

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

HENRI VILLAT

**Sur la validité des solutions de certains problèmes d'Hydrodynamique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 6<sup>e</sup> série*, tome 10 (1914), p. 231-290.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1914\\_6\\_10\\_231\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10_231_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur la validité des solutions de certains problèmes  
d'Hydrodynamique;*

PAR HENRI VILLAT.

La théorie du mouvement discontinu des fluides, fondée sur les principes de Helmholtz et Kirchhoff, auxquels MM. T. Levi-Civita<sup>(1)</sup> et M. Brillouin<sup>(2)</sup> ont apporté des perfectionnements essentiels, a donné naissance à de nombreux travaux récents<sup>(3)</sup>. Dans tous les cas jusqu'ici élucidés, on peut, en appliquant des méthodes que j'ai indiquées<sup>(4)</sup>, étudier le problème de l'écoulement d'un courant fluide, illimité ou non, autour d'un obstacle de forme donnée, les parois (s'il y en a) limitant le fluide quand celui-ci n'est pas illimité, ayant aussi des formes données à l'avance. Mais, comme l'a montré M. M. Brillouin, d'autres difficultés restent en suspens, et généralement la solution ainsi construite reste illusoire, la solution (une fois construite) se heurtant à diverses impossibilités très malaisées à déceler *a priori*.

Je me propose, dans ce qui suit, d'établir quelques conditions, d'une application pratique excessivement aisée, concernant la fonction arbitraire dont dépend la forme de l'obstacle supposé placé dans le courant, conditions qui soient *suffisantes* pour que la solution correspondante soit générale et acceptable. J'étudie d'abord le cas du fluide

(1) T. LEVI-CIVITA, *Circolo mat. di Palermo*, 1907.

(2) M. BRILLOUIN, *Journal de Chimie et de Physique*, 1911, p. 145.

(3) Voir notamment les Mémoires de MM. U. Cisotti, G. Colonnetti, T. Boggio et les nôtres. Pour la bibliographie détaillée, voir l'article *Développements concernant l'Hydrodynamique* dans l'*Encyclopédie mathématique*, de M. J. Molk, t. IV, Vol. V, fasc. 2, notamment p. 118 et suiv.

(4) Cf. *Comptes rendus*, t. 151, p. 1034; t. 152, p. 303, 1081, etc.

indéfini, puis celui, beaucoup plus complexe, du fluide limité par deux parois; j'ai notamment insisté sur le cas, le plus intéressant pour l'application pratique, d'obstacles convexes en forme de poutes.

Des conditions à la fois nécessaires et suffisantes peuvent d'ailleurs être formulées explicitement; mais elles conduisent, relativement à la fonction arbitraire dont il vient d'être question, à des relations compliquées dont il est impossible de tirer effectivement parti avant d'avoir construit la solution tout entière du problème d'Hydrodynamique correspondant: or, c'est précisément cette construction préalable que je me suis proposé d'éviter.

Quelques-uns des résultats qui vont être exposés ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 27 octobre 1913 (*Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 700-703).

#### CAS DU FLUIDE INDÉFINI.

Nous nous occuperons tout d'abord du cas le plus simple, celui où le fluide est supposé indéfini autour de l'obstacle. Les formules qui permettent d'aborder le problème ont été dans ce cas établies par M. T. Levi-Civita et par nous-même. Je rappelle en quelques mots ceux des résultats dont nous aurons besoin.

Les projections de la vitesse à l'infini étant 1 et 0, si l'on désigne par  $p$  la pression en un point du fluide (non situé dans le sillage) et  $V$  la vitesse (de projections  $u, v$ ) en ce point, on a

$$(1) \quad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2),$$

$p_0$  désignant la pression à l'infini et dans le sillage. Tous les éléments du mouvement sont déterminés au moyen d'une fonction  $\Omega(\zeta)$  d'une variable complexe  $\zeta = \xi + i\eta$ , dans le plan de laquelle le fluide en mouvement est représenté sur un demi-cercle, comme l'indiquent suffisamment les figures ci-après.

J'ai montré (<sup>1</sup>) qu'on a

$$(2) \quad \Omega(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{1 - \zeta^2}{1 - 2\zeta \cos \varepsilon + \zeta^2} d\varepsilon = \Theta + iT;$$

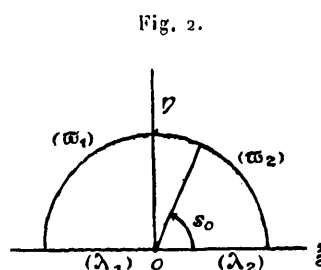
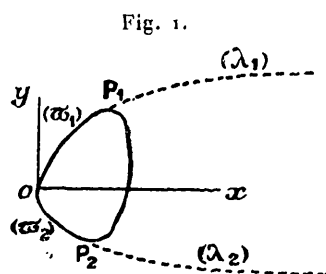
---

(<sup>1</sup>) H. VILLAT, *Annales de l'École Normale*, 1911, p. 269.

$\Theta$  est l'angle de la vitesse avec  $Ox$ ; la vitesse elle-même est

$$(3) \quad V = e^{\Gamma}.$$

Quant à la fonction  $\Phi(\varepsilon)$ , elle est arbitraire autant que l'obstacle donné;  $\Phi(\varepsilon)$  est la valeur de l'angle  $\Theta$  au point de la paroi solide cor-



respondant au point  $\zeta = e^{i\varepsilon}$  de la demi-circonférence frontière dans le plan  $\zeta$ . On sait <sup>(1)</sup> que cette fonction  $\Phi(\varepsilon)$  doit satisfaire à la condition

$$(4) \quad \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

Enfin, rappelons que la correspondance entre les points des plans  $z = x + iy$  et  $\zeta = \xi + i\eta$  est fournie par l'égalité <sup>(2)</sup>

$$(5) \quad z = \frac{a^2}{2} \int_{e^{i\varepsilon_0}}^{\zeta} e^{i\Omega(\zeta)} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos s_0 \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

où  $a$  désigne une constante, et  $e^{i\varepsilon_0}$  le point correspondant à la proue de l'obstacle, c'est-à-dire au point où le courant se divise avant d'entourer le solide.

Ceci posé, les difficultés qui peuvent se présenter dans la résolution du problème d'Hydrodynamique sont de plusieurs sortes :

I. Pour qu'une configuration construite selon les procédés qu'on vient de rappeler soit acceptable, il faut d'abord qu'elle fournisse pour la pression  $p$  des valeurs partout positives. Si l'on veut que la configuration soit générale, c'est-à-dire indépendante de la pression  $p_0$  à l'in-

<sup>(1)</sup> H. VILLAT, *Ibid.*, p. 282.

<sup>(2)</sup> T. LEVI-CIVITA, *Circolo di Palermo*, 1907, 1<sup>er</sup> sem., p. 1.

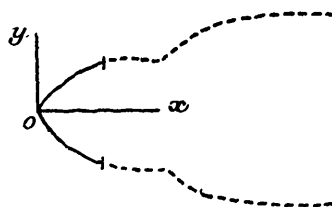
fini, il est nécessaire et suffisant (pour ce qui concerne les pressions) que la vitesse  $V$  soit partout au plus égale à l'unité. Comme M. Brillouin l'a montré <sup>(1)</sup>, il résulte de là que les lignes de glissement  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  doivent être constamment convexes vers le fluide en mouvement; de ce fait se conclut l'impossibilité d'un sillage limité à l'arrière de l'obstacle. Il est intéressant de remarquer ici en passant que, si l'on envisage les cas où la pression  $p_0$  (nécessairement positive ou nulle) ne serait pas nulle, cette convexité des lignes de glissement n'est plus indispensable. Voici un exemple qui met le fait en évidence :

Prenons, comme fonction  $\Phi$  dans la formule (2),  $\Phi(\varepsilon) = -P \sin \varepsilon$  pour  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\pi$ , en posant en outre  $0 < P < \frac{\pi}{2}$ ,  $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$  et  $s_0 = \frac{1}{2}\pi$ . Un calcul simple montre qu'on a alors

$$\Omega(\zeta) = -\frac{P}{\pi} \frac{1-\zeta^2}{\zeta} \log \frac{1+\zeta^2}{1-\zeta^2};$$

la configuration du mouvement est alors celle de la figure. Les

Fig. 3.



lignes de glissement possèdent chacune un point d'inflexion. Or les pressions seront partout positives dès que l'on aura assujetti  $p_0$  à l'inégalité

$$p_0 > \frac{1}{2} \left( e^{\frac{1}{\pi} \frac{\sin s_1}{\cos^2 s_1}} - 1 \right),$$

où  $s_1$  représente la racine, comprise entre 0 et  $\frac{\pi}{4}$ , de l'équation

$$\log \operatorname{tang} s + \frac{1}{\cos^2 s} = 0.$$

C'est ce que montre un calcul facile que je ne reproduis pas.

Bien que des considérations de stabilité physique rendent des confi-

(1) *Loc. cit.*, p. 150.

gurations telles que la précédente extrêmement improbables dans la réalité, elles n'en sont pas moins théoriquement possibles. La possibilité d'un sillage fermé derrière l'obstacle pourrait alors, à la rigueur, résulter de ces considérations. On peut, toutefois, montrer que l'impossibilité d'un tel sillage reste entière si le fluide est partout indéfini, dans toutes les directions; c'est un point sur lequel je me réserve de revenir. [Cf. H. VILLAT, *Sur le changement d'orientation d'un obstacle dans un courant fluide, et sur quelques questions connexes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915), 3<sup>e</sup> Partie.]

Dans ce qui suit, je me placerai dans le cas général où l'on n'assigne à la pression  $p_0$  aucune limite inférieure. La condition

$$V \leq 1$$

sera donc nécessaire à la généralité de la configuration à établir.

II. La seconde condition nécessaire pour que la solution soit acceptable est que, au domaine demi-circulaire du plan  $\zeta$  et à la fonction  $\Phi(\varepsilon)$  choisie, corresponde dans le plan  $z$  un domaine d'un seul tenant, dont les frontières ne se coupent pas, ni elles-mêmes, ni les unes les autres. Le recouplement en question peut se produire, et M. Brillouin en a donné des exemples.

Si ces deux sortes de conditions sont réalisées, le mouvement que l'on aura considéré sera acceptable, du point de vue de l'Hydrodynamique rationnelle.

Je vais considérer des obstacles symétriques par rapport à l'axe  $Ox$ . On sait qu'alors  $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$ , et que la condition (4) est satisfaite d'elle-même. Nous allons dans ces conditions trouver des circonstances suffisantes pour la validité des solutions, pour des catégories étendues de formes d'obstacles courbes, comprenant notamment les formes les plus intéressantes pratiquement, c'est-à-dire les formes en proues. Nous supposerons toujours que, sur la paroi  $\omega_1$ , la tangente à la paroi (dans le sens du courant) fait avec  $Ox$  un angle compris entre les limites 0 et  $\pi$ .

#### ÉTUDE DES VITESSES.

Étudions d'abord la difficulté concernant les vitesses. Comme on a  $V = e^T$ , la fonction  $T$ , qui est harmonique et régulière dans le demi-

cercle du plan  $\zeta$ , ne doit nulle part y devenir positive : elle est nulle par construction sur la frontière constituée par le diamètre horizontal  $O\xi$ ; d'ailleurs, son maximum ne saurait être atteint que sur une frontière; il faut donc simplement s'assurer que  $T$  ne devient pas positif sur la frontière demi-circulaire  $|\zeta| = 1$ .

Sur cette circonférence, la valeur de  $T$  n'est pas fournie directement par la formule (2), mais j'ai montré (1) qu'au point  $\zeta = e^{is}$  on avait

$$(6) \quad T(s) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \frac{\sin s}{2 \sin \frac{\varepsilon - s}{2} \sin \frac{\varepsilon + s}{2}} d\varepsilon.$$

Or, l'introduction de l'hypothèse (4) permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi [\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)] \frac{\sin s}{2 \sin \frac{\varepsilon - s}{2} \sin \frac{\varepsilon + s}{2}} d\varepsilon \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Phi(\varepsilon) + \Phi(s)] \frac{\sin s}{2 \cos \frac{\varepsilon - s}{2} \cos \frac{\varepsilon + s}{2}} d\varepsilon, \end{aligned}$$

d'où, pour le cas qui nous occupe, après transformations élémentaires,

$$(7) \quad T(s) = \frac{1}{\pi} \sin s \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos \varepsilon - \cos s} + \frac{\Phi(\varepsilon) + \Phi(s)}{\cos \varepsilon + \cos s} \right] d\varepsilon,$$

ou enfin

$$(8) \quad T(s) = \frac{2}{\pi} \sin s \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\varepsilon) \cos \varepsilon - \Phi(s) \cos s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon.$$

Comme, de toute évidence, on a  $T(\pi - s) = T(s)$ , il suffit de considérer  $s$  entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ; alors, sur la formule précédente, un premier résultat apparaît immédiatement.

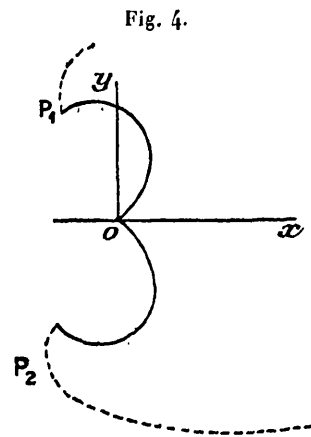
*Si la fonction  $\Phi(\varepsilon) \cos \varepsilon$  est une fonction croissante de  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon$*

(1) *Annales de l'École Normale*, 1911, p. 264.

compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ,  $T(s)$  est toujours négatif, et la vitesse  $V$  est plus petite que 1 dans tout le mouvement.

Cela résulte de ce que,  $\Phi(\varepsilon) \cos \varepsilon$  étant croissant et  $\cos^2 \varepsilon$  décroissant dans le même intervalle, le quotient qui figure sous le signe d'intégration est visiblement négatif dans tout l'intervalle.

Observons de suite que ce résultat nous donne déjà des catégories



d'obstacles intéressantes : par exemple, tous les obstacles *en gouttière*, concaves vers le courant, pour lesquels l'angle  $\Phi(\varepsilon)$  (qui est négatif dans tout le long de la paroi  $P_2O$ ) va en croissant constamment lorsqu'on parcourt cette paroi dans le sens de la flèche. Dans ce cas, on a en effet

$$(9) \quad \frac{d}{d\varepsilon} [\Phi(\varepsilon) \cos \varepsilon] = \Phi'(\varepsilon) \cos \varepsilon - \Phi(\varepsilon) \sin \varepsilon \geq 0.$$

Mais le théorème s'applique aussi lorsque  $\Phi(\varepsilon)$  n'est pas constamment croissant. Voici un exemple qui fournit un obstacle à paroi ondulée ( $\Phi$  d'abord croissant, puis décroissant) : si l'on prend

$$\Phi(\varepsilon) = A(-2 \cos^2 \varepsilon + 2 \cos \varepsilon - 1)$$

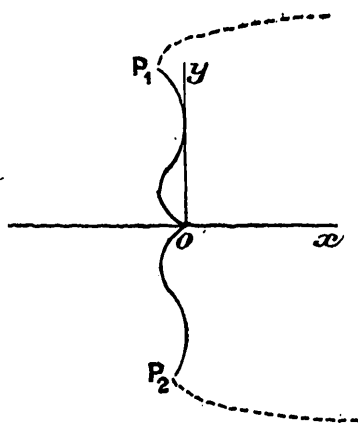
avec  $0 < A < \pi$ , on s'assure aisément que la condition ci-dessus est vérifiée et que l'obstacle correspondant possède la forme indiquée par la figure 5 : aux points  $O, P_1, P_2$ , les angles des tangentes à la paroi avec  $Ox$  sont  $\pm A$ ; aux points d'inflexion, les angles sont  $\pm \frac{1}{2} A$ .



On peut former autant d'exemples que l'on veut, vérifiant la condition (9), avec des obstacles dont les parois présentent un nombre quelconque d'ondulations.

Le même théorème s'applique aussi à des obstacles convexes vers le

Fig. 5.

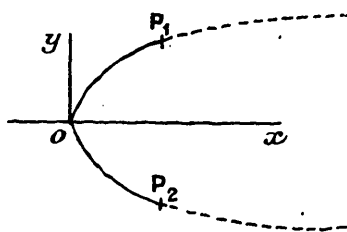


courant, pour lesquels  $\Phi(\varepsilon)$  est constamment décroissant. Dans ce cas, l'inégalité à satisfaire montre d'une façon évidente que  $\Phi'(0)$  doit être nul. On vérifierait par exemple facilement que la fonction

$$\Phi(\varepsilon) = -A(\sin^2\varepsilon + b),$$

avec  $A < \frac{\pi}{4}$ ,  $0 < b < 2$ , rentre dans l'application précédente et donne un obstacle de la forme ci-dessous :

Fig. 6.



Pour aller maintenant plus loin, nous allons étudier d'une manière plus précise la variation de la fonction  $T(s)$  donnée par la formule (8), quand  $s$  varie de  $0$  à  $\frac{\pi}{2}$ . Nous allons pour cela former une expression

de la dérivée de cette fonction, en utilisant le calcul préliminaire que nous exposerons tout d'abord dans le paragraphe ci-dessous.

CALCUL D'UNE DÉRIVÉE NORMALE.

Rappelons-nous tout d'abord que, la fonction  $\Omega = \Theta + iT$  étant analytique, on a, en désignant par  $\frac{d}{dn}$  une dérivée normale prise vers l'extérieur du domaine,

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d\Theta}{dn},$$

tant que les dérivées écrites conservent un sens. Le calcul de  $\frac{dT}{ds}$  sur la demi-circonférence revient donc à celui d'une dérivée normale. Observons encore que la fonction  $\Omega$  définie par (2) peut être considérée comme définie dans tout le cercle,  $|\zeta| \leq 1$ , les valeurs qu'elle prend dans le demi-cercle inférieur étant conjuguées des valeurs prises dans le demi-cercle supérieur.

Or, envisageons d'une manière plus générale une fonction analytique définie à une constante près, imaginaire pure, dans tout le cercle, par la condition que sa partie réelle prenne à la frontière des valeurs données  $\varphi(\varepsilon)$  [sans qu'on ait pour l'instant  $\varphi(2\pi - \varepsilon) = \varphi(\varepsilon)$ ]. La fonction

$$(10) \quad \omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) \frac{1 + \zeta e^{-i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon = \mathfrak{S} + i\tau$$

répond à la question (1). Posons

$$\zeta = \rho e^{i\theta}.$$

Tant que  $\rho$  est plus petit que 1, on a évidemment

$$(11) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon) \frac{e^{i(s-\varepsilon)}}{[1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}]^2} d\varepsilon.$$

---

(1) Cf. SCHWARTZ, *Zur Integrat. der part. Differentialgleichungen  $\Delta u = 0$*  (*Journal de Crelle*, 1872, p. 218). — H. VILLAT, *Le problème de Dirichlet relatif au cercle* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1911, p. 443). — T. BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare* (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1911-1912).

Admettons que la fonction donnée  $\varphi(\varepsilon)$  possède une dérivée, sauf peut-être en un nombre fini de points, pour lesquels il y aurait une dérivée à droite et une dérivée à gauche, la fonction  $\varphi(\varepsilon)$  pouvant elle-même être discontinue en ces points. Pour fixer les idées, supposons, comme cela sera le cas dans l'application que nous avons en vue, qu'il y ait quatre tels points : à savoir les deux points  $\varepsilon = 0$  et  $\varepsilon = \pi$ , pour lesquels la dérivée  $\varphi'(\varepsilon)$  pourra être discontinue, la fonction  $\varphi(\varepsilon)$  ne l'étant pas, et les deux points  $\varepsilon = \varepsilon_1$  et  $\varepsilon = \varepsilon_2$ , pour lesquels la fonction et la dérivée seront toutes deux discontinues.

Dans ces conditions, une simple intégration par parties nous permettra d'écrire

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{i}{\pi \rho} \left[ \varphi(\varepsilon) \frac{1}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}} \right]_0^{2\pi} - \frac{i}{\pi \rho} \int_0^{2\pi} \varphi'(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}}.$$

En explicitant le crochet du second membre, il faut naturellement tenir compte des discontinuités de la fonction  $\varphi$ ; en même temps, faisons apparaître dans l'intégrale restante la différence  $\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(s)$ ; il est clair qu'il viendra

$$(12) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{i}{\pi \rho} \left[ \frac{\varphi(\varepsilon_1 - 0) - \varphi(\varepsilon_1 + 0)}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon_1)}} + \frac{\varphi(\varepsilon_2 - 0) - \varphi(\varepsilon_2 + 0)}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon_2)}} \right] \\ - \frac{i}{\pi \rho} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(s)}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}} d\varepsilon - \frac{i}{\pi \rho} \varphi'(s) \int_0^{2\pi} \frac{d\varepsilon}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}}.$$

Maintenant un calcul élémentaire nous donne, pour  $\rho < 1$ ,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varepsilon}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}} = \frac{2\pi}{\rho^2}.$$

De sorte que, finalement,

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \rho} + i \frac{\partial \tau}{\partial \rho} = - \frac{i}{\pi \rho} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(s)}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}} d\varepsilon - \frac{2i}{\rho^3} \varphi'(s) \\ + \frac{i}{\pi \rho} \left[ \frac{\varphi(\varepsilon_1 - 0) - \varphi(\varepsilon_1 + 0)}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon_1)}} + \frac{\varphi(\varepsilon_2 - 0) - \varphi(\varepsilon_2 + 0)}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon_2)}} \right].$$

Et comme on a

$$\frac{1}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}} = \frac{1 - \rho \cos(s-\varepsilon) + i\rho \sin(s-\varepsilon)}{1 - 2\rho \cos(s-\varepsilon) + \rho^2},$$

on en tire de suite

$$(13) \quad \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \rho} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(s)] \frac{\sin(s - \varepsilon) d\varepsilon}{1 - 2\rho \cos(s - \varepsilon) + \rho^2} \\ - \frac{1}{\pi} [\varphi(\varepsilon_1 - 0) - \varphi(\varepsilon_1 + 0)] \frac{\sin(s - \varepsilon_1)}{1 - 2\rho \cos(s - \varepsilon_1) + \rho^2} \\ - \frac{1}{\pi} [\varphi(\varepsilon_2 - 0) - \varphi(\varepsilon_2 + 0)] \frac{\sin(s - \varepsilon_2)}{1 - 2\rho \cos(s - \varepsilon_2) + \rho^2}.$$

Or, quand  $\rho$  tend vers 1, cette expression prend la forme

$$(14) \quad \left( \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(s)] \cot \frac{s - \varepsilon}{2} d\varepsilon \\ - \frac{\varphi(\varepsilon_1 - 0) - \varphi(\varepsilon_1 + 0)}{2\pi} \cot \frac{s - \varepsilon_1}{2} \\ - \frac{\varphi(\varepsilon_2 - 0) - \varphi(\varepsilon_2 + 0)}{2\pi} \cot \frac{s - \varepsilon_2}{2},$$

qui a généralement un sens. Il résulte même facilement de ce qui précède que la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée  $\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \rho}$  existe au point  $e^{is}$  de la frontière [en supposant bien entendu l'existence de  $\varphi'(s)$ ], est que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} [\varphi'(\varepsilon) - \varphi'(s)] \cot \frac{s - \varepsilon}{2} d\varepsilon$$

ait un sens en ce point. C'est évidemment ce qui aura lieu, sauf aux points de discontinuité dont on a admis la présence.

Ce point étant acquis, observons qu'en un point de la frontière  $\rho = 1$ , on a

$$\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \rho} = \frac{d\mathfrak{S}}{dn},$$

et appliquons le résultat qui précède à la fonction  $\Theta$  considérée antérieurement. Il suffit pour cela de supposer

$$\varphi \equiv \Theta, \quad \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{3\pi}{2},$$

$$\varphi(\varepsilon_2 - 0) = \varphi(\varepsilon_1 + 0), \quad \varphi(\varepsilon_2 + 0) = \varphi(\varepsilon_1 - 0), \quad \varphi(\varepsilon_1 - 0) = -\varphi(\varepsilon_1 + 0).$$

Nous poserons d'ailleurs, pour abrégier l'écriture,

$$(15) \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \alpha,$$

de sorte que  $2\alpha$  représentera l'angle que font entre elles les deux tangentes en O aux parois solides (dans le sens du courant). Alors, un calcul élémentaire réduira la partie tout intégrée du second membre de (14) à

$$-\frac{2\alpha}{\pi \cos s}.$$

Ramenons maintenant l'intégrale restante à une autre prise entre les limites 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Admettons toujours l'existence de la dérivée  $\Phi'$  dans les conditions susdites, et observons que l'hypothèse  $\Phi(2\pi - \varepsilon) = \Phi(\varepsilon)$  entraîne  $\Phi'(2\pi - \varepsilon) = -\Phi'(\varepsilon)$ . Il vient d'abord

$$(16) \quad \frac{d\Phi}{dn} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(s)] \cot \frac{s-\varepsilon}{2} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi \cos s}.$$

Or on trouve, par un calcul facile,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(s)] \cot \frac{s-\varepsilon}{2} d\varepsilon = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'(s) \sin s}{\cos \varepsilon - \cos s} d\varepsilon.$$

Enfin, la condition  $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$  entraînant  $\Phi'(\pi - \varepsilon) = \Phi'(\varepsilon)$ , on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'(s) \sin s}{\cos \varepsilon - \cos s} d\varepsilon \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'(s) \sin s}{\cos \varepsilon - \cos s} - \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'(s) \sin s}{\cos \varepsilon + \cos s} \right] d\varepsilon \end{aligned}$$

et par conséquent on a pour  $\frac{d\Phi}{dn}$ , c'est-à-dire pour  $\frac{dT}{ds}$ ,

$$(17) \quad \frac{dT}{ds} = \frac{2 \cos s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'(s) \sin s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi \cos s}.$$

De là nous déduisons immédiatement le résultat suivant :

*Si  $\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon$  est une fonction de  $\varepsilon$  croissante dans l'intervalle*

$0, \frac{\pi}{2}$ , la fonction  $T$  sera constamment décroissante dans le même intervalle. Car l'angle  $\alpha$  est positif, et l'intégrale qu'on vient d'écrire sera visiblement négative. Comme la valeur initiale de  $T$  pour  $s = 0$  est zéro, puisque par construction  $T$  est nul sur l'axe réel, il en résulte que  $T$  sera partout négatif. On peut même ajouter, à cause de la formule (3), que, le long des parois solides, la vitesse ira en croissant constamment depuis le point  $O$  jusqu'aux points de départ  $P_1$  et  $P_2$  des lignes de glissement.

Ce théorème nous fournit encore des catégories variées de formes d'obstacles, parmi lesquelles notamment des formes en piques. On en formerait explicitement autant d'exemples que l'on voudrait.

Avant d'aller plus loin, faisons usage de la formule (16) que nous venons de démontrer, dans le cas général où l'on ne suppose rien sur le mode de variation de  $\Phi'(\varepsilon)$ , en vue d'obtenir un théorème qui nous sera important. Remarquons, à cet effet, qu'il est indispensable que  $T$  commence par décroître à partir de  $s = 0$ , sans quoi il commencerait par être positif dans un intervalle fini, et la configuration correspondante serait à rejeter. Il n'est pas certain, à cause des transformations qu'on a faites précédemment, et qui peuvent n'être pas valables au point de discontinuité  $s = 0$ , que la valeur initiale de  $\frac{dT}{ds}$  soit donnée par la formule (17); mais on a, d'après (16),

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{s=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(+0)] \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi} \quad (1),$$

ce qui peut s'écrire

$$\left(\frac{dT}{ds}\right)_{s=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(+0)] \cot \frac{\varepsilon}{2} + [\Phi'(\varepsilon) + \Phi'(+0)] \cot \frac{\varepsilon}{2} \right\} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi}.$$

On voit alors que, si  $\Phi'(+0)$  est positif, cette expression est négative [et même infiniment grande si  $\Phi'(+0)$  n'est pas nul<sup>(2)</sup>]; mais si  $\Phi'(+0)$

(1) Dans ce calcul,  $\Phi(+0)$  est la limite, supposée déjà existante, de  $\Phi(\varepsilon)$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro positivement.

(2) Ce résultat est bien conforme aux théorèmes généraux sur les dérivées des potentiels, établis par S. ZAREMBA (*Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1905, p. 70-168); A. HORBORSKI (*Prace Matematyczno-Fizyczne*, 1909, p. 1-141); ALMANSI (*Annali di Mat.*, 1898, p. 1-51); LICHTENSTEIN (*J. de Crelle*, 1912, p. 12-42).

est négatif et non nul, cette expression est au contraire sûrement positive, et par suite  $T$  commence par croître. Enfin, si  $\Phi'(+0)$  est nul, il sera nécessaire que l'expression restante

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi'(\varepsilon) \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi},$$

qu'on mettra sous la forme

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi},$$

soit négative (ou nulle); d'où en ce cas la condition nécessaire

$$(18) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon + \alpha \geq 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \geq 0.$$

Si maintenant on observe que cette condition se trouve vérifiée d'elle-même si  $\Phi'(+0) > 0$ , et qu'elle entraîne  $\Phi'(+0) = 0$  si l'on ne suppose pas cette quantité positive, on voit que *cette condition (18) est nécessaire dans tous les cas*. Ce fait sera essentiel ultérieurement.

Il est important d'introduire ici une remarque sur le sens de cette condition. En général, elle assure que le rayon de courbure des lignes de glissement au départ, c'est-à-dire aux points  $P_1$  et  $P_2$ , soit nul : les obstacles correspondants sont donc tous à bords tranchants. Au contraire, le cas des obstacles formant proue véritable, c'est-à-dire des obstacles à l'arrière desquels le jet se détache avec un rayon de courbure non nul, ne peut correspondre qu'au cas limite où l'inégalité (18) se transforme en une inégalité (Cf. M. BRILLOUIN, *loc. cit.*, p. 179). Si l'on calcule en effet le rayon de courbure de la ligne de glissement inférieure, en  $P_2$ , ce rayon est

$$R = \left| \frac{d\sigma}{d\theta} \right|,$$

en désignant par  $d\sigma$  l'élément d'arc de la ligne de glissement, fourni par [éq. (5)]

$$|d\sigma| = |dz| = \left| \frac{a^2}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \right| = d\zeta \frac{a^2}{2} \frac{1 - \zeta^4}{\zeta^3},$$

puisque, sur la ligne en question,  $\zeta$  est réel et que le module de  $ei\Omega$ , égal à l'inverse de la vitesse, est égal à 1. On a donc

$$(18') \quad R = \frac{\alpha^2}{2} \frac{1 - \zeta^4}{\zeta^3 \left| \frac{d\Theta}{d\zeta} \right|}.$$

Or  $\frac{d\Phi}{d\zeta}$ , pour  $\zeta = 1$ , qui correspond au point  $P_2$ , n'est autre que la dérivée normale extérieure, déjà calculée, en ce point : on a vu qu'elle était égale à

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon - \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Donc, tant que cette expression n'est pas nulle, on a bien  $R = 0$  pour  $\zeta = 1$ , d'où le résultat annoncé : la proue véritable correspond bien au cas limite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon + \alpha = 0.$$

Revenons maintenant à la formule (17), et supposons que l'on ne soit pas dans le cas d'application des résultats antérieurs concernant le signe de  $T$ . Pour aller plus loin, il serait alors nécessaire de savoir le sens de la variation de la fonction de  $s$  suivante :

$$(19) \quad P(s) = \frac{2 \cos s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'(s) \sin s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon.$$

Or le changement de variables et de fonction

$$s_1 = \frac{\pi}{2} - s, \quad \varepsilon_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \Phi' \left( \frac{\pi}{2} - \varepsilon_1 \right) = \psi(\varepsilon_1)$$

permet d'écrire

$$P(s) = P_1(s_1) = \frac{2 \sin s_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(\varepsilon_1) \cos \varepsilon_1 - \psi(s_1) \cos s_1}{\sin^2 \varepsilon_1 - \sin^2 s_1} d\varepsilon_1,$$

ou encore

$$P_1(s_1) = -\frac{2 \sin s_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi(\varepsilon_1) \cos \varepsilon_1 - \psi(s_1) \cos s_1}{\cos^2 \varepsilon_1 - \cos^2 s_1} d\varepsilon_1.$$



Or, si l'on se reporte à la formule (8), on vérifie immédiatement que cette expression n'est autre, au signe près, que la valeur de la partie imaginaire d'une fonction analytique analogue à  $\Omega(\zeta)$ , et définie par les valeurs de sa partie réelle sur la circonférence  $|\zeta| = 1$ , à savoir :  $\psi(\varepsilon_1)$  pour  $0 < \varepsilon_1 < \frac{\pi}{2}$ , avec les relations supplémentaires

$$\psi(\pi - \varepsilon_1) = -\psi(\varepsilon_1), \quad \psi(2\pi - \varepsilon_1) = \psi(\varepsilon_1).$$

Alors, en admettant l'existence d'une dérivée  $\psi'(\varepsilon_1)$ , c'est-à-dire celle de  $\Phi''(\varepsilon)$ , sauf peut-être aux points déjà indiqués antérieurement, un procédé déjà employé permettra de mettre la dérivée  $\frac{dP_1}{ds_1}$  sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{ds_1} = & -\frac{2 \cos s_1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\psi'(\varepsilon_1) \sin \varepsilon_1 - \psi'(s_1) \sin s_1}{\cos^2 \varepsilon_1 - \cos^2 s_1} d\varepsilon_1 \\ & - \frac{1}{\pi \cos s_1} \left[ \psi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \psi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) \right]. \end{aligned}$$

Revenons aux notations primitives : remarquons que l'on a

$$\begin{aligned} \psi'(\varepsilon_1) &= \frac{d\psi(\varepsilon_1)}{d\varepsilon_1} = -\Phi''\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon_1\right) = -\Phi''(\varepsilon), \\ \frac{dP_1}{ds_1} = -\frac{dP}{ds}, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) &= -\psi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \quad \text{et} \quad \psi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \Phi'(+0); \end{aligned}$$

il vient

$$\frac{dP}{ds} = -\frac{2 \sin s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi''(\varepsilon) \cos \varepsilon - \Phi''(s) \cos s}{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 s} d\varepsilon + \frac{2\Phi'(+0)}{\pi \sin s}$$

ou encore

$$(20) \quad \frac{dP}{ds} = \frac{2 \sin s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi''(\varepsilon) \cos \varepsilon - \Phi''(s) \cos s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon + \frac{2\Phi'(+0)}{\pi \sin s}.$$

On a vu que  $\Phi'(+0)$  était nécessairement positif ou nul ; supposons que cette quantité soit nulle : c'est notamment le cas (*cf.* p. 244) pour tous les obstacles en forme de proue convexe, pour lesquels nécessairement  $\Phi'(\varepsilon)$  est partout négatif (entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ). Supposons

de plus  $\Phi''(\varepsilon) \cos \varepsilon$  croissant dans cet intervalle, alors  $\frac{dP}{ds}$  sera toujours négatif, P ira en décroissant;  $\frac{dT}{ds}$ , somme de deux quantités décroissantes, sera aussi décroissante, et comme sa valeur initiale est négative, elle sera toujours négative; de sorte que T décroîtra constamment, à partir de zéro, et sera toujours négatif. D'où le résultat suivant :

*Si l'on a  $\Phi'(+0) = 0$ , et si la fonction  $\Phi''(\varepsilon) \cos \varepsilon$  est croissante dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , les vitesses seront partout plus petites que 1; de plus, le long des parois solides, la vitesse croîtra de 0 à 1, depuis le point O jusqu'aux points P<sub>1</sub> et P<sub>2</sub>.*

Continuons à supposer  $\Phi'(+0) = 0$ , mais qu'on ne soit pas dans le cas d'appliquer le résultat précédent, ni l'un des antérieurs. Dans ces conditions, l'expression de  $\frac{dP}{ds}$ , alors réduite à

$$(21) \quad \frac{dP}{ds} = \frac{2 \sin s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi''(\varepsilon) \cos \varepsilon - \Phi''(s) \cos s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon,$$

rapprochée de la formule (8), nous permet de conclure, en admettant l'existence d'une dérivée troisième  $\Phi'''(\varepsilon)$  continue toujours dans les mêmes conditions que les dérivées précédemment introduites,

$$(22) \quad \frac{d^2P}{ds^2} = \frac{2 \cos s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'''(\varepsilon) \sin \varepsilon - \Phi'''(s) \sin s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon + \frac{2 \Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}{\pi \cos s}.$$

D'autre part, un calcul immédiat nous donne

$$\frac{d^3T}{ds^3} = \frac{d^2P}{ds^2} - \frac{2 \alpha}{\pi} \frac{1 + \sin^2 s}{\cos^3 s}.$$

Alors, si l'on suppose  $\Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leq 0$ , et  $\Phi'''(\varepsilon) \sin \varepsilon$  croissant dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , on voit que  $\frac{d^2T}{ds^2}$  sera décroissant. Sa valeur initiale se présente sous forme indéterminée, mais on démontre aisément que  $\frac{dP}{ds}$  tend vers zéro avec  $s$ ; il suffit pour cela de montrer que,

$\eta$  étant un nombre positif choisi arbitrairement petit on a

$$(23) \quad \sin s \int_0^\eta \frac{\Phi''(\varepsilon) \cos \varepsilon - \Phi''(s) \cos s}{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon = \left\{ \begin{array}{l} \text{quantité infiniment} \\ \text{petite avec } \eta. \end{array} \right.$$

Or l'existence admise de la dérivée  $\Phi''$ , supposée finie, permet de décomposer l'intégrale (23) en deux, l'une étendue de  $s$  à  $\eta$ , et qui est de l'ordre de  $\eta$ , l'autre étendue de  $0$  à  $s$ , et qui tend vers zéro avec  $s$ . D'où la conclusion désirée.

Alors  $\frac{dP}{ds}$  est toujours négative,  $\frac{dT}{ds}$  également, comme décroissant à partir d'une valeur négative, et par suite  $T$  étant toujours négatif, les vitesses sont partout inférieures à 1. D'où encore ce résultat :

*Si l'on a  $\Phi'(+0) = 0$ ,  $\Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leq 0$ , et si  $\Phi''(\varepsilon) \sin \varepsilon$  est une fonction croissante dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , les vitesses dans le fluide seront partout inférieures à 1. Sur les parois solides, les vitesses seront encore croissantes depuis le point  $O$  jusqu'aux points  $P_1$  ou  $P_2$ .*

Il est clair qu'on peut poursuivre indéfiniment l'application du procédé employé, et qu'on arrivera à un résultat de la forme générale suivante :

En admettant l'existence des dérivées de  $\Phi(\varepsilon)$  jusqu'à l'ordre  $2n$  ou  $2n + 1$ , on sera sûr que les vitesses ne dépassent jamais l'unité, moyennant que la fonction  $\Phi^{(2n)}(\varepsilon) \cos \varepsilon$  ou la fonction  $\Phi^{(2n+1)}(\varepsilon) \sin \varepsilon$  sera constamment croissante dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , et moyennant quelques égalités ou inégalités supplémentaires relatives aux valeurs des dérivées de  $\Phi$  aux extrémités,  $0$  et  $\frac{\pi}{2}$ , de l'intervalle. Je n'expliquerai pas davantage ces inégalités, qui ont été écrites ci-dessus pour les premières valeurs de  $n$ .

Nous allons maintenant considérer plus particulièrement les obstacles dont le profil est convexe vers le courant, catégorie d'obstacles qui comprend les formes de proues convexes (*Cf.* plus haut, p. 244). Cela revient à dire que nous supposons que la fonction  $\Phi(\varepsilon)$  est une fonction négative décroissante, de  $\varepsilon$ , dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , c'est-

à-dire

$$\Phi(\varepsilon) < 0, \quad \Phi'(\varepsilon) < 0.$$

Le long de la paroi solide  $OP_2$ , on peut écrire, comme nous l'avons vu [éq. (7)], la valeur de  $T$  sous la forme

$$T(s) = \frac{\sin s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos \varepsilon - \cos s} + \frac{\Phi(\varepsilon) + \Phi(s)}{\cos \varepsilon + \cos s} \right] d\varepsilon \quad \left( 0 < s < \frac{\pi}{2} \right).$$

Observons que les deux fonctions

$$(24) \quad A(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos \varepsilon + \cos s} d\varepsilon$$

et

$$(25) \quad B(s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\varepsilon) - \Phi(s)}{\cos \varepsilon - \cos s} d\varepsilon$$

sont positives, la première à cause de l'hypothèse  $\Phi < 0$ , la seconde à cause du fait que  $\Phi(s)$  décroît, ainsi que  $\cos s$ , dans l'intervalle considéré. Démontrer que  $T$  reste négatif reviendrait à faire voir qu'on a constamment

$$A(s) > B(s).$$

On s'assure très aisément que la décroissance de  $\Phi$  entraîne que la fonction  $A(s)$  soit croissante. D'autre part, nous savons que, au départ, pour  $s = 0$ , la différence  $A - B$  commence par être négative ou nulle, puisque l'inégalité (18) nécessaire assure, comme on l'a déjà vu, que  $T$  commence par diminuer et que  $T$  est nul au départ. Il est donc un cas où nous pourrions affirmer *a priori* que l'inégalité (18) est toujours satisfaite, à savoir celui où la fonction  $B(s)$  serait constamment décroissante.

Or posons

$$u = \cos \varepsilon, \quad u_0 = \cos s, \\ \Phi(\varepsilon) = -F(u).$$

La fonction  $F(u)$  sera positive décroissante dans l'intervalle  $0 < u < 1$  (voir *fig. 7*), et l'on aura immédiatement

$$B(s) = B_1(u) = \int_0^1 - \frac{F(u) - F(u_0)}{u - u_0} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Or la figure donne de suite

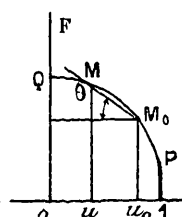
$$\frac{F(u_0) - F(u)}{u - u_0} = \operatorname{tang} \theta,$$

d'où

$$B_1(u) = \int_0^1 \operatorname{tang} \theta \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ceci posé, on voit que, si la courbe de la figure est convexe du côté des  $F$  positifs, l'expression  $\operatorname{tang} \theta$  décroîtra lorsque, quel que soit  $M$  fixe,

Fig. 7.



le point  $M_0$  se déplacera dans le sens de  $P$  vers  $Q$ , c'est-à-dire lorsque  $s$  croîtra; il en sera par suite de même de la fonction  $B(s)$ . Il en résulte donc, dans ce cas, que  $T$  est toujours négatif. Or la convexité est tournée vers le haut, si  $F'(u) = \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon}$  est une fonction décroissante de  $u$ , c'est-à-dire une fonction croissante de  $\varepsilon$ ; on a donc le théorème suivant :

*Pour des obstacles convexes vers le courant [ $\Phi(\varepsilon) < 0$ ,  $\Phi'(\varepsilon) < 0$ ], si  $\frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon}$  est une fonction croissante dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , les vitesses dans le fluide sont partout acceptables, c'est-à-dire inférieures à 1.*

On peut améliorer ce résultat par l'artifice suivant (applicable du reste également aux théorèmes antérieurement énoncés), que je vais exposer rapidement.

Avec les mêmes notations que plus haut, soit

$$\Phi_1(\varepsilon) = F_1(u)$$

une nouvelle fonction, non forcément positive dans tout l'intervalle  $0, 1$  pour  $u$ , et non forcément décroissante; supposons que la fonction  $T_1$ , calculée au moyen de  $F_1$  (ou de  $\Phi_1$ ) comme  $T$  se calcule au moyen de  $F$ , soit constamment positive; supposons, en outre, que cette fonc-

tion vérifie l'inégalité fondamentale (18). Dans ces conditions, si l'on a, dans l'intervalle 0, 1,

$$F(u) + F_1(u) \geq 0, \quad F'(u) + F'_1(u) < 0, \quad F''(u) + F''_1(u) < 0,$$

la fonction  $F + F_1$  se trouve dans le cas d'application du théorème précédent, car l'inégalité (18) étant vérifiée par  $F$  et par  $F_1$ , est vérifiée par la somme  $F + F_1$ . Il en résulte qu'on a constamment

$$T + T_1 \leq 0$$

et, par suite,

$$T < 0.$$

En voici un exemple simple. Cherchons si l'on peut trouver une fonction  $F_1$  égale à un polynôme du second degré; posons

$$F_1(u) = au^2 + 2bu + c.$$

Un calcul élémentaire montre que l'inégalité fondamentale (18) exige ici

$$(26) \quad b\pi + 2a + c \geq 0, \quad = k^2.$$

D'autre part, la condition que  $T_1$  soit positif se met sans difficulté sous la forme

$$(27) \quad (a \cos^2 s + c) \left[ (a + b\pi) \frac{\sin s}{a \cos^2 s + c} + \log \cot \left( \frac{\pi}{4} - \frac{s}{2} \right) \right] \leq 0.$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour  $0 < s < \frac{\pi}{2}$ . Pour  $s = \frac{\pi}{2}$ , cela exige évidemment

$$c < 0.$$

Appelant  $H(s)$  le crochet qui figure dans (27). On a facilement

$$\begin{aligned} \frac{dH}{ds} &= (a + b\pi) \frac{\cos s (2a + c - a \cos^2 s)}{(a \cos^2 s + c)^2} + \frac{1}{\cos s} \\ &= \operatorname{sgn} \{ -ab\pi \cos^4 s + [2ac + (a + b\pi)(2a + c)] \cos^2 s + c^2 \} = \operatorname{sgn} U(\cos^2 s). \end{aligned}$$

$H(s)$  étant certainement positif pour  $s = \frac{\pi}{2}$ , et nul pour  $s = 0$ , cherchons à exprimer qu'il est toujours positif, ce qui sera assuré s'il est toujours croissant. Il est nécessaire pour cela que  $U(1)$  soit positif,

ce qui donne

$$-ab\pi + 2ac + (a + b\pi)(2a + c) + c^2 \geq 0.$$

Supposons alors  $a$  négatif (hypothèse naturelle en vue d'assurer à la condition  $F'' + F'_1 < 0$  le maximum de chances d'être réalisée). Posons

$$a = -a', \quad c = -c',$$

et remplaçons dans l'inégalité précédente  $b\pi$  par sa valeur

$$b\pi = 2a' + c' + k^2$$

tirée de (26); il vient, par un calcul simple,

$$-k^2(a' + c') \geq 0, \quad \text{ce qui exige} \quad k = 0.$$

Il est maintenant facile de s'assurer que le trinôme  $U(\cos^2 s)$  a ses racines réelles et positives; nous voulons qu'aucune de ces racines ne soit comprise entre 0 et 1; il faut et il suffit pour cela, vu les conditions précédentes, que

$$\frac{2ac + (a + b\pi)(2a + c)}{2ab\pi} > 1,$$

ce qui réduit à

$$(c' + a')(c' - 2a') < 0 \quad \text{ou bien} \quad c' > 2a'.$$

Cela étant, on voit bien maintenant que l'inégalité (27) sera constamment vérifiée. De là on déduit le résultat suivant :

*Si, ayant posé*

$$u = \cos \varepsilon, \quad \Phi(\varepsilon) = F(u),$$

*on peut trouver deux nombres positifs  $a'$  et  $c'$  ( $c' > 2a'$ ) tels que les inégalités suivantes*

$$F(u) - a'u^2 + \frac{2}{\pi}(2a' + c')u - c' \geq 0,$$

$$F'(u) - 2a'u + \frac{2}{\pi}(2a' + c') \leq 0,$$

$$F''(u) - 2a' \leq 0$$

*soient remplies constamment entre 0 et 1, la solution construite au moyen de la fonction  $\Phi(\varepsilon)$  donnera naissance à des vitesses partout inférieures à 1, donc acceptables.*

Il est facile de s'assurer que les inégalités précédentes seraient entraînées par les suivantes, plus restrictives, mais d'un emploi pratique plus commode :

$$\begin{aligned} F(u) - c' &\geq 0, \\ F'(u) + \frac{2}{\pi}(2a' + c') &\leq 0, \\ F''(u) - 2a' &\leq 0. \end{aligned}$$

Il serait aisé de donner des exemples d'application de ce résultat, pour lesquels les règles trouvées antérieurement seraient en même temps en défaut.

En ce qui concerne les obstacles convexes vers le courant, il semblerait assez naturel de s'attendre à ce que la condition nécessaire (18) fût en même temps suffisante à assurer la validité de la solution, aussi bien en ce qui concerne les vitesses qu'en ce qui concerne les lignes de glissement. (Pour ces dernières lignes, cela résultera, en effet, d'un théorème démontré un peu plus loin.) Si le fait était exact, il enlèverait tout intérêt au théorème qui vient d'être démontré dans le précédent paragraphe. En réalité, au contraire, la condition (18) n'est pas suffisante pour les obstacles convexes. Je laisse de côté pour le moment la démonstration de cette affirmation, qui sera légitimée *a posteriori* à la fin de ce Mémoire, le point en question étant compris comme cas particulier dans un théorème plus général qu'on trouvera à la page 286 du présent travail.

#### ÉTUDE DES LIGNES DE GLISSEMENT.

Je me propose d'étudier maintenant l'allure des lignes de glissement, ou de jet; nous considérerons par exemple la ligne  $\lambda_2$  qui correspond à  $\zeta$  réel compris entre 0 et 1. L'angle  $\Theta$  que fait avec  $Ox$  la tangente au jet dans le sens du courant varie alors de zéro (point à l'infini) à la valeur (négative) de l'angle que fait avec  $Ox$  la tangente en  $P_2$  à la paroi solide. Toutes les fois que nous pourrions affirmer que  $\Theta$  décroît dans tout l'intervalle correspondant, il en résultera une ligne  $\lambda_2$  d'allure normale : cette condition est nécessaire, puisque sur  $\lambda_2$  ne doit se trouver aucun point d'inflexion, et elle sera évidemment suffisante



pour éviter les recoupements des lignes de glissement entre elles. Nous allons établir certains cas où l'on peut faire cette démonstration.

L'expression de l'angle  $\Theta$  est égale à celle de  $\Omega(\zeta)$  pour  $\zeta$  réel, puisque alors  $T$  est nul; elle est donnée (Cf. H. VILLAT, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1911, en particulier p. 263) par la formule

$$(28) \quad \Omega(\zeta) = \frac{i}{2} \left[ \Phi\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \right] \log i \frac{\zeta - i}{1 - i\zeta} \\ + \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log i \frac{\zeta - e^{i\varepsilon}}{1 - \zeta e^{i\varepsilon}} d\varepsilon.$$

L'hypothèse  $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$ , d'où résulte  $\Phi'(\pi - \varepsilon) = \Phi'(\varepsilon)$ , permet d'écrire cette égalité sous la forme

$$(29) \quad \Omega(\zeta) = \frac{2i\alpha}{\pi} \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} + \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{1 - \zeta^2 + 2i\zeta \sin \varepsilon}{1 - \zeta^2 - 2i\zeta \sin \varepsilon} d\varepsilon,$$

$\alpha$  ayant la même signification que dans les paragraphes précédents. Supposons  $\zeta < 1$ , on en conclut

$$(30) \quad \frac{d\Omega}{d\zeta} = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{1}{1 + \zeta^2} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \zeta^2) \sin \varepsilon}{(1 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \sin^2 \varepsilon} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Sous cette forme, un résultat facile apparaît immédiatement :

*Si  $\Phi'(\varepsilon)$  est toujours positif (ce qui correspond aux obstacles en gouttière, concaves vers le courant)  $\frac{d\Omega}{d\zeta}$  est constamment négatif et, par suite,  $\Omega$  décroît : la configuration des lignes de jet est donc acceptable.* Ce théorème important a du reste déjà été établi par M. T. BOGGIO, *Sulle funzioni di variabile complessa in un arco circolare* (*R. Accad. delle Scienze di Torino*, t. LXVII, 1911-1912).

Considérons maintenant le cas moins immédiat, où l'obstacle est convexe vers le courant (cas comprenant les proues). Le signe de  $\frac{d\Omega}{d\zeta}$  n'est pas en évidence sur l'expression (30) où le second membre est la différence de deux quantités positives [ $\Phi'(\varepsilon) < 0$ ]. Or, pour toutes les courbes acceptables, nous devons supposer remplie l'inégalité fonda-

mentale (18)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon + \alpha \geq 0,$$

qui permet de poser

$$(31) \quad \alpha = -K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon$$

avec

$$K > 1.$$

On peut alors transformer l'expression (30) de  $\frac{d\Omega}{d\zeta}$  en la suivante :

$$\frac{\pi}{4} \frac{d\Omega}{d\zeta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon \left[ \frac{K}{1+\zeta^2} \frac{1}{\sin \varepsilon} - \frac{(1+\zeta^2) \sin \varepsilon}{(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \sin^2 \varepsilon} \right]$$

ou bien

$$\frac{\pi}{4} \frac{d\Omega}{d\zeta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} H \frac{\Phi'(\varepsilon) d\varepsilon}{(1+\zeta^2) \sin \varepsilon [(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \sin^2 \varepsilon]},$$

en posant

$$H = K[(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \sin^2 \varepsilon] - (1+\zeta^2)^2 \sin^2 \varepsilon.$$

Or la fonction H est constamment positive pour les valeurs de  $\zeta$  entre 0 et 1, et celles de  $\varepsilon$  entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ ; car, considérée comme fonction de  $\varepsilon$ , elle est visiblement positive pour  $\varepsilon = 0$ , et elle ne s'annule jamais; en effet, la valeur de  $\sin^2 \varepsilon$  qui serait racine de H peut s'écrire

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{K(1-\zeta^2)^2}{(1+\zeta^2)^2 - 4K\zeta^2} = \frac{K}{1 + 4(1-K) \frac{\zeta^2}{(1-\zeta^2)^2}}$$

ou bien

$$\sin^2 \varepsilon = \frac{K}{1 + (1-K) \operatorname{sh}^2 2\gamma},$$

en posant

$$\zeta = \operatorname{th} \gamma \quad (\gamma \text{ est évidemment réel et positif}).$$

Or, tant que le dénominateur reste positif, c'est-à-dire tant que  $\zeta$  est assez petit pour qu'on ait

$$1 + (1-K) \operatorname{sh}^2 2\gamma > 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{th} 2\gamma < \frac{1}{\sqrt{K}},$$

la valeur trouvée pour  $\sin^2 \varepsilon$  est plus grande que 1, car cette hypothèse se traduit par

$$\frac{K}{1 + (1 - K) \operatorname{sh}^2 2\gamma} > 1$$

ou

$$(K - 1)(1 + \operatorname{sh}^2 2\gamma) > 0,$$

ce qui est évidemment exact. Enfin, si  $\zeta$  n'assure plus l'inégalité susdite, l'expression écrite pour  $\sin^2 \varepsilon$  devient négative, et elle convient encore moins. Par suite, H est toujours positif comme on l'avait annoncé, et il résulte, de l'hypothèse  $\Phi'(\varepsilon) < 0$ , qu'on a constamment  $\frac{d\Omega}{d\zeta} < 0$  et que la ligne de jet est acceptable. D'où le théorème suivant :

*Pour tous les obstacles convexes vers le courant, jusques et y compris le cas limite des proues convexes, les lignes de jet sont toujours acceptables, moyennant l'inégalité nécessaire (18).*

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

*Quelle que soit la forme de l'obstacle, chaque ligne de jet est toujours convexe vers le courant au voisinage du point à l'infini.*

En d'autres termes, la valeur de  $\Theta$  (nulle à l'infini pour  $\zeta = 0$ ), commence toujours par décroître.

Partons, en effet, de la formule (30) qui donne  $\frac{d\Omega}{d\zeta}$ , c'est-à-dire  $\frac{d\Theta}{d\zeta}$  pour  $\zeta$  réel. Pour  $\zeta = 0$ , elle se réduit, après quelques transformations simples, à

$$(32) \quad \frac{\pi}{4} \frac{d\Theta}{d\zeta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varepsilon) \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon + \Phi(0) \quad (\zeta = 0).$$

Or, la fonction  $1 - \sin \varepsilon$  étant positive et décroissante dans l'intervalle d'intégration, la seconde formule de la moyenne permet d'écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varepsilon) \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon \quad \left(0 < \xi < \frac{\pi}{2}\right)$$

ou bien

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \varepsilon) \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon = \Phi(\xi) - \Phi(0),$$

et, par suite,

$$\frac{\pi}{4} \frac{d\Theta}{d\xi} = \Phi(\xi).$$

Comme nous supposons  $\Phi(\varepsilon)$  négatif dans tout l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , puisque cette fonction correspond alors à la paroi inférieure, on voit bien que l'expression ci-dessus est négative, ce qui démontre le fait annoncé.

On pourra donc dans la suite supposer  $\zeta$  toujours non nul, puisque les valeurs de  $\zeta$  voisines de zéro ne sauraient introduire, d'après ce qui précède, de difficulté relativement aux lignes de jet.

Il en est généralement de même des valeurs de  $\zeta$  voisines de  $+1$  et de  $-1$ ; plus précisément : *moyennant toujours l'inégalité fondamentale (18), les portions des lignes de jet voisines des parois solides sont toujours convexes vers le fluide en mouvement.*

En effet, si cette inégalité (nécessaire) n'est pas réduite à une égalité, on sait qu'elle assure que  $\frac{dT}{ds}$ , et, par suite,  $\frac{d\Theta}{d\rho}$ , soit négatif pour  $s = 0$  et  $\rho = \zeta = 1$ ; la question est alors tranchée.

Mais il n'en va pas si simplement si l'inégalité (18) est remplacée par une égalité, auquel cas on a

$$(33) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon + \alpha = 0,$$

et l'on sait que cela entraîne

$$\Phi'(0) = 0.$$

Nous nous proposons d'étudier en détail ce cas qui convient, comme on sait, aux proues (lesquelles ne sont pas nécessairement entièrement convexes vers le liquide en mouvement).

Revenons à la formule (12) démontrée dans la première partie, et qui fournissait la dérivée  $\frac{\partial \omega}{\partial \rho}$ , au point  $\rho e^{is}$ , d'une fonction  $\omega(\rho e^{is})$  définie en cet endroit. En faisant coïncider cette fonction avec la fonction  $\Omega = \Theta + i\Gamma$  actuelle, il nous vient facilement

$$(34) \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = -\frac{2i\alpha}{\pi\rho} \left( \frac{1}{1+i\rho e^{is}} - \frac{1}{1-i\rho e^{is}} \right) - \frac{i}{\pi\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(s)}{1 - \rho e^{i(s-\varepsilon)}} d\varepsilon - \frac{2i}{\rho^3} \Phi'(s).$$

Notre but étant de déterminer le sens de la variation de  $\Theta$  au voisinage de  $\zeta = 1$  le long de l'axe réel, nous pouvons dans cette formule faire dès maintenant  $s = 0$ , et, en nous rappelant que  $\Phi'(0)$  est nul, il vient

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \rho}\right)_{s=0} = -\frac{4\alpha}{\pi} \frac{1}{1+\rho^2} - \frac{i}{\pi\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon.$$

Observons encore que les points  $\varepsilon = 0, \pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$  ne sont pas des points de discontinuité pour la dérivée  $\Phi(\varepsilon)$ , à cause des hypothèses faites sur la fonction  $\Phi$ , lesquelles entraînent

$$\Phi'(\pi - \varepsilon) = \Phi'(\varepsilon), \quad \Phi'(2\pi - \varepsilon) = -\Phi'(\varepsilon),$$

et à cause de la condition  $\Phi'(0) = 0$ , et enfin de ce fait que nous supposons  $\Phi'(\varepsilon)$  partout finie. Dans le cas actuel,  $\Phi'(\varepsilon)$  est donc partout continue.

Ceci posé, il est manifeste que, pour  $\rho$  inférieur à 1, nous avons le droit d'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha\rho}{\pi(1+\rho^2)^2} + \frac{i}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon - \frac{i}{\pi\rho} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\varepsilon} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2}.$$

Mais on a, en intégrant par partie,

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\varepsilon} \Phi'(\varepsilon)}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2} d\varepsilon = \left[ \frac{\Phi'(\varepsilon)}{-i\rho} \frac{1}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{i\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon.$$

La partie tout intégrée est nulle, puisque  $\Phi'(\varepsilon)$  est continue. D'autre part, on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon) - \Phi''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon + \Phi''(+0) \int_0^{2\pi} \frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{-i\varepsilon}},$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon = \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon) - \Phi''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{i\pi}{\rho^2} \Phi''(+0).$$

De sorte qu'on a finalement

$$(35) \quad \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha\rho}{\pi(1+\rho^2)^2} + \frac{i}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon \\ - \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon) - \Phi''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon - \frac{2}{\rho^4} \Phi''(+0).$$

Dans ces formules,  $\Phi''(+0)$  représente la limite, supposée existante, de la dérivée  $\Phi''(\varepsilon)$  (supposée elle aussi existante, bien entendu) lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro positivement; d'ailleurs l'hypothèse

$$\begin{aligned} \Phi(2\pi - \varepsilon) &= \Phi(\varepsilon) \\ \text{entraîne} \quad \Phi''(-0) &= \Phi''(+0). \end{aligned}$$

On voit alors sur la formule obtenue (35), certainement valable pour  $\rho < 1$ , que le second membre conservera un sens si l'on passe à la limite en faisant tendre  $\rho$  vers 1. En ne considérant que la partie réelle, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{s=0 \\ \rho=1}} \left( \frac{d^2\Theta}{d\rho^2} \right) &= \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon}{1 - \cos \varepsilon} d\varepsilon \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi''(\varepsilon) - \Phi''(+0)] d\varepsilon - 2\Phi''(+0), \end{aligned}$$

ou encore, après simplifications,

$$(36) \quad \lim_{\substack{s=0 \\ \rho=1}} \left( \frac{d^2\Theta}{d\rho^2} \right) = \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'(\varepsilon) \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon - \Phi''(+0).$$

Mais, à cause des propriétés de la fonction  $\Phi'(\varepsilon)$ , on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'(\varepsilon) \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon,$$

de sorte qu'en tenant compte de l'hypothèse (33), il reste finalement

$$(37) \quad \lim_{\substack{s=0 \\ \rho=1}} \left( \frac{d^2\Theta}{d\rho^2} \right) = -\Phi''(+0).$$

Donc, dans le cas des proues, si  $\Phi'(0) = 0$ , et  $\Phi''(0) \neq 0$ , il est nécessaire que  $\Phi''(0)$  soit négatif. Sans quoi  $\frac{d\Theta}{d\rho}$ , dont la valeur limite est zéro pour  $\rho = 1$ , serait décroissant au voisinage et, par suite, serait positif pour  $\rho < 1$ . Cela entraînerait, comme on sait, la concavité d'une portion de la ligne de jet, vers le fluide mobile.

Remarquons ici que le théorème de la page 256, relatif aux proues

convexes, répond bien à cette condition, car les hypothèses  $\Phi'(\varepsilon) < 0$ ,  $\Phi'(0) = 0$ , entraînent évidemment  $\Phi''(0) < 0$ .

Restant dans le cas  $\Phi''(0) \neq 0$  et  $< 0$ , la question est donc tranchée, et les lignes de jet, au voisinage des points de détachement, sont convexes vers le courant. *Leur rayon de courbure au départ est alors fini.* En effet ce rayon de courbure est égal [form. (18')] à

$$R = \lim_{\rho = \zeta = 1} \left| \frac{a^2}{2\zeta^3} \frac{1 - \zeta^4}{\frac{d\Theta}{d\zeta}} \right|.$$

Pour  $\rho = \zeta = 1$ , dans le cas des proues, cette expression se présente sous forme indéterminée, mais le calcul ci-dessus permet de lever l'indétermination, et l'on trouve immédiatement

$$R = \frac{2a^2}{-\Phi''(+0)}.$$

*Ce rayon de courbure du jet est égal au rayon de courbure de la paroi solide au même point de détachement.* En effet, sur la paroi le rayon de courbure est

$$R_1 = \lim_{(s=0)} \left| \frac{dz}{d\Theta} \right| = \frac{2a^2 \sin s \cos s}{e^s} \left| \frac{ds}{d\Theta} \right|.$$

Si l'on fait tendre  $s$  vers zéro,  $T$  devient nul par construction, et, puisque sur la paroi  $\Theta = \Phi(s)$ , il vient

$$R_1 = 2a^2 \lim \left| \frac{\sin s}{\Phi'(s)} \right|,$$

c'est-à-dire

$$R_1 = \frac{2a^2}{-\Phi''(+0)} = R.$$

Examinons maintenant le cas où  $\Phi''(0) = 0$ , cas où la conclusion reste en suspens quant au sens de la concavité du jet; nous savons déjà, bien entendu, qu'au point de détachement la paroi solide et le jet auront un rayon de courbure infini, comme cela résulte immédiatement de ce qui précède. Revenons alors à la formule (35) qui donne  $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2}$  pour  $s = 0$ ,  $\rho < 1$ , et faisons dans cette formule  $\Phi''(0) = 0$ ; il

reste

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho^2}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha\rho}{\pi(1+\rho^2)^2} + \frac{i}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon - \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon.$$

On a ensuite le droit d'écrire, pour  $\rho < 1$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \rho^3}\right)_{s=0} &= \frac{8\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{(1+\rho^2)^2} - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^3} \right] \\ &\quad - \frac{2i}{\pi\rho^3} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{2}{\pi\rho^3} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon \\ &\quad + \frac{i}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2} d\varepsilon - \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2} d\varepsilon; \end{aligned}$$

puis, en désignant par  $\Phi''(+0)$  la limite, dont nous supposons l'existence, de la dérivée  $\Phi''(\varepsilon)$  dont nous supposons aussi qu'elle existe, nous aurons, au moyen de calculs semblables à ceux qu'on a faits précédemment

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2} d\varepsilon = -\frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)e^{-i\varepsilon}}{(1-\rho e^{-i\varepsilon})^2} d\varepsilon &= \left( \frac{\Phi''(\varepsilon)}{-i\rho} \frac{1}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} \right)_0^{2\pi} \\ &\quad - \frac{i}{\rho} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon - \frac{2i\pi}{\rho^3} \Phi'''(+0). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} (38) \left(\frac{\partial^3 \Omega}{\partial \rho^3}\right)_{s=0} &= \frac{8\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{(1+\rho^2)^2} - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^3} \right] \\ &\quad - \frac{2i}{\pi\rho^3} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{3}{\pi\rho^3} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon \\ &\quad - \frac{i}{\pi\rho^3} \left[ \frac{\Phi''(\varepsilon)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} \right]_0^{2\pi} + \frac{i}{\pi\rho^3} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-\rho e^{-i\varepsilon}} d\varepsilon + \frac{2i}{\rho^5} \Phi'''(+0). \end{aligned}$$

Mais  $\Phi''(\varepsilon)$  est continue pour  $\varepsilon = 0$  et  $\pi$ , à cause de  $\Phi''(0) = 0$ ; elle n'est pas forcément continue pour  $\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . La définition de la fonction  $\Phi$  entraîne

$$\Phi''(2\pi - \varepsilon) = \Phi''(\varepsilon), \quad \Phi''(\pi - \varepsilon) = -\Phi''(\varepsilon)$$



et par suite, en désignant par  $\beta$ , pour abrégé, la valeur limite de  $\Phi''(\varepsilon)$  quand  $\varepsilon$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$  par valeurs inférieures, il vient

$$\beta = \Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = -\Phi''\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = -\Phi''\left(\frac{3\pi}{2} - 0\right) = \Phi''\left(\frac{3\pi}{2} + 0\right).$$

Donc, en prenant la partie réelle de la formule (38), il nous vient

$$(39) \quad \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^3}\right)_{s=0} = \frac{8\alpha}{\pi} \left[ \frac{1}{(1+\rho^2)^2} - \frac{4\rho^2}{(1+\rho^2)^3} \right] - \frac{4\beta}{\pi} \frac{1}{\rho^2(1+\rho^2)} \\ - \frac{2}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon d\varepsilon}{1-2\rho \cos \varepsilon + \rho^2} + \frac{3}{\pi\rho^3} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi''(\varepsilon)(1-\rho \cos \varepsilon)}{1-2\rho \cos \varepsilon + \rho^2} d\varepsilon \\ + \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-2\rho \cos \varepsilon + \rho^2} \sin \varepsilon d\varepsilon,$$

formule qui ne conserve pas nécessairement un sens lorsqu'on y fait tendre  $\rho$  vers 1. La dernière intégrale qui y figure peut en effet s'écrire

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-2\rho \cos \varepsilon + \rho^2} \sin \varepsilon d\varepsilon = \int_0^{\pi} \frac{\Phi'''(\varepsilon) - \Phi'''(+0)}{1-2\rho \cos \varepsilon + \rho^2} \sin \varepsilon d\varepsilon \\ + \int_0^{\pi} \frac{\Phi'''(\varepsilon) + \Phi'''(+0)}{1-2\rho \cos \varepsilon + \rho^2} \sin \varepsilon d\varepsilon.$$

D'où il résulte immédiatement que, si  $\Phi'''(+0) \neq 0$ ,  $\left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^3}\right)_{s=0}$  quand  $\rho$  tend vers 1, devient infini du signe de  $\Phi'''(+0)$ . Pour que  $\Theta$  soit comme il est nécessaire, décroissant au voisinage de  $\rho = 1$ , il faut donc la condition

$$\Phi'''(+0) < 0.$$

Si maintenant on suppose  $\Phi'''(+0) = 0$ , la formule (39) conserve un sens à la limite, et elle nous donne

$$\lim_{\rho=1} \left(\frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^3}\right)_{s=0} = -\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2\beta}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'(\varepsilon) \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'''(\varepsilon) \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon.$$

Comme on l'a déjà vu plus haut, on a

$$\int_0^{2\pi} \Phi'(\varepsilon) \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon = -4\alpha;$$

par suite il reste

$$(40) \quad \lim_{\rho=1} \left( \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \rho^3} \right)_{\varepsilon=0} = \frac{2(\alpha - \beta)}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi'''(\varepsilon) \cot \frac{\varepsilon}{2} d\varepsilon \\ = \frac{2(\alpha - \beta)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'''(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon.$$

Il est donc nécessaire, si  $\Phi'''(+0) = 0$ , que l'expression

$$(41) \quad -\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \Phi''\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'''(\varepsilon)}{\sin \varepsilon} d\varepsilon,$$

si on la suppose non nulle, soit négative, pour assurer à la concavité du jet le sens voulu au départ.

Si enfin cette dernière inégalité se transforme en égalité, on devra pousser le calcul plus loin, et l'on aperçoit avec évidence que le procédé employé précédemment pourra être poursuivi. En supposant l'existence des dérivées successives de la fonction  $\Phi(\varepsilon)$ , si  $n$  est l'ordre de la première dérivée  $\Phi''(\varepsilon)$  non nulle pour  $\varepsilon = 0$  (ou plus précisément l'ordre de la première dérivée dont la limite soit différente de zéro quand  $\varepsilon$  tend vers zéro positivement), l'allure des lignes de jet au voisinage de l'obstacle solide sera fixé au bout de  $n$  opérations au plus.

Cela étant, nous pouvons donc dans la suite négliger, pour la considération des lignes de jet, les valeurs de  $\varepsilon$  voisines de 0 ou de  $\pm \pi$ , ce qui concerne de telles valeurs étant élucidé par ce qui précède.

Revenons maintenant à la formule (30) qui donne  $\frac{d\Theta}{d\zeta}$ . Comme la fonction de  $\varepsilon$ ,

$$\frac{(1 + \zeta^2) \sin \varepsilon}{(1 + \zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \sin^2 \varepsilon},$$

est la dérivée de

$$\frac{1}{4\zeta} \log \frac{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon},$$

on voit qu'une simple intégration par partie nous donnera, en admettant toujours l'existence d'une dérivée  $\Phi''(\varepsilon)$ , et en supposant  $\zeta$  différent de 0 et de  $\pm 1$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \zeta^2) \sin \varepsilon}{(1 + \zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \sin^2 \varepsilon} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \frac{\Phi'(+0)}{2\zeta} \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} - \frac{1}{4\zeta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon} \Phi''(\varepsilon) d\varepsilon, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$(42) \quad \frac{\pi}{4} \frac{d\theta}{d\zeta} = -\frac{\alpha}{1 + \zeta^2} - \frac{\Phi'(+0)}{2\zeta} \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} - \frac{1}{4\zeta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon} \Phi''(\varepsilon) d\varepsilon.$$

On voit de suite que, si  $\Phi'(+0) \geq 0$ , et  $\Phi''(\varepsilon) > 0$ ,  $\frac{d\theta}{d\zeta}$  sera toujours négatif, et les lignes de jet par suite acceptables. Mais ce n'est pas là un résultat nouveau, car ces hypothèses rentrent dans le cas  $\Phi'(\varepsilon) > 0$ , dont il a été question plus haut. Mais, au moyen de cette nouvelle formule (42), on peut obtenir un résultat intéressant le cas où se trouve réalisée l'hypothèse

$$\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon = \text{fonct. croissante,}$$

ou bien

$$\Phi''(\varepsilon) \sin \varepsilon + \Phi'(\varepsilon) \cos \varepsilon \geq 0 \quad \left( \text{entre } 0 \text{ et } \frac{\pi}{2} \right),$$

rencontrée à propos de la discussion des vitesses le long des parois solides.

De l'inégalité précédente on tire en effet

$$-\Phi''(\varepsilon) < \Phi'(\varepsilon) \cot \varepsilon,$$

et par suite, en observant que le logarithme qui figure comme coefficient dans l'intégrale de la formule (42) est toujours positif, il vient dans l'hypothèse actuelle,

$$\frac{\pi}{4} \frac{d\theta}{d\zeta} < \frac{-\alpha}{1 + \zeta^2} - \frac{\Phi'(+0)}{2\zeta} \log \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} + \frac{1}{4\zeta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left( \frac{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon} \right) \Phi'(\varepsilon) \cot \varepsilon d\varepsilon.$$

Or on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \left( \frac{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon} \right) \cot \varepsilon \Phi''(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= \left\{ \left[ \log \left( \frac{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon} \right) \cot \varepsilon \right] [\Phi(\varepsilon) - \Phi(+0)] \right\}_0^{\frac{\pi}{2}}$$

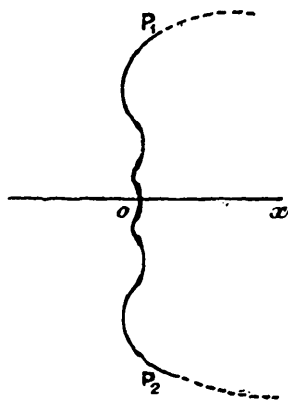
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(+0)] \left[ \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \log \left( \frac{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon} \right) + \frac{4\zeta(1 + \zeta^2) \cos \varepsilon}{(1 + \zeta^2)^2 - 4\zeta^2 \cos^2 \varepsilon} \right] d\varepsilon,$$

ce qui, en remplaçant, donne après réductions,

$$\frac{\pi}{4} \frac{d\Phi}{d\zeta} < - \frac{\alpha}{1 + \zeta^2} + \frac{1}{4\zeta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Phi(\varepsilon) - \Phi(+0)] \left[ \frac{1}{\sin^2 \varepsilon} \log \left( \frac{1 + \zeta^2 + 2\zeta \cos \varepsilon}{1 + \zeta^2 - 2\zeta \cos \varepsilon} \right) + \frac{4\zeta(1 + \zeta^2) \cos \varepsilon}{(1 + \zeta^2)^2 - 4\zeta^2 \cos^2 \varepsilon} \right] d\varepsilon.$$

Comme le coefficient de  $[\Phi(\varepsilon) - \Phi(+0)]$  dans l'intégrale est positif,

Fig. 8.



on voit donc que le second membre sera constamment négatif si  $\Phi(\varepsilon)$  est  $< \Phi(+0)$ . Donc

Si  $\Phi'(\varepsilon) \sin \varepsilon$  est une fonction croissante entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et si l'on a l'inégalité

$$\Phi(\varepsilon) \leq \Phi(+0),$$

les lignes de jet sont toujours acceptables.

Ce cas correspond, comme on s'en assure facilement, par exemple à des solides à parois ondulées; tel est celui indiqué par la figure 8.

EXTENSION AU MOUVEMENT D'UN SOLIDE DANS UN CANAL.

Les divers résultats exposés plus haut, relatifs au mouvement d'un solide dans un fluide indéfini, sont susceptibles d'être étendus à un grand nombre de problèmes dont l'intégrale a la même forme (2) que celle du problème qu'on vient de traiter: je citerai notamment le problème des jets fluides issus de l'orifice d'un vase donné, le problème des jets limités par des lignes de glissement et rencontrant un obstacle donné, etc.

Beaucoup plus difficile est l'extension au cas d'un fluide, limité par des parois fixes, et contenant un obstacle donné. Ce dernier problème, comme aussi toute une catégorie d'autres que j'ai signalés dans ma Note du 24 avril 1911 aux *Comptes rendus*, peut être cependant abordé en utilisant les formules générales que j'ai démontrées ailleurs. Je me propose, dans ce qui va suivre, d'étudier spécialement le problème du mouvement d'un solide donné dans un canal rectiligne, le solide étant symétrique par rapport à l'axe du canal. Ce problème a été étudié tout d'abord par U. Cisotti (1), pour un obstacle formé de segments rectilignes, et j'ai donné (2) les formules générales qui permettent de trouver le mouvement correspondant à un solide dont le contour a une forme donnée. Renvoyant pour le détail de la théorie aux Mémoires cités ci-dessus, je rappelle seulement ici que tout le mouvement est déterminé, dans chaque cas, par la construction d'une fonction

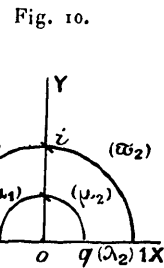
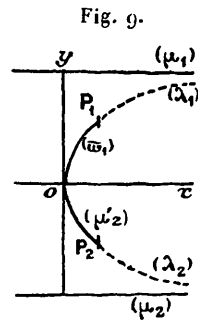
$$\Omega(Z) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y)$$

régulière dans une demi-couronne circulaire  $q < |Z| < 1$ , dans laquelle  $\Theta$  et  $T$  ont la même signification que pour le problème du fluide indéfini:  $\Theta$  est l'angle, avec  $Ox$ , de la vitesse  $V$  du fluide en un

(1) *Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1909.

(2) *Annales de l'École Normale supérieure*, 1912; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1911; *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1912.

point  $(x, y)$ , et  $e^T$  est la grandeur de cette vitesse  $V$ . En désignant par  $\Phi(\varepsilon)$  la valeur de l'angle que fait la tangente à la paroi du solide (dans le sens du courant) avec  $Ox$ , au point qui correspond à  $Z = e^{i\varepsilon}$  ( $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ), la fonction  $\Omega(Z)$  est déterminée par des formules que j'ai obtenues sous diverses formes, notamment les deux



suivantes (p. 377 et 378 de mon *Mémoire du Journal de Mathématiques* cité), équivalentes dans la couronne circulaire :

$$(1) \quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{p' \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right)}{p \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon$$

et

$$(2) \quad \Omega(Z) = \frac{i}{\pi} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right)}{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \right)} d\varepsilon$$

$$+ \frac{i}{\pi} \left[ \Phi \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) - \Phi \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \right] \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{2} \right)}{\sigma \left( \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{2} \right)}$$

$$+ \left( \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} \log Z + 1 \right) \Phi(\pi) \quad (1).$$

(1) Nous avons fait, en transcrivant cette dernière formule,  $\sigma_0 = \frac{\pi}{2}$ , valeur qu'impose ici la symétrie supposée. Voir *Annales de l'École Normale*, 1912, p. 144. On a de plus  $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$ , toujours à cause de cette symétrie. Enfin les demi-périodes des fonctions elliptiques sont  $\omega_1$  et  $\omega_3$ .

Il y a, comme nous le savons, deux sortes de difficultés dans la solution effective du problème : l'une concernant les vitesses, l'autre la forme des lignes de glissement (ou, ce qui revient au même, concernant le fait que les frontières du domaine fluide dans le plan du mouvement, ne doivent pas se recouper).

Occupons-nous d'abord des vitesses, qui ne doivent nulle part dépasser la valeur 1 (valeur à l'infini). Comme on l'a montré au Chapitre I, il suffit de s'assurer que les vitesses ne dépassent pas l'unité sur les frontières ou encore que  $T$  est négatif (ou nul) sur les parois solides ( $\mu$  et  $\varpi$ ).

Pour tous les obstacles tels que  $\Phi(\varepsilon)$  soit négatif, entre  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  (ce qui est le cas pour tous les obstacles qu'on peut être appelé à considérer naturellement), je dis que les vitesses sont toujours acceptables sur les parois du canal.

Pour le démontrer, nous partirons de la formule (1), dans laquelle nous ferons  $Z = q e^{is}$  ou

$$\log Z = \log q + is = -\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1} + is,$$

et nous nous placerons sur la paroi  $\mu_2$ , en supposant  $0 < s < \frac{\pi}{2}$ . Il viendra

$$\Omega(qe^{is}) = \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{p'(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s)}{p(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s) - p(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon)} d\varepsilon.$$

On reconnaît sans peine que cette expression est imaginaire pure, de sorte que la valeur de  $T$  sur la paroi en question est

$$T_1(s) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \frac{p'(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s)}{p(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s) - p(\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon)} d\varepsilon.$$

A cause de l'hypothèse de la symétrie, on a

$$\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon),$$

ce qui permet d'écrire, après un calcul facile,

$$T_1(s) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varepsilon) \frac{p'(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi} s)}{p(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi} s) - p(\frac{\omega_1}{\pi} s)} d\varepsilon - \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varepsilon) \frac{p'(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi} s)}{p(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi} s) - p(\omega_1 - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon)} d\varepsilon,$$

ou encore, après réductions évidentes, et en posant

$$a = \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon, \quad b = \frac{\omega_1}{\pi} s \quad \left( 0 \leq a \leq \frac{\omega_1}{2}, 0 \leq b \leq \frac{\omega_1}{2} \right),$$

$$(3) \quad T_1(s) = \frac{\omega_1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varepsilon) p'(\omega_3 + b) \frac{pa - p(\omega_1 - a)}{[p(\omega_3 + b) - pa][p(\omega_3 + b) - p(\omega_1 - a)]} d\varepsilon.$$

Comme  $a$  et  $b$  sont tous deux compris entre 0 et  $\frac{\omega_1}{2}$ , la théorie de la fonction  $p$  nous permet maintenant d'affirmer qu'on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} pa - p(\omega_1 - a) &> 0, \\ p(\omega_3 + \beta) - pa &< 0, \\ p(\omega_3 + \beta) - p(\omega_1 - a) &< 0; \end{aligned}$$

d'autre part  $p'(\omega_3 + b)$  est positif. De sorte que la dernière expression obtenue pour  $T_1$  nous montre cette quantité comme essentiellement négative, ce que nous voulions prouver.

Voyons maintenant ce qui concerne les vitesses sur les parois  $\varpi$  du solide, par exemple sur  $\varpi_2$ . Nous allons démontrer le théorème suivant :

*Pour les obstacles à bords concaves vers le courant, les vitesses sont toujours acceptables sur les parois du solide.*

L'hypothèse entraîne de suite que, pour  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ,  $\Phi(\varepsilon)$  soit négative et croissante. Supposant bien entendu cette fonction dérivable, nous prendrons cette fois la fonction  $\Omega(Z)$  sous la forme (2) qui (*Journal de Mathématiques*, 1911, p. 379 et suiv.) est encore valable sur les frontières du domaine où la fonction est définie. A cause de la



symétrie qui entraîne  $\Phi'(\pi - \varepsilon) = -\Phi'(\varepsilon)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)} d\varepsilon \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) \sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - \omega_1\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) \sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_1\right)} d\varepsilon.
 \end{aligned}$$

d'où, à l'aide des formules (Cf. TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, XII, 3)

$$\begin{aligned}
 \sigma(a - \omega_1) &= -e^{-\eta_1 a} \sigma \omega_1 \sigma_1 a, \\
 \sigma(a + \omega_1) &= e^{\eta_1 a} \sigma \omega_1 \sigma_1 a,
 \end{aligned}$$

on tire facilement :

$$\text{de } P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left\{ \log \frac{\left[ \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)} \right]}{\left[ \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right)} \right]} - 2\eta_1 \frac{\omega_1}{i\pi} \arg(\log Z) \right\} d\varepsilon.$$

Or il nous faut étudier les vitesses, c'est-à-dire le signe de T, sur une paroi  $\varpi_2$ ; il nous faut donc examiner la valeur de T pour  $Z = e^{is}$  ( $0 < s < \frac{\pi}{2}$ ). D'après le calcul qu'on vient de faire, le coefficient de  $i$  dans  $\Omega$ , pour  $Z = e^{is}$ , est

$$\begin{aligned}
 (4) \quad T_1(s) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left[ \log \frac{\left| \frac{\sigma_1 \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon)} \right|}{\left| \frac{\sigma_1 \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon)}{\sigma \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon)} \right|} - 2\eta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s \right] d\varepsilon \\
 &\quad + \frac{2}{\pi} \alpha \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} s\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_1}{\pi} s\right)} + \frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s \Phi(\pi),
 \end{aligned}$$

en désignant par

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\Phi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \quad (0 \leq \alpha \leq \pi),$$

l'angle que fait avec  $Ox$ , la tangente en  $O$  à la paroi supérieure  $\omega_1$ .

Effectuons l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \frac{2 \eta_1 \omega_1 s}{\pi} d\varepsilon,$$

et remarquons que la fonction

$$\frac{\sigma_1 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) \right]} = \frac{\zeta_{10} \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon)}{\zeta_{10} \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon)} = \frac{\sqrt{p \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) - e_1}}{\sqrt{p \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - e_1}}$$

$$\frac{\sigma_1 \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) \right]}{\sigma \left[ \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) \right]}$$

est réelle (non toujours positive) pour les valeurs considérées de  $s$  et  $\varepsilon$ . On met alors  $T_1$  sous la forme

$$(5) \quad T_1(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \log \left| \frac{\sqrt{p \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) - e_1}}{\sqrt{p \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - e_1}} \right| d\varepsilon$$

$$- \frac{2\alpha}{\pi} \left[ \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_1}{\pi} s \right)}{\sigma \left( \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right)} - \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi} s \right].$$

Ceci étant, on a par hypothèse, dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ ,

$$\Phi'(\varepsilon) > 0,$$

et l'on a aussi, quels que soient  $\varepsilon$  et  $s$  dans le même intervalle,

$$p \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) > p \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) > e_1;$$

par suite

$$\log \left| \frac{\sqrt{p \frac{\omega_1}{\pi} (s + \varepsilon) - e_1}}{\sqrt{p \frac{\omega_1}{\pi} (s - \varepsilon) - e_1}} \right| < 0.$$

Il en résulte que la première partie de l'expression de  $T_1$  est essentiellement négative. Je dis qu'il en est de même de la seconde. A cet effet, il faut montrer que la fonction

$$I(s) = \log \frac{\sigma \left( \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_1}{\pi} s \right)}{\sigma \left( \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right)} - \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi} s$$

est toujours positive dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ .

Les valeurs extrêmes de  $I$  sont  $0$  et  $+\infty$  pour  $s = 0$  et  $\frac{\pi}{2}$  respectivement; puis on a facilement

$$\begin{aligned} \frac{dI}{ds} &= \frac{\omega_1}{\pi} \left[ \zeta \left( \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_1}{\pi} s \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right] - \frac{\eta_1 \omega_1}{\pi}, \\ \frac{d^2 I}{ds^2} &= \frac{\omega_1^2}{\pi^2} \left[ -p \left( \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_1}{\pi} s \right) + p \left( \frac{\omega_1}{2} - \frac{\omega_1}{\pi} s \right) \right]. \end{aligned}$$

Cette dérivée seconde étant visiblement positive, tout se ramène donc à faire voir que  $\frac{dI}{ds}$  reste positif, c'est-à-dire qu'il est positif pour  $s = 0$ , ou encore qu'on a

$$\frac{\omega_1}{\pi} \left( 2 \zeta \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 \right) > 0.$$

Or ce fait résulte de ce que la fonction auxiliaire

$$J(s) = \zeta \frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\eta_1}{\pi} s$$

est positive pour  $s = \frac{\pi}{2}$ , comme nous allons le montrer. La dérivée

$$\frac{dJ}{ds} = -\frac{\omega_1}{\pi} p \frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\eta_1}{\pi}$$

est croissante dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , depuis  $-\infty$  jusqu'à la valeur

$$-\frac{1}{\pi}(e_1\omega_1 + \eta_1),$$

qui (TANNERY et MOLK, XXX, 1) est négative; donc  $J(s)$  décroît, et, comme sa valeur finale est zéro pour  $s = \pi$ , il en résulte bien que  $J\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est positif.

Le même fait résulte aussi, d'ailleurs, de la formule qu'on établirait facilement

$$2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1 = -\frac{1}{2} \frac{p' \frac{\omega_1}{2}}{p \frac{\omega_1}{2} - e_1}.$$

Dans ces conditions  $I(s)$ , étant croissante, est toujours positive, ce que nous voulions établir.

Il en résulte enfin que  $T_1(s)$  est essentiellement négatif et que, par suite, les vitesses sur les parois solides sont partout inférieures à 1; d'où le théorème énoncé.

De ce qui précède résulte notamment que, pour tous les obstacles concaves vers le courant, il ne se présente aucune difficulté relative aux vitesses, qui sont partout acceptables.

Je vais maintenant démontrer le théorème suivant :

*Pour tous les obstacles concaves vers le courant (dès que la tangente à la paroi de l'obstacle reste, sur  $\varpi_1$ , entre 0 et  $\frac{3\pi}{2}$ ), les lignes de jet sont toujours acceptables.*

Ceci va résulter du fait que la courbure d'une ligne de jet ne change pas de signe dans les conditions énoncées, la tangente à la ligne de jet varie continuellement, toujours dans le même sens, depuis la position tangente au départ, au bord de la paroi solide, jusqu'à la position horizontale (à l'infini). Les frontières du fluide en mouvement ne se recoupent donc nulle part. Comme  $\Omega$  est réel le long des lignes de jet ( $T = 0$  par construction), nous allons donc faire voir que, dans l'in-

tervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , les hypothèses

$$\Phi(\varepsilon) < 0, \quad \Phi'(\varepsilon) > 0,$$

entraînent que  $\frac{d\Omega}{dZ}$  soit négatif quand  $Z$  varie entre  $q$  et  $1$ .

De la formule (2) nous tirons tout d'abord

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dZ} &= \frac{\omega_1}{\pi^2 Z} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) \right] d\varepsilon \\ &\quad + \frac{2\alpha\omega_1}{\pi^2 Z} \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{2}\right) \right] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2 Z} \Phi(\pi), \end{aligned}$$

ce qui se laisse assez facilement mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dZ} &= \frac{\omega_1}{\pi^2 Z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{i\pi} \varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon\right) \right. \\ &\quad \left. + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - \omega_1\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + \omega_1\right) \right] d\varepsilon \\ &\quad + \frac{2\omega_1}{\pi^2 Z} \left\{ \alpha \left[ \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{2}\right) \right] + \eta_1 \Phi(\pi) \right\}. \end{aligned}$$

Pour abrégier l'écriture, nous poserons

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z = u, \quad \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon = \beta,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{dZ} &= \frac{\omega_1}{\pi^2 Z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) [\zeta(u - \beta) - \zeta(u + \beta) + \zeta(u + \beta - \omega_1) - \zeta(u - \beta + \omega_1)] d\varepsilon \\ &\quad + \frac{2\omega_1}{\pi^2 Z} \left\{ \alpha \left[ \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) \right] + \eta_1 \Phi(\pi) \right\}. \end{aligned}$$

Ceci posé, utilisons les formules (TANNERY et MOLK, VII, 9),

$$\zeta(u + \beta - \omega_1) - \zeta(u + \beta) = -\eta_1 + \frac{1}{2} \frac{p'(u + \beta)}{p(u + \beta) - e_1},$$

$$\zeta(u - \beta + \omega_1) - \zeta(u - \beta) = \eta_1 + \frac{1}{2} \frac{p'(u - \beta)}{p(u - \beta) - e_1}.$$

Le coefficient de  $\Phi'(\varepsilon)$  sous le signe d'intégration devient

$$-2\eta_1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{p(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1} \right].$$

Effectuant l'intégration portant sur le terme constant  $-2\eta_1$  de cette dernière expression, et réduisant, on trouve immédiatement

$$(6) \quad \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\omega_1}{2\pi^2 Z} \int_0^\pi \Phi'(\varepsilon) \left[ \frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1} \right] d\varepsilon \\ + \frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2 Z} \left[ \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1 \right].$$

Je vais faire voir que, séparément, le coefficient de  $\Phi(\varepsilon)$  dans l'intégrale, et le coefficient de  $\alpha$  dans le second terme, sont négatifs, ce qui démontrera le théorème.

Introduisons les fonctions elliptiques  $\xi_{pq}$ . On sait qu'on a (TANNERY et MOLK, LIX et LXIII)

$$\frac{p'a}{p'a - e_1} = -\frac{2\xi_{20}a\xi_{30}a}{\xi_{10}a}.$$

Par suite le coefficient de  $\Phi'(\varepsilon)$  peut s'écrire

$$2 \left[ \frac{\xi_{20}(u-\beta)\xi_{30}(u-\beta)}{\xi_{10}(u-\beta)} - \frac{\xi_{20}(u+\beta)\xi_{30}(u+\beta)}{\xi_{10}(u+\beta)} \right] \\ = \frac{2}{\xi_{10}(u+\beta)\xi_{10}(u-\beta)} \left[ -\xi_{10}(u-\beta)\xi_{20}(u+\beta)\xi_{30}(u+\beta) \right].$$

Comme, dans les conditions énoncées plus haut,  $u+\beta$  et  $u-\beta$  sont imaginaires conjuguées, au signe près, et comme la fonction  $\xi_{10}$  est impaire, le produit

$$\xi_{10}(u+\beta)\xi_{10}(u-\beta)$$

est essentiellement négatif, et nous sommes d'abord ramenés à chercher si l'expression

$$(7) \quad \xi_{10}(u+\beta)\xi_{20}(u-\beta)\xi_{30}(u-\beta) - \xi_{10}(u-\beta)\xi_{20}(u+\beta)\xi_{30}(u+\beta)$$

ne serait pas positive.

Rappelons que, d'après les hypothèses,  $\beta$  varie entre 0 et  $\frac{\omega_1}{2}$ , et  $u$

entre 0 et  $\omega_3$ , en restant imaginaire pure (puisque  $Z$  varie entre 1 et  $q$ ). Dans ces conditions, l'expression (7), considérée comme fonction de  $u$ , soit  $P(u)$ , reste continue, et sa dérivée a pour valeur

$$P'(u) = \xi_{10}(u - \beta) \xi_{10}(u + \beta) [ \xi_{20}^2(u + \beta) + \xi_{30}^2(u + \beta) - \xi_{20}^2(u - \beta) - \xi_{30}^2(u - \beta) ],$$

à cause de la formule connue (*T. et M.*, LXI, 1).

$$\xi_{20}(u) = -\xi_{\beta 0}(u) \xi_{\gamma 0}(u).$$

Remplaçant maintenant les carrés des fonctions  $\xi$  au moyen de la fonction  $p$ , réduisant et observant que le produit  $\xi_{10}(u - \beta) \xi_{10}(u + \beta)$  est négatif, il vient ainsi

$$\frac{1}{i} \frac{dP}{du} = \text{Sgn} \frac{2}{i} [p(u - \beta) - p(u + \beta)].$$

Or cette dernière quantité, réelle et continue, ne change certainement pas de signe quand  $u$  et  $\beta$  restent dans les limites indiquées; pour obtenir ce signe constant, je puis supposer  $\frac{u}{i}$  et  $\beta$  positifs et très petits; alors la quantité en question devient très grande, et sa partie principale est

$$\frac{2}{i} \left[ \frac{1}{(u - \beta)^2} - \frac{1}{(u + \beta)^2} \right] = \frac{8u\beta}{i(u^2 - \beta^2)^2} > 0.$$

Par suite  $P(u)$  décroît quand  $\frac{u}{i}$  croît. Or, les valeurs extrêmes de  $P$  sont, pour  $u = 0$ ,

$$P(0) = 2\xi_{10}\beta\xi_{20}\beta\xi_{30}\beta,$$

quantité positive, et pour  $u = \omega_3$ ,

$$P(\omega_3) = \xi_{10}(\omega_3 + \beta) \xi_{20}(\omega_3 - \beta) \xi_{30}(\omega_3 - \beta) - \xi_{10}(\omega_3 - \beta) \xi_{20}(\omega_3 + \beta) \xi_{30}(\omega_3 + \beta).$$

Mais on a (*T. et M.*, LX, 3 et 4)

$$\begin{aligned} \xi_{10}(\omega_3 - \beta) &= -\xi_{10}(\beta - \omega_3) = \xi_{10}(\beta + \omega_3), \\ \xi_{20}(\omega_3 - \beta) &= -\xi_{20}(\beta - \omega_3) = \xi_{20}(\beta + \omega_3), \\ \xi_{30}(\omega_3 - \beta) &= -\xi_{30}(\beta - \omega_3) = -\xi_{30}(\beta + \omega_3), \end{aligned}$$

et par suite (*T. et M.*, LXIII et VII, 9)

$$\begin{aligned} P(\omega_3) &= -2 \xi_{10}(\omega_3 + \beta) \xi_{20}(\omega_3 + \beta) \xi_{30}(\omega_3 + \beta) = p'(\omega_3 + \beta) \\ &= -\frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)p'\beta}{(p\beta - e_3)^2}. \end{aligned}$$

Ceci est encore positif, puisque  $p'\beta$  est négatif.

Donc le coefficient de  $\Phi'(\varepsilon)$  dans l'intégrale est bien négatif, et le premier terme de  $\frac{d\Omega}{dZ}$  est aussi négatif.

Voyons maintenant le second terme; son signe est celui de l'expression

$$R = \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1,$$

qu'on mettra facilement sous la forme

$$R = \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2} + \omega_1\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - \eta_1,$$

ou encore (*T. et M.*, VII, 9)

$$R = \frac{1}{2} \frac{p'\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1}.$$

Cette quantité étant réelle, on a encore

$$R = \frac{1}{4} \left[ \frac{p'\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1} - \frac{p'\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1} \right],$$

et sous cette forme on retombe sur un cas particulier d'une expression étudiée précédemment, et qu'on a montrée être négative; le théorème est donc démontré:  $\frac{d\Omega}{dZ}$  est négatif.

Avant d'aller plus loin, je vais maintenant établir un résultat important. Si l'on pose

$$Z = \rho e^{i\theta},$$



on aura sur la frontière extérieure  $|Z| = 1$ ,

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d\Theta}{d\rho}.$$

Comme la vitesse (égale à 1 au point de raccord d'une ligne de jet avec une paroi solide) ne doit pas devenir supérieure à 1, il faut que  $\frac{dT}{ds}$  commence par être négatif pour  $s = 0$ , et par suite que la dérivée normale  $\frac{d\Theta}{d\rho}$  soit aussi négative au point  $Z = 1$ . On s'assure aisément que cette condition équivaut au fait que la ligne de jet doit être convexe vers le fluide en mouvement, au départ du solide. Calculons donc  $\frac{d\Theta}{d\rho}$  au point en question; ou plus précisément, calculons la dérivée  $\frac{d\Theta}{d\rho} = \frac{d\Omega}{d\rho}$ , pour  $Z$  réel positif, et cherchons la limite de cette dérivée quand  $Z$  tend vers 1.

Or on a trouvé précédemment, après quelques transformations [form. (6)],

$$(8) \quad \frac{d\Omega}{dZ} = \frac{\omega_1}{2\pi^2 Z} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left[ \frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1} \right] d\varepsilon \\ + \frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2 Z} \left[ \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1 \right].$$

Par un calcul et des transformations tout semblables, et que je ne reproduis pas, on trouvera de même, pour la dérivée  $\frac{d\Omega}{d\rho}$  au point  $Z = \rho e^{is}$ ,

$$\frac{d\Omega}{d\rho} = \frac{\omega_1}{2\pi^2 \rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left[ \frac{p'(v+\beta)}{p(v+\beta)-e_1} - \frac{p'(v-\beta)}{p(v-\beta)-e_1} \right] d\varepsilon \\ + \frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2 \rho} \left[ \zeta\left(v - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(v + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1 \right],$$

mais en posant, ici,

$$v = \frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega_1}{\pi} s, \quad \beta = \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon.$$

Si dans cette formule on fait tendre  $\rho$  vers 1, l'intégrale qui y

figure n'a généralement pas de sens; mais, avant de passer à la limite, on peut écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left[ \frac{p'(\nu + \beta)}{p(\nu + \beta) - e_1} - \frac{p'(\nu - \beta)}{p(\nu - \beta) - e_1} \right] d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(s)] [\dots] d\varepsilon + \Phi'(s) \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\dots] d\varepsilon.$$

Le coefficient de  $\Phi'(s)$  est (*T.* et *M.*, VII, 9)

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\zeta(\nu + \beta + \omega_1) - \zeta(\nu + \beta) - \zeta(\nu - \beta + \omega_1) + \zeta(\nu - \beta)] d\varepsilon$$

ou bien

$$\frac{2\pi}{\omega_1} \left[ \log \frac{\sigma(\nu + \beta + \omega_1) \sigma(\nu - \beta + \omega_1)}{\sigma(\nu + \beta) \sigma(\nu - \beta)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ou encore

$$\frac{2\pi}{\omega_1} \log \frac{\sigma\left(\nu + \frac{3\omega_1}{2}\right) \sigma^2 \nu}{\sigma\left(\nu - \frac{\omega_1}{2}\right) \sigma^2(\nu + \omega_1)}.$$

Or on a (*T.* et *M.*, XII, 2 et 3)

$$\sigma\left(\nu + \frac{3\omega_1}{2}\right) = -e^{2\eta_1\left(\nu + \frac{\omega_1}{2}\right)} \sigma\left(\nu - \frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$\sigma(\nu + \omega_1) = e^{\eta_1 \nu} \sigma \omega_1 \sigma_1 \nu.$$

Donc l'expression ci-dessus devient

$$\frac{2\pi}{\omega_1} \log \left( \frac{-e^{\eta_1 \omega_1} \sigma^2 \nu}{\sigma^2 \omega_1 \sigma_1^2 \nu} \right) = \frac{2\pi}{\omega_1} \left[ \eta_1 \omega_1 - 2 \log \sigma \omega_1 - \log \frac{\sigma_1^2 \nu}{\sigma^2 \nu} + (2\lambda + 1) i \pi \right]$$

en désignant par  $\lambda$  un nombre entier dont la valeur n'importera pas.

Cela posé, on voit qu'on peut écrire, en faisant tendre  $s$  vers zéro, et en supposant que  $\Phi'(s)$  tende alors vers une limite (finie ou infinie),

que nous désignerons par  $\Phi'(+0)$ ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{\rho=0} &= \frac{\omega_1}{2\pi^2\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\Phi'(\varepsilon) - \Phi'(+0)] \left[ \frac{p'(\nu + \beta)}{p(\nu + \beta) - e_1} - \frac{p'(\nu - \beta)}{p(\nu - \beta) - e_1} \right] d\varepsilon \\ &+ \frac{\Phi'(+0)}{\pi\rho} \left[ \eta_1\omega_1 - 2 \log \sigma\omega_1 - \log \frac{\sigma_1^2\nu}{\sigma^2\nu} + (2\lambda + 1)i\pi \right] \\ &+ \frac{2\alpha\omega_1}{\pi^2\rho} \left[ \zeta\left(\nu - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(\nu + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1 \right], \end{aligned}$$

$\nu$  désignant maintenant  $\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho$ , et l'entier  $\lambda$  étant tel que le coefficient de  $\Phi(+0)$  soit réel.

On aperçoit alors que l'intégrale qui figure dans l'expression précédente a en général une limite bien déterminée quand  $\rho$  tend vers 1. Mais le coefficient de  $\Phi'(+0)$  dans la partie intégrée devient infini négatif dans les mêmes conditions ( $\nu$  devenant nul). Si donc  $\Phi'(+0)$  est positif, la valeur limite de  $\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{\rho=1}$  est infinie négative, et il n'y a pas de condition nouvelle à écrire. (C'est le cas notamment pour les parois concaves vers le fluide en mouvement, et pour lesquelles on a partout sur  $\varpi_2$ ,  $\Phi'(\varepsilon) > 0$ .)

Si au contraire  $\Phi'(+0)$  est négatif,  $\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{\rho=1}$  est positif et la solution correspondante est par suite inacceptable. D'où ce théorème :

*Il est nécessaire que  $\Phi'(+0)$  soit positif ou nul pour que la solution correspondante soit acceptable.*

Dans le cas où  $\Phi'(+0) = 0$ , il est, de plus, nécessaire que la valeur limite restante pour  $\frac{d\Omega}{d\rho}$  soit négative ou nulle, ce qui donne la condition

$$(I) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_1} d\varepsilon + 2\alpha \left( \eta_1 - 2\zeta \frac{\omega_1}{2} \right) \leq 0.$$

Le cas des *proues* correspond au cas limite où cette inégalité se transforme en égalité. En effet, si l'inégalité est vérifiée, il résulte d'une démonstration que j'ai donnée ailleurs [*Sur le mouvement d'un*

liquide dans un canal renfermant un obstacle (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3<sup>e</sup> série, t. XXIX, p. 127-197); voir p. 170], que les lignes de jet se détachent des parois solides avec un rayon de courbure nul. Pour qu'on ait affaire à une proue véritable, d'où les jets se détachent avec un rayon de courbure fini, l'inégalité (I) doit donc se transformer en égalité.

On peut alors montrer, dans ce cas, que le rayon de courbure des lignes de jet aux points de détachement d'avec le solide est égal au rayon de courbure des parois solides aux mêmes points. Le calcul est analogue à celui qu'on a développé ici page 260.

Utilisant les résultats précédents, nous nous proposons maintenant de démontrer le théorème suivant :

*Pour tous les obstacles convexes vers le courant, jusque et y compris le cas des proues, la condition nécessaire (1) suffit à assurer des lignes de jet partout acceptables, c'est-à-dire partout convexes vers le fluide en mouvement.*

Par hypothèse, dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ ,  $\Phi(\varepsilon)$  est négatif et décroissant; dans l'inégalité (I) où  $p' \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon$  est négatif et  $p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_1$  positif, l'intégrale est positive; d'autre part, nous avons déjà vu plus haut que  $2\zeta \frac{\omega_1}{2} - \eta_1$  est positif; on peut donc écrire, avec les deux membres positifs,

$$2\alpha \left( 2\zeta \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 \right) \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_1} d\varepsilon,$$

d'où l'on tire

$$(9) \quad 2\alpha \left( 2\zeta \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 \right) = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_1} d\varepsilon,$$

en désignant par K un nombre *plus grand que 1, ou égal à 1* dans le cas limite d'une proue.

Ceci posé, il nous faut démontrer que, le long d'une ligne de jet,  $\lambda_2$  par exemple, la convexité est toujours vers le fluide en mouvement; cela revient à dire que  $\left( \frac{d\Omega}{d\rho} \right)_{s=0}$  doit être négatif, quel que soit  $\rho$  entre  $q$  et 1. Or, entre ces limites, on a [form. (6) ou (8)], en posant

encore

$$u = \frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{s=0} &= \frac{\omega_1}{2\pi^2\rho} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left[ \frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1} \right] d\varepsilon \\ &\quad + \frac{2\omega_1\alpha}{\pi^2\rho} \left[ \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1 \right]. \end{aligned}$$

Par suite, en éliminant  $\alpha$  entre cette égalité et l'égalité (9) qu'on vient d'écrire,

$$\begin{aligned} (10) \quad \frac{\pi^2\rho}{\omega_1} \left(2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1\right) \left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{s=0} \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \left\{ \frac{1}{2} \left(2\zeta\frac{\omega_1}{2} - \eta_1\right) \left[ \frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1} \right] \right. \\ \left. + K \left[ \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1 \right] \frac{p'\beta}{p\beta - e_1} \right\} d\varepsilon. \end{aligned}$$

Je vais faire voir que cette intégrale est négative.

A cet effet, je démontrerai que le coefficient de  $\Phi'(\varepsilon)$  dans le second membre, coefficient qui se présente comme une différence de deux quantités positives, est toujours positif quels que soient  $u$  et  $\beta$  dans les intervalles que l'on sait. Appelons  $S$  ce coefficient, je vais d'abord le transformer par l'introduction des fonctions  $\xi_{pq}$ . On a vu déjà (*cf.* p. 275) qu'on avait

$$\begin{aligned} \frac{p'(u+\beta)}{p(u+\beta)-e_1} - \frac{p'(u-\beta)}{p(u-\beta)-e_1} \\ = -2 \left[ \frac{\xi_{20}(u+\beta)\xi_{30}(u+\beta)}{\xi_{10}(u+\beta)} - \frac{\xi_{20}(u-\beta)\xi_{30}(u-\beta)}{\xi_{10}(u-\beta)} \right], \end{aligned}$$

de même (p. 277) on a

$$\begin{aligned} \zeta\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) + \eta_1 \\ = \frac{1}{2} \frac{p'\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1} = \frac{1}{4} \left[ \frac{p'\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1} - \frac{p'\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{p\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right) - e_1} \right] \\ = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\xi_{20}\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)\xi_{30}\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)}{\xi_{10}\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)} - \frac{\xi_{20}\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)\xi_{30}\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\xi_{10}\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)} \right], \end{aligned}$$

puis

$$\frac{p'\beta}{p\beta - e_1} = -2 \frac{\xi_{20}\beta \xi_{30}\beta}{\xi_{10}\beta},$$

et enfin on a aisément

$$2\zeta \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 = -\frac{1}{2} \frac{p' \frac{\omega_1}{2}}{p \frac{\omega_1}{2} - e_1} = \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2}},$$

de sorte que l'expression S prend la forme

$$(11) \quad S = -\frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2}} \left[ \frac{\xi_{20}(\beta + u) \xi_{30}(\beta + u)}{\xi_{10}(\beta + u)} + \frac{\xi_{20}(\beta - u) \xi_{30}(\beta - u)}{\xi_{10}(\beta - u)} \right] \\ + K \frac{\xi_{20}\beta \xi_{30}\beta}{\xi_{10}\beta} \\ \times \left[ \frac{\xi_{20} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right)}{\xi_{10} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right)} + \frac{\xi_{20} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right) \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right)}{\xi_{10} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right)} \right].$$

Observons que les facteurs placés devant les deux crochets sont réels, et que le premier crochet est la somme de deux imaginaires conjugués; il en est de même du second crochet, mais, dans ce dernier cas, les deux imaginaires conjugués en question sont toutes deux égales à la quantité, évidemment réelle,

$$\zeta \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) + \zeta \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right) - \eta_1.$$

Cela étant, l'inégalité  $S > 0$  serait certainement exacte si les deux inégalités suivantes

$$\left| \frac{\xi_{20}\beta \xi_{30}\beta \xi_{20} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right)}{\xi_{10}\beta \xi_{10} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right)} \right| > \left| \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2} \xi_{20}(\beta + u) \xi_{30}(\beta + u)}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2} \xi_{10}(\beta + u)} \right|, \\ \left| \frac{\xi_{20}\beta \xi_{30}\beta \xi_{20} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right) \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right)}{\xi_{10}\beta \xi_{10} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right)} \right| > \left| \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2} \xi_{20}(\beta - u) \xi_{30}(\beta - u)}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2} \xi_{10}(\beta - u)} \right|,$$

qui se réduisent d'ailleurs à une seule, étaient démontrées. Or ces

inégalités sont équivalentes à

$$\left| \frac{\xi_{20}(\beta + u) \xi_{30}(\beta - u) \xi_{10} \beta}{\xi_{10}(\beta + u) \xi_{20} \beta \xi_{30} \beta} \right| < \left| \frac{\xi_{20} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right) \xi_{10} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) \xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2}} \right|$$

ou bien encore à

$$\frac{\xi_{10}^2 \beta}{\xi_{20}^2 \beta \xi_{30}^2 \beta} \frac{\xi_{20}(\beta + u) \xi_{20}(\beta - u) \xi_{30}(\beta + u) \xi_{30}(\beta - u)}{\xi_{10}(\beta + u) \xi_{10}(\beta - u)} < \frac{\xi_{10}^2 \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{20}^2 \frac{\omega_1}{2} \xi_{30}^2 \frac{\omega_1}{2}} \frac{\xi_{20} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) \xi_{20} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right) \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) \xi_{30} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right)}{\xi_{10} \left( \frac{\omega_1}{2} + u \right) \xi_{10} \left( \frac{\omega_1}{2} - u \right)}$$

Comme le second membre de cette dernière ne diffère du premier que par le fait que  $\beta$  y est remplacé par  $\frac{\omega_1}{2}$ , et comme  $\beta$  est inférieur à  $\frac{\omega_1}{2}$  nous nous trouvons ramenés à montrer que la fonction de  $\beta$ ,

$$(12) \quad P(\beta) = \frac{\xi_{10}^2 \beta}{\xi_{20}^2 \beta \xi_{30}^2 \beta} \frac{\xi_{20}(\beta + u) \xi_{20}(\beta - u) \xi_{30}(\beta + u) \xi_{30}(\beta - u)}{\xi_{10}(\beta + u) \xi_{10}(\beta - u)},$$

est croissante dans l'intervalle  $0, \frac{\omega_1}{2}$ . Utilisant la formule (T. et M., LXV, 1)

$$\xi_{0\gamma}(a + b) \xi_{0\gamma}(a - b) = \frac{\xi_{0\gamma}^2 a - \xi_{0\gamma}^2 b}{1 - (e_\gamma - e_\alpha)(e_\gamma - e_\beta) \xi_{0\gamma}^2 a \xi_{0\gamma}^2 b},$$

nous transformerons d'abord P comme il suit :

$$P(\beta) = \frac{\xi_{10}^2 \beta}{\xi_{20}^2 \beta \xi_{30}^2 \beta} \frac{1 - (e_2 - e_1)(e_2 - e_3) \xi_{02}^2 \beta \xi_{02}^2 u}{\xi_{02}^2 \beta - \xi_{02}^2 u} \times \frac{1 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2) \xi_{03}^2 \beta \xi_{03}^2 u}{\xi_{03}^2 \beta - \xi_{03}^2 u} \frac{\xi_{01}^2 \beta - \xi_{01}^2 u}{1 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \xi_{01}^2 \beta \xi_{01}^2 u}$$

ou encore

$$P(\beta) = \frac{1 + (e_1 - e_2)(e_2 - e_3) \xi_{02}^2 u \xi_{02}^2 \beta}{1 - \xi_{02}^2 u \xi_{02}^2 \beta} \times \frac{1 - (e_1 - e_3)(e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u \xi_{03}^2 \beta}{1 - \xi_{03}^2 u \xi_{03}^2 \beta} \frac{1 - \xi_{01}^2 u \xi_{01}^2 \beta}{1 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \xi_{01}^2 u \xi_{01}^2 \beta}$$

Exprimons toutes les fonctions de  $\beta$  au moyen de  $\xi_{10} \beta$ , en nous servant des formules

$$e_1 + \xi_{10}^2 \beta = e_2 + \xi_{20}^2 \beta = e_3 + \xi_{30}^2 \beta (= p\beta).$$

Il vient simplement

$$(13) \quad P(\beta) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \xi_{10}^2 \beta \{ (e_1 - e_2) [1 + (e_2 - e_3) \xi_{02}^2 u] + \xi_{10}^2 \beta \} \\ \times \{ (e_1 - e_3) [1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u] + \xi_{10}^2 \beta \} [1 - \xi_{01}^2 u \xi_{10}^2 \beta] \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} (e_1 - e_2 + \xi_{10}^2 \beta) (e_1 - e_3 + \xi_{10}^2 \beta) [1 - (e_1 - e_2) \xi_{02}^2 u - \xi_{02}^2 u \xi_{10}^2 \beta] \\ \times [1 - (e_1 - e_3) \xi_{03}^2 u - \xi_{03}^2 u \xi_{10}^2 \beta] [\xi_{10}^2 \beta - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \xi_{01}^2 u] \end{array} \right\}}$$

Or on a (*T.* et *M.*, LIX, 6)

$$\begin{aligned} 1 + (e_2 - e_3) \xi_{02}^2 u &= \xi_{32}^2 u, \\ 1 - (e_2 - e_3) \xi_{03}^2 u &= \xi_{23}^2 u, \\ 1 - (e_1 - e_2) \xi_{02}^2 u &= \xi_{12}^2 u, \\ 1 - (e_1 - e_3) \xi_{03}^2 u &= \xi_{13}^2 u, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \xi_{12}^2 u - \xi_{02}^2 u \xi_{10}^2 \beta &= \xi_{02}^2 u (\xi_{10}^2 u - \xi_{10}^2 \beta), \\ \xi_{13}^2 u - \xi_{03}^2 u \xi_{10}^2 \beta &= \xi_{03}^2 u (\xi_{10}^2 u - \xi_{10}^2 \beta). \end{aligned}$$

Remplaçant et simplifiant, il reste

$$(14) \quad P_1(\beta) = P(\beta) \left( \frac{\xi_{02}^2 u \xi_{03}^2 u}{-\xi_{01}^2 u} \right) \\ = \frac{\xi_{10}^2 \beta [\xi_{10}^2 \beta + (e_1 - e_2) \xi_{32}^2 u] [\xi_{10}^2 \beta + (e_1 - e_3) \xi_{23}^2 u]}{\left\{ \begin{array}{l} (\xi_{10}^2 \beta + e_1 - e_2) (\xi_{10}^2 \beta + e_1 - e_3) (\xi_{10}^2 \beta - \xi_{10}^2 u) \\ \times [\xi_{10}^2 \beta - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \xi_{01}^2 u] \end{array} \right\}}$$

le quotient mis en évidence comme facteur de  $P(\beta)$  étant indépendant de  $\beta$  et positif.

La fonction  $P_1(\beta)$  étant ainsi préparée, séparons l'expression obtenue en deux facteurs, de la façon suivante :

$$(15) \quad P_1 = P_2 \times P_3$$

avec

$$(16) \quad P_2 = \frac{\xi_{10}^2 \beta}{(\xi_{10}^2 \beta - \xi_{10}^2 u) [\xi_{10}^2 \beta - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \xi_{01}^2 u]} \\ = \frac{t}{t^2 - t[\xi_{10}^2 u + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \xi_{01}^2 u] + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)},$$

$$(17) \quad P_3 = \frac{[\xi_{10}^2 \beta + (e_1 - e_2) \xi_{32}^2 u] [\xi_{10}^2 \beta + (e_1 - e_3) \xi_{23}^2 u]}{(\xi_{10}^2 \beta + e_1 - e_2) (\xi_{10}^2 \beta + e_1 - e_3)} \\ = \frac{t^2 + [(e_1 - e_2) \xi_{32}^2 u + (e_1 - e_3) \xi_{23}^2 u] t + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{t^2 + 3e_1 t + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}$$



où l'on a posé

$$t = \xi_{10}^2 \beta.$$

Cette variable  $t$ , lorsque  $\beta$  varie de zéro à  $\frac{\omega_1}{2}$ , varie en décroissant depuis  $+\infty$  jusqu'à  $(e_1 + \sqrt{e_1 - e_2} \sqrt{e_1 - e_3})^2$ .

On reconnaît sans peine que  $P_2$  est une fonction décroissante de  $t$ , et par suite une fonction décroissante de  $\beta$ ; de plus, il est visiblement positif.

Quant à  $P_3$ , qui est aussi positif, sa dérivée par rapport à  $t$ , a le signe de

$$[(e_1 - e_2) \xi_{32}^2 u + (e_1 - e_3) \xi_{23}^2 u - 3e_1][(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) - t^2].$$

Le second facteur reste négatif dans l'intervalle de variation de  $t$ ; quant au premier facteur, on peut l'écrire sous la forme

$$(e_1 - e_2) \xi_{32}^2 u + (e_1 - e_3) \xi_{23}^2 u - (e_1 - e_2) - (e_1 - e_3),$$

ou encore

$$(e_1 - e_2)(\xi_{32}^2 u - 1) + (e_1 - e_3)(\xi_{23}^2 u - 1)$$

et, par suite,

$$(e_1 - e_2) \frac{e_2 - e_3}{pu - e_2} + (e_1 - e_3) \frac{e_3 - e_2}{pu - e_3},$$

ou enfin après réduction

$$(e_2 - e_3)^2 \frac{e_1 - pu}{(pu - e_2)(pu - e_3)}.$$

Or cette quantité est essentiellement positive quel que soit  $u$  dans l'intervalle  $0, \omega_3$ , puisque alors  $pu$  est inférieur à  $e_3$ . Donc  $P_3$  est une fonction de  $t$  décroissante et par suite une fonction de  $\beta$  croissante.

Enfin le produit  $P_2 P_3$  est une fonction croissante de  $\beta$ , et la fonction  $P(\beta)$  également, ce qu'il fallait démontrer.

Restant encore dans le cas des poutes convexes, la condition (I) est-elle suffisante pour écarter également la difficulté relative aux vitesses; autrement dit, suffit-elle à assurer la validité de la solution? Je me propose de montrer qu'il n'en est rien, quelque probable que le fait paraisse cependant *a priori*. Je ferai voir, à cet effet, qu'on peut trouver un point  $Z = \rho e^{i\epsilon}$  ( $\rho$  étant voisin de 1, mais inférieur à 1) et des fonctions  $\Phi(\epsilon)$  satisfaisant à la condition (I), avec, bien entendu,  $\Phi < 0$ ,  $\Phi'(\epsilon) < 0$ , donnant naissance à une solution pour laquelle  $T$

serait positif, c'est-à-dire la vitesse plus grande que 1, au point considéré.

Partons de la formule (1) et posons

$$Z = \rho e^{ts},$$

on a immédiatement

$$\begin{aligned} T = \frac{\omega_1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[ \right. & \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) \\ & + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) \\ & + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) \\ & \left. + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho\right) \right] d\varepsilon, \end{aligned}$$

ou mieux, puisque l'hypothèse  $\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon)$  entraîne

$$\int_0^\pi \Phi(\varepsilon) d\varepsilon = 0,$$

et en posant

$$\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho = u,$$

$$\begin{aligned} T = \frac{\omega_1}{2\pi^2} \int_0^\pi \Phi(\varepsilon) \left[ \right. & \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + u\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon + u\right) \\ & \left. + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - u\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon - u\right) \right] d\varepsilon. \end{aligned}$$

Un calcul simple, basé sur la même hypothèse, conduit à transformer cette expression en la suivante :

$$\begin{aligned} T = \frac{\omega_1}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varepsilon) \left[ \right. & \zeta(a+u) + \zeta(b+u) + \zeta(a-u) + \zeta(b-u) \\ & \left. - \zeta_1(a+u) - \zeta_1(b+u) - \zeta_1(a-u) - \zeta_1(b-u) \right] d\varepsilon, \end{aligned}$$

en posant

$$a = \frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon,$$

$$b = \frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon,$$

et en utilisant des formules telles que

$$\zeta(a+u-\omega_1) = \zeta_1(a+u) - \eta_1.$$

Appelons  $Q(\varepsilon)$  le coefficient de  $\Phi(\varepsilon)$  sous le signe somme; on a (*T.* et *M.*, LXIII, 5)

$$\zeta(a+u) - \zeta_1(a+u) = -\frac{1}{2} \frac{p'(a+u)}{p(a+u) - e_1}, \quad \dots,$$

et par suite

$$Q(\varepsilon) = -\frac{1}{2} \frac{p'(a+u)}{p(a+u) - e_1} - \frac{1}{2} \frac{p'(a-u)}{p(a-u) - e_1} \\ - \frac{1}{2} \frac{p'(b+u)}{p(b+u) - e_1} - \frac{1}{2} \frac{p'(b-u)}{p(b-u) - e_1}.$$

Donc  $Q(\varepsilon)d\varepsilon$  est la différentielle de la fonction

$$R(\varepsilon) = -\frac{\pi}{2\omega_1} \log \frac{[p(a+u) - e_1][p(a-u) - e_1]}{[p(b+u) - e_1][p(b-u) - e_1]} \\ = -\frac{\pi}{\omega_1} \log \frac{\xi_{10}(a+u)\xi_{10}(a-u)}{\xi_{10}(b+u)\xi_{10}(b-u)}.$$

On peut donc écrire

$$T = \frac{\omega_1}{2\pi^2} [\Phi(\varepsilon)R(\varepsilon)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\omega_1}{2\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon)R(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Pour  $\varepsilon = 0$ , on a  $R(\varepsilon) = 0$ , puisque alors  $a = b$ ; donc enfin il vient

$$2\pi T = -\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \log \frac{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{2} + u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{2} - u\right)}{\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{2} + u\right)\xi_{10}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{2} - u\right)} \\ + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \log \frac{\xi_{10}(a+u)\xi_{10}(a-u)}{\xi_{10}(b+u)\xi_{10}(b-u)} d\varepsilon.$$

Mais la formule (9), démontrée auparavant, nous permet d'écrire

$$-2\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \left(2\zeta \frac{\omega_1}{2} - \tau_1\right) = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \frac{p' \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{p \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_1} d\varepsilon,$$

avec

$$K \geq 1.$$

Or on a

$$2\zeta \frac{\omega_1}{2} - \tau_1 = \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2}}$$

et

$$\frac{\rho' \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{\rho \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - e_1} = -2 \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \xi_{30} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon},$$

d'où

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2}} = K \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \xi_{30} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon.$$

Transportant dans l'expression de T la valeur de  $\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)$  donnée par cette équation, nous en concluons finalement

$$2\pi T = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(\varepsilon) d\varepsilon \left[ K \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \xi_{30} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} \frac{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{30} \frac{\omega_1}{2}} \right. \\ \times \log \frac{\xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{2} + u\right) \xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{2} - u\right)}{\xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{2} + u\right) \xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{2} - u\right)} \\ \left. - \log \frac{\xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + u\right) \xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s - \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - u\right)}{\xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon + u\right) \xi_{10} \left(\frac{\omega_1}{\pi} s + \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon - u\right)} \right].$$

Or si l'on suppose  $u$  petit, c'est-à-dire  $\rho$  voisin de 1, la fonction écrite dans le crochet devient, comme son second terme, très grande et négative pour  $\varepsilon$  voisin de  $s$ . Si l'on fixe pour  $s$  une valeur numérique entre zéro et  $\frac{\pi}{2}$ , on peut donc choisir  $\rho$  assez voisin de 1 pour que le crochet soit une fonction de  $\varepsilon$  négative dans tout un intervalle de valeurs de  $\varepsilon$ , voisines de  $s$ .

Déterminons alors une fonction  $\Phi(\varepsilon)$  par la condition d'être constante dans l'intervalle  $0, \frac{\pi}{2}$ , à l'exception de l'intervalle partiel où le crochet est négatif; et dans ce dernier intervalle  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , prenons pour  $\Phi(\varepsilon)$  une fonction négative, décroissante depuis une valeur  $\Phi(\varepsilon_1)$  jusqu'à  $\Phi(\varepsilon_2)$ , ces deux dernières étant comprises entre  $-\pi$  et zéro;  $\Phi(\varepsilon)$  sera alors pris constamment égal à  $\Phi(\varepsilon_1)$  dans l'intervalle zéro,  $\varepsilon_1$ , et

à  $\Phi(\varepsilon_2)$  dans l'intervalle  $\varepsilon_2, \frac{\pi}{2}$ . Enfin, assujettissons  $\Phi(\varepsilon)$  à satisfaire la condition (9), qui devient ici

$$-\Phi(\varepsilon_2) \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{2} \xi_{20} \frac{\omega_1}{2}}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{2}} > \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} -\Phi'(\varepsilon) \frac{\xi_{20} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon \xi_{20} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon}{\xi_{10} \frac{\omega_1}{\pi} \varepsilon} d\varepsilon.$$

Toutes ces conditions sont parfaitement compatibles, comme il est facile de s'en assurer; rien n'est plus simple que de former une fonction particulière de  $\varepsilon$ , qui vérifie toutes ces conditions.

Pour une telle fonction  $\Phi(\varepsilon)$ , il est clair, d'après les calculs précédents, que la valeur de  $T$  sera positive au point  $Z = \rho e^{i\varepsilon}$ ; ceci légitime évidemment l'assertion énoncée ci-dessus.

Il est à peine besoin de faire observer que, par le fait même, la proposition énoncée page 253, relativement au cas du fluide indéfini, et qui rentre comme cas limite dans celui qu'on vient de considérer, se trouve légitimée *a posteriori*.

