JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CARTAN

Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 10 (1914), p. 149-186.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10__149_0>

Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane;

PAR E. CARTAN.

J'ai indiqué dans un Mémoire précédent (¹) comment on pouvait former tous les groupes linéaires continus ne laissant invariante aucune multiplicité plane. Dans ces groupes linéaires les paramètres et les variables étaient supposés complexes. Dans ce qui suit, je m'occupe du cas où les paramètres sont réels, ainsi que les variables. Je suis amené d'abord à résoudre le même problème pour le cas intermédiaire où, les paramètres étant réels, les variables sont complexes. Chaque groupe $\mathcal{G}$ de cette dernière espèce à n variables complexes donne alors naissance, soit à un groupe réel G à n variables réelles, soit à un groupe réel G à $2n$ variables réelles; on est dans un cas ou dans l'autre suivant que le groupe $\mathcal{G}$ laisse ou non invariante une *antiinvolution* de première espèce.

J'indique comme application la composition des groupes projectifs réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 8 variables (homogènes) au plus; je donne les indications permettant d'étendre ces résultats jusqu'à 12 variables, et il n'y aurait aucune difficulté à les étendre à un plus grand nombre de variables.

Les résultats obtenus peuvent avoir aussi leur application dans la question de la représentation des points imaginaires par des figures

(¹) *Bull. Soc. math. France*, t. XLI, 1913, p. 53-96.

réelles (¹). D'une manière plus précise, le problème que les résultats obtenus permettraient de résoudre est le suivant :

Étant donné, dans un espace à points complexes, un groupe projectif continu Γ, *ne laissant invariante aucune multiplicité plane complexe, représenter, dans un autre espace réel, les points complexes de l'espace donné par des figures réelles, de telle sorte que par cette représentation le groupe* Γ *devienne, dans le nouvel espace, un groupe projectif réel ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle.*

Ce problème admet une infinité de solutions. J'indique les plus simples dans le cas du groupe projectif général, du groupe quaternionien et des groupes hermitiens de l'espace complexe.

I.

Nous désignerons par la lettre $\mathcal{G}$ un groupe linéaire et homogène continu à variables complexes et à paramètres *réels;* ce groupe sera dit d'ordre (réel) r si ses transformations dépendent de r paramètres réels arbitraires. Nous désignerons par la lettre Γ un groupe linéaire et homogène continu à variables complexes et paramètres *complexes;* ce groupe sera dit d'ordre (complexe) r si ses transformations dépendent de r paramètres complexes arbitraires.

La transformation infinitésimale la plus générale d'un groupe $\mathcal{G}$ d'ordre r est de la forme

$$e_1 Z_1 f + e_2 Z_2 f + \ldots + e_r Z_r f, \tag{1}$$

où e_1, $e_2, \ldots, e_r$ sont des nombres réels arbitraires, et où $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ désignent r transformations infinitésimales qui ne sont liées par aucune relation linéaire à coefficients réels. Les coefficients de structure c_{iks} du groupe sont réels.

(¹) Citons pour orienter le lecteur dans les recherches récentes relatives à cette question, deux Mémoires déjà anciens de C. Segre, *Atti della R. Accad. Torino*, t. XXV, 1889-1890, p. 276, 430, 592, et *Math. Ann.*, t. XL, 1892, p. 413.

A ce groupe $\mathcal{G}$ on peut associer le groupe Γ dont la transformation infinitésimale la plus générale est définie par la formule (1), en convenant d'y attribuer à $e_1, e_2, \ldots, e_r$ des valeurs *complexes* arbitraires. Ce groupe Γ peut être d'ordre (complexe) r, mais il peut aussi être d'ordre inférieur à r. Ce dernier cas se présentera quand il existera entre $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ une ou plusieurs relations linéaires à coefficients imaginaires.

Comme les transformations $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ ne sont définies qu'à une substitution linéaire près à coefficients réels, on peut supposer que toutes les relations linéaires à coefficients imaginaires qui existent entre $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ se déduisent des relations

$$\left.\begin{array}{l} Z_{s+1} f + i Z_{s+2} f = 0, \\ Z_{s+3} f + i Z_{s+4} f = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_{r-1} f + i Z_r f \;\; = 0. \end{array}\right\} \quad (r - s \text{ pair}).$$

Il est alors facile de voir que la transformation infinitésimale

$$e_{s+1} Z_{s+1} f + e_{s+2} Z_{s+2} f + \ldots + e_r Z_r f$$

engendre un sous-groupe invariant γ de $\mathcal{G}$. On a en effet

$$(Z_k Z_{s+1}) + i (Z_k Z_{s+2}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

ce qui montre que $(Z_k Z_{s+1})$ et $(Z_k Z_{s+2})$ sont des combinaisons linéaires de $Z_{s+1} f, \ldots, Z_r f$. Toutes les transformations de ce sous-groupe invariant appartiennent à la fois à $\mathcal{G}$ et à Γ.

II.

Si le groupe $\mathcal{G}$ ne laisse invariante aucune multiplicité plane, il en est de même de Γ. Or on sait (¹) que tout groupe linéaire, à paramètres et variables complexes, qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, se décompose en un certain nombre de sous-groupes invariants simples, échangeables entre eux, un de ces sous-groupes invariants, mais un seul au plus, pouvant être le groupe à un paramètre (complexe)

(¹) E. Cartan, *Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XXVI, 1909, p. 147.

engendré par la transformation infinitésimale

$$z_1\frac{\partial f}{\partial z_1}+z_2\frac{\partial f}{\partial z_2}+\ldots+z_n\frac{\partial f}{\partial z_n}.$$

En conservant les notations du paragraphe précédent, on voit que le groupe Γ, qui est engendré par les transformations infinitésimales

$$Z_1f,\quad Z_2f,\quad \ldots,\quad Z_sf;\quad Z_{s+1}f,\quad Z_{s+3}f,\quad \ldots,\quad Z_{r-1}f,$$

se décompose dans le sous-groupe invariant γ et un autre sous-groupe invariant Γ' qu'on peut supposer engendré par les transformations infinitésimales

$$Z_1f,\quad Z_2f,\quad \ldots,\quad Z_sf.$$

Par suite, le groupe $\mathcal{G}$ se décompose dans le sous-groupe invariant γ à paramètres *complexes* et le sous-groupe invariant $\mathcal{G}'$ à paramètres *réels* engendré par les transformations infinitésimales

$$Z_1f,\quad Z_2f,\quad \ldots,\quad Z_sf.$$

Le groupe γ peut lui-même se décomposer en sous-groupes simples.

Chaque sous-groupe invariant γ' de Γ' est défini par des équations linéaires en $e_1, e_2, \ldots, e_s$. Si ces équations peuvent être écrites de manière à avoir des coefficients réels, il correspond évidemment à γ' un sous-groupe g' de $\mathcal{G}'$ et l'on peut choisir les paramètres de γ' de manière que les transformations de g' s'obtiennent en donnant à ces paramètres des valeurs réelles arbitraires.

Si les équations linéaires en $e_1, e_2, \ldots, e_s$ qui définissent γ' ne peuvent pas être écrites de manière à avoir tous leurs coefficients réels, il existera évidemment un autre sous-groupe invariant $\bar{\gamma}'$ de Γ' défini par les équations complexes conjuguées. Ces deux sous-groupes γ' et $\bar{\gamma}'$ ont évidemment la même structure. On peut, par suite, choisir les paramètres de ces deux sous-groupes invariants de Γ' de manière que les transformations de $\mathcal{G}'$ s'obtiennent en donnant aux paramètres correspondants de ces deux sous-groupes des valeurs imaginaires conjuguées.

Il résulte de là que les sous-groupes invariants de Γ se partagent en trois catégories :

Les sous-groupes de la première catégorie sont définis par des transformations infinitésimales, combinaisons linéaires de $Z_{s+1}, \ldots, Z_r f$.

Les sous-groupes de la seconde catégorie sont engendrés par des transformations infinitésimales indépendantes qui sont des combinaisons linéaires à coefficients *réels* de $Z_1 f, \ldots, Z_s f$.

Les sous-groupes de la troisième catégorie, conjugués deux à deux, sont engendrés par des transformations infinitésimales indépendantes qui sont des combinaisons linéaires à coefficients *imaginaires* de $Z_1 f, \ldots, Z_s f$.

On peut, de plus, choisir les paramètres de ces sous-groupes de manière que les transformations de $\mathcal{G}$ s'obtiennent en donnant aux paramètres des sous-groupes de la première catégorie des valeurs complexes *arbitraires, aux paramètres des sous-groupes de la seconde catégorie des valeurs* réelles *arbitraires, aux paramètres de deux sous-groupes conjugués de la troisième catégorie des valeurs* complexes conjuguées *arbitraires.*

D'ailleurs, les sous-groupes de l'une ou de deux des trois catégories peuvent manquer.

Les transformations infinitésimales indépendantes qui servent à définir chacun des sous-groupes invariants de Γ ont été définies, dans le cas de la première ou de la troisième catégorie, à une substitution linéaire près à coefficients complexes ; dans le cas de la seconde catégorie, à une substitution linéaire près à coefficients réels.

III.

On sait former tous les groupes Γ ne laissant invariante aucune multiplicité plane (¹). Si l'on connaît les structures des sous-groupes invariants de Γ, on construit pour chacune d'elles un groupe linéaire ne laissant invariante aucune multiplicité plane. Si alors on désigne respectivement par

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_q, \\ z_1, & z_2, & \ldots, & z_r, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{matrix}$$

(¹) E. Cartan, *Bull. Soc. math. France*, t. XLI, 1913, p. 53.

les variables transformées par chacun de ces sous-groupes, les variables transformées par Γ peuvent être désignées symboliquement par

$$x_i y_j z_k \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, q;\ k = 1, 2, \ldots, r; \ldots),$$

en ce sens qu'elles sont transformées par Γ de la même manière que les produits $x_i y_j z_k \ldots$ sont transformés linéairement entre eux quand on effectue respectivement sur les x, y, z, ... une transformation arbitraire de chacun des sous-groupes donnés.

Il résulte de là et de ce qui a été dit au paragraphe précédent, qu'on saura construire tous les groupes $\mathcal{G}$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane si l'on sait, pour chaque type donné de structure simple (complexe) d'ordre r, déterminer de la manière la plus générale possible r transformations infinitésimales indépendantes telles que les coefficients de structure correspondants soient *réels*. Une telle détermination définit en effet un groupe à r paramètres réels. Nous dirons que deux groupes à paramètres réels ont la même *forme* de structure si l'on peut rendre identiques leurs constantes de structure par une substitution linéaire à coefficients *réels* effectuée sur les transformations infinitésimales indépendantes de l'un des groupes.

A chaque *type* de structure complexe d'ordre r peuvent appartenir plusieurs *formes* de structures réelles d'ordre r. On connaît, en particulier, toutes les formes de structures réelles qui appartiennent aux différents types de structures simples (¹); nous y reviendrons plus loin.

Le problème de la détermination des groupes G qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane est ainsi ramené à deux problèmes déjà résolus : 1° celui de la détermination des groupes Γ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane; 2° celui de la détermination des formes de structures réelles appartenant aux différents types de structures complexes simples.

IV.

Occupons-nous maintenant des groupes linéaires réels, c'est-à-dire des groupes continus de substitutions linéaires à coefficients réels et à variables réelles. Nous désignerons un tel groupe par la lettre G.

(¹) J'ai effectué cette détermination dans un Mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Annales de l'École Normale*.

Si nous regardons les variables de G comme des quantités complexes, nous aurons un groupe $\mathcal{G}$. Si le groupe G ne laisse invariante aucune multiplicité plane (réelle), le groupe $\mathcal{G}$ peut aussi ne laisser invariante aucune multiplicité plane (complexe), mais il peut en laisser invariante au moins une.

Dans le premier cas, nous dirons que $\mathcal{G}$, ou tout groupe transformé de $\mathcal{G}$ par une substitution linéaire à coefficients complexes, est *associé* au groupe G. Le groupe G sera dit de *première classe*.

Dans le second cas, soit

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_\nu = 0 \tag{1}$$

les équations d'une multiplicité plane invariante par $\mathcal{G}$, les premiers membres $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ étant des combinaisons linéaires, à coefficients complexes, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de G. Il est bien évident que $\mathcal{G}$ laisse aussi invariante la multiplicité plane imaginaire conjuguée ([1])

$$\bar{z}_1 = \bar{z}_2 = \ldots = \bar{z}_\nu = 0. \tag{2}$$

Les 2ν équations (1) et (2) sont indépendantes; sinon, en effet, les équations qui se déduisent à la fois de (1) et de (2) représenteraient une multiplicité plane réelle qui serait évidemment invariante par G. De plus, $n = 2\nu$, sinon l'ensemble des équations (1) et (2) représenterait encore une multiplicité plane réelle qui serait invariante par G. Enfin, le groupe $\mathcal{G}$ ne laisse invariante aucune multiplicité plane autre que (1) et (2), sinon on en déduirait l'existence d'une multiplicité plane réelle invariante par G.

Supposons que le groupe G soit engendré par les r transformations infinitésimales réelles indépendantes

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_r f.$$

En exprimant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au moyen de $z_1, \ldots, z_\nu, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_\nu$, on aura évidemment

$$\begin{gathered} X_1 f = Z_1 f + \bar{Z}_1 f, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_r f = Z_r f + \bar{Z}_r f, \end{gathered}$$

([1]) Dans tout le cours de l'article, nous désignerons par $\bar{u}$ la quantité complexe conjuguée de u.

les $Z_\alpha f$ ne dépendant que des variables z, les $\overline{Z}_\alpha f$ ne dépendant que des variables $\overline{z}$ et ayant des coefficients conjugués de ceux des $Z_\alpha f$.

Les transformations infinitésimales $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ engendrent un groupe $\mathcal{G}'$ à paramètres réels et variables complexes; c'est celui qui indique comment $\mathcal{G}$ transforme entre elles les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$. Il est d'ordre (réel) r, car si les transformations $Z_1 f, \ldots, Z_r f$ étaient liées par une relation linéaire à coefficients réels, il en serait de même de $\overline{Z}_1 f, \ldots, \overline{Z}_r f$ et, par suite, aussi de $X_1 f, \ldots, X_r f$. Il ne laisse invariante aucune multiplicité plane; si, en effet, il en laissait une invariante, par exemple (ce qu'on peut toujours supposer)

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_h = 0 \qquad (h < \nu),$$

le groupe G laisserait invariante la multiplicité plane réelle

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_h = \overline{z}_1 = \overline{z}_2 = \ldots = \overline{z}_h = 0.$$

Le groupe $\mathcal{G}'$, ou tout groupe transformé de $\mathcal{G}'$ par une substitution linéaire à coefficients complexes, est dit *associé* de G. Le groupe G sera dit de *seconde classe*.

V.

Nous avons associé, dans le paragraphe précédent, à tout groupe linéaire réel G ne laissant invariante aucune multiplicité plane réelle, un groupe (que nous appellerons $\mathcal{G}$ dans les deux cas) à paramètres réels et variables complexes, qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane complexe. Ce groupe $\mathcal{G}$ est défini à une substitution linéaire près, à coefficients complexes, effectuée sur les variables.

Si le groupe G appartient à la première classe, le nombre des variables de $\mathcal{G}$ est égal à celui des variables de G. Si le groupe G appartient à la seconde classe, le nombre des variables de $\mathcal{G}$ est la moitié de celui des variables de G.

Les groupes $\mathcal{G}$ ainsi associés aux groupes G jouissent de propriétés caractéristiques bien différentes suivant que G est de première ou de seconde classe.

1. Supposons d'abord le groupe G de première classe. Si l'on conserve d'abord pour $\mathcal{G}$ les variables de G (considérées dans $\mathcal{G}$ en tant

que complexes au lieu d'être considérées en G en tant que réelles), le groupe $\mathcal{G}$ changera deux systèmes (x) et (X) de valeurs des variables liées par les relations

$$X_k = \bar{x}_k, \tag{1}$$

en deux systèmes de valeurs (x') et (X') liées par les mêmes relations. Ces relations rentrent dans des relations plus générales de la forme

$$X_k = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho}\bar{x}_\rho, \tag{2}$$

qui définissent ce qu'on appelle une *antihomographie* (¹). Cette antihomographie est une opération qui fait passer des quantités (x) aux quantités (X). Dans le cas particulier (1), cette antihomographie est dite une *antiinvolution* parce que, si on l'effectue deux fois de suite, on obtient l'opération identique.

Il est bien évident que si l'on effectue sur les variables de $\mathcal{G}$ une substitution linéaire à coefficients complexes, les équations de l'antiinvolution ne conserveront pas la forme simple (1), mais prendront la forme plus générale (2).

Nous pourrons, en nous plaçant au point de vue projectif, étendre un peu le sens du mot *antiinvolution* en donnant ce nom à toute antihomographie telle qu'effectuée deux fois de suite sur un point de coordonnées *homogènes* $(x_1, \ldots, x_n)$, elle redonne ce même point. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait les relations

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho}\bar{a}_{\rho k} = h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho}\bar{a}_{\rho j} = 0 \qquad (k \neq j;\ k, j = 1, 2, \ldots, n),$$

où h désigne une constante réelle différente de zéro.

Remarquons que si un groupe $\mathcal{G}$ laisse invariante l'antihomographie (2), il laisse aussi invariante toutes les antihomographies,

(¹) *Voir* C. SEGRE, *Un nuovo campo di ricerche geometriche* (*Atti della R. Accad. Torino*, t. XXV, 1889-1890, p. 276, 430, 592).

identiques au point de vue projectif,

$$X_k = \lambda \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho} \bar{x}_\rho,$$

où λ est un facteur constant complexe quelconque. Pour cette nouvelle antiinvolution, *que nous ne regarderons pas comme distincte de la première*, la constante h est multipliée par le facteur positif $\lambda\bar{\lambda}$. Le signe du nombre réel h définit donc une propriété intrinsèque de l'antiinvolution.

L'intiinvolution sera dite de *première espèce* si h est positif; de *deuxième espèce* si h est négatif. L'antiinvolution (1) est de première espèce. On peut encore dire qu'une antiinvolution de première espèce admet des éléments doubles, tandis qu'une antiinvolution de seconde espèce n'en admet pas. Les éléments doubles sont donnés par les équations

$$(3) \qquad x_k = \lambda \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho} \bar{x}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

où λ est un nombre complexe quelconque admettant pour module $\frac{1}{\sqrt{h}}$. Les éléments doubles sont, au point de vue projectif, indépendants du choix de ce nombre complexe, en ce sens que deux systèmes (3) correspondant à deux valeurs différentes de λ se déduisent l'un de l'autre en multipliant toutes les variables x_k par un même facteur (et les $\bar{x}_k$ par le facteur conjugué).

Les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des éléments doubles définis par les équations (3) peuvent s'exprimer linéairement au moyen de n paramètres réels arbitraires $u_1, \ldots, u_n$. Si l'on substitue aux variables $x_1, \ldots, x_n$ les variables $u_1, \ldots, u_n$ ainsi définies, il est évident que le système (3) prend la forme

$$u_k = \bar{u}_k,$$

et, par suite, l'antiinvolution considérée de première espèce peut toujours être réduite à la forme canonique

$$(4) \qquad U_k = \bar{u}_k.$$

Si le groupe $\mathcal{G}$ laisse invariante l'antiinvolution considérée, il deviendra, avec les nouvelles variables u_k, un groupe linéaire à coefficients *réels*, car la transformation infinitésimale

$$\Sigma \alpha_{k\rho} u_k \frac{\partial f}{\partial u_\rho}$$

ne laisse invariante l'antiinvolution (4) que si tous les coefficients $\alpha_{k\rho}$ sont réels. Le groupe réel G défini par les mêmes transformations infinitésimales peut donc être regardé comme le groupe qui indique comment $\mathcal{G}$ transforme les éléments doubles de l'antiinvolution de première espèce. Bien que ces éléments doubles puissent être définis d'une infinité de manières différentes, l'argument du coefficient λ des équations (3) étant arbitraire, on obtient néanmoins toujours le même groupe G ou, du moins, un groupe qui lui est semblable par une substitution linéaire réelle [1].

Il résulte de ce qui précède que, *pour qu'un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane puisse être regardé comme associé à un groupe* G *de première classe, il faut que $\mathcal{G}$ laisse invariante une antiinvolution de première espèce; le groupe* G *indique alors comment $\mathcal{G}$ transforme les éléments doubles de cette involution.*

2. Supposons maintenant le groupe G de seconde classe. Dans ce cas, le groupe associé $\mathcal{G}$ ne peut laisser invariante aucune antiinvolution de première espèce. Sinon, en effet, on pourrait faire un changement linéaire de variables de manière à réduire cette antiinvolution à la forme

$$Z_k = \bar{z}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu),$$

et le groupe G laisserait invariante la multiplicité plane *réelle*

$$z_k = \bar{z}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Donc, *si un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune multiplicité*

(1) Cela tient à ce que les transformations infinitésimales de $\mathcal{G}$ ne changent pas quand on y remplace les variables x_k par ρx_k, ρ étant un facteur constant.

plane (complexe) est associé à un groupe réel G *ne laissant invariante aucune multiplicité plane (réelle), ce groupe* G *est de première classe si* $\mathcal{G}$ *laisse invariante une antiinvolution de première espèce, de seconde classe dans le cas contraire.*

VI.

Il nous reste à démontrer que *tout groupe* $\mathcal{G}$ *qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane est associé à un groupe réel* G, *et à un seul.*

1. Dans le cas où $\mathcal{G}$ laisse invariante une antiinvolution de première espèce, il résulte des considérations du paragraphe précédent que, en réduisant l'antiinvolution à sa forme canonique, les coefficients des équations du groupe G deviennent tous réels, ce qui donne, en regardant les variables comme réelles, un groupe réel G. Ce groupe G ne laisse évidemment invariante aucune multiplicité plane, réelle ou imaginaire, de sorte que $\mathcal{G}$ est le groupe qui lui est associé.

Pour démontrer qu'il n'y a qu'un groupe réel G auquel $\mathcal{G}$ soit associé, il suffit de démontrer que $\mathcal{G}$ ne laisse invariante qu'une antiinvolution. En effet, si $\mathcal{G}$ laissait invariantes les deux antiinvolutions (ou même les deux antihomographies)

$$(1)\qquad Z_k = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} a_{k\rho}\bar{z}_\rho$$

$$(2)\qquad Z_k = \sum_{\rho=1}^{\rho=n} b_{k\rho}\bar{z}_\rho \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

où les $b_{k\rho}$ ne sont pas supposés proportionnels aux $a_{k\rho}$, le groupe $\mathcal{G}$ laisserait invariante la multiplicité plane (si elle existe)

$$(3)\qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \bar{a}_{k\rho}z_\rho = \lambda \sum_{\rho=1}^{\rho=n} \bar{b}_{k\rho}z_\rho \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

où λ désigne un facteur constant arbitraire. Il est évidemment possible de choisir ce facteur de manière que les équations (3) se réduisent à moins de n (sans être identiques). Le groupe $\mathcal{G}$ laisserait donc invariante une multiplicité plane, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2. Dans le cas où $\mathcal{G}$ ne laisse invariante aucune antiinvolution de première espèce, les considérations du paragraphe IV montrent que le groupe G auquel il est associé (si le groupe G existe) est simplement celui qui indique comment les transformations de $\mathcal{G}$ échangent entre elles les parties réelles et les coefficients de i des variables complexes de $\mathcal{G}$. Ce groupe G est donc bien déterminé. *Réciproquement*, étant donné un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune antiinvolution de première espèce, le groupe G, qui indique comment $\mathcal{G}$ transforme les parties réelles et les coefficients de i des variables de $\mathcal{G}$, ne peut laisser invariante aucune multiplicité plane réelle. Toute multiplicité plane réelle invariante peut, en effet, se mettre sous la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Sigma a_{1k} z_k = \Sigma \bar{a}_{1k} \bar{z}_k, \\ \Sigma a_{2k} z_k = \Sigma \bar{a}_{2k} \bar{z}_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ \Sigma a_{\rho k} z_k = \Sigma \bar{a}_{\rho k} \bar{z}_k. \end{array}\right.$$

Le groupe $\mathcal{G}$ laisserait évidemment invariante la multiplicité plane obtenue en annulant les premiers membres de ces équations; il faut donc qu'en appelant ν le nombre des variables z, ces premiers membres contiennent ν formes indépendantes ($\rho \geqq \nu$). On ne peut pas avoir $\rho = \nu$, car alors le groupe $\mathcal{G}$ laisserait invariante l'antiinvolution de première espèce

$$\Sigma a_{jk} Z_k = \Sigma \bar{a}_{jk} \bar{z}_k \qquad (j = 1, 2, \dots, \nu).$$

Enfin, on ne peut pas avoir non plus $\rho > \nu$, car alors on pourrait déduire des équations (4) des équations ne contenant que les z_k sans contenir les $\bar{z}_k$, et ces équations définiraient une multiplicité plane complexe évidemment invariante par le groupe $\mathcal{G}$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Le groupe G ne laisse donc invariante aucune multiplicité plane réelle, et il est alors évident que le groupe $\mathcal{G}$ est bien le groupe qui lui est associé.

VII.

L'analyse précédente montre que la détermination des groupes réels G qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane réelle revient à la détermination des groupes $\mathcal{G}$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane complexe. Il y a une correspondance univoque entre les uns et les autres, les groupes $\mathcal{G}$ qui laissent invariante une antiinvolution de première espèce correspondant aux groupes G de première classe, les groupes $\mathcal{G}$ qui n'en laissent aucune invariante correspondant aux groupes G de seconde classe. Nous dirons, pour abréger, que, dans le premier cas, le groupe $\mathcal{G}$ est de première classe et que, dans le second cas, il est de seconde classe.

La détermination des groupes $\mathcal{G}$ ayant été faite précédemment, il nous reste à reconnaître ceux d'entre eux qui laissent invariante une antiinvolution de première espèce.

Remarquons d'abord que, pour qu'il en soit ainsi, *il faut que $\mathcal{G}$ ne contienne aucun sous-groupe invariant simple de la première catégorie* (II). L'existence d'un de ces sous-groupes entraînerait en effet l'existence, pour $\mathcal{G}$, de deux transformations infinitésimales de la forme

$$\Sigma \alpha_{jk} z_j \frac{\partial f}{\partial z_k} \qquad \text{et} \qquad \Sigma i\alpha_{jk} z_j \frac{\partial f}{\partial z_k}.$$

Si donc le groupe $\mathcal{G}$ laissait invariante l'antihomographie

$$(1) \qquad Z_k = \Sigma a_{k\rho} \bar{z}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

il en résulterait que chacune des équations

$$\sum_{j=1}^{j=n} \alpha_{jk} Z_j = \sum_{\rho,\sigma} \bar{\alpha}_{\rho\sigma} a_{k\sigma} \bar{z}_\rho,$$

$$\sum_j i\alpha_{jk} Z_j = \sum_{\rho,\sigma} - i\bar{\alpha}_{\rho\sigma} a_{k\sigma} \bar{z}_\rho$$

serait une conséquence des équations (1), ce qui est impossible.

De même, $\mathcal{G}$ ne peut laisser invariante aucune antihomographie s'il contient la transformation infinitésimale

$$h\left(z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}\right),$$

h n'étant pas réel; l'équation

$$hZ_k = \bar{h} \Sigma a_{k\rho} \bar{z}_\rho$$

ne pourrait pas en effet être une conséquence des équations (1). Par suite, *le groupe Γ associé à $\mathcal{G}$ ne peut admettre de sous-groupe invariant simple à un paramètre que dans la seconde catégorie, et alors ce sous-groupe est engendré par la transformation*

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \ldots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n}.$$

VIII.

Les seuls groupes $\mathcal{G}$ qui laissent invariante une antiinvolution sont, d'après cela, engendrés par des sous-groupes invariants simples de la seconde et de la troisième catégorie.

Considérons de nouveau le groupe Γ à paramètres complexes qui est engendré par les mêmes transformations infinitésimales que $\mathcal{G}$; l'ordre complexe de Γ est égal à l'ordre réel de $\mathcal{G}$. Si $Z_1 f$, ..., $Z_r f$ constituent un système de transformations infinitésimales indépendantes de $\mathcal{G}$, la transformation infinitésimale la plus générale de Γ est

$$e_1 Z_1 f + e_2 Z_2 f + \ldots + e_r Z_r f,$$

où e_1, e_2, ..., e_α sont des nombres complexes arbitraires. On sait que, si l'on part d'une transformation infinitésimale *arbitraire* Zf de Γ et si l'on calcule les racines de l'équation caractéristique correspondante, on peut choisir les variables de Γ de manière que chacune d'elles ait un *poids* déterminé, ce poids étant une combinaison linéaire *à coefficients entiers ou fractionnaires* des racines de l'équation caractéristique. *On peut toujours supposer que Zf appartient* *à* $\mathcal{G}$ (¹). S'il en est ainsi, *l'antiinvolution que le groupe* $\mathcal{G}$ *laisse invariante doit faire correspondre à une variable d'un poids donné* ϖ *une combinaison linéaire des variables dont le poids est complexe conjugué de* ϖ; il y aura donc en particulier autant de variables du poids ϖ que du poids conjugué $\overline{\varpi}$.

Nous avons déjà vu (III) que les variables de $\mathcal{G}$ peuvent s'écrire symboliquement

$$x_i y_j z_k \ldots,$$

les variables auxiliaires x étant transformées par le premier sous-groupe invariant simple de Γ, les variables y par le second et ainsi de suite. On peut aussi choisir ces variables de manière que chacune ait un poids déterminé, le poids de la variable $x_i y_j z_k \ldots$ étant la somme des poids des variables x_i, y_j, z_k.

De plus, la transformation Zf peut toujours d'une manière, et d'une seule, être regardée comme la somme de transformations appartenant respectivement aux différents sous-groupes invariants; à chacune des parties de cette somme correspond une équation caractéristique relative au sous-groupe invariant correspondant et les poids des variables auxiliaires correspondantes sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers ou fractionnaires des racines de cette équation caractéristique.

D'après cela, si le groupe Γ admet deux sous-groupes invariants conjugués γ et $\overline{\gamma}$ de la troisième catégorie, les deux équations caractéristiques correspondantes n'admettront que des racines imaginaires, et les racines de la seconde seront conjuguées de celles de la première. Aux poids, *imaginaires*, des variables auxiliaires attachées au premier sous-groupe devront correspondre, *si le groupe* $\mathcal{G}$ *laisse une antiinvolution invariante*, des poids imaginaires conjugués qui seront nécessairement les poids des variables auxiliaires attachées au second sous-groupe. Il faut donc que les poids des variables auxiliaires de $\overline{\gamma}$ se déduisent linéairement des racines de l'équation caractéristique de $\overline{\gamma}$

(¹) En effet, dire que la transformation Zf est arbitraire, c'est dire que les coefficients $e_1, \ldots, e_r$ sont assujettis à ne pas satisfaire à certaines équations algébriques; il est donc possible d'attribuer à ces coefficients des valeurs *réelles*.

exactement comme les poids des variables auxiliaires de γ se déduisent linéairement des racines de l'équation caractéristique de γ ; autrement dit *il faut que les deux groupes* γ *et* $\bar{\gamma}$ *qui entrent comme facteurs dans le groupe linéaire* Γ (*regardé comme produit*) *soient semblables* [1].

Réciproquement, supposons qu'il en soit ainsi. On peut toujours choisir les transformations infinitésimales indépendantes du groupe simple γ, de manière que les coefficients de structure soient réels ; on pourra alors déduire les transformations infinitésimales de $\bar{\gamma}$ de celles de γ en remplaçant les variables x_k de γ par des variables y_k et en remplaçant les coefficients par leurs conjugués. Le *produit* des deux groupes linéaires ainsi formés, c'est-à-dire le groupe qui indique comment sont transformés les produits $x_j y_k$ quand on effectue sur les x et sur les y des transformations *à paramètres conjugués*, admet alors évidemment l'antiinvolution de première espèce représentée symboliquement par les équations

$$X_j Y_k = \overline{x_k y_j}.$$

En résumé, *si le groupe* $\mathcal{G}$ *laisse invariante une antiinvolution de première espèce et si le groupe* Γ *qui lui est associé comprend, regardé comme produit de groupes linéaires simples, deux groupes conjugués de la troisième catégorie, il faut que ces deux groupes simples soient semblables. Celles des transformations de leur produit qui font partie de* $\mathcal{G}$ *forment alors dans ce cas un groupe qui entre comme facteur dans* $\mathcal{G}$, *et qui admet une antiinvolution de première espèce.*

IX.

Considérons maintenant un sous-groupe invariant simple de $\mathcal{G}$ qui soit de la deuxième catégorie. Deux cas peuvent ici se présenter. Ou bien l'équation caractéristique de ce sous-groupe est à coefficients réels, ou bien certains de ces coefficients sont imaginaires.

Dans le second cas, l'équation à coefficients conjugués est néces-

[1] Deux groupes linéaires isomorphes qui ont le même système de poids sont en effet semblables (voir *Bull. Soc. math. France*, t. XLI, p. 59).

sairement l'équation caractéristique d'un autre sous-groupe invariant simple de $\mathcal{G}$. Les deux groupes linéaires simples correspondants qui entrent comme facteur dans $\mathcal{G}$ seront dits *corrélatifs*. Les racines de l'équation caractéristique de chacun de ces groupes sont toutes imaginaires, sans quoi l'équation caractéristique de Γ aurait des racines doubles, ce qui est impossible. On peut alors faire sur ces deux groupes corrélatifs le même raisonnement que celui qui vient d'être fait sur les groupes conjugués. Ces deux groupes linéaires corrélatifs doivent être semblables. Réciproquement, si l'on prend deux groupes linéaires simples semblables, à paramètres réels et variables complexes (appartenant nécessairement à la même *forme* de structure), leur produit admet une antiinvolution de première espèce.

Reste à considérer le premier cas où l'équation caractéristique d'un sous-groupe simple de $\mathcal{G}$ (appartenant à la deuxième catégorie) a tous ses coefficients réels. *Il se trouve que tout groupe linéaire à paramètres réels et variables complexes, appartenant à cette forme de structure, laisse invariante une antiinvolution, soit de première, soit de seconde espèce.* Nous reviendrons plus loin sur cette propriété importante.

Si nous l'admettons, nous arrivons à la conclusion suivante :

Pour qu'un groupe $\mathcal{G}$ qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane soit associé à un groupe G *de première classe, il faut que, si l'on considère les groupes simples qui entrent dans la composition de $\mathcal{G}$, deux groupes conjugués quelconques de la troisième catégorie soient semblables, ainsi que deux groupes corrélatifs quelconques de la seconde catégorie. S'il en est ainsi, le groupe $\mathcal{G}$ peut être regardé comme un produit de groupes linéaires dont chacun laisse une certaine antiinvolution invariante; cette antiinvolution ne peut être de seconde espèce que si le groupe facteur est un groupe simple de la seconde catégorie qui soit son propre corrélatif.*

X.

Pour terminer ces généralités, remarquons que le groupe produit de deux groupes linéaires admettant chacun une antiinvolution admet aussi une antiinvolution. Si en effet

$$X_k = \Sigma a_{k\rho} \overline{x}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

et

$$Y_k = \Sigma b_{k\rho} \overline{y}_\rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les équations des deux antiinvolutions, le groupe produit admet l'antiinvolution

$$X_j Y_k = \Sigma a_{j\rho} b_{k\sigma} \overline{x_\rho y_\sigma},$$

et l'on vérifie facilement que le nombre caractéristique $h(V)$ de la troisième antiinvolution est le produit des nombres caractéristiques des deux premières. Par suite, la troisième antiinvolution est de première espèce si les deux premières sont de même espèce, de seconde espèce si les deux premières sont d'espèces différentes.

Convenons d'après cela d'appeler *indice* d'un groupe linéaire simple qui soit son propre corrélatif le nombre $+1$ si l'antiinvolution que ce groupe laisse invariante est de première espèce, le nombre -1 si cette antiinvolution est de seconde espèce. On arrive alors à la conclusion définitive suivante :

Pour qu'un groupe linéaire $\mathcal{G}$, qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, soit associé à un groupe réel G *de première classe, il faut et il suffit :*

1° *Qu'aucun groupe simple de première catégorie n'entre dans la composition de $\mathcal{G}$;*

2° *Que les groupes simples conjugués et les groupes corrélatifs qui entrent dans cette composition soient semblables;*

3° *Que le produit des indices des groupes simples, qui sont leurs propres corrélatifs, soit égal à $+1$;*

4° *Que le seul groupe simple à un paramètre qui puisse entrer dans la composition de $\mathcal{G}$ soit engendré par la transformation infinitésimale $u \frac{\partial f}{\partial u}$.*

XI.

On sait que tout groupe linéaire simple Γ, qui ne laisse invariante aucune multiplicité plane, peut être obtenu par la multiplication de *groupes fondamentaux;* ces groupes sont en nombre l (rang du groupe Γ) et chacun d'eux peut entrer dans la composition de Γ avec un exposant entier, positif ou nul, quelconque.

A chaque *forme* de structure appartenant au type de structure de Γ correspondent également l groupes linéaires $\mathcal{G}$ fondamentaux. Si l'un de ces groupes fondamentaux n'est pas son propre corrélatif, son corrélatif est encore un groupe fondamental : c'est une propriété que nous admettrons pour l'instant.

Par suite, *si un groupe linéaire $\mathcal{G}$ est associé à un groupe réel de première classe, les groupes fondamentaux corrélatifs qui entrent dans sa composition doivent figurer avec les mêmes exposants; de plus, la somme des exposants de ceux des groupes fondamentaux autocorrélatifs d'indice* -1 *qui entrent dans la composition de $\mathcal{G}$ doit être paire.*

Nous allons maintenant passer en revue les diverses formes de structures simples et les groupes fondamentaux correspondants; on verra que les propriétés annoncées de ces groupes sont vérifiées, à savoir que tout groupe fondamental autocorrélatif admet une anti-involution, et qu'à tout groupe fondamental non autocorrélatif correspond un groupe fondamental qui est son corrélatif.

XII.

Groupes du type (A). — Les groupes fondamentaux, à paramètres et variables complexes, du type (A) sont [1] :

Le groupe linéaire et homogène spécial γ_1 à n variables (groupe projectif de l'espace E_{n-1});

Et les groupes linéaires et homogènes $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_{n-1}$ qui indiquent comment le groupe précédent transforme les droites, les plans, etc., de l'espace à $n-1$ dimensions.

Ces groupes sont à n^2-1 paramètres *complexes*.

Nous avons à considérer les groupes dépendant de n^2-1 paramètres *réels* qui se déduisent des précédents.

Ces groupes s'obtiennent :

1° En prenant les transformations à coefficients réels (groupe projectif de l'espace *réel* E_{n-1});

---

[1] *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 85.

2° Dans le cas de n pair, en prenant les transformations linéaires complexes qui laissent invariante l'antiinvolution de seconde espèce

$$X_{2i-1}=\bar{x}_{2i}, \qquad X_{2i}=-\bar{x}_{2i-1} \qquad \left(i=1, 2, \ldots, \frac{n}{2}\right)$$

$\left(\right.$groupe projectif quaternionien de l'espace $\left.E_{\frac{n}{2}-1}\right)$. Nous désignerons les groupes fondamentaux correspondants par la notation $g^{(q)}$;

3° En prenant les transformations linéaires complexes qui laissent invariante une forme d'Hermite

$$\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1+\varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2+\ldots+\varepsilon_n x_n \bar{x}_n \qquad (\varepsilon_i=\pm 1),$$

(groupes projectifs hermitiens de l'espace E_{n-1}). Nous désignerons les groupes fondamentaux correspondants par la notation $g^{(h)}$.

Dans le premier cas, le groupe g_1 laisse invariante l'antiinvolution de première espèce

$$X_i=\bar{x}_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

les autres groupes fondamentaux $g_2, \ldots, g_{n-2}$ laissent aussi invariante une antiinvolution de première espèce; tous les groupes fondamentaux sont autocorrélatifs et d'indice 1.

Dans le second cas, le groupe $g_\alpha^{(q)}$ est évidemment autocorrélatif et d'indice $(-1)^\alpha$.

Dans le troisième cas, le groupe $g_\alpha^{(h)}$ est corrélatif du groupe $g_{n-\alpha}^{(h)}$; il n'y a de groupe fondamental autocorrélatif que le groupe $g_{\frac{n}{2}}^{(h)}$, si n est pair. Le groupe $g_1^{(h)}$ laisse en effet invariante l'*anticorrélation*

$$(1) \qquad X_i=\varepsilon_i \bar{u}_i,$$

qui fait correspondre au plan (u_i) le point (X_i). Convenons d'identifier les deux variables dualistiques

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_k}=(i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n) u_{i_{k+1} \ldots i_n} \quad (^1),$$

qui sont les coordonnées d'une même multiplicité plane définie soit par $k-1$ points, soit par $n-k-1$ plans (à $n-1$ dimensions). L'anticorrélation donne alors

$$(2) \quad X_{i_1 i_2 \ldots i_k}=\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\ldots\varepsilon_{i_k}\bar{u}_{i_1 i_2 \ldots i_k}=\varepsilon_{i_1}\varepsilon_{i_2}\ldots\varepsilon_{i_k}(i_{k+1} i_{k+2} \ldots i_n i_1 \ldots i_k)\bar{x}_{i_{k+1} \ldots i_n}.$$

(1) Nous désignons par $(i_1, i_2, \ldots i_n)$ le nombre ± 1 suivant que la permutation des indices $1, 2, \ldots, n$ est paire ou impaire.

Supposons alors $n = 2k$; les variables $x_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sont les variables transformées par le groupe $g_k^{(h)}$ et ce groupe laisse invariante l'anti-involution définie par les équations (2). Comme on a

$$X_{i_{k+1} i_{k+2} \ldots i_n} = \varepsilon_{i_{k+1}} \varepsilon_{i_{k+2}} \ldots \varepsilon_{i_n} (i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_n) \bar{x}_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

on voit que l'indice de cette antiinvolution est

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n (-1)^k.$$

Donc, *dans le troisième cas*, on a, si n est pair, un groupe $g_{\frac{n}{2}}^{(h)}$ autocorrélatif dont l'indice est

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n.$$

Si $n = 2$, le groupe $g^{(h)}$ se confond avec le groupe $g^{(q)}$: il est autocorrélatif d'indice -1

XIII.

Groupes du type (C). — Le groupe fondamental γ_1 à paramètres et variables complexes, est celui qui laisse invariante la forme bilinéaire alternée [1]

$$[x_1 x_{-1}] + [x_2 x_{-2}] + \ldots + [x_l x_{-l}] \qquad (l \geqq 2).$$

Le groupe γ_α ($\alpha = 2, 3, \ldots, l$) est celui qui indique comment γ_1 transforme entre elles la forme alternée $[x_1 x_2 \ldots x_\alpha]$ et celles qui s'en déduisent par les transformations de γ_1. Ces groupes sont à $l(2l+1)$ paramètres complexes.

Les groupes à $l(2l+1)$ paramètres réels, qui se déduisent de γ_1, sont :

Dans le premier cas, le groupe g_1 formé des transformations de γ_1 dont les coefficients sont réels. Il laisse invariante une antiinvolution de première espèce, ainsi que tous les groupes g_α correspondants. Tous ces groupes ont pour indice 1.

Dans le second cas, le groupe $g_1^{(h)}$ formé des transformations complexes qui laissent invariante la forme d'Hermite

$$\varepsilon_1 (x_1 \bar{x}_1 + x_{-1} \bar{x}_{-1}) + \varepsilon_2 (x_2 \bar{x}_2 + x_{-2} \bar{x}_{-2}) + \ldots + \varepsilon_l (x_l \bar{x}_l + x_{-l} \bar{x}_{-l});$$

---

(1) *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 89.

elles laissent aussi invariante l'antiinvolution de seconde espèce

$$X_i = \varepsilon_i \bar{x}_{-i}, \qquad X_{-i} = -\varepsilon_i \bar{x}_i;$$

l'indice du groupe $g_\alpha^{(h)}$ est alors égal à $(-1)^\alpha$.

XIV.

Groupes du type (B). — Le groupe fondamental γ_2, à paramètres et variables complexes, est ici celui qui laisse invariante la forme quadratique ([1])

$$x_0^2 + x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l} \qquad (l \geqq 2).$$

Il est à $l(2l+1)$ paramètres. Les groupes fondamentaux $\gamma_3, \gamma_4, \ldots \gamma_l$ indiquent comment γ_2 transforme certaines formes alternées de degrés 2, 3, ..., $l-1$ formées au moyen des variables x. Quant au groupe γ_1 il est à 2^l variables et indique comment γ_2 transforme entre elles les mutiplicités planes

$$x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l} x_0 + \varepsilon_1 x_{-\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l} x_{\varepsilon_1} + \ldots + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k x_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{k-1}, -\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_l} x_{\varepsilon_k} + \ldots = 0.$$
$$(\varepsilon_i = \pm 1).$$

Pour chaque forme de structure appartenant au type (B), le groupe g_2, à $l(2l+1)$ paramètres réels, est formé de transformations de γ_2 qui laissent invariante l'antiinvolution de première espèce

$$X_0 = \bar{x}_0, \quad X_i = \bar{x}_{-i}, \quad X_\alpha = \bar{x}_\alpha \quad (i = \pm 1, \ldots, \pm h;\ \alpha = \pm h+1, \ldots, \pm l),$$

l'entier h pouvant être nul. Ce groupe g_2 est en somme le groupe projectif réel d'une forme quadratique à $l+h+1$ carrés positifs et $l-h$ carrés négatifs. Chacun des groupes $g_2, g_3, \ldots, g_l$ laisse alors invariante une antiinvolution de première espèce

Quant au groupe g_1, il laisse invariante l'antiinvolution

$$X_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l} = \varepsilon_{h-1} \varepsilon_{h-3} \varepsilon_{h-5} \ldots \bar{x}_{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, -\varepsilon_h, \varepsilon_{h+1}, \ldots, \varepsilon_l},$$

où le produit $\varepsilon_{h-1}\varepsilon_{h-3}\ldots$ se termine soit par ε_1 si h est pair, soit par $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l$, si h est impair. On trouve alors facilement que l'indice de g_1 est $(-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}$.

On peut encore dire que si la forme quadratique invariante est de

([1]) *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 86.

caractère δ (c'est-à-dire si la différence entre le nombre de ses carrés positifs et celui de ses carrés négatifs est δ), l'indice du groupe g_1 est

$$\left(\frac{2}{\delta}\right) = (-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}.$$

XV.

Groupes du type (D). — Le groupe fondamental γ_3, à paramètres et variables complexes, est ici celui qui laisse invariante la forme quadratique (1)

$$x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l} \qquad (l \geqq 4).$$

Il est à $l(2l-1)$ paramètres complexes.

Les groupes fondamentaux $\gamma_4, \gamma_5, \ldots \gamma_l$ indiquent comment γ_3 transforme certaines formes alternées de degrés 2, 3, ..., $l-2$, formées au moyen des variables x. Le groupe γ_1 est à 2^{l-1} variables

$$x_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1, \Pi \varepsilon_i = -1),$$

et indique comment γ_3 transforme certaines multiplicités planes de l'espace E_{2l-1} dans lequel opère γ_3. Le groupe γ_2 est aussi à 2^{l-1} variables

$$y_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_l} \qquad (\varepsilon_i = \pm 1, \Pi \varepsilon_i = +1),$$

et se définit d'une manière analogue.

A chaque forme de structure appartenant au type (D) correspond un groupe g_3, à $l(2l-1)$ paramètres *réels*. Il est formé :

Dans le premier cas, des transformations de γ_3 qui laissent invariante l'antiinvolution de première espèce

$$X_i = \bar{x}_{-i}, \qquad X_\alpha = \bar{x}_\alpha \qquad (i = \pm 1, \ldots, \pm h; \alpha = \pm h+1, \ldots, \pm l),$$

l'entier h pouvant être nul. Ce groupe g_3 est en somme le groupe projectif réel d'une forme quadratique à $l+h$ carrés positifs et $l-h$ carrés négatifs. Chacun des groupes $g_3, g_4, \ldots, g_l$ laisse alors invariante une antiinvolution de première espèce. Quant au groupe g_1,

(1) *Bull. Soc. math.*, t. XLI, p. 91.

il est corrélatif de g_2 si h est impair; si, au contraire, h est pair, il est autocorrélatif et admet l'antiinvolution

$$X_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \varepsilon_{h+1}, \ldots, \varepsilon_l} = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{h-1} \bar{x}_{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{h+1}, \ldots, \varepsilon_l}.$$

L'indice est $(-1)^{\frac{h}{2}} = (-1)^{\frac{\delta}{4}}$, en désignant par δ le caractère de la forme quadratique invariante. Il en est de même du groupe g_2.

Donc, dans le premier cas, les groupes $g_3, \ldots, g_l$ sont autoconjugués et d'indice 1; *les groupes g_1 et g_2 sont corrélatifs l'un de l'autre si $\delta \equiv 2$* (mod. 4); *ils sont autocorrélatifs et d'indice $(-1)^{\frac{\delta}{4}}$ si $\delta \equiv 0$* (mod. 4).

Dans le deuxième cas, le groupe g_3, que nous désignerons par $g_3^{(h)}$, est formé des transformations complexes de γ_3 qui laissent invariante la forme quadratique

$$x_1 x_{-1} + x_2 x_{-2} + \ldots + x_l x_{-l},$$

et la forme d'Hermite

$$x_1 \bar{x}_1 - x_{-1} \bar{x}_{-1} + \ldots + x_l \bar{x}_l - x_{-l} \bar{x}_{-l}.$$

Elles laissent aussi invariante l'antiinvolution de seconde espèce

$$X_i = \bar{x}_{-i}, \qquad X_{-i} = -\bar{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l).$$

Il résulte de là que le groupe $g_\alpha^{(h)}$ est autocorrélatif d'indice $(-1)^\alpha$.

Quant aux deux groupes $g_1^{(h)}$ et $g_2^{(h)}$, ils sont corrélatifs l'un de l'autre si l est impair. Dans le cas contraire, ils sont autocorrélatifs; le groupe $g_1^{(h)}$ admet l'antiinvolution

$$X_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_l} = i^{\Sigma} (-1)^{\alpha \frac{1-\varepsilon_\alpha}{2}} x_{-\varepsilon_1, -\varepsilon_2, \ldots, -\varepsilon_l},$$

et cette antiinvolution est de première espèce. Il en est de même pour le groupe g_2, qui admet donc, ainsi que g_1, l'indice 1.

XVI.

Contentons-nous d'indiquer les résultats dans le cas des types (E), (F) et (G).

Dans le cas du type (E), $l = 6$, les formes de structures réelles se répartissent en deux catégories :

Dans la première catégorie (structures de caractères 6, 2, — 22), chaque groupe fondamental est autocorrélatif et d'indice 1;

Dans la seconde catégorie (structures de caractères 2, — 14, — 78), les groupes g_1 et g_3 sont corrélatifs l'un de l'autre; il en est de même des groupes g_4 et g_5. Les groupes g_2 et g_6 sont autocorrélatifs et d'indice 1.

Dans le cas du type (E), $l=7$, les formes de structures réelles se répartissent aussi en deux catégories :

Dans la première catégorie (structures de caractères 7 et — 25), tous les groupes fondamentaux sont autocorrélatifs et d'indice 1;

Dans la seconde catégorie (structures de caractères — 5 et — 133), tous les groupes fondamentaux sont autocorrélatifs. Les indices des groupes g_1, g_4, g_5, g_7 sont égaux à 1 ; ceux des groupes g_2, g_3, g_6 à — 1.

Dans le cas du type (E), $l=8$, tous les groupes fondamentaux sont toujours autocorrélatifs et d'indice 1.

Il en est de même *dans le cas des types* (F) *et* (G).

XVII.

Nous allons, comme application, indiquer tous les groupes linéaires simples Γ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 12 variables au plus, ce qui permettrait d'indiquer la formation de tous les groupes réels G, de première ou de deuxième classe, qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 12 variables au plus.

Type (A) ($l=1$) :

γ^p à $p+1$ variables ($p \leqq 11$)

Type (A) ($l=2$) :

γ_1 et γ_2	à	3	variables
γ_1^2 et γ_2^2		6	»
$\gamma_1\gamma_2$		8	»
γ_1^3 et γ_2^3		10	»

Type (A) ($l=3$) :

γ_1 et γ_3	à	4	variables
γ_2		6	»
γ_1^2 et γ_3^2		10	»

Type (A) ($l=4$) :

γ_1 et γ_4 à 5 variables
γ_2 et γ_3 10 »

Type (A) ($l=5, 6, 7, 8, 9$ 10, 11) :

γ_1 et γ_l à $l+1$ variables

Type (C) ($l=2$) :

γ_1 à 4 variables
γ_2 5 »
γ_1^2 10 »

Type (C) ($l=3, 4, 5, 6$) :

γ_1 à $2l$ variables

Type (B) ($l=3$) :

γ_2 à 7 variables
γ_1 8 »

Type (B) ($l=4, 5$) :

γ_2 à $2l+1$ variables

Type (D) ($l=4, 5, 6$) :

γ_3 à $2l$ variables

Type (G) ($l=2$) :

γ_1 à 7 variables

XVIII.

Nous allons maintenant indiquer la composition des groupes $\mathcal{G}$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont à 8 variables au plus (1). Il y a d'abord, dans le cas d'une variable :

(1) A cause du grand nombre de cas possibles nous n'indiquons, pour plus de 4 variables, que les groupes $\mathcal{G}$ de première classe, ce qui permet la détermination de tous les groupes réels G à 8 variables au plus.

1° Le groupe à un paramètre complexe engendré par la transformation infinitésimale $z\frac{\partial f}{\partial z}$;

2° Le groupe à un paramètre réel engendré par la transformation infinitésimale $(h+ki)z\frac{\partial f}{\partial z}$.

Les groupes $\mathcal{G}$ que nous allons indiquer maintenant sont supposés ne contenir aucun sous-groupe invariant simple à un paramètre (complexe ou réel). Pour avoir tous les groupes $\mathcal{G}$ possibles, il suffirait de faire le produit des groupes suivants par l'un ou l'autre des deux groupes précédents à une variable, l'ordre réel serait ainsi augmenté de deux unités ou d'une unité. Les seuls groupes nouveaux qui sont de première classe proviennent de la multiplication d'un groupe $\mathcal{G}$ de première classe par le groupe à un paramètre réel $z\frac{\partial f}{\partial z}$.

Nous faisons précéder d'un astérisque les groupes $\mathcal{G}$ qui laissent invariante une antiinvolution de première espèce. Les notations se comprennent d'elles-mêmes; la notation $\{\gamma, \gamma'\}$ indique l'existence de deux groupes simples conjugués de même structure, à paramètres imaginaires conjugués; la notation $g_3(B_4)$ désigne le groupe g_3 du type (B) de rang 4; la notation $g_3^5(B_4)$ indique le groupe isomorphe au précédent, qu'on obtient en le multipliant cinq fois par lui-même, au sens donné à cette expression dans mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLI, p. 64; enfin la notation $g_3^5(B_4)\times\gamma_1^2(C_2)$ indique le produit des deux groupes à paramètres distincts, $g_3^5(B_4)$ et $\gamma_1^2(C_2)$. Rappelons enfin que la lettre g se rapporte aux groupes à paramètres réels, la lettre γ aux groupes à paramètres complexes.

Groupes $\mathcal{G}$ à deux variables ($3\times 3=9$ cas) :

$\gamma(A_1)$,	ordre réel	6
$^*g(A_1)$,	»	3
$g^{(h)}(A_1)$,	»	3

Groupes $\mathcal{G}$ à trois variables ($7\times 3=21$ cas) :

$\gamma^2(A_1)$,	ordre réel	6
$^*g^2(A_1)$,	»	3
$^*g^{(h)2}(A_1)$,	»	3
$\gamma_1(A_2)$,	»	16
$^*g_1(A_2)$,	»	8
$g_1^{(h)}(A_2)$ (deux cas),	»	8

Groupes $\mathcal{G}$ *à quatre variables* ($20 \times 3 = 60$ cas) :

$\gamma^3(A_1)$,	ordre réel	6
$^*g^3(A_1)$,	»	3
$g^{(h)3}(A_1)$,	»	3
$\gamma_1(A_3)$,	»	30
$^*g_1(A_3)$,	»	15
$g_1^{(q)}(A_3)$,	»	15
$g_1^{(h)}(A_3)$ (trois cas),	»	15
$\gamma_1(C_2)$,	»	20
$^*g_1(C_2)$,	»	10
$g_1^{(h)}(C_2)$ (deux cas),	»	10
$\gamma(A_1) \times \gamma(A_1)$,	»	12
$\gamma(A_1) \times g(A_1)$,	»	9
$\gamma(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	9
$^*\{\gamma, \gamma\}(A_1)$,	»	6
$^*g(A_1) \times g(A_1)$,	»	6
$g(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	6
$^*g^{(h)}(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	6

Groupes $\mathcal{G}$ *de première classe à cinq variables* (6 cas) :

$^*g^4(A_1)$,	ordre réel	3
$^*g^{(h)4}(A_1)$,	»	3
$^*g_1(A_4)$,	»	24
$^*g_2(C_2)$,	»	10
$^*g_2^{(h)}(C_2)$ (deux cas),	»	10

Groupes $\mathcal{G}$ *de première classe à six variables* (11 cas) :

$^*g^5(A_1)$,	ordre réel	6
$^*g_1^2(A_2)$,	»	8
$^*g_2(A_3)$,	»	15
$^*g_2^{(q)}(A_3)$,	»	15
$^*g_2^{(h)}(A_3)$ ($\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 > 0$, deux cas),	»	15
$^*g_1(A_5)$,	»	24
$^*g_1(C_3)$,	»	21
$^*g(A_1) \times g^2(A_1)$,	»	6
$^*g(A_1) \times g^{(h)2}(A_1)$,	»	6.
$^*g(A_1) \times g_1(A_2)$,	»	11

Groupes $\mathcal{G}$ *de première classe à sept variables* (8 cas) :

$^*g^6(A_1)$,	ordre réel	3
$^*g^{(h)6}(A_1)$,	»	3
$^*g_2(B_3)$ (quatre cas),	»	21
$^*g_1(G_2)$ (deux cas),	»	14

Groupes $\mathcal{G}$ de première classe à huit variables (23 cas)

$^*g^7(A_1)$,	ordre réel	3
$^*g_1(A_7)$,	»	63
$^*g_1(C_4)$,	»	36
$^*g_1(B_3)$ (deux cas : $\delta = 1$ ou 7),	»	21
$^*g_3(D_4)$ (cinq cas),	»	28
$^*g_1(A_2) \times g_2(A_2)$,	»	8
$^*g_1^{(h)}(A_2) \times g_2^{(h)}(A_2)$ (deux cas),	»	8
$^*g(A_1) \times g^3(A_1)$,	»	6
$^*g(A_1) \times g_1(A_3)$,	»	18
$^*g(A_1) \times g_1(C_2)$,	»	13
$^*g^{(h)}(A_1) \times g^{(h)3}(A_1)$,	»	6
$^*g^{(h)}(A_1) \times g_1^{(q)}(A_3)$,	»	18
$^*g^{(h)}(A_1) \times g_1^{(h)}(C_2)$ (deux cas),	»	13
$^*g(A_1) \times \{\gamma, \gamma\}(A_1)$,	»	9
$^*g(A_1) \times g(A_1) \times g(A_1)$,	»	9
$^*g(A_1) \times g^{(h)}(A_1) \times g^{(h)}(A_1)$,	»	9

Les résultats précédents permettent de déterminer la composition des groupes réels *projectifs* G des espaces $E_n (n \leqq 7)$ qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane; ces groupes proviennent de groupes linéaires à $n+1$ variables pour lesquelles on peut supposer que le groupe $\mathcal{G}$ associé, ou bien n'admet aucun sous-groupe invariant à un paramètre, ou bien n'admet que le sous-groupe invariant à un paramètre $iz\frac{\partial f}{\partial z}$. Nous indiquons ci-dessous le nombre de ces groupes pour $n \leqq 11$.

Il existe :

2	groupes projectifs de l'espace	E_1,	à savoir	1	de 1^{re} classe	et	1	de 2^e classe
3	»	E_2,	»	3	»		0	»
11	»	E_3,	»	6	»		5	»
6	»	E_4,	»	6	»		0	»
22	»	E_5,	»	11	»		11	»
8	»	E_6,	»	8	»		0	»
57	»	E_7,	»	23	»		34	»
16	»	E_8,	»	16	»		0	»
34	»	E_9,	»	16	»		18	»
9	»	E_{10},	»	9	»		0	»
122	»	E_{11},	»	41	»		81	»

XIX.

Nous allons, comme seconde application, déterminer tous les groupes projectifs réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane et qui sont isomorphes soit au groupe homographique de la droite réelle, soit au groupe des transformations homographiques de la droite complexe qui laissent invariante une antiinvolution de seconde espèce, soit au groupe homographique de la droite complexe.

Ces trois groupes homographiques g, $g^{(h)}$ et γ sont représentés, en coordonnées homogènes, par les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} x'_1 = a x_1 + b x_2, \\ x'_2 = c x_1 + d x_2, \end{cases}$$

les coefficients a, b, c, d étant des nombres réels arbitraires dans le premier cas, des nombres complexes arbitraires dans le troisième cas, des nombres complexes liés par les relations

$$d = \bar{a}, \qquad c = -\bar{b},$$

dans le deuxième cas.

I. Dans le premier cas le groupe G le plus général est le groupe g^p qui indique comment sont tranformées linéairement les expressions

$$x_1^p, \quad x_1^{p-1} x_2, \quad x_1^{p-2} x_2^2, \quad \ldots, \quad x_2^p,$$

quand on effectue sur x_1 et x_2 la substitution linéaire (1) à coefficients réels. A un autre point de vue on peut regarder le groupe G comme celui qui indique comment sont transformés les coefficients réels de la forme binaire

$$(2) \qquad u_0 x_1^p + \frac{p}{1} u_1 x_1^{p-1} x_2 + \frac{p(p-1)}{1.2} u_2 x_1^{p-2} x_2^2 + \ldots + u_p x_2^p,$$

quand on effectue sur x_1 et x_2 la substitution linéaire réelle (1). C'est le groupe projectif réel de la courbe unicursale normale de l'espace E_p.

II. Dans le second cas, le groupe $\mathcal{G}$ associé à G est le groupe $g^{(h)p}$ qui indique comment sont transformés les coefficients complexes de la forme (2) quand on effectue sur x_1 et x_2 la substitution linéaire (1) où l'on suppose

$$d = \bar{a}, \qquad c = -\bar{b}.$$

Ce groupe $\mathcal{G}$ est de seconde classe si p est impair, de première classe si p est pair. Le groupe réel G auquel $\mathcal{G}$ est associé est donc à $2(p+1)$ variables si p est impair, à $p+1$ si p est pair. Dans ce dernier cas, on obtient les variables réelles de G en prenant les parties réelles et les coefficients de i des variables complexes u supposées liées par les relations

$$u_0 = \overline{u}_p, \qquad u_1 = -\overline{u}_{p-1}, \qquad u_2 = \overline{u}_{p-2}, \qquad \ldots, \qquad u_{\frac{p}{2}} = (-1)^{\frac{p}{2}} \overline{u}_{\frac{p}{2}}.$$

Le groupe G au nombre minimum de variables correspond à $p = 2$ et à la forme binaire

$$u_0 x_1^2 + 2 u_1 x_1 x_2 + u_2 x_2^2 \qquad (u_0 = \overline{u}_2, \ u_1 = -\overline{u}_1),$$

c'est le groupe projectif de la conique

$$u_1^2 - u_0 u_2 = 0,$$

qui s'écrit encore, en coordonnées réelles,

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0 \qquad (u_0 = v_1 + i v_2, \ u_2 = v_1 - i v_2, \ u_1 = i v_3).$$

A un autre point de vue on retrouve une relation bien connue entre le groupe des rotations de l'espace et le groupe homographique

$$x' = \frac{a x + b}{-\overline{b} x + \overline{a}}.$$

III. Dans le troisième cas, le groupe $\mathcal{G}$ peut être de première catégorie ou formé de deux sous-groupes invariants simples de troisième catégorie.

1° On obtient d'abord le groupe $\mathcal{G}$, ou γ^p, qui indique comment sont transformés les coefficients complexes de la forme binaire (2) quand on effectue sur x_1 et x_2 une substitution linéaire à coefficients complexes. Tous ces groupes $\mathcal{G}$ sont de seconde classe et sont associés à des groupes réels G à $2(p+1)$ variables.

2° On obtient ensuite le groupe $\mathcal{G}$, ou $\{\gamma^p, \gamma^q\}$, qui indique comment sont transformés les coefficients complexes de la forme mixte

$$(3) \qquad \sum_{i,k} u_{ik} x_1^{p-i} x_2^i y_1^{q-k} y_2^k,$$

homogène de degré p en x_1 et x_2, homogène de degré q en y_1 et y_2, quand on effectue sur x_1 et x_2 une substitution linéaire à coefficients complexes, en effectuant simultanément sur y_1 et y_2 la substitution linéaire à coefficients complexes conjugués. Les premiers groupes $\mathcal{G}$ rentrent d'ailleurs dans les précédents en supposant $q = 0$.

Ces groupes $\mathcal{G}$ sont de seconde classe si $p \neq q$; ils sont de première classe si $p = q$; dans ce cas les variables de G sont les parties réelles et les coefficients de i des variables complexes u_{ik} supposées liées par les relations

$$u_{ik} = \bar{u}_{ki}.$$

La forme mixte (3), égalée à zéro, définit dans ces conditions une antiinvolution réelle de degré p, le point $\frac{y_1}{y_2}$ étant le transformé du point $\frac{x_1}{x_2}$.

Les groupes G au nombre minimum de variables sont au nombre de deux :

1° Le groupe G à 4 variables qui admet pour associé le groupe γ des substitutions linéaires complexes à 2 variables. En posant

$$x_1 = u_1 + iu_2, \quad x_2 = u_3 + iu_4, \quad a = \alpha + i\alpha',$$
$$b = \beta + i\beta', \quad c = \gamma + i\gamma', \quad d = \delta + i\delta',$$

les équations de ce groupe sont :

$$\begin{aligned}
u'_1 &= \alpha u_1 - \alpha' u_2 + \beta u_3 - \beta' u_4,\\
u'_2 &= \alpha' u_1 + \alpha u_2 + \beta' u_3 + \beta u_4,\\
u'_3 &= \gamma u_1 - \gamma' u_2 + \delta u_3 - \delta' u_4,\\
u'_4 &= \gamma' u_1 + \gamma u_2 + \delta' u_3 + \delta u_4.
\end{aligned}$$

Ce groupe fournit une représentation réelle des points complexes d'une droite. Au point de coordonnée non homogène $x + yi$ correspond dans l'espace E_3 le lieu des points réels satisfaisant à la relation

$$\frac{u_1 + iu_2}{u_3 + iu_4} = x + yi,$$

c'est-à-dire la droite

$$u_1 = xu_3 - yu_4,$$
$$u_2 = yu_3 + xu_4.$$

Aux points complexes de la droite correspondent donc dans l'espace les diverses droites de la congruence

$$p_{13}-p_{24}=0, \qquad p_{14}+p_{23}=0.$$

Toutes ces droites rencontrent deux droites fixes imaginaires conjuguées.

Toute transformation homographique de la droite complexe se traduit dans l'espace par une transformation projective laissant cette congruence invariante.

2° Le groupe G à 4 variables qui admet pour associé le groupe $\{\gamma, \gamma\}$ et qui indique comment sont transformés les coefficients de la forme mixte

$$(4) \qquad u_1 x_1 y_1 + (u_2+iu_3) x_1 y_2 + (u_2-iu_3) x_2 y_1 + u_4 x_2 y_2,$$

quand on effectue sur x_1, x_2 une substitution linéaire à coefficients complexes, et quand on effectue simultanément sur y_1, y_2 la substitution à coefficients conjugués. Les transformations de ce groupe sont:

$$\begin{aligned}
u'_1 &= (\alpha^2+\alpha'^2)u_1 + 2(\alpha\gamma+\alpha'\gamma')u_2 + 2(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')u_3 + (\gamma^2+\gamma'^2)u_4,\\
u'_2 &= (\alpha\beta+\alpha'\beta')u_1 + (\alpha\delta+\alpha'\delta'+\beta\gamma+\beta'\gamma')u_2\\
&\qquad + (\alpha\delta'-\delta\alpha'+\beta\gamma'-\gamma\beta')\,u_3 + (\gamma\delta+\gamma'\delta')u_4,\\
u'_3 &= (\beta\alpha'-\alpha\beta')\,u_1 + (\delta\alpha'-\alpha\delta'+\gamma\beta'-\beta\gamma')\,u_2\\
&\qquad + (\alpha\delta+\alpha'\delta'-\beta\gamma-\beta'\gamma')u_3 + (\delta\gamma'-\gamma\delta')u_4,\\
u'_4 &= (\beta^2+\beta'^2)u_1 + 2(\beta\delta+\beta'\delta')u_2 + 2(\beta\delta'-\delta\beta')u_3 + (\delta^2+\delta'^2)u_4.
\end{aligned}$$

C'est le groupe projectif réel de la quadrique

$$(5) \qquad (u_2+iu_3)(u_2-iu_3) - u_1 u_4 = u_2^2 + u_3^2 - u_1 u_4 = 0.$$

Ce groupe fournit une autre représentation réelle des points complexes d'une droite. Il suffit de faire correspondre au point de coordonnée non homogène $x+yi$ la forme mixte

$$[x_1-(x+yi)x_2][y_1-(x-yi)y_2],$$

c'est-à-dire le point

$$\frac{u_1}{1} = \frac{u_2+iu_3}{-x+yi} = \frac{u_2-iu_3}{-x-yi} = \frac{u_4}{x^2+y^2},$$

qui appartient à la quadrique (5). Cette représentation est au fond identique à celle par laquelle Riemann représente les nombres complexes par les points d'une sphère. Toute transformation homographique de la droite complexe se traduit dans l'espace par une transformation projective laissant la sphère invariante. Il y a ainsi équivalence entre la Géométrie projective de la droite complexe et la Géométrie non euclidienne hyperbolique de l'espace réel.

Les coefficients de la forme (4) sont transformés comme les coefficients de l'équation

$$u_1 \bar{x}_1 y_1 + (u_2 + i u_3) \bar{x}_1 y_2 + (u_2 - i u_3) \bar{x}_2 y_1 + u_4 \bar{x}_2 y_2 = 0,$$

quand on effectue sur x_1, x_2 et y_1, y_2 la *même* substitution linéaire à coefficients complexes. Cette équation définit une *antiinvolution*. Il y a donc correspondance entre les antiinvolutions de la droite complexe et les points de l'espace réel. Les antiinvolutions de première espèce sont celles pour lesquelles $u_2^2 + u_3^2 - u_1 u_4$ est positif, les antiinvolutions de seconde espèce celles pour lesquelles $u_2^2 + u_3^2 - u_1 u_4$ est négatif. Dans la représentation de Riemann les points extérieurs à la sphère représentent les antiinvolutions de première espèce, les points intérieurs celles de seconde espèce. Les éléments doubles d'une antiinvolution sont représentés par les points de contact, avec la sphère de Riemann, du cône ayant pour sommet le point représentatif de l'antiinvolution.

XX.

Le problème résolu dans le paragraphe précédent est un cas particulier du problème suivant :

Étant donné un groupe projectif d'un espace complexe, représenter les points complexes de cet espace par des figures d'un espace réel, de telle sorte que dans ce nouvel espace le groupe projectif donné reste un groupe projectif réel.

Ce problème se résout facilement par les mêmes considérations lorsque du moins les deux groupes ne laissent invariante aucune multiplicité plane.

Indiquons la solution la plus simple du problème dans le cas où le groupe donné est le groupe projectif général de l'espace complexe E_{n-1}, le groupe quaternionien de l'espace E_{2n-1} ou l'un des groupes hermitiens de l'espace E_{n-1}.

Dans chaque cas, le groupe réel G le plus simple de seconde classe qui soit isomorphe au groupe donné de l'espace complexe E_{n-1} se déduit de ce groupe lui-même en mettant en évidence les parties réelles et les coefficients de i des coordonnées homogènes complexes $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit

$$x_k = u_k + i v_k.$$

Au point complexe $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ correspond dans l'espace réel E_{2n-1}, la droite lieu des points

$$U_k = \lambda u_k - \mu v_k, \qquad V_k = \lambda v_k + \mu u_k,$$

où λ et μ prennent toutes les valeurs réelles possibles, u_k et v_k ayant des valeurs données. Par cette représentation le groupe devient un groupe projectif de l'espace E_{2n-1}.

I. Le groupe réel G le plus simple de première classe qui soit isomorphe au groupe projectif de l'espace complexe E_{n-1} est celui qui indique comment sont transformés les coefficients de l'hyperquadrique réelle

$$(1) \qquad \Sigma u_{ik} x_i \bar{x}_k = 0, \qquad u_{ik} = \bar{u}_{ki},$$

quand on effectue sur les x_i une substitution linéaire à coefficients complexes. Ce groupe G est un groupe projectif dans l'espace E_{n^2-1}. A un point complexe (x) de l'espace E_{n-1} on peut faire correspondre le plan réel de l'espace E_{n^2-1} défini par l'équation (1). A un point réel de E_{n^2-1} on peut faire correspondre l'hyperquadrique (1), qui définit encore si l'on veut une *anticorrélation*, celle qui fait correspondre au point (x) le plan d'équation

$$\Sigma u_{ik} X_i \bar{x}_k = 0.$$

II. Le groupe quaternionien $\mathcal{G}$ de l'espace complexe E_{2n-1} est formé des transformations projectives complexes qui laisse invariante l'anti-involution de seconde espèce

$$X_{2i-1} = \bar{x}_{2i}, \qquad X_{2i} = -\bar{x}_{2i-1}.$$

Le groupe $\mathcal{G}$ le plus simple de première classe ayant la même structure est le groupe $g_2^{(h)}$ qui transforme les droites de l'espace E_{2n-1}; il admet l'anti-involution de première espèce

$$X_{2i-1,2i} = \bar{x}_{2i-1,2i}, \qquad X_{2i-1,2j-1} = \bar{x}_{2i,2j}, \qquad X_{2i-1,2j} = -\bar{x}_{2i,2j-1};$$

il est à $n(2n-1)$ variables; le groupe réel G auquel il est associé est aussi à $n(2n-1)$ variables.

Dans le cas $n = 2$, le groupe réel G à 6 variables est au fond le groupe projectif de la quadrique

$$(2) \qquad x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0,$$

où l'on a

$$x_{12} = \bar{x}_{12}, \qquad x_{34} = \bar{x}_{34}, \qquad x_{13} = \bar{x}_{24}, \qquad x_{14} = -\bar{x}_{23};$$

c'est donc encore le groupe non euclidien de l'espace hyperbolique E_5. Un point complexe de l'espace E_3 peut être représenté dans E_5 par la figure réelle formée d'un point réel de la quadrique (2) et de deux multiplicités planes imaginaires conjuguées à deux dimensions situées dans le plan tangent à la quadrique (2) au point considéré.

III. Le groupe hermitien $\mathcal{G}$ de l'espace complexe E_{n-1} est formé des transformations projectives complexes qui laissent invariante l'hyperquadrique

$$\varepsilon_1 x_1 \bar{x}_1 + \varepsilon_2 x_2 \bar{x}_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n \bar{x}_n = 0.$$

On obtient un groupe $\mathcal{G}$ de première classe ayant la même structure en considérant le connexe

$$(3) \qquad \Sigma a_{ik} x_i u_k = 0;$$

quand on effectue une transformation projective hermitienne, les x_i étant regardés comme les coordonnées homogènes d'un point, les u_k comme celles d'un plan, ce connexe est changé en un autre de coefficients a'_{ik}. On obtient ainsi à n^2 variables complexes un groupe linéaire qui laisse invariante la multiplicité plane

$$a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = 0,$$

et l'anti-involution de première espèce

$$A_{ik} = \varepsilon_i \varepsilon_k \bar{a}_{ki}.$$

En posant donc

$$a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=0, \qquad a_{ik}=\varepsilon_i\varepsilon_k\bar{a}_{ki},$$

on obtient un groupe linéaire réel G à n^2-1 variables, qui fournit lui-même un groupe projectif réel de l'espace E_{n^2-2} (¹).

Un point complexe (x) de l'espace E_{n-1} peut être représenté par une multiplicité plane réelle de l'espace E_{n^2-2} dont les équations sont

$$\frac{\Sigma a_{i1}x_i}{x_1}=\frac{\Sigma a_{i2}x_i}{x_2}=\ldots=\frac{\Sigma a_{in}x_i}{x_n};$$

ces équations expriment que la transformation projective

$$X_k=\sum_i a_{ik}x_i,$$

définie par le connexe (3), laisse invariant le point (x).

Dans le cas $n=4$, on a, si

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4=1,$$

un autre groupe plus simple $\mathfrak{G}$ de première classe en formant le groupe $g_2^{(h)}$. C'est au fond le groupe projectif de la quadrique de E_5 définie par l'équation

$$x_{12}x_{34}-x_{13}x_{24}+x_{14}x_{23}=0, \tag{4}$$

où l'on a

$$x_{12}=\varepsilon_1\varepsilon_2\bar{x}_{34}, \qquad x_{13}=-\varepsilon_1\varepsilon_3\bar{x}_{24}, \qquad x_{14}=\varepsilon_1\varepsilon_4\bar{x}_{23}.$$

Un point complexe (x) de l'espace E_3 peut être représenté par a figure réelle formée d'une multiplicité plane imaginaire à deux dimensions, génératrice de la quadrique (4) et de la multiplicité génératrice imaginaire conjuguée.

Dans le cas $n=6$, on a aussi, si

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6=-1,$$

un groupe de première classe G à 20 variables, au lieu de 35, en considérant le groupe $g_3^{(h)}$.

(¹) *Voir* E. Study, *Math. Ann.*, t. LX, 1905, p. 360.