existence des solutions du système Σ_1 et il est facile de voir qu'un tel système n'a pas toujours de solution.

Définissons, en effet, les fonctions

$$H(x, s) = H_{\mu\nu}(x - \mu + 1, s - \nu + 1) \qquad \text{pour} \qquad 0 < \frac{x - \mu + 1}{s - \nu + 1} < 1,$$

$$f(x) = f_\mu(x - \mu + 1) \qquad \text{pour} \qquad 0 < x - \mu + 1 < 1,$$

μ et ν variant de $p + 1$ à $p + q$, et considérons l'équation intégrale linéaire de première espèce

$$\int_p^{p+q} H(x, s)\,\theta(s)\,ds = f(x). \tag{98}$$

On verra facilement par un raisonnement calqué sur celui du n° **16** que, à toute solution du système Σ_1, correspond une solution de (98) et réciproquement, ces solutions étant liées par les relations

$$\theta(x) = \theta_\mu(x - \mu + 1) \qquad \text{pour} \qquad 0 < x - \mu + 1 < 1.$$

Or on sait que l'équation (98) n'a pas toujours de solution.

46. Plaçons-nous, pour terminer, à un point de vue particulier et considérons la fonction $\theta(x)$ qui satisfait à (98) comme la limite pour $\lambda = \infty$ de la fonction $\theta(x, \lambda)$ qui satisfait à l'équation

$$-\theta(x, \lambda) + \lambda \int_p^{p+q} H(x, s)\,\theta(s, \lambda)\,ds = \lambda f(x)$$

et supposons $H(x, s)$ de la forme

$$H(x, s) = X_1(x)\,S_1(s) + X_2(x)\,S_2(s) + \ldots + X_\varpi(x)\,S_\varpi(s).$$

Nous allons, dans ces hypothèses, établir la condition pour que la limite $\theta(x)$ existe et déterminer cette solution.

La déterminante $D(\lambda)$ du noyau $H(x,y)$ est un polynome de degré ϖ en λ qui peut s'écrire

$$D(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + \alpha_\varpi \lambda^\varpi,$$

et son mineur du premier ordre $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right)$ est un polynome de degré $\overline{\varpi - 1}$ en λ qui peut s'écrire

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle| \lambda\right) = \beta_0(x,y) + \beta_1(x,y)\lambda + \ldots + \beta_{\varpi-1}(x,y)\lambda^{\overline{\varpi-1}}.$$

Par suite, dans le cas général,

$$\theta(x,\lambda) = -\lambda f(x) - \frac{\lambda^2 \int_p^{p+q} D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}\middle| \lambda\right) f(s)\, ds}{D(\lambda)}$$

se présentera sous la forme d'un quotient de deux polynomes en λ : le numérateur est de degré $\varpi + 1$, le dénominateur de degré ϖ.

Quand λ croît indéfiniment, $\theta(x,\lambda)$ tend en général vers l'infini.

Pour que $\theta(x,\lambda)$ ait une limite finie, il faut que

$$(99) \qquad f(x)\alpha_\varpi + \int_p^{p+q} \beta_{\varpi-1}(x,s) f(s)\, ds = 0,$$

et alors $\theta(x,\lambda)$ a en général une limite quand λ croît indéfiniment, savoir

$$\theta(x) = \frac{-f(x)\alpha_{\varpi-1} - \int_p^{p+q} \beta_{\varpi-2}(x,s) f(s)\, ds}{\alpha_\varpi}.$$

47. Notons de plus que l'étude des équations intégrales linéaires du second ordre sans second membre permet d'analyser la condition (99) : elle veut dire que $f(x)$ est une fonction principale du noyau $\beta_{\varpi-1}(x,s)$ relative au nombre fondamental $\left(-\frac{1}{\alpha_\varpi}\right)$.

Par suite il n'existera de fonction $f(x)$ différente de zéro satisfaisant à cette condition que si

$$\Delta\left(-\frac{1}{\alpha_{\varpi}}\right) = 0, \tag{100}$$

$\Delta(\lambda)$ désignant la déterminante du noyau $\beta_{\varpi-1}(x, s)$.

Il convient de remarquer que (100) *est une condition dépendant uniquement du noyau* H(x, s) *de l'équation* (98).