

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J. LE ROUX

Sur le problème de Dirichlet

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6<sup>e</sup> série*, tome 10 (1914), p. 189-230.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1914\\_6\\_10\\_\\_189\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10__189_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur le problème de Dirichlet;*

PAR J. LE ROUX.



## INTRODUCTION.

Beaucoup de théories mathématiques et de problèmes d'applications conduisent à envisager les fonctions qui dépendent de toutes les valeurs que prennent des fonctions arbitraires dans un certain domaine. Les fonctions de cette nature ont été l'objet de recherches importantes sous des formes diverses : fonctions de lignes de Volterra et d'Arzela, fonctionnelles de M. Hadamard.

Les valeurs d'une fonction arbitraire peuvent être considérées comme constituant un ensemble de variables indépendantes, qui correspondent, élément par élément, aux divers points d'un domaine continu. C'est ce que nous appelons un ensemble *continu* de variables indépendantes, sans supposer, d'ailleurs, que les fonctions arbitraires soient elles-mêmes continues.

Lorsqu'on se borne aux fonctions arbitraires analytiques, chacune des fonctions se trouvant définie par sa valeur et celles de ses dérivées en un point, on peut prendre ces valeurs pour variables indépendantes. Les variables considérées forment alors un ensemble dénombrable. C'est le cas qui se présente dans la théorie analytique des équations aux dérivées partielles (<sup>1</sup>).

La théorie des fonctions d'ensembles infinis continus et celle des fonctions d'ensembles dénombrables présentent des analogies et des propriétés communes.

Les variables d'un ensemble dénombrable se distinguent habituellement les unes des autres par des indices entiers, simples ou mul-

(<sup>1</sup>) *Recherches sur les équations aux dérivées partielles* (*Journ. de Math.*, 5<sup>e</sup> série, t. IX, 1903, p. 403).

tiples. Ce mode de notation revient à faire correspondre, élément par élément, l'ensemble des variables et l'ensemble des nombres entiers. On peut de même individualiser les variables d'un ensemble continu, en les affectant d'indices qui désignent les points ou les coordonnées des points qui leur correspondent. Par exemple, pour les variables d'un ensemble  $(z)$  correspondant aux points  $M$  d'un espace linéaire  $(x)$  ou superficiel  $(x, y)$ , on emploiera les notations  $z_M, z_x, z_{x,y}$ . Les indices  $M, x, (x, y)$  interviennent ici, non pour déterminer les valeurs des quantités  $z$ , comme dans la théorie des fonctions, mais simplement pour individualiser les variables en les distinguant les unes des autres.

Dans le cas d'un nombre limité de variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , un système déterminé de valeurs attribuées à ces variables définit ce qu'on appelle un point de l'espace à  $n$  dimensions. Cette conception a été étendue au cas d'un ensemble infini dénombrable.

Dans le cas d'un ensemble continu  $(z)$ , correspondant aux points  $M$  d'un espace  $(x)$ , un ensemble déterminé de valeurs des  $z_x$  définit une fonction  $f(x)$  des points de l'espace  $(x)$ . La fonction de l'indice est donc, pour les ensembles continus, l'élément analogue au point des ensembles dénombrables.

Nos calculs effectifs ne peuvent comprendre qu'un nombre limité d'opérations, effectuées sur un nombre limité d'éléments. Nous n'atteignons, par le calcul, les ensembles infinis que par l'intermédiaire d'ensembles finis de plus en plus étendus ou de plus en plus denses, et en passant du fini à l'infini par des considérations de convergence ou de continuité. La théorie des séries et des fonctions convergentes d'une part, la définition de l'intégrale définie considérée comme limite d'une somme, d'autre part, caractérisent les procédés employés depuis les origines de la Géométrie, pour soumettre au calcul les ensembles infinis d'éléments.

J'ai appliqué dans ce Mémoire les considérations qui précèdent à l'intégrale de Dirichlet et à l'équation de Laplace.

Considérant l'intégrale comme la limite d'une somme finie, j'ai étudié la variation de cette somme. Le passage à la limite suit ainsi l'étude de la variation, au lieu de la précéder, comme dans la méthode ordinaire du calcul des variations. L'un des avantages de ce procédé,

c'est qu'il permet d'envisager les cas où l'intégrale limite n'existerait pas. D'un autre côté, la condition de minimum s'exprime par un système fini d'équations linéaires ordinaires, qu'on peut discuter par les procédés élémentaires de l'Algèbre, sans s'occuper des conditions restrictives qu'impose l'emploi du calcul intégral. Pour étudier la forme limite de la solution dans le cas des réseaux de densité indéfiniment croissante, il suffit d'en connaître la forme pour un système de régions finies. Je me suis servi de régions rectangulaires. Pour le rectangle, le système de nos équations linéaires peut être facilement résolu sous forme finie, et, *quelle que soit la discontinuité des valeurs données à la frontière, quand le réseau est très dense, les valeurs trouvées pour les inconnues diffèrent très peu des valeurs correspondantes d'une fonction harmonique.*

Ce résultat m'a paru présenter un certain intérêt pour les applications à la Physique, dans l'hypothèse de la constitution discontinue de la matière.

J'emploie l'intégrale de Dirichlet principalement pour former le système d'équations linéaires servant à déterminer les solutions approchées, plutôt que pour démontrer l'existence de la solution limite.

Nos calculs sont effectués seulement pour le cas de deux variables, mais la méthode est applicable quel que soit le nombre des variables indépendantes.

## CHAPITRE I.

### L'INTÉGRALE DE DIRICHLET CONSIDÉRÉE COMME FACTEUR QUADRATIQUE.

**1. Formation des réseaux.** — L'intégrale de Dirichlet étendue à un domaine (D) du plan des  $(x, y)$

$$J(u) = \iint_{(D)} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

est une fonction de l'ensemble infini des valeurs arbitraires attribuées à la fonction  $u$ , aux divers points du domaine. Pour trouver dans cet ensemble infini un ensemble fini de variables indépendantes qui donne lieu à la considération de la même limite, j'imagine qu'on couvre le domaine (D) d'un réseau de triangles. Ce réseau devra être constitué

de telle façon que deux triangles ne se superposent pas, même partiellement, et que deux triangles contigus qui ont en commun une portion de côté aient aussi en commun les deux sommets situés sur le côté considéré. J'appelle *nœuds* du réseau les sommets des triangles.

A chaque nœud  $M(x, y)$  du réseau, je fais correspondre une variable indépendante  $z_{x,y}$ . A tout système de valeurs de ces variables je fais ensuite correspondre une fonction  $u(x, y)$ , qui prend sur les nœuds les valeurs considérées  $z_{x,y}$  et qui, à l'intérieur des triangles, est linéaire en  $x, y$ . La fonction  $u(x, y)$  serait figurée par une surface polyédrale à facettes triangulaires. A la frontière du domaine on pourrait, soit remplacer les arcs du contour par leurs cordes, de manière à obtenir des triangles rectilignes, soit conserver les arcs de courbes et remplacer les faces planes de la surface polyédrale par des surfaces coniques ou d'autres surfaces appropriées. Au point de vue du passage à la limite, quand on fait croître indéfiniment la densité du réseau, ces divers procédés sont d'ailleurs, en général équivalents.

**2. Expression de l'intégrale de Dirichlet par une forme quadratique.** — Considérons un triangle du réseau. Soient  $M(x, y)$ ,  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$  les trois sommets et  $z, z_1, z_2$  les valeurs correspondantes des variables ( $z$ ). Le plan correspondant serait représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

où  $X, Y, Z$  désignent les coordonnées courantes. L'équation, résolue par rapport à  $Z$ , prend la forme

$$Z = pX + qY + r,$$

en posant

$$p = - \frac{\begin{vmatrix} y & z & 1 \\ y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad q = - \frac{\begin{vmatrix} z & x & 1 \\ z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Nous représenterons, pour abrégier, par  $(y, z)$ ,  $(z, x)$ ,  $(x, y)$  les déterminants qui figurent dans ces expressions, et nous écrirons

$$(1) \quad p = -\frac{(y, z)}{(x, y)}, \quad q = -\frac{(z, x)}{(x, y)}.$$

Les axes étant supposés rectangulaires, et le triangle  $MM_1M_2$ , parcouru dans le sens positif, l'aire du triangle est égale à  $\frac{1}{2}(x, y)$ . L'intégrale de Dirichlet relative à la surface polyédrale définie plus haut est donc

$$(2) \quad J(u) = \frac{1}{2} \sum \frac{(y, z)^2 + (z, x)^2}{(x, y)},$$

la somme  $\Sigma$  étant étendue à tous les triangles du réseau. Cette même expression convient même à la frontière, si l'on y considère seulement des triangles rectilignes. Nous étudierons plus loin le cas des triangles curvilignes.

On voit que l'intégrale  $J(u)$  s'exprime par une forme quadratique des variables  $z_{x,y}$ . Nous poserons

$$(3) \quad J(u) = F(z).$$

**5. Réseaux rectangulaires.** — Parmi les réseaux, je considère en particulier ceux qui sont formés de triangles rectangles égaux, ayant deux côtés parallèles aux axes de coordonnées. On obtient de pareils réseaux en divisant d'abord le plan en rectangles égaux par des parallèles aux axes : les parallèles à  $Ox$  étant distantes d'une même quantité  $h$ , et les parallèles à  $Oy$  d'une même quantité  $k$ ; on coupe ensuite chaque rectangle en deux triangles par une diagonale. Les valeurs de  $p$  et de  $q$  des formules (1) prennent la forme

$$(4) \quad p = \frac{z_{x+h,y} - z_{xy}}{h}, \quad q = \frac{z_{x,y+k} - z_{xy}}{k},$$

et la forme quadratique  $F(z)$  devient

$$(5) \quad J(u) = F(z) = \frac{1}{2} \sum \left[ \frac{(z_{x+h,y} - z_{xy})^2}{h^2} + \frac{(z_{x,y+k} - z_{xy})^2}{k^2} \right] hk.$$

Chaque valeur de  $p$  ou de  $q$  est commune à deux triangles contigus. On peut donc, dans la formule (5), supprimer le facteur  $\frac{1}{2}$  devant le

signe  $\Sigma$ , pourvu que la sommation soit considérée comme s'étendant aux côtés des triangles parallèles aux axes, et non plus aux triangles eux-mêmes.

Si l'on suppose enfin  $h = k$ , il y a une simplification nouvelle, et l'on a, en supprimant le facteur  $\frac{1}{2}$ , suivant la remarque précédente,

$$(6) \quad F(z) = \sum (z_{x+h,y} - z_{xy})^2 + (z_{x,y+k} - z_{xy})^2.$$

4. *Calcul des dérivées.* — Prenons d'abord la formule générale de  $p$  et  $q$  donnée par les équations (1). Nous avons

$$(7) \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{(y_2 - y_1)}{(x, y)}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{(x_2 - x_1)}{(x, y)};$$

d'où

$$(8) \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z_{xy}} = \sum q(x_2 - x_1) - p(y_2 - y_1).$$

La somme  $\Sigma$  s'étend ici à tous les triangles du réseau qui ont un sommet au point  $M(x, y)$ . Dans ces triangles, l'ensemble des côtés opposés au point  $M$  forme un contour polygonal fermé (L) entourant le sommet  $M$ , et l'on reconnaît immédiatement que la dérivée  $\frac{\partial F(z)}{\partial z_{xy}}$  se ramène à l'intégrale

$$\int q dx - p dy,$$

évaluée suivant le contour (L). Le sens du parcours est déterminé par la condition, déjà exprimée, que les déterminants  $(x, y)$  soient positifs. Lorsque le nœud  $M$  est situé sur le contour limite du domaine (D), la ligne (L) n'est plus fermée : elle s'arrête au contour.

Nous voyons paraître ici, avec une signification intéressante, une intégrale qui joue un rôle important dans la théorie des fonctions harmoniques : c'est l'intégrale de la dérivée normale. Si l'on désigne par  $ds$  l'élément d'arc de la ligne (L), par  $dn$  un déplacement infiniment petit suivant la *normale intérieure* à cette ligne, on a

$$q dx - p dy = \frac{du}{dn} ds.$$

La formule (8) devient, par conséquent,

$$(8') \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z_{x,y}} = \int_{(L)} \frac{du}{dn} ds.$$

Considérées comme fonctions des variables  $z_{x,y}$ , les dérivées partielles de la forme quadratique  $F(z)$  sont des formes linéaires dont il est utile d'avoir l'expression. Il suffit pour cela de considérer la partie relative à un triangle  $MM_1M_2$ . Posons

$$MM_1 = r_1, \quad MM_2 = r_2, \quad M_1M_2 = r_{12};$$

désignons par  $h$  la hauteur issue du sommet  $M$ , et par  $\hat{M}_1, \hat{M}_2$ , les angles à la base du triangle. En remplaçant  $p$  et  $q$  par leurs valeurs dans la formule (8), on trouve

$$q(x_2 - x_1) - p(y_2 - y_1) = z \frac{r_{12}}{h} - \frac{z_1 r_2 \cos \hat{M}_2 + z_2 r_1 \cos \hat{M}_1}{h};$$

d'où l'on tire, en faisant la somme des expressions semblables, pour tous les triangles ayant un sommet en  $M$ ,

$$(9) \quad \frac{\partial F(z)}{\partial z_{x,y}} = z_{x,y} \sum \frac{r_{12}}{h} - \sum \frac{z_1 r_2 \cos \hat{M}_2 + z_2 r_1 \cos \hat{M}_1}{h}.$$

Remarquons que le coefficient de  $z_{x,y}$ ,  $\sum \frac{r_{12}}{h}$ , est égal à la somme des coefficients des autres variables  $z_i$  dans la seconde somme  $\Sigma$ , et que, de plus, si les triangles du réseau n'ont pas d'angles obtus, tous les coefficients,  $\frac{r_i \cos \hat{M}_i}{h}$ , sont positifs.

3. *Forme limite des dérivées.* — Pour les réseaux particuliers que nous avons considérés, l'expression de la dérivée se déduit des formules (5) ou (6). Partant de la formule (5) nous avons, pour les nœuds intérieurs du réseau,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z_{x,y}} = \frac{k}{h} (2z_{x,y} - z_{x-h,y} - z_{x+h,y}) + \frac{h}{k} (2z_{x,y} - z_{x,y-k} - z_{x,y+k}),$$

ou encore

$$(10) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z_{x,y}} = -hk \left[ \frac{1}{h} \left( \frac{z_{x+h,y} - z_{x,y}}{h} - \frac{z_{x,y} - z_{x-h,y}}{h} \right) + \frac{1}{k} \left( \frac{z_{x,y+k} - z_{x,y}}{k} - \frac{z_{x,y} - z_{x,y-k}}{k} \right) \right].$$

La forme limite de cette expression fait apparaître le premier membre de l'équation de Laplace

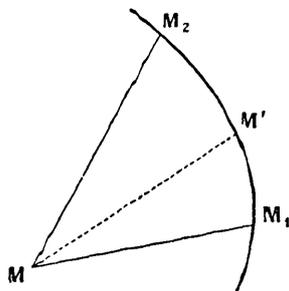
$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z_{x,y}} = -dx dy \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = -dx dy \Delta u.$$

Enfin, lorsque le point  $M$  est situé sur la frontière, il faut encore modifier cette forme limite. Le contour  $(C)$  étant supposé polygonal, soient  $M_0$  et  $M_1$ , les deux sommets contigus au sommet  $M$ . La ligne  $(L)$  définie plus haut, s'arrête aux sommets  $M_0$  et  $M_1$ . Appelons  $(S)$  l'aire comprise entre la ligne  $L$  et la portion  $M_0 M M_1$  du polygone frontière  $(C)$ . On a, dans ce cas,

$$\lim \frac{\partial F}{\partial z_{x,y}} = - \int_{M_0}^{M_1} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \iint_{(S)} \Delta u dx dy.$$

6. *Cas des triangles qui ont leur base à la frontière.* — Pour les triangles dont la base est formée par un arc de frontière, il y aurait lieu de modifier légèrement les résultats précédents, si l'on voulait éviter de considérer le contour curviligne comme la limite d'un contour polygonal inscrit.

Fig. 1.



Soit (*fig. 1*) le triangle  $MM_1 M_2$ , dont la base  $M_1 M_2$  est un arc de

courbe rectifiable. Nous désignons par  $ds$  la différentielle de cet arc, et nous supposons définie en chaque point  $M'(x', y')$  de  $M, M_2$  la valeur  $\zeta$  d'une fonction continue de l'arc, admettant une dérivée finie  $\frac{d\zeta}{ds}$ . Nous déterminons ainsi une ligne ( $\mathcal{L}$ ) de l'espace. Imaginons une portion de cône ayant pour directrice la ligne ( $\mathcal{L}$ ) et pour sommet un point  $S(x, y, z)$  qui se projette en  $M$  sur le plan  $xOy$ . L'intégrale de Dirichlet I, relative à ce cône, a pour valeur

$$I = \frac{1}{2} \int_{M, M_2} \frac{[(y' - y) d\zeta - (\zeta - z) dy']^2 + [(x' - x) d\zeta - (\zeta - z) dx']^2}{(x' - x) dy' - (y' - y) dx'}$$

On peut la transformer en introduisant des coordonnées polaires, le pôle étant en  $M$ . Posons  $MM' = r$ ; désignons par  $\theta$  l'angle de  $MM'$  avec une direction fixe, par  $\nu$  l'angle que forme la tangente en  $M'$  au contour avec la direction du rayon vecteur  $MM'$ , et par  $\varpi$  la longueur de la perpendiculaire abaissée de  $M$  sur cette tangente.

L'intégrale I prend la forme

$$(11) \quad I = \frac{1}{2} \int_{M, M_2} \frac{r^2 d\zeta^2 - 2r(\zeta - z) d\zeta dr + (\zeta - z)^2 ds^2}{\varpi ds},$$

et l'on trouve ensuite

$$(12) \quad \frac{\partial I}{\partial z} = \int_{M, M_2} \left( z - \zeta + r \frac{d\zeta}{ds} \cos \nu \right) \frac{ds}{\varpi}.$$

Lorsque la densité du réseau croît indéfiniment,  $r$  tendant vers zéro, et  $\frac{d\zeta}{ds}$  restant inférieure à une limite finie, le terme  $r \frac{d\zeta}{ds} \cos \nu$  devient, en général, négligeable. La forme de l'intégrale exige, pour être applicable, que la tangente en aucun point de l'arc  $M, M_2$  ne vienne passer par le point  $M$ , ni ne tende asymptotiquement vers ce point.

7. *Conditions de minimum.* — Supposons qu'on donne les valeurs des variables qui correspondent à un certain ensemble de nœuds (E). On peut alors déterminer les variables restantes par la condition que l'intégrale  $F(z)$  soit un minimum. Nous désignerons par  $\xi, \eta$  les coordonnées des nœuds du premier ensemble (E), et par  $\zeta(\xi, \eta)$  les valeurs données des variables correspondantes. Les inconnues  $z_{x,y}$  devront

vérifier le système linéaire

$$(13) \quad \frac{\partial F}{\partial z_{xy}} = 0,$$

dans lequel on suppose que le point  $(x, y)$  désigne successivement tous les nœuds qui n'appartiennent pas à l'ensemble (E). Ce système contient autant d'équations que d'inconnues. Il admet une solution bien déterminée, car le déterminant est l'un des mineurs principaux de la forme quadratique positive  $F(z)$ , lesquels sont tous différents de zéro, puisque la forme ne s'annule que si toutes les variables  $z$  ont des valeurs égales.

8. *Forme de la solution.* — Les équations (13) développées prennent la forme suivante, d'après la formule (9) :

$$(14) \quad z_{x,y} \sum \frac{r_{12}}{h} - \sum \frac{z_1 r_2 \cos \hat{M}_2 + z_2 r_1 \cos \hat{M}_1}{h} = 0.$$

Nous supposons désormais que les triangles du réseau n'ont pas d'angles obtus. Dans ce cas, l'équation (14) résolue par rapport à  $z_{x,y}$  donne un résultat de la forme

$$(15) \quad z_{x,y} = \sum \alpha_i z_i,$$

où tous les coefficients  $\alpha_i$  sont positifs et ont une somme égale à l'unité. Les variables  $z_i$  correspondent aux nœuds du contour polygonal (L) défini au n° 4.

La formule (15) montre que  $z_{x,y}$  est compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs  $z_i$ . Ce résultat correspond à la propriété bien connue des fonctions harmoniques dans un domaine de n'avoir ni maximum ni minimum à l'intérieur de ce domaine.

Si l'on résout le système (14) on obtient, pour les inconnues  $z_{x,y}$ , des valeurs qui s'expriment en fonction linéaire et homogène des quantités données  $\zeta_{\xi,\eta}$ ,

$$(16) \quad z_{x,y} = \sum \alpha(x, y, \xi, \eta) \zeta_{\xi,\eta}.$$

*Les coefficients de ce développement sont tous positifs et vérifient,*

comme ceux de la formule (15), la relation

$$(17) \quad \sum_{\xi, \eta} \alpha(x, y, \xi, \eta) = 1.$$

En effet, si l'on élimine la variable  $z_{x,y}$  en la remplaçant par sa valeur (15) dans les équations du système (14), les équations restantes jouissent toujours des mêmes propriétés en ce qui concerne les signes et la somme de leurs coefficients. L'élimination de toutes les inconnues, moins une, pouvant ainsi s'effectuer par substitutions successives, la proposition énoncée devient évidente.

De cette propriété des coefficients il résulte encore que la valeur de  $z_{x,y}$  est comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs données  $\zeta_{\xi,\eta}$ .

Par conséquent, si les nœuds  $(\xi, \eta)$  n'embrassent pas la totalité des nœuds de la frontière du domaine (D), ce sera toujours néanmoins, sur l'ensemble des nœuds  $(\xi, \eta)$ , qu'on trouvera le maximum et le minimum de  $z_{x,y}$ .

La forme limite du résultat précédent, pour les réseaux de densité indéfiniment croissante, consiste dans le fait qu'une fonction  $u$ , harmonique dans un domaine (D), ne peut atteindre son maximum ou son minimum dans les régions de la frontière où la dérivée normale  $\frac{du}{dn}$  serait constamment nulle.

Lorsqu'on emploie la forme (12) pour certains termes de la dérivée, les termes correspondants de la formule (16) sont remplacés par des intégrales définies. Cependant les propriétés essentielles subsistent, pourvu qu'on remplace les valeurs  $\zeta$  données à la frontière par des valeurs qui en diffèrent très peu dans les réseaux très denses

$$\zeta' = \zeta - r \frac{d\zeta}{ds} \cos V.$$

On reconnaît d'ailleurs, à cause des propriétés des coefficients  $\alpha$ , que si l'on remplace les  $\zeta$  par des valeurs approchées à moins de  $\varepsilon$ , les valeurs des inconnues  $z_{x,y}$  qu'on en déduit sont elles-mêmes approchées à moins de  $\varepsilon$ .

**9.** *La solution trouvée donne bien le minimum.* — La solution trouvée donne bien le minimum de l'intégrale de Dirichlet pour toutes les surfaces polyédrales projetées suivant le réseau considéré et ayant les mêmes sommets aux nœuds  $(\xi, \eta)$ .

Donnons en effet, à chaque variable  $z_{x,y}$ , un accroissement  $z'_{x,y}$ ; on a

$$F(z + z') = F(z) + \sum z' \frac{\partial F}{\partial z} + F(z').$$

Dans la somme

$$\sum z' \frac{\partial F}{\partial z},$$

les termes relatifs aux nœuds de l'ensemble  $(\xi, \eta)$  sont nuls, puisque nous supposons en ces points  $z'_{\xi,\eta} = 0$ ; les termes relatifs aux autres nœuds sont également nuls, en vertu de l'équation (13). La forme  $F(z')$  n'est nulle que si tous les  $z'$  sont égaux, et comme ils sont nuls sur l'ensemble  $(\xi, \eta)$ , il en résulte que cette forme a une valeur essentiellement positive, à moins qu'on n'ait en tous les nœuds

$$z'_{x,y} = 0.$$

Si cette condition n'est pas réalisée, on a donc nécessairement

$$F(z + z') > F(z).$$

Pour une fonction  $u(x, y)$  admettant des dérivées partielles continues, l'intégrale de Dirichlet est la limite de l'intégrale analogue relative à une surface polyédrale. Par conséquent, s'il existe une pareille fonction pour laquelle l'intégrale de Dirichlet atteint effectivement son minimum, la différence entre ce minimum et la fonction  $F(z)$  tend vers zéro quand on fait croître indéfiniment la densité du réseau et que, pour chaque réseau, on détermine les valeurs des  $z$  par les équations (13).

**10.** *La forme polaire et les formules de Green.* — Les formules de Green peuvent se rattacher à la considération de la forme polaire de la forme quadratique  $F(z)$ . Soient  $z_{x,y}$ ,  $t_{x,y}$  deux systèmes de variables correspondant aux nœuds du même réseau;  $u(x, y)$  et

$v(x, y)$  les deux fonctions associées. Considérons la forme polaire

$$F(z, t) = \frac{1}{2} \sum t \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \sum z \frac{\partial F}{\partial t}.$$

En y remplaçant les dérivées par leurs formes limites, y compris les termes à la frontière, nous avons les formules suivantes, où  $S$  désigne l'aire du domaine et  $(C)$  le contour frontière.

$$\begin{aligned} \lim F(z, t) &= \iint_{(S)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \iint_{(S)} v \Delta u dx dy - \int_{(C)} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= - \iint_{(S)} u \Delta v dx dy - \int_{(C)} u \frac{\partial v}{\partial n} ds; \end{aligned}$$

d'où

$$\iint_{(S)} (v \Delta u - u \Delta v) dx dy + \int \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds = 0.$$

La formule d'Euler pour les fonctions homogènes quadratiques,

$$F(z) = \frac{1}{2} \sum z \frac{\partial F}{\partial z},$$

se traduit par l'identité

$$\iint \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_{(S)} u \Delta u dx dy - \int_{(C)} u \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Le rôle des fonctions de Green dans le calcul des fonctions harmoniques s'explique si l'on remarque que la forme polaire

$$\frac{1}{2} \sum t \frac{\partial F}{\partial z}$$

est une combinaison linéaire des premiers membres des équations (13). Si l'on veut, par exemple, résoudre ces équations dans l'hypothèse examinée précédemment, où l'on donne les valeurs des inconnues  $z_{x,y}$  pour un ensemble de points  $(\xi, \eta)$ , on supposera qu'on ait

$$t_{\xi, \eta} = 0,$$

de manière à n'introduire dans la forme polaire que celles des dérivées partielles  $\frac{\partial F}{\partial z_{x,y}}$  qui forment les premiers membres des équations (13).

On aura donc, dans cette hypothèse,

$$\sum z \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Il reste à déterminer les valeurs restantes des variables  $t$ , de manière à éliminer toutes les inconnues  $z$ , sauf celle que l'on veut calculer, soit par exemple  $z_{x_0, y_0}$ . Pour cela, il suffit qu'on ait

$$\frac{\partial F}{\partial t_{x, y}} = 0,$$

pour tous les nœuds  $(x, y)$ , sauf pour le nœud  $(x_0, y_0)$ . En ce dernier nœud, on pourra supposer

$$\frac{\partial F}{\partial t_{x_0, y_0}} = 1.$$

On reconnaît facilement sous cette forme les conditions ordinaires qui déterminent la fonction de Green pour le problème que nous considérons.

La considération de la forme polaire fournit aussi la relation identique qui existe entre les formes linéaires dérivées  $\frac{\partial F}{\partial z}$ . La forme quadratique  $F(t)$  s'annule identiquement, ainsi que toutes ses dérivées partielles du premier ordre, quand on donne aux variables  $t$  la même valeur, par exemple

$$t = 1.$$

On déduit de cette remarque, à cause de la réciprocity des formes polaires,

$$\sum \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

## CHAPITRE II.

### ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES DES RÉSEAUX RECTANGULAIRES RÉGULIERS.

**11.** Nous allons maintenant étudier spécialement le cas des réseaux formés comme nous l'avons indiqué, à l'aide de rectangles égaux ayant leurs côtés parallèles aux axes de coordonnées.

D'après la formule (10), les équations linéaires à résoudre se ramènent à la forme

$$(18) \quad \frac{1}{h^2} (2z_{x,y} - z_{x-h,y} - z_{x+h,y}) + \frac{1}{k^2} (2z_{x,y} - z_{x,y-k} - z_{x,y+k}) = 0.$$

Pour  $h = k$ , l'équation se simplifie encore et devient

$$(19) \quad 4z_{x,y} - z_{x-h,y} - z_{x+h,y} - z_{x,y-k} - z_{x,y+k} = 0.$$

En écrivant les équations de cette forme pour chaque nœud  $(x, y)$ , on forme un système d'équations linéaires dont nous avons étudié plus haut les propriétés générales. Mais on peut aussi envisager chacune de ces équations comme une équation aux différences finies et chercher à la résoudre pour toutes les valeurs réelles des variables  $x$  et  $y$ . Nous déterminerons ainsi des fonctions dont les valeurs sur les nœuds du réseau vérifieront les équations linéaires considérées; nous leur donnerons le nom de *fonctions d'interpolation*.

**12.** Nous commencerons par calculer des solutions simples de l'équation aux différences (18).

Posons

$$(20) \quad z_{x,y} = u^{\frac{x}{h}} v^{\frac{y}{k}},$$

$u$  et  $v$  étant des constantes.

En écrivant que cette expression vérifie l'équation (18), on trouve entre  $u$  et  $v$  la relation

$$(21) \quad \frac{1}{h^2} \left( 2 - u - \frac{1}{u} \right) + \frac{1}{k^2} \left( 2 - v - \frac{1}{v} \right) = 0.$$

Soient

$$u = u', \quad v = v',$$

la relation (21) devient

$$(22) \quad \frac{\left( u' - \frac{1}{u'} \right)^2}{h^2} + \frac{\left( v' - \frac{1}{v'} \right)^2}{k^2} = 0.$$

Nous poserons donc

$$u' - \frac{1}{u'} = th, \quad v' - \frac{1}{v'} = t'k;$$

d'où

$$u' = \sqrt{1 + t^2 h^2} + th, \quad v' = \sqrt{1 + t'^2 k^2} + t'k.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (22), on a

$$(23) \quad t^2 + t'^2 = 0.$$

Nous prenons

$$t' = ti \quad (i = \sqrt{-1}),$$

ce qui nous donne les expressions de  $u$  et de  $v$  sous la forme simple

$$\begin{aligned} u &= (\sqrt{1 + t^2 h^2} + th)^2, \\ v &= (\sqrt{1 - t^2 k^2} + itk)^2. \end{aligned}$$

De là nous tirons enfin l'expression de  $z_{x,y}$

$$(24) \quad z_{x,y} = (\sqrt{1 + t^2 h^2} + th)^{\frac{2x}{h}} (\sqrt{1 - t^2 k^2} + itk)^{\frac{2y}{k}}.$$

Le paramètre  $t$  peut prendre des valeurs réelles ou imaginaires. Toute combinaison linéaire d'expressions de la forme (24) est une nouvelle solution de l'équation (18). Telle serait l'intégrale

$$\int f(t) (\sqrt{1 + t^2 h^2} + th)^{\frac{2x}{h}} (\sqrt{1 - t^2 k^2} + itk)^{\frac{2y}{k}} dt,$$

dans laquelle la fonction  $f(t)$ , ainsi que le domaine d'intégration, sont arbitraires.

**15. Polynomes satisfaisant à l'équation aux différences.** — Parmi les diverses intégrales qu'on peut déduire ainsi de la formule (24) je signalerai les polynomes à cause de leur forme intéressante, bien que je n'aie pas à en faire l'application dans la suite de ce travail.

Posons, en désignant par  $p$  un nombre entier positif,

$$(25) \quad \begin{cases} j_{2p}(x, h) = x^2(x^2 - h^2)(x^2 - 4h^2) \dots (x^2 - (p-1)^2 h^2), \\ j_{2p+1}(x, h) = x(x^2 - h^2)(x^2 - 4h^2) \dots (x^2 - p^2 h^2). \end{cases}$$

Ces expressions satisfont à la formule de récurrence

$$(26) \quad j_n(x + h, h) + j_n(x - h, h) - 2j_n(x, h) = n(n-1)h^2 j_{n-2}(x, h).$$

Les polynomes

$$(27) \quad \begin{cases} P_n(x, y, h, k) = n! \sum (-1)^p \frac{j_{n-2p}(x, h)}{(n-2p)!} \frac{j_{2p}(y, k)}{2p!}, \\ Q_n(x, y, h, k) = n! \sum (-1)^p \frac{j_{n-2p-1}(x, h)}{(2n-2p-1)!} \frac{j_{2p+1}(y, k)}{(2p+1)!} \end{cases}$$

sont des solutions de l'équation aux différences (18), qui tendent vers des polynomes harmoniques homogènes lorsque  $h$  et  $k$  tendent vers zéro. Si l'on pose

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

on trouve

$$\lim P_n = r^n \cos n \theta,$$

$$\lim Q_n = r^n \sin n \theta.$$

On peut d'ailleurs démontrer facilement que tout polynome vérifiant l'équation aux différences (18) est une combinaison linéaire de polynomes  $P_n$  et  $Q_n$ .

**14. Transformation de l'exponentielle.** — Nous transformerons la solution fondamentale définie par la formule (24), de manière à lui donner une forme plus commode pour le calcul. Posons

$$(28) \quad tk = \sin \frac{\theta k}{2},$$

$$(29) \quad \theta' = \frac{2}{h} \log \left( \sqrt{1 + \frac{h^2}{k^2} \sin^2 \frac{\theta k}{2}} + \frac{h}{k} \sin \frac{\theta k}{2} \right).$$

L'expression de  $z_{x,y}$  devient

$$(30) \quad z_{x,y} = (\sqrt{1 + t^2 h^2 + th})^{\frac{2x}{h}} (\sqrt{1 - t^2 k^2 + ilk})^{\frac{2y}{k}} = e^{\theta' x + i \theta y}.$$

Le changement de signe de  $t$  ou de  $i$  donne les diverses exponentielles représentées par l'expression

$$e^{\pm \theta' x \pm i \theta y},$$

dont on déduit ensuite, par des combinaisons linéaires, les intégrales élémentaires de la forme

$$\operatorname{ch} \theta' x \cos \theta y, \quad \operatorname{ch} \theta' x \sin \theta y,$$

$$\operatorname{sh} \theta' x \cos \theta y, \quad \operatorname{sh} \theta' x \sin \theta y.$$

Les symboles  $ch$ ,  $sh$  désignent le cosinus et le sinus hyperboliques.

En changeant  $t$  en  $ti$ , on obtient évidemment d'autres intégrales semblables, dans lesquelles les fonctions circulaires et hyperboliques sont simplement permutées.

**15. Relation entre  $\theta$  et  $\theta'$ .** — L'examen de la relation qui existe entre  $\theta$  et  $\theta'$  est important pour l'étude de la convergence. Nous supposons ici que l'on considère seulement les valeurs positives de ces deux paramètres.

Le développement en série du second membre de la formule (29) donnerait

$$\theta' = \frac{2}{h} \left( \frac{h}{k} \sin \frac{\theta k}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{h^3}{k^3} \sin^3 \frac{\theta k}{2} + \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{5} \frac{h^5}{k^5} \sin^5 \frac{\theta k}{2} + \dots \right).$$

Donc, si  $\theta$  est constant et que  $\frac{h}{k}$  reste fini et différent de zéro, lorsque  $k$  tend vers zéro,  $\theta'$  tend vers  $\theta$ .

L'exponentielle limite  $e^{\theta x + i\theta y}$  est une fonction de  $x + iy$ . La partie réelle et le coefficient de  $i$ , dans cette fonction, sont par conséquent des fonctions harmoniques.

Le paramètre  $\theta'$  tend vers sa limite en croissant. On peut vérifier cette propriété par le calcul suivant :

Posons

$$\frac{h}{k} = a, \quad k = \frac{2}{x}, \quad \theta' = \frac{x}{a} \log \left( \sqrt{1 + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{x}} + a \sin \frac{\theta}{x} \right).$$

Nous avons

$$\frac{d\theta'}{dx} = \frac{1}{a} \log \left( \sqrt{1 + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{x}} + a \sin \frac{\theta}{x} \right) - \frac{\frac{\theta}{x} \cos \frac{\theta}{x}}{\sqrt{1 + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{x}}},$$

$$\frac{d^2 \theta'}{dx^2} = - \frac{\frac{\theta^3}{x^3} (1 + a^2) \sin \frac{\theta}{x}}{\left( 1 + a^2 \sin^2 \frac{\theta}{x} \right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lorsque  $x$  croît à partir de la valeur  $\frac{2\theta}{\pi}$ , la dérivée seconde est

constamment négative. La dérivée première est positive et tend vers zéro. Donc  $\theta'$  croît constamment dans les conditions indiquées.

### CHAPITRE III.

#### RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES POUR LE CAS DU RECTANGLE.

**16.** A l'aide des fonctions simples que nous venons de déterminer, il est possible de résoudre l'équation aux différences

$$(18) \quad \frac{1}{h^2}(2z_{x,y} - z_{x-h,y} - z_{x+h,y}) + \frac{1}{k^2}(2z_{x,y} - z_{x,y-k} - z_{x,y+k}) = 0,$$

de façon que  $z$  prenne des valeurs données sur les nœuds du périmètre d'un rectangle (D) dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées. On calculera une *fonction d'interpolation*  $f(x, y)$  définie dans tout le domaine et qui devra se réduire à  $z_{x,y}$  sur les nœuds du réseau.

Nous supposons qu'on prenne le centre du rectangle pour origine. Soient  $2a$  et  $2b$  les longueurs des côtés parallèles respectivement à  $Ox$  et  $Oy$ . Pour former le réseau, on partagera chacun des côtés en  $2n$  parties égales, de sorte qu'on devra faire dans nos formules

$$h = \frac{a}{n}, \quad k = \frac{b}{n}.$$

Les coordonnées  $\xi, \eta$  des nœuds situés à la frontière seront de la forme suivante, où  $p$  désigne un entier quelconque au plus égal à  $n$  :

1° Sur les côtés parallèles à  $Oy$ ,

$$\xi = \pm a, \quad \eta = \pm pk = \pm \frac{pb}{n};$$

2° Sur les côtés parallèles à  $Ox$ ,

$$\eta = \pm b, \quad \xi = \pm ph = \pm \frac{pa}{n}.$$

En chacun de ces nœuds on suppose donnée la valeur de  $z$ ; nous la désignerons par  $\zeta(\xi, \eta)$ . Les valeurs données aux angles du rectangle n'interviennent pas dans les équations (18) pour la détermination des valeurs des  $z_{x,y}$  sur les nœuds intérieurs. On peut donc sans inconvé-

nient les supposer égales à zéro, puisque nous ne nous astreignons, d'autre part, à aucune condition de continuité.

17. Par suite de considérations évidentes, on est conduit à chercher la représentation de la solution sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions simples signalées au Chapitre précédent et qui s'expriment par le produit d'une fonction hyperbolique et d'une fonction circulaire.

Pour que l'exponentielle  $e^{\mu \frac{x}{a} + i \frac{2y}{b}}$  satisfasse à l'équation aux différences (18), on doit avoir, d'après l'équation (29),

$$\mu = \frac{2a}{h} \log \left( \sqrt{1 + \frac{h^2}{k^2} \sin^2 \frac{\alpha k}{2b}} + \frac{h}{k} \sin \frac{\alpha k}{2b} \right);$$

et, comme on a

$$h = \frac{a}{n}, \quad k = \frac{b}{n},$$

cette relation devient

$$(31) \quad \mu = 2n \log \left( \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2n}} + \frac{a}{b} \sin \frac{\alpha}{2n} \right).$$

D'après cela, posons

$$(32) \quad f(x, y) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \left( A_r \frac{\text{ch } \mu_r \frac{x}{a}}{\text{ch } \mu_r} + B_r \frac{\text{sh } \mu_r \frac{x}{a}}{\text{sh } \mu_r} \right) \cos \frac{(2r+1)\pi y}{2b} \\ + \sum_{r=1}^{r=n-1} \left( A'_r \frac{\text{ch } \mu'_r \frac{x}{a}}{\text{ch } \mu'_r} + B'_r \frac{\text{sh } \mu'_r \frac{x}{a}}{\text{sh } \mu'_r} \right) \sin \frac{r\pi y}{b} \\ + \sum_{r=0}^{r=n-1} \left( C_r \frac{\text{ch } \nu_r \frac{y}{b}}{\text{ch } \nu_r} + D_r \frac{\text{sh } \nu_r \frac{y}{b}}{\text{sh } \nu_r} \right) \cos \frac{(2r+1)\pi x}{2a} \\ + \sum_{r=1}^{r=n-1} \left( C'_r \frac{\text{ch } \nu'_r \frac{y}{b}}{\text{ch } \nu'_r} + D'_r \frac{\text{sh } \nu'_r \frac{y}{b}}{\text{sh } \nu'_r} \right) \sin \frac{r\pi x}{a} \quad (1).$$

(1) Dans la formule (32), les termes en sinus et en cosinus peuvent se ramener à un même type en vertu des relations

$$\sin \frac{2r\pi y}{2b} = (-1)^r \sin \frac{2r\pi(y+b)}{2b}, \\ \cos \frac{(2r+1)\pi y}{2b} = (-1)^r \sin \frac{(2r+1)\pi(y+b)}{2b}.$$

Les multiplicateurs  $\mu_r, \mu'_r$  se déduisent de la formule (31) en y remplaçant  $\alpha$  successivement par  $\frac{(2r+1)\pi}{2}$  et  $r\pi$ ; les multiplicateurs  $\nu_r$  et  $\nu'_r$  se calculent de la même façon, mais en permutant  $a$  et  $b$ .

Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients  $A_r, B_r, \dots$  par la condition que la fonction  $f(x, y)$  prenne sur les nœuds de la frontière les valeurs données  $\zeta(\xi, \eta)$ , sauf aux angles du rectangle, où la fonction considérée s'annule identiquement. Nous nous trouvons amenés à un problème d'interpolation trigonométrique qu'on peut résoudre par les méthodes ordinaires. Pour  $x = \pm a$ , les termes de la seconde ligne disparaissent et l'on doit avoir, par conséquent,

$$\begin{aligned} \zeta(a, \eta) &= \sum_{r=0}^{r=n-1} (A_r + B_r) \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} + \sum_{r=1}^{r=n-1} (A'_r + B'_r) \sin \frac{r\pi\eta}{b}, \\ \zeta(-a, \eta) &= \sum_{r=0}^{r=n-1} (A_r - B_r) \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} + \sum_{r=1}^{r=n-1} (A'_r - B'_r) \sin \frac{r\pi\eta}{b}. \end{aligned}$$

On en tire

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} A_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) + \zeta(-a, \eta)}{2} \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b}, \\ B_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) - \zeta(-a, \eta)}{2} \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b}, \\ A'_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) + \zeta(-a, \eta)}{2} \sin \frac{r\pi\eta}{b}, \\ B'_r &= \frac{1}{n} \sum_{\eta=-b+k}^{\eta=b-k} \frac{\zeta(a, \eta) - \zeta(-a, \eta)}{2} \sin \frac{r\pi\eta}{b}. \end{aligned} \right.$$

Les autres coefficients  $C_r, D_r, C'_r, D'_r$ , se calculeraient évidemment par des formules semblables.

18. Nous avons trouvé une fonction d'interpolation  $f(x, y)$

définie dans tout le plan. Il reste à démontrer qu'elle prend en tous les nœuds du réseau situés à l'intérieur du rectangle les valeurs des inconnues  $z_{x,y}$ .

Nous avons vu que, si l'on écrit les équations de la forme (18) en y remplaçant les variables  $x$  et  $y$  successivement par les coordonnées de tous les nœuds considérés du réseau, on obtient un système d'équations linéaires dont la solution est unique quand on suppose données les valeurs  $\zeta(\xi, \eta)$  aux nœuds de la frontière. Or, la *fonction d'interpolation* satisfait à toutes ces conditions. La valeur qu'elle prend en chaque nœud  $(x, y)$  est donc égale à  $z_{x,y}$ .

19. On peut faire immédiatement une remarque importante qui résulte du simple examen des formules (33). Si le module de la fonction  $\zeta(\xi, \eta)$  reste constamment inférieur à  $M$ , chaque coefficient  $A_r, B_r, \dots$  a un module inférieur à  $2M$ . En effet, chaque somme  $\Sigma$  dans ces formules comprend  $2n-1$  ou  $2n-2$  termes et chacun d'eux est au plus égal à  $M$ . On a donc

$$A_r < \frac{(2n-1)M}{n} < 2M, \quad \dots$$

20. *Expression de l'intégrale en fonction linéaire des données.*

— La fonction d'interpolation  $f(x, y)$  est une fonction linéaire des données  $\zeta(\xi, \eta)$ , dont il est facile d'avoir l'expression en remplaçant dans la formule (32) les coefficients  $A_r, B_r, \dots$  par leurs valeurs (33). Le coefficient de  $\zeta(a, \eta)$  dans le développement est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \sum_{r=0}^{r=n-1} \left( \frac{\operatorname{ch} \mu_r \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \mu_r} + \frac{\operatorname{sh} \mu_r \frac{x}{a}}{\operatorname{sh} \mu_r} \right) \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} \cos \frac{(2r+1)\pi y}{2b} \\ & + \frac{1}{2n} \sum_{r=0}^{r=n-1} \left( \frac{\operatorname{ch} \mu'_r \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \mu'_r} + \frac{\operatorname{sh} \mu'_r \frac{x}{a}}{\operatorname{sh} \mu'_r} \right) \sin \frac{r\pi\eta}{2b} \sin \frac{r\pi y}{2b}. \end{aligned}$$

On peut résumer tous les coefficients dans une même formule en

introduisant la fonction

$$\begin{aligned}
 (34) \quad P(x, y, \xi, \eta) = & \frac{1}{b} \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu_r \left( \frac{x + \xi}{a} \right)}{\operatorname{sh} 2 \mu_r \frac{\xi}{a}} \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{b} \cos \frac{(2r+1)\pi y}{b} \\
 & + \frac{1}{b} \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \mu_r' \left( \frac{x + \xi}{a} \right)}{\operatorname{sh} 2 \mu_r' \frac{\xi}{a}} \sin \frac{r\pi\eta}{b} \sin \frac{r\pi y}{b} \\
 & + \frac{1}{a} \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \nu_r \left( \frac{y + \eta}{a} \right)}{\operatorname{sh} 2 \nu_r \frac{y}{b}} \cos \frac{(2r+1)\pi\xi}{a} \cos \frac{(2r+1)\pi x}{a} \\
 & + \frac{1}{a} \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{\operatorname{sh} \nu_r' \left( \frac{y + \eta}{a} \right)}{\operatorname{sh} 2 \nu_r' \frac{\eta}{b}} \sin \frac{r\pi\xi}{a} \sin \frac{r\pi x}{a}.
 \end{aligned}$$

L'expression de P se réduit aux termes qui figurent dans les deux premières lignes pour  $\xi = \pm a$ , et à ceux des deux dernières lignes pour  $\eta = \pm b$ . Soit  $\Delta s$  un élément de longueur du périmètre du rectangle ; on prendra  $\Delta s = k$  sur les côtés parallèles à  $Oy$  et  $\Delta s = h$  sur les côtés parallèles à  $Ox$ , de sorte qu'on aura, suivant le côté considéré,

$$\frac{\Delta s}{b} = \frac{1}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta s}{a} = \frac{1}{n}.$$

Avec ces notations, l'expression de la fonction d'interpolation prend la forme suivante, analogue à la formule de Poisson,

$$(35) \quad f(x, y) = \sum \zeta(\xi, \eta) P(x, y, \xi, \eta) \Delta s.$$

Nous avons donc obtenu pour le cas du rectangle l'expression linéaire dont nous avons donné au n° 7 la forme générale. Les coefficients  $\alpha$  de l'équation (16) sont ici égaux à  $P(x, y, \xi, \eta) \Delta s$ .

**21. Valeur de la fonction P sur le périmètre du rectangle.** — On obtient une vérification simple des résultats obtenus, en calculant la

valeur que prend le coefficient  $P(x, y, \xi, \eta) \Delta s$  lorsque le point  $(x, y)$  coïncide avec un nœud de la frontière. Il suffira de faire le calcul pour le cas où l'on a  $\xi = a$ . Le point  $(x, y)$  peut se trouver alors sur le côté  $x = a$  ou sur l'un quelconque des trois autres côtés; si l'on a  $y = \pm b$  ou  $x = -a$ , en même temps que  $\xi = a$ , la fonction  $P(x, y, \xi, \eta)$  est identiquement nulle. Il ne reste à examiner que l'hypothèse  $\xi = a$ ,  $x = a$ . La valeur de  $P \Delta s$  se présente alors sous la forme

$$(36) \quad P \Delta s = \frac{1}{n} \sum \cos \frac{(2r+1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2r+1)\pi \eta}{2b} + \frac{1}{n} \sum \sin \frac{r\pi y}{b} \sin \frac{r\pi \eta}{b} \\ = \frac{1}{2n} \sum \left[ \cos \frac{(2r+1)\pi(y+\eta)}{2b} + \cos \frac{(2r+1)\pi(y-\eta)}{2b} \right] \\ + \frac{1}{2n} \sum \left[ \cos \frac{2r\pi(y-\eta)}{2b} - \cos \frac{2r\pi(y+\eta)}{2b} \right].$$

Nous transformons cette dernière expression en faisant usage des deux identités

$$\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \dots + \cos(2n-1)a = \frac{\sin 2na}{2 \sin a}, \\ \frac{1}{2} + \cos 2a + \cos 4a + \dots + \cos(2n-2)a = \frac{\sin(2n-1)a}{2 \sin a}.$$

Nous trouvons ainsi, en supposant  $(y+\eta)(y-\eta) \neq 0$ ,

$$(37) \quad P \Delta s = \frac{1}{4n} \left[ \frac{\sin \frac{2n\pi(y-\eta)}{2b} + \sin \frac{(2n-1)\pi(y+\eta)}{2b}}{\sin \frac{\pi(y-\eta)}{2b}} \right. \\ \left. + \frac{\sin \frac{2n\pi(y+\eta)}{2b} + \sin \frac{(2n-1)\pi(y+\eta)}{2b}}{\sin \frac{\pi(y+\eta)}{2b}} \right].$$

Les valeurs de  $y$  et de  $\eta$  sont de la forme

$$y = mk, \quad \eta = m'k,$$

$m$  et  $m'$  étant des nombres entiers positifs ou négatifs, et l'on a, d'autre part,

$$b = nk.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule précédente donne

$$P \Delta s = \frac{1}{4n} \left\{ \frac{\sin \left[ (m - m')\pi - \frac{(m - m')\pi}{2n} \right]}{\sin \frac{(m - m')\pi}{2n}} - \frac{\sin \left[ (m + m')\pi - \frac{(m + m')\pi}{2n} \right]}{\sin \frac{(m + m')\pi}{2n}} \right\}$$

$$= \frac{1}{4n} [(-1)^{m-m'-1} - (-1)^{m+m'-1}] = 0.$$

Il reste à examiner les cas exclus

$$y + \eta = 0 \quad \text{et} \quad y - \eta = 0.$$

Le calcul direct à l'aide de la formule (36) ou le passage à la limite à l'aide de la formule (37) donne :

- 1° Pour  $\eta + y = 0$ ,  $P = 0$ ;  
 2° Pour  $y = \eta$ ,  $P \Delta s = 1$ .

En résumé, le coefficient  $P(x, y, \eta, \xi) \Delta s$  s'annule lorsque le nœud  $(x, y)$  se trouve sur la frontière, à moins qu'il ne coïncide avec le nœud  $(\xi, \eta)$ , auquel cas on a

$$P(\xi, \eta, \xi, \eta) \Delta s = 1.$$

D'après ce calcul, il est clair que la fonction d'interpolation  $f(x, y)$  définie par la formule (35) est égale à  $\zeta(\xi, \eta)$  aux nœuds de la frontière.

## CHAPITRE IV.

### FORME LIMITE DE LA SOLUTION.

**22. Convergence du développement.** — Il reste à étudier la manière dont se comporte la fonction d'interpolation  $f(x, y)$  pour les réseaux de densité indéfiniment croissante. Nous commencerons par établir la convergence du développement de cette fonction, donné par la formule (32). Considérons les termes de la forme

$$u_r = A_r \frac{\operatorname{ch} \mu_r \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \mu_r} \cos \frac{(2r + 1)\pi y}{2b}.$$

Soit  $\rho$  un nombre positif plus petit que 1 ; supposons qu'on ait

$$\left| \frac{x}{a} \right| < \rho.$$

Comme le module de  $A_r$  est plus petit que  $2M$  (n° 17), celui de  $u_r$  sera moindre que

$$2M \frac{\operatorname{ch} \mu_r \rho}{\operatorname{ch} \mu_r} = 2M \frac{e^{\mu_r \rho} + e^{-\mu_r \rho}}{e^{\mu_r} + e^{-\mu_r}}.$$

Lorsque  $\mu_r$  est positif et très grand, le rapport

$$\frac{e^{\mu_r \rho} + e^{-\mu_r \rho}}{e^{\mu_r} + e^{-\mu_r}}$$

diffère très peu de

$$\frac{e^{\mu_r \rho}}{e^{\mu_r}} = \frac{1}{e^{\mu_r(1-\rho)}}.$$

La valeur de  $\mu_r$  est définie par l'équation (31) où l'on fait

$$(38) \quad \alpha = (2r+1) \frac{\pi}{2},$$

$$\mu_r = 2n \log \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \frac{(2r+1)\pi}{4n}} + \frac{a}{b} \sin \frac{(2r+1)\pi}{4n} \right].$$

Quand  $n$  croît à partir de  $\frac{2r+1}{2}$ ,  $\mu_r$  croît constamment et reste par conséquent compris entre ses deux limites :

$$(39) \quad (2r+1) \log \left( \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{b} \right) < \mu_r < \frac{a}{b} (2r+1) \frac{\pi}{2}.$$

Posons

$$(40) \quad \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right)^{1-\rho} = \frac{1}{\lambda}.$$

Nous trouvons alors, d'après l'inégalité (39),

$$\frac{1}{e^{\mu_r(1-\rho)}} < \lambda^{2r+1},$$

d'où

$$|u_r| < 2M \lambda^{2r+1}.$$

Le nombre  $\lambda$  est positif et plus petit que  $un$ . La valeur absolue

de  $u_r$  est donc moindre que celle du terme correspondant d'une progression géométrique décroissante.

Il est intéressant de remarquer que la raison  $\lambda$  de cette progression ne dépend ni de  $n$  ni des valeurs de la fonction  $\zeta$  à la frontière du rectangle.

Un calcul analogue au précédent s'appliquerait sans modification aux autres termes du développement. La raison  $\lambda$  est la même pour tous les termes des deux premières lignes. Pour ceux des deux dernières lignes, on supposera

$$\left| \frac{y}{b} \right| < \rho < 1,$$

et l'on trouvera, pour la raison  $\lambda'$  de la progression correspondante, l'expression

$$(40') \quad \frac{1}{\lambda'} = \left( \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right)^{1-\rho}.$$

Désignons par  $f_m(x, y)$  la fonction que l'on déduit de  $f(x, y)$  en négligeant dans le développement (32) de cette fonction tous les termes dont l'indice est supérieur à  $m$ . D'après les résultats précédents, il est possible de prendre  $m$  assez grand pour que la somme des termes négligés soit plus petite que toute quantité positive donnée  $\varepsilon$ , et cela quel que soit  $n$ . Nous pouvons donc énoncer cette proposition :

*Étant donné un nombre positif arbitraire  $\varepsilon$ , il est possible de trouver un nombre  $m'$ , tel que l'inégalité  $m > m'$  entraîne uniformément*

$$(41) \quad |f(x, y) - f_m(x, y)| < M\varepsilon$$

*dans tout le rectangle  $D'$  défini par les inégalités*

$$\left| \frac{x}{a} \right| \leq \rho \quad \left| \frac{y}{b} \right| \leq \rho \quad (\rho < 1).$$

Le nombre  $m'$  ne dépend ni de  $n$ , ni des valeurs données à la frontière, mais seulement de  $\rho$ , c'est-à-dire de la situation du contour du rectangle ( $D'$ ).

La convergence des dérivées pourrait se démontrer par un calcul semblable.

**23.** Le nombre  $m$  ayant été choisi de manière à satisfaire aux conditions précédentes, nous pourrions supposer  $n$  assez grand pour que chacun des coefficients  $\mu_r, \mu'_r, \dots$  diffère de sa limite supérieure aussi peu qu'on le voudra pour toutes les valeurs de  $r$  inférieures à  $m$ . Le terme principal de la différence

$$\frac{a}{b} \frac{(2r+1)\pi}{2} - \mu_r$$

est égal à

$$\frac{1}{6} \frac{a}{b} \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{(2r+1)^3 \pi^3}{32n^2},$$

et le développement en série que nous avons indiqué montre que  $\mu_r$  tend rapidement vers sa limite, lorsque  $r$  restant constant,  $n$  croît indéfiniment.

Soit  $V_m(x, y)$  la fonction harmonique qu'on déduit de  $f_m(x, y)$  en y remplaçant les paramètres  $\mu_r, \mu'_r, \nu_r, \nu'_r$  par leurs limites supérieures. Il est possible de déterminer un nombre  $n'$  tel que l'inégalité  $n > n'$  entraîne dans tout le rectangle (D)

$$(42) \quad |f_m(x, y) - V_m(x, y)| < M\varepsilon.$$

Le nombre  $n'$  ne dépend que de  $m$ ; il est entièrement indépendant de la distribution des valeurs données à la frontière.

Le module de la différence

$$f(x, y) - V_m(x, y)$$

est inférieur à  $2M\varepsilon$  dans tout le rectangle (D').

**24.** On obtient une autre fonction harmonique  $V(x, y)$  qui prend sur la frontière les mêmes valeurs que la fonction d'interpolation  $f(x, y)$  en effectuant sur le développement entier de cette fonction la substitution indiquée plus haut pour la fonction  $f_m$ : c'est-à-dire en remplaçant les paramètres  $\mu_r, \mu'_r, \nu_r, \nu'_r$  par leurs limites supérieures.

La différence  $V(x, y) - V_m(x, y)$  est analogue à la différence  $f(x, y) - f_m(x, y)$ . Le développement de la fonction  $V$  est même plus rapidement convergent que celui de  $f$ . Par conséquent l'inégalité

$$(43) \quad |V(x, y) - V_m(x, y)| < M\varepsilon$$

sera nécessairement réalisée dans les mêmes conditions qui entraînent l'inégalité (41).

De la comparaison des inégalités (41), (42), (43), on déduit immédiatement, pour tout le rectangle (D'),

$$(44) \quad |f(x, y) - V(x, y)| < 3M\varepsilon.$$

Donc à chaque réseau considéré correspondent :

1° Un système de valeurs  $z_{x,y}$  et une fonction d'interpolation  $f(x, y)$  satisfaisant à l'équation aux différences (18);

2° Une fonction harmonique  $V(x, y)$ .

Les fonctions  $f(x, y)$  et  $V(x, y)$  sont égales sur le périmètre du rectangle et sont assujetties à prendre sur les nœuds de ce périmètre les mêmes valeurs qu'une fonction bornée quelconque  $\zeta(\xi, \eta)$ .

Quand la densité du réseau croît indéfiniment, la différence

$$f(x, y) - V(x, y)$$

tend uniformément vers zéro dans tout rectangle (D') concentrique, homothétique et intérieur au rectangle (D).

**25.** Il y a une circonstance particulièrement intéressante à observer dans ce résultat, c'est que la continuité des valeurs données à la frontière n'y intervient pas. La fonction  $\zeta(\xi, \eta)$  peut présenter des discontinuités quelconques, pourvu qu'elle reste bornée. En réalité, les fonctions  $f$  et  $V$  sont continues à la frontière; elles prennent les valeurs  $\zeta$  seulement sur les nœuds. Néanmoins la discontinuité possible de la fonction  $\zeta$  apparaît dans le fait que, l'intervalle de deux nœuds successifs devenant de plus en plus petit, il n'est pas nécessaire de supposer que l'oscillation correspondante de la fonction  $\zeta$  tende vers zéro.

**26.** La fonction harmonique  $V(x, y)$  dépend du réseau considéré et ne tend pas en général vers une fonction limite déterminée quand la densité du réseau croît indéfiniment, du moins tant qu'on n'impose à la fonction donnée  $\zeta(\xi, \eta)$  aucune autre condition. Mais si cette

fonction est intégrable, ou du moins sommable, au sens de M. Lebesgue, la limite existe.

Pour le démontrer, nous allons considérer d'abord la fonction  $P(x, y, \xi, \eta)$  définie par la formule (34) et chercher comment elle se comporte quand on fait croître la densité du réseau. Notre raisonnement du n° 21 reste applicable. Supposons qu'on ait

$$\xi = a, \quad \left| \frac{x}{a} \right| < \rho, \quad \rho < 1.$$

Le rapport

$$\frac{\operatorname{sh} \mu_r \left( 1 + \frac{x}{a} \right)}{\operatorname{sh} 2\mu_r} : e^{-\nu_r \left( 1 - \frac{x}{a} \right)}$$

tend vers l'unité quand  $\mu_r$  devient très grand. Le développement de la fonction  $P$  converge donc comme une progression géométrique dont la raison reste inférieure à la quantité  $\lambda$  définie par la formule (40).

On pourrait encore, avec une approximation plus grande, comparer le développement de la fonction  $P$  avec celui de la série

$$\begin{aligned} & \sum \lambda^{2r+1} \cos \frac{(2r+1)\eta y}{2b} \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} + \sum \lambda^{2r} \sin \frac{r\pi y}{b} \sin \frac{r\pi\eta}{b} \\ &= \frac{1}{2} \sum \lambda^{2r+1} \left[ \cos \frac{(2r+1)\pi(y+\eta)}{2b} + \cos \frac{(2r+1)\pi(y-\eta)}{2b} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum \lambda^{2r} \left[ \cos \frac{r\pi(y-\eta)}{b} - \cos \frac{r\pi(y+\eta)}{b} \right]. \end{aligned}$$

La somme de cette série est égale à la partie réelle de l'expression

$$(45) \quad Q(\lambda, y, \eta) = \left( \frac{\lambda e^{\frac{i\pi(y+\eta)}{2b}}}{1 + \lambda e^{\frac{i\pi(y+\eta)}{2b}}} + \frac{\lambda e^{\frac{i\pi(y-\eta)}{2b}}}{1 - \lambda e^{\frac{i\pi(y-\eta)}{2b}}} \right).$$

Nous pouvons donc déduire de ces résultats que, lorsqu'on fait croître  $n$  indéfiniment, le développement de la fonction  $P$  reste absolument convergent, quelle que soit la position du point  $(x, y)$  à l'intérieur du rectangle. La fonction représentée par le développement

limite est harmonique; nous la désignerons par  $\Pi(x, y, \xi, \eta)$  :

$$\begin{aligned}
 (46) \quad \Pi(x, y, \xi, \eta) = & \frac{1}{b} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2r+1)\pi(x+\xi)}{2b}}{\operatorname{sh} \frac{(2r+1)\pi\xi}{b}} \cos \frac{(2r+1)\pi y}{2b} \cos \frac{(2r+1)\pi\eta}{2b} \\
 & + \frac{1}{b} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{r\pi(x+\xi)}{b}}{\operatorname{sh} \frac{2r\pi\xi}{b}} \sin \frac{r\pi y}{b} \sin \frac{r\pi\eta}{b} \\
 & + \frac{1}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2r+1)\pi(y+\eta)}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{(2r+1)\pi\eta}{a}} \cos \frac{(2r+1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2r+1)\pi\xi}{a} \\
 & + \frac{1}{a} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{r\pi(y+\eta)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{2r\pi\eta}{a}} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{r\pi\xi}{a}.
 \end{aligned}$$

En répétant, à propos des fonctions P et  $\Pi$ , les raisonnements que nous avons faits au n° 22 pour les fonctions  $f$  et V, on démontre que P converge uniformément vers  $\Pi$  dans tout rectangle (D') intérieur au rectangle (D), sans points communs à la frontière.

Si la fonction  $\zeta(\xi, \eta)$  est intégrable, la somme finie

$$f(x, y) = \sum \zeta(\xi, \eta) P(x, y, \xi, \eta) \Delta s$$

tendra donc vers l'intégrale

$$(47) \quad F(x, y) = \int \zeta(\xi, \eta) \Pi(x, y, \xi, \eta) ds,$$

évaluée suivant le périmètre du rectangle. Cette fonction  $F(x, y)$  est la fonction harmonique limite.

### 27. Représentation de la fonction $\Pi$ par les fonctions elliptiques.

— Le développement en série (46) de la fonction  $\Pi$  n'est valable que dans le rectangle (D); mais on peut, par un calcul facile, le transformer de manière à obtenir une expression valable pour tout le plan. Supposons  $\xi = a$ , et écrivons le terme général du développement sous

la forme

$$U_r = \frac{1}{2b} \frac{e^{\frac{\pi(x+a)}{2b}} - e^{-\frac{r\pi(x+a)}{2b}}}{e^{\frac{r\pi a}{b}} - e^{-\frac{r\pi a}{b}}} \left[ \cos \frac{r\pi(y-\eta)}{2b} + (-1)^{r-1} \cos \frac{r\pi(y+\eta)}{2b} \right].$$

Par analogie avec la théorie des fonctions elliptiques, nous posons

$$q^2 = e^{-\frac{2\pi a}{b}},$$

$$u = \frac{\pi[(x-a) + i(y-\eta)]}{2b}, \quad v = \frac{\pi[(x-a) + i(y+\eta)]}{2b}.$$

$U_r$  est la partie réelle de l'expression imaginaire

$$(48) \quad V_r = \frac{1}{2b} \left[ \frac{e^{ru} - q^{2r} e^{-ru}}{1 - q^{2r}} + (-1)^{r-1} \frac{e^{rv} - q^{2r} e^{-rv}}{1 - q^{2r}} \right].$$

Remplaçant la fraction  $\frac{1}{1 - q^{2r}}$  par son développement en série

$$\frac{1}{1 - q^{2r}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} q^{2rn},$$

et tenant compte des identités

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} e^{ru} q^{2rn} = \frac{q^{2n} e^u}{1 - q^{2n} e^u},$$

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} (-1)^{r-1} e^{rv} q^{2rn} = \frac{q^{2n} e^v}{1 - q^{2n} e^v},$$

on trouve

$$(49) \quad 2b \sum V_r = \frac{e^u}{1 - e^u} + \frac{q^2 e^u}{1 - q^2 e^u} + \dots + \frac{q^{2n} e^u}{1 - q^{2n} e^u} + \dots$$

$$- \left( \frac{q^2 e^{-u}}{1 - q^2 e^{-u}} + \frac{q^4 e^{-u}}{1 - q^4 e^{-u}} + \dots + \frac{q^{2n} e^{-u}}{1 - q^{2n} e^{-u}} + \dots \right)$$

$$+ \frac{e^v}{1 + e^v} + \frac{q^2 e^v}{1 - q^2 e^v} + \dots + \frac{q^{2n} e^v}{1 - q^{2n} e^v} + \dots$$

$$- \left( \frac{q^2 e^{-v}}{1 + q^2 e^{-v}} + \frac{q^4 e^{-v}}{1 + q^4 e^{-v}} + \dots + \frac{q^{2n} e^{-v}}{1 + q^{2n} e^{-v}} + \dots \right).$$

Considérons la fonction

$$W = \frac{(1 + e^\nu)(1 + q^2 e^\nu)(1 + q^4 e^\nu) \dots (1 + q^2 e^{-\nu})(1 + q^4 e^{-\nu}) \dots}{(1 - e^\nu)(1 - q^2 e^\nu)(1 - q^4 e^\nu) \dots (1 - q^2 e^{-\nu})(1 - q^4 e^{-\nu}) \dots}$$

On a

$$(50) \quad \sum V_r = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \log W.$$

Or, la fonction  $W$  est une fonction doublement périodique de deuxième espèce qui se présente sous la forme du rapport de deux fonctions  $H$  (1), à un facteur près :

$$(51) \quad W = \frac{e^{\frac{\pi(x-a) + i(y + \eta - 2b)}{4b}} H[-i(x-a) + y + \eta - 2b]}{e^{\frac{\pi(x-a) + i(y - \eta)}{4b}} H[-i(x-a) + (y - \eta)]} \\ = -ie^{\frac{\pi i \eta}{2b}} \frac{H[-i(x-a) + (y + \eta - 2b)]}{H[-i(x-a) + (y - \eta)]}.$$

Considérée comme fonction de la variable  $y - ix = -i(x + iy)$ ,  $W$  admet la période  $4b$ . Quand on change  $x$  en  $x + 4a$  ou  $y - ix$  en  $y - ix - 4ai$ , la fonction se reproduit, multipliée par la constante  $e^{\frac{\pi i \eta}{b}}$ . La dérivée logarithmique  $\frac{d}{dx} \log W$  est donc une fonction elliptique de  $y - ix$ , admettant les deux périodes  $4b$  et  $4ai$ ; quand on la regarde comme fonction de  $x + iy$ , les périodes sont évidemment  $4a$  et  $4bi$ .

Suivant une notation due à Weierstrass, représentons par  $\Re f(z)$  la partie réelle de la fonction  $f(z)$ . Nous avons alors

$$(52) \quad \Pi(x, y, a, \eta) = \frac{1}{\pi} \Re \frac{d}{dx} \log W.$$

**28.** La fonction  $\Pi$  est ainsi définie pour un côté du rectangle. On en déduirait évidemment une expression analogue pour chacun des autres côtés. Mais on peut aussi, par une transformation simple, obtenir une expression analytique qui représente la fonction  $\Pi$  pour les quatre côtés.

(1) Voir APPELL et LACOUR, *Fonctions elliptiques*, p. 110.

Au lieu de la fonction  $W$ , considérons la fonction de quatre variables  $x, y, \xi, \eta$

$$W' = \frac{H[-i(x-\xi) + y + \eta - 2b]}{H[-i(x-\xi) + (y-\eta)]}.$$

Pour  $\xi = a$ ,  $W'$  ne diffère de  $W$  que par un facteur constant qui est sans influence sur la dérivée logarithmique, et l'on a d'abord

$$\Pi(x, y, a, \eta) = -\frac{1}{\pi} \Re \left( \frac{\partial \log W'}{\partial \xi} \right)_{\xi=a}.$$

Pour  $\xi = -a$ , on aurait de même,

$$\Pi(x, y, -a, \eta) = +\frac{1}{\pi} \Re \left( \frac{\partial \log W'}{\partial \xi} \right)_{\xi=-a}.$$

En désignant par  $\frac{d}{dn}$  la dérivée relative à un déplacement du point  $(\xi, \eta)$  dans le sens de la normale intérieure au rectangle, les deux résultats précédents se résument dans la formule

$$\Pi(x, y, \pm a, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dn} \Re \log W'.$$

Par une simple permutation de variables, on déduit de la fonction  $W$  une autre fonction analogue  $W''$ , à l'aide de laquelle on représenterait la fonction  $\Pi$  pour les deux côtés parallèles à  $Ox$ . Si l'on remarque maintenant que  $W'$  et  $W''$  se réduisent identiquement à l'unité, la première pour  $\eta = \pm b$ , et la seconde pour  $x = \pm a$ , on peut écrire pour tout le contour du rectangle

$$\Pi(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dn} \Re \log WW'.$$

Je ne m'étendrai pas davantage sur cette fonction, ni sur les transformations dont elle est susceptible, ni même sur le calcul très simple qui permet d'en déduire la fonction de Green. Tous ces développements analytiques ne présenteraient rien d'essentiellement nouveau et ne se rattacheraient plus que d'une façon très indirecte au développement de la méthode qui constitue l'objet de ce Mémoire. Mais il m'a semblé intéressant de retrouver directement, par l'application de cette méthode, les résultats qu'on déduit ordinairement de la théorie de la représentation conforme.

29. Je dois signaler cependant la forme de la fonction  $\Pi$  au voisinage de la frontière. Pour  $x = \alpha$ ,  $y = \eta$  le premier terme du développement (49) devient infini; les termes suivants représentent une fonction continue dans le voisinage de ce point. La partie réelle du rapport  $\frac{e^u}{1 - e^u}$  est égal à

$$\frac{e^{\frac{\pi(x-a)}{2b}} \cos \pi \left( \frac{y-\eta}{2b} \right) - e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}{1 - 2e^{\frac{\pi(x-a)}{2b}} \cos \pi \left( \frac{y-\eta}{2b} \right) + e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}$$

$$= -1 + \frac{1 - e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}{1 - 2e^{\frac{\pi(x-a)}{2b}} \cos \pi \left( \frac{y-\eta}{2b} \right) + e^{\frac{\pi(x-a)}{b}}}$$

Il suffirait de remplacer dans le dernier rapport l'exponentielle  $e^{\frac{\pi(x-a)}{2b}}$  par  $r$  et  $\frac{\pi(y-\eta)}{2b}$  par  $\varphi - \psi$  pour retrouver la fonction qui figure dans l'intégrale de Poisson (1). La discussion classique de l'intégrale de Poisson pour le cercle s'applique donc sans modification à l'intégrale analogue relative au rectangle.

## CHAPITRE V.

### CAS D'UN DOMAINE QUELCONQUE.

30. Dans le cas d'un domaine quelconque on peut encore employer un réseau rectangulaire régulier, complété dans le voisinage de la frontière par des intégrales de forme appropriée que nous supposons sans angles obtus. Les équations linéaires à résoudre conservent toujours la forme (18), sauf pour les termes relatifs aux triangles contigus à la frontière. Il reste à examiner comment se comporte la solution de ce système quand la densité du réseau croît indéfiniment.

Imaginons un rectangle (R) limité par des lignes du réseau, et par

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. I.

conséquent intérieur au domaine considéré. Si l'on a calculé les valeurs des inconnues  $z_{x,y}$  qui correspondent aux nœuds situés sur le périmètre du rectangle (R), le calcul des inconnues relatives aux nœuds intérieurs se ramène au problème étudié dans les Chapitres précédents. Il est donc possible de prendre la densité du réseau assez grande pour que les valeurs des inconnues  $z_{x,y}$  diffèrent aussi peu qu'on le voudra des valeurs correspondantes d'une fonction harmonique, dans tout le rectangle (R).

La fonction d'interpolation  $f(x, y)$  qui prend sur les nœuds intérieurs du rectangle les valeurs des inconnues  $z_{x,y}$  admet des dérivées jusqu'à un ordre quelconque, et comme les dérivées secondes tendent uniformément vers les dérivées d'une fonction harmonique, l'expression

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

tend uniformément vers zéro à l'intérieur du rectangle quand on fait croître indéfiniment la densité du réseau.

Cette propriété s'étend évidemment à tout point ou à toute région du domaine qu'on peut entourer d'un rectangle à côtés parallèles aux axes et situé tout entier dans le domaine. Donc, les fonctions limites, si elles existent, sont nécessairement harmoniques dans le domaine considéré.

Si la fonction donnée à la frontière est partout discontinue, il est évident qu'il n'existe pas, en général, une fonction limite unique, indépendante des réseaux. Toutefois les valeurs des quantités  $z_{x,y}$  étant partout bornées, et représentées par les valeurs de fonctions harmoniques avec une approximation indéfiniment croissante, il sera possible de choisir dans l'ensemble des réseaux considérés des ensembles particuliers pour chacun desquels il existera une fonction limite, qui sera nécessairement harmonique. On peut, en effet, appliquer à ces fonctions le procédé de raisonnement dû à *Ascoli* et utilisé par *Hilbert* <sup>(1)</sup> et par *M. Lebesgue* <sup>(2)</sup>.

---

(1) HILBERT, *Ueber das Dirichlet'sche Prinzip* (§ 3) (*Math. Annalen*, Bd 59, p. 165).

(2) H. LEBESGUE, *Sur le Problème de Dirichlet* (*Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. XXIV, 1907).

**31.** Lorsque l'intégrale de Dirichlet tend vers une limite déterminée, l'ensemble des valeurs des  $z_{x,y}$  tend également vers une fonction limite.

Pour le calcul qui va suivre il est indispensable que les valeurs considérées à la frontière soient les mêmes dans les différents réseaux, sur toute l'étendue de la courbe frontière, et non plus seulement sur les nœuds. Nous supposons donc que le calcul ait été dirigé en conséquence, comme nous l'avons indiqué au n° 6.

Pour un réseau donné, à chaque système de valeurs des  $z_{x,y}$  nous avons attaché une fonction  $u(x, y)$ , égale à  $z_{x,y}$  sur les nœuds et sur la frontière, linéaire dans les triangles, sauf peut-être dans les triangles ayant leur base sur la frontière. Nous désignons par  $u_r(x, y)$  la fonction que l'on forme de cette manière quand on attribue aux variables  $z_{x,y}$  pour un réseau ( $r$ ) les valeurs qui correspondent au minimum de l'intégrale de Dirichlet relative à ce réseau.

Quand la densité du réseau ( $r$ ) croît indéfiniment, l'intégrale  $J(u_r)$  tend par hypothèse vers une limite. Par conséquent, si l'on considère deux réseaux suffisamment denses ( $r_0$ ) et ( $r$ ), la différence  $J(u_{r_0}) - J(u_r)$  tend vers zéro.

Considérons maintenant la fonction  $u_{r_0}^r$  que l'on forme comme ci-dessus, mais en attribuant aux variables  $z_{x,y}$ , sur les nœuds du réseau ( $r$ ), les valeurs de la fonction  $u_{r_0}$ . Quel que soit le réseau ( $r_0$ ) il est possible de prendre ( $r$ ) assez dense pour que l'intégrale  $J(u_{r_0}^r)$  diffère aussi peu qu'on le voudra de  $J(u_{r_0})$ ; par conséquent, si le réseau ( $r_0$ ) est lui-même très dense, la différence

$$J(u_{r_0}^r) - J(u_r)$$

sera très petite, dans notre hypothèse.

Or les fonctions  $u_{r_0}^r$  et  $u_r$  étant égales sur la frontière, nous avons

$$J(u_{r_0}^r) - J(u_r) = J(u_{r_0}^r - u_r).$$

**32.** Du fait que cette intégrale tend vers zéro, nous allons déduire que les dérivées partielles de la différence

$$v_{r_0,r} = u_{r_0}^r - u_r$$

tendent elles-mêmes vers zéro dans le domaine considéré, frontière exclue.

En effet, dans tout rectangle  $R$  à côtés parallèles aux axes et intérieur au domaine, les fonctions  $u_{r_0}$ ,  $u_r$  et leurs dérivées premières sont représentées avec telle approximation que l'on veut par des fonctions harmoniques  $V_{r_0}$ ,  $V_r$  et leurs dérivées. Or ces fonctions harmoniques admettent des dérivées secondes auxquelles on peut assigner un module maximum. Lorsqu'une fonction  $V$  est harmonique dans un domaine ( $\Delta$ ) et que ses valeurs sur la frontière ont leur module inférieur à  $M$ , le module des dérivées secondes de  $V$ , en tout point  $P$  situé à une distance  $\rho$  de la frontière, est au plus égal à  $\frac{2M}{\rho^2}$ .

Par conséquent si, au point  $P$ , la différence  $\frac{\partial V_{r_0}}{\partial x} - \frac{\partial V_r}{\partial x}$  a un module supérieur à un nombre  $k$ , on pourra déterminer autour de  $P$  une région finie, dont nous désignerons l'aire par  $\sigma$ , dans laquelle on aura constamment

$$\left( \frac{\partial V_{r_0}}{\partial x} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) > \frac{k}{2}.$$

Si, d'autre part, les réseaux sont assez denses, on aura dans la même région,

$$\frac{\partial v_{r_0,r}}{\partial x} = \frac{\partial (u_{r_0}' - u_r)'}{\partial x} > \frac{k}{4},$$

d'où

$$J(v_{r_0,r}) > \frac{k^2}{16} \sigma.$$

Le nombre  $k$  est donc nécessairement très petit, pour des réseaux très denses, dans tout l'intérieur du domaine, à l'exclusion de la frontière.

Par suite, la différence  $u_{r_0} - u_r$  diffère très peu d'une constante. Toutefois, bien qu'elle s'annule sur la frontière, il serait prématuré de conclure qu'elle tend partout vers zéro, car jusqu'ici nous avons exclu de nos raisonnements tout ce qui concerne la continuité dans le voisinage de la frontière. Pour l'étude de cette question, on peut utiliser la méthode employée par M. Lebesgue dans son Mémoire déjà cité (<sup>1</sup>).

Malheureusement, le calcul de M. Lebesgue se trouverait en défaut pour les domaines à plus de deux dimensions. La proposition suivante

---

(<sup>1</sup>) *Sur le Problème de Dirichlet*, § 10.

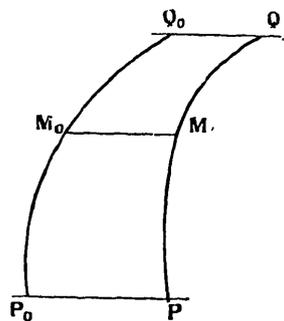
pourrait être étendue à ces domaines, mais elle présente une autre lacune, car elle n'établit la continuité dans le voisinage de la frontière qu'abstraction faite d'un ensemble de points de mesure nulle.

**33.** Considérons une fonction  $F(x, y)$  dont les valeurs sur la frontière forment une fonction intégrable ; supposons qu'elle reste continue ainsi que ses dérivées premières à l'intérieur du domaine et que l'intégrale de Dirichlet correspondante ait une valeur finie

$$J(F) = I_0.$$

Prenons sur la frontière un arc  $P_0 Q_0$  qui soit rencontré en un seul point par toute parallèle à  $Ox$ .

Fig. 2.



Nous désignerons par  $y_0$  et  $y_1$  ( $y_0 < y_1$ ) les coordonnées des extrémités.

Par chaque point  $M_0$  de cet arc menons une parallèle à  $Ox$ , sur laquelle nous portons vers l'intérieur du domaine un petit segment  $M_0M$ , dont la longueur  $\lambda$  pourra être une constante ou une fonction de  $y$ . Nous déduisons ainsi de  $P_0Q_0$  un arc  $PQ$  intérieur au domaine. L'intégrale

$$\iint \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 dx dy$$

étendue à l'aire  $P_0PQQ_0$  a évidemment une valeur au plus égale à  $I_0$ . Or, il est facile d'en calculer une limite inférieure. Soit  $\omega(y)$  l'oscillation de la fonction  $F(x, y)$  sur  $M_0M$ . Il existe alors sur le segment  $M_0M$

un point  $M_1$ , tel qu'on ait

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{\partial F}{\partial x} dx = \pm \omega(y).$$

Pour toutes les fonctions  $F$  satisfaisant à cette condition le minimum de l'intégrale

$$\int_{M_0}^{M_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 |dx|$$

a lieu quand la dérivée  $\frac{\partial F}{\partial x}$  a une valeur constante sur  $M_0 M_1$ . D'où nous tirons les inégalités

$$(53) \quad \int \int_{M_0}^{M_1} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 |dx| \geq \frac{\overline{\omega(y)^2}}{M_0 M_1} \geq \frac{\overline{\omega(y)^2}}{\lambda}$$

et

$$(54) \quad \int \int_{P_0 P Q Q_0} \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 dx dy \geq \int_{y_0}^{y_1} \frac{\overline{\omega(y)^2}}{\lambda} dy.$$

Soient  $\alpha$  un nombre positif,  $\lambda_0$  le maximum de  $\lambda$ ,  $l$  la mesure linéaire de l'ensemble des valeurs de  $y$  pour lesquelles  $\omega(y)$  est supérieure à  $\alpha$ .

L'inégalité (54) donne immédiatement, en prenant pour l'intégrale définie la définition de M. Lebesgue,

$$\int_{y_0}^{y_1} \frac{\overline{\omega(y)^2}}{\lambda} dy > \frac{l \alpha^2}{\lambda_0}.$$

Nous avons, par conséquent,

$$l < \frac{l_0 \lambda_0}{\alpha^2}.$$

*La mesure linéaire  $l$  de l'ensemble des valeurs de  $y$  pour lesquelles l'oscillation  $\omega(y)$  surpasse un nombre positif  $\alpha$  tend nécessairement vers zéro avec  $\lambda_0$ .*

La limite supérieure trouvée pour  $l$  ne dépend pas de la fonction  $F$ , ni de la longueur de l'arc  $P_0 Q_0$ , mais seulement de  $I_0$ ; elle est applicable, par conséquent, à l'ensemble de toutes les fonctions  $F$ , pour les-

quelles l'intégrale de Dirichlet, étendue au domaine considéré, est inférieure ou égale à  $I_0$ .

Telles seraient les fonctions  $u_{r_0}$ ,  $u_r$ ,  $u_{r_0}^r - u_r$ . En particulier, la fonction  $u_{r_0}^r - u_r$  s'annule sur l'arc  $P_0Q_0$ ; sur l'arc  $PQ$  elle est très voisine d'une constante si les réseaux sont très denses. Cette constante est donc elle-même très voisine de zéro, et l'unité de la solution limite se trouve par suite établie. La continuité dans le voisinage de la frontière résulte aussi évidemment de la même proposition, avec la restriction que nous avons indiquée.

**34.** La limite n'est pas modifiée si, pour chaque réseau ( $r$ ), on remplace la fonction  $\zeta(\xi, \eta)$ , donnée sur le contour, par une fonction  $\zeta_r(\xi, \eta)$ , telle que la différence  $\zeta - \zeta_r$  tende uniformément vers zéro sur toute la frontière.

En effet, si l'on a, sur tout le contour,

$$|\zeta - \zeta_r| < \varepsilon,$$

la différence des valeurs correspondantes des inconnues  $z_{x,y}$  est elle-même, dans tout le domaine, inférieure à  $\varepsilon$ .

En particulier, quand la fonction  $\zeta(\xi, \eta)$  est continue, on obtient la même limite soit qu'on prenne la fonction  $u_r(x, y)$  égale à  $\zeta$  sur tout le contour, soit qu'on lui attribue les valeurs considérées seulement sur les nœuds de la frontière, en l'assujettissant alors à être linéaire en  $x$  et  $y$  dans les triangles qui ont leur base sur le contour.

**35.** Une remarque analogue s'applique au cas où, la fonction  $\zeta(\xi, \eta)$  étant continue, l'intégrale de Dirichlet n'existe pour aucune des fonctions qui prennent sur la frontière les valeurs données. On peut construire, d'une infinité de manières, une suite de fonctions  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ , qui convergent uniformément vers  $\zeta$ , et pour lesquelles l'intégrale existe. Désignons par  $u_r(x, y, \zeta)$ ,  $u_r(x, y, \zeta_n)$  les valeurs que prend la fonction  $u_r(x, y)$  correspondant à un réseau ( $r$ ), lorsqu'on attribue aux variables  $z_{x,y}$  sur les nœuds de la frontière les valeurs des fonctions  $\zeta, \zeta_n$ .

Quelque petit que soit  $\varepsilon$ , on peut prendre  $n$  assez grand pour qu'on ait sur toute la frontière

$$|\zeta - \zeta_n| < \varepsilon.$$

Il en résulte dans tout le domaine

$$|u_r(x, y, \zeta) - u_r(x, y, \zeta_n)| < \varepsilon.$$

Quand la densité du réseau ( $r$ ) croît indéfiniment la fonction  $u_r(x, y, \zeta_n)$  tend vers une fonction harmonique déterminée  $V(x, y, \zeta_n)$ , indépendante des réseaux considérés. Les limites possibles de la fonction  $u_r(x, y, \zeta)$  étant comprises dans l'intervalle

$$V(x, y, \zeta_n) - \varepsilon, \quad V(x, y, \zeta_n) + \varepsilon$$

qu'on peut restreindre autant qu'on veut, il en résulte nécessairement que la limite est unique, indépendante de la loi suivant laquelle on fait croître indéfiniment la densité des réseaux.

La continuité, dans le voisinage de la frontière, des fonctions  $V(x, y, \zeta_n)$ , entraîne aussi d'ailleurs celle de la fonction  $V(x, y, \zeta)$ , et de cette continuité résulte de nouveau l'unicité de la solution.

