

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LIÉNARD

CHIPART

Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 10 (1914), p. 291-346.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10_291_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique;

PAR LIÉNARD ET CHIPART.

INTRODUCTION.

1. Dans les recherches de Physique mathématique ou de Mécanique il arrive fréquemment qu'on ait à résoudre le problème d'Algèbre dont voici l'énoncé, et qui a été le point de départ de cette étude :

Étant donnée une équation algébrique à coefficients réels, trouver les conditions pour que ses racines soient de la forme $-K^2 + \beta\sqrt{-1}$, K étant essentiellement différent de zéro et β pouvant prendre une valeur quelconque, zéro compris.

Prenons comme exemple l'étude de la stabilité : en appliquant les procédés classiques de la méthode des petits mouvements nous aboutirons, d'ordinaire, à l'intégration d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Soit donc

$$a_0 \frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_n u = \varphi(t)$$

une telle équation et soit

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

son équation caractéristique. Toutes les fois que les racines de $f(x) = 0$ satisferont aux conditions énoncées plus haut, l'intégrale générale de l'équation linéaire sans second membre tendra vers zéro pour $t = \infty$, quelles que soient les constantes d'intégration, et le mouvement sera

stable; réciproquement, lorsque ces conditions ne sont pas remplies, il y aura instabilité (¹).

Les recherches entreprises pour résoudre ce premier problème nous ont amenés à aborder le problème plus général consistant à déterminer combien une équation possède de racines dont la partie réelle ait un signe donné.

Avant d'énoncer les résultats auxquels nous sommes parvenus, commençons par définir les locutions dont nous ferons constamment usage.

2. DÉFINITIONS. — 1^o *Quantités pseudo-positives et pseudo-négatives.* — Pour abrégér le langage, nous appellerons quantité *pseudo-positive* toute quantité réelle positive ou imaginaire à partie réelle positive. Une définition analogue s'appliquera aux grandeurs pseudo-négatives. Avec cette terminologie, les racines d'une équation pourront se classer en quatre catégories : racines pseudo-positives, pseudo-négatives, nulles, purement imaginaires.

2^o *Formes quadratiques* $\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m)$, $\Theta_1(Y_1, Y_2, \dots)$, $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ associées à l'équation $f(x) = 0$. — Soit l'équation

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0,$$

dans laquelle nous mettons en évidence les termes de même parité.

Les racines nulles et purement imaginaires font partie du groupe de racines communes aux équations $f(x) = 0$, $f(-x) = 0$, en sorte que les problèmes posés au début conduisent naturellement à étudier le résultant des deux équations

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = 0.$$

Pour former ce résultant, employons la méthode de Bezout. Si nous désignons par $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ le degré de $f(x)$, l'une au moins des deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ est de degré m et l'on sait

(¹) Nous admettons, bien entendu, que l'application de la théorie des petits mouvements est légitime. C'est là une discussion que nous n'aborderons pas, l'objet de notre Mémoire étant d'étudier une question ressortissant à la théorie des équations algébriques et dont il était intéressant de rappeler l'origine.

que le résultant R de Bezout est un déterminant symétrique de degré m . Désignons par $\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m)$ la forme quadratique dont R est le discriminant. Cette fonction, dont nous préciserons plus loin le mode de formation, sera par définition la forme quadratique associée à l'équation $f = 0$.

Pour définir la fonction $\Theta_1(Y_1, Y_2, \dots)$, nous opérerons de même sur l'équation

$$f_1(x) = xf(x) = x\varphi(x^2) + x^2\psi(x^2).$$

Par définition, Θ_1 sera la forme quadratique Θ associée à l'équation $f_1 = 0$.

Enfin la fonction $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ sera définie par l'égalité

$$(1) \quad T(z_1, z_2, \dots, z_n) = \Theta(z_2, z_4, \dots, z_{2m}) + \Theta_1(z_1, z_3, \dots).$$

Nous en donnerons tout à l'heure une autre définition plus directe.

3. Ces préliminaires posés, nous sommes en mesure d'énoncer les résultats principaux de ce Mémoire. Nous nous bornerons toutefois, pour ne pas allonger cette Introduction, à donner deux critères auxquels on reconnaîtra qu'une équation satisfait aux conditions du problème de stabilité.

PREMIER CRITÉRIUM. — *Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que la forme quadratique T soit définie positive, autrement dit soit une somme de n carrés positifs indépendants (1).*

Comme conséquence de l'égalité (1), le critérium peut encore s'énoncer en disant que les formes Θ et Θ_1 doivent être définies positives.

DEUXIÈME CRITÉRIUM. — *Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que la forme quadratique Θ soit*

(1) On rappelle qu'une forme quadratique à n variables n'est dite *définie* que si elle ne peut pas s'annuler pour un système réel de valeurs des variables autre que $0, 0, \dots, 0$. Par exemple, la forme $(x_1 + x_2)^2 + x_2^2$ est définie positive, tandis que la forme $(x_1 + x_2)^2$ n'est pas définie.

définie positive et que le polynôme $\varphi(x)$ soit complet et ait tous ses coefficients de même signe que le coefficient du terme de plus haut degré de $f(x)$.

Un énoncé analogue s'obtiendrait en utilisant la forme Θ , et le polynome ψ .

De ces deux critères, il est manifeste qu'on devra, dans les applications, donner la préférence au dernier qui conduit à des calculs plus simples. Cependant, comme l'introduction de la forme quadratique T dans cette théorie facilite la démonstration de certaines propositions, il a paru préférable de commencer par établir les propriétés de cette forme T.

4. La première et la seconde Partie de ce Mémoire seront consacrées à la démonstration des deux critères énoncés ci-dessus et à l'étude des propriétés correspondantes des formes T et Θ . Nous mentionnerons succinctement dans la troisième Partie les considérations auxquelles nous avons tout d'abord recours pour établir le second critérium. L'ordre que nous avons adopté, en vue de faciliter l'exposition, diffère en effet complètement de l'ordre dans lequel ont été trouvées les diverses propositions et nous avons pensé qu'il n'était pas sans intérêt d'indiquer comment nous avons été amenés à introduire dans cette étude les formes quadratiques Θ , Θ , et T.

La rédaction de ce travail était terminée quand nous avons eu connaissance de recherches sur le même sujet publiées par Routh dans son *Treatise on the stability of a given state of motion* et résumées dans les *Advanced rigid Dynamics* du même auteur.

Routh (¹) aborde successivement le problème par deux méthodes entièrement distinctes.

La première méthode utilise l'équation aux sommes des racines deux à deux; elle conduit à l'énoncé suivant :

Pour qu'une équation ait toutes ses racines de la forme

$$-R^2 + \beta\sqrt{-1},$$

(¹) ROUTH, *A treatise on the stability of a given state of motion* (London, 1877) et *Advanced rigid Dynamics*, § 256-307, 6^e édition, 1907.

il faut et il suffit que l'équation proposée et l'équation aux sommes des racines deux à deux soient complètes et ne présentent que des permanences.

Cette proposition, retrouvée indépendamment par l'un de nous ⁽¹⁾, a le défaut de fournir $n + \frac{n(n-1)}{2}$ inégalités, alors qu'il résulte manifestement de la nature du problème que les conditions distinctes sont en nombre n ; et d'ailleurs, pour peu que le degré de l'équation s'élève, la formation de l'équation aux sommes et la recherche des conditions surabondantes deviennent des plus malaisées.

Pareilles déficiences ne subsistent plus dans la seconde méthode de Routh. L'auteur applique la formule classique de Cauchy

$$p = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

qui fait connaître le nombre p de racines comprises à l'intérieur du contour C et il ramène la solution du problème à une succession d'opérations analogues à celles qui donnent la suite des polynomes de Sturm. Il forme de cette façon $(n + 1)$ polynomes, dont les degrés sont respectivement $n, n - 1, \dots, 0$ et il démontre que la condition nécessaire et suffisante de stabilité est que la suite formée par les coefficients des termes de plus haut degré de ces polynomes ne présente que des permanences ⁽²⁾.

La méthode de Routh se prête admirablement à l'étude des équations numériques, et cela pour la raison suivante: pour exprimer que la forme quadratique T est définie positive, nous devons écrire n inégalités

$$P_1(a_0, a_1, \dots, a_n) > 0, \quad P_2 > 0, \quad \dots, \quad P_n > 0,$$

les P_1, P_2, \dots, P_n désignant des polynomes dont le mode de formation est classique.

Au contraire, la méthode de Routh fournit n inégalités

$$S_1(a_0, a_1, \dots, a_n) > 0, \quad S_2 > 0, \quad \dots, \quad S_n > 0.$$

⁽¹⁾ *Journal de Mathématiques spéciales*, avril et mai 1911.

⁽²⁾ D'une manière générale le nombre de permanences (variations) est égal au nombre de racines pseudo-négatives (positives) de l'équation.

Les premiers membres de ces inégalités ne sont autres que certains produits des polynomes P.

Tant qu'il s'agit d'équations numériques, peu importe qu'on aboutisse aux polynomes P ou à leurs produits S et la supériorité de la méthode de Routh dans ce cas est incontestable. Mais il en est tout autrement dès qu'il devient nécessaire d'étudier l'influence de paramètres variables. Si l'on voulait en effet appliquer aux équations littérales la méthode de Routh, il serait nécessaire de passer des produits S aux polynomes P au moyen de divisions laborieuses et l'on aboutirait de cette façon au premier critérium, c'est-à-dire à un résultat très inférieur sous le rapport de la simplicité au second critérium qui ne découle pas de l'analyse de Routh et que nous croyons nouveau. Aussi, n'avons-nous pas pensé que les résultats obtenus par le savant mécanicien anglais fussent de nature à enlever tout intérêt à notre travail. D'une part, nous avons abordé la question sous un jour entièrement différent, et il est toujours utile de considérer les divers aspects d'un même problème. D'autre part, les problèmes de stabilité aboutissent en général à des équations littérales, et pour ce motif on trouvera avantage à leur appliquer le second critérium.

Dans une quatrième Partie nous établirons sommairement les propositions qui permettent de passer de l'énoncé fourni par la méthode de Routh à l'énoncé d'apparence très différente que nous avons donné sous le nom de *premier critérium*.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS DE LA FORME QUADRATIQUE T. PREMIER CRITÉRIUM.

§. Polynome $G(x, y)$ associé au polynome $f(x)$. — Soit le polynome

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Formons le polynome $G(x, y)$ symétrique en x et y

$$(1) \quad G(x, y) = \frac{f(x)f(y) - f(-x)f(-y)}{2(x+y)},$$

Ce polynome est de degré $n - 1$ par rapport à x et y pris séparément. Nous l'appellerons le polynome $G(x, y)$ associé à $f(x)$.

Exemples : 1° $f(x) = a_0 x + a_1$,

$$G(x, y) = \frac{(a_0 x + a_1)(a_0 y + a_1) - (a_0 x - a_1)(a_0 y - a_1)}{2(x + y)} = a_0 a_1;$$

2° $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$,

$$G(x, y) = a_0 a_1 xy + a_1 a_2;$$

3° $f(x) = x^{\mu} \varpi(x^2)$; on trouve

$$G(x, y) = 0.$$

6. Forme quadratique $T(z_1, z_2, \dots, z_n)$ admettant $G(x, y)$ comme polynome générateur. — Multiplions le polynome $G(x, y)$ par le produit xy , nous obtenons l'expression

$$xy G(x, y) = \sum A x^{\alpha} y^{\beta} \quad (1 \leq \alpha, \beta \leq n).$$

Dans cette expression, remplaçons $x^{\alpha} y^{\beta}$ par $z_{\alpha} z_{\beta}$, nous obtenons la forme quadratique à n variables (¹)

$$T(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum A z_{\alpha} z_{\beta}.$$

Le polynome $G(x, y)$, qui est toujours symétrique en x et y , est, par définition, le polynome générateur de la forme quadratique T .

Lorsque G sera le polynome associé à $f(x)$, la fonction T portera également le nom de *forme quadratique* associée à $f(x)$.

Exemples : 1° $f(x) = a_0 x + a_1$; on a trouvé

$$G(x, y) = a_0 a_1, \quad \text{d'où} \quad T(z_1) = a_0 a_1 z_1^2;$$

2° $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$,

$$G(x, y) = a_0 a_1 xy + a_1 a_2, \quad T(z_1, z_2) = a_1 a_2 z_1^2 + a_0 a_1 z_2^2;$$

3° $f(x) = x^{\mu} \varpi(x^2)$,

$$T = 0.$$

7. Relation entre les formes quadratiques admettant comme polynomes générateurs $G(x, y)$ et $\varphi(x)\varphi(y)G(x, y)$. — Soit

(¹) La multiplication de G par xy a seulement pour but d'obtenir pour les z des indices variant de 1 à n et non de 0 à $n - 1$.

c'est-à-dire

$$G(x, y) = f_2(-x) f_2(-y) G_1(x, y) + f_1(x) f_1(y) G_2(x, y),$$

G_1 et G_2 désignant les polynomes G associés à f_1 et f_2 . A une formule de multiplication pour f correspond donc une formule d'addition pour G .

Plus généralement, considérons le produit de facteurs

$$f(x) = f_1(x) f_2(x) \dots f_p(x).$$

Écrivons

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f_2(-x) f_3(-x) \dots f_p(-x), \\ \varphi_2(x) &= f_1(+x) f_3(-x) \dots f_p(-x), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_k(x) &= f_1(+x) \dots f_{k-1}(+x) f_{k+1}(-x) \dots f_p(-x), \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi_p(x) &= f_1(+x) f_2(+x) \dots f_{p-1}(+x). \end{aligned}$$

On vérifiera facilement l'identité

$$(3) \quad G(x, y) = \varphi_1(x) \varphi_1(y) G_1(x, y) + \varphi_2(x) \varphi_2(y) G_2(x, y) + \dots + \varphi_p(x) \varphi_p(y) G_p(x, y).$$

Passons maintenant aux formes quadratiques T, T_1, T_2, \dots, T_p associées aux polynomes f, f_1, f_2, \dots, f_p et soient

$$T = T(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad T_1 = T_1(z'_1, z'_2, \dots), \quad T_2 = T_2(z''_1, z''_2, \dots), \quad \dots$$

Appliquons aux divers termes de l'identité (3) la règle générale donnée au n° 7, et nous obtiendrons la formule de récurrence

$$(4) \quad T(z_1, z_2, \dots, z_n) = T_1(\alpha_1 z_1 + \beta_1 z_2 + \dots, \alpha_1 z_2 + \beta_1 z_3 + \dots, \dots) + T_2(\alpha_2 z_1 + \beta_2 z_2 + \dots, \alpha_2 z_2 + \beta_2 z_3 + \dots, \dots) + \dots \dots \dots + T_p(\alpha_p z_1 + \beta_p z_2 + \dots, \alpha_p z_2 + \beta_p z_3 + \dots, \dots).$$

9. Première application. — Soit le polynome

$$f(x) = (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_n),$$

décomposé en facteurs linéaires et dont le coefficient de x^n est supposé égal à l'unité (multiplier un polynome par A équivaut à multiplier

par A^2 sa forme quadratique associée, ce qui n'influe pas sur les signes de la décomposition en carrés). Choisissons comme f_1, f_2, \dots, f_n ces n facteurs linéaires et appliquons les formules de décomposition (3) et (4). Nous obtenons les relations suivantes (1) :

$$(5) \quad \begin{cases} G_1(x, y) = x_1, & G_2 = x_2, & \dots, & G_n(x, y) = x_n, \\ \varphi_1(x) = (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n), \\ \varphi_2(x) = (x + x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n), \\ \dots, \\ \varphi_i(x) = (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n), \\ \dots, \\ \varphi_n(x) = (x + x_1)(x + x_2) \dots (x + x_{n-1}); \\ G(x, y) = x_1 \varphi_1(x) \varphi_1(y) + x_2 \varphi_2(x) \varphi_2(y) + \dots + x_n \varphi_n(x) \varphi_n(y); \end{cases}$$

$$(6) \quad T(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_1^n x_i (z_n + b_i z_{n-1} + \dots + l_i z_2 + m_i z_1)^2,$$

en écrivant

$$\varphi_i(x) = x^{n-1} + b_i x^{n-2} + \dots + l_i x + m_i.$$

La décomposition de T en une somme de n carrés est donc réalisée. Cette décomposition va nous permettre de démontrer que le discriminant Δ de cette forme quadratique à n variables a pour valeur

$$(7) \quad \Delta = x_1 x_2 \dots x_n \left[\prod_1^n (x_i + x_k) \right]^2 \quad (i \neq k).$$

On a en effet, d'après la formule (6),

$$\Delta = x_1 x_2 \dots x_n D_n^2,$$

D_n désignant le module de la substitution

$$(8) \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & \dots & m_1 \\ 1 & b_2 & c_2 & \dots & m_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & b_n & c_n & \dots & m_n \end{vmatrix},$$

(1) On remarque, dans l'application qui est faite de la formule de décomposition (3), qu'on a changé le signe de certains polynomes φ , modification sans influence sur le résultat final.

D_n est un polynome en x_1, x_2, \dots, x_n qui est divisible par $x_i + x_k$ quels que soient i et k . En effet, on peut écrire identiquement

$$(9) \quad D_n = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 & \varphi_1(x) \\ 1 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 & \varphi_2(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \\ 1 & b_n & c_n & \dots & l_n & \varphi_n(x) \end{vmatrix}.$$

Or, en supposant, pour fixer les idées, $i < k$, les polynomes $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k-1}$ [formules (5)] sont divisibles par $x - x_k$, tandis que les polynomes $\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \dots, \varphi_n$ sont divisibles par $x + x_i$. Tous les polynomes φ s'annulent donc en faisant $x = x_k = -x_i$, et il en est de même de D_n d'après (9). Le polynome D_n s'annulant pour $x_i + x_k = 0$ est divisible par $x_i + x_k$ et par suite par $\Pi(x_i + x_k)$.

On peut donc écrire

$$(10) \quad D_n = A_n \prod_1^n (x_i + x_k).$$

A_n désigne une constante, car D_n et Π sont tous deux de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en x_1, x_2, \dots, x_n .

Montrons qu'on a $A_n = 1$. A cet effet, faisons $x_n = 0$, ce qui entraîne $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = 0$. L'équation (10) prend la forme

$$D_n = A_n x_1 x_2 \dots x_{n-1} \prod_1^{n-1} (x_i + x_k),$$

tandis que l'équation (8) devient

$$D_n = m_n \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \beta_{n-1} & \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} = x_1 x_2 \dots x_{n-1} \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \beta_{n-1} & \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix},$$

les coefficients $\beta, \gamma, \dots, \lambda$ désignant ce que deviennent les coefficients b, c, \dots, l dans l'hypothèse $x_n = 0$.

D'autre part, l'application des formules (8) et (10) au polynome $(x + x_1), \dots, (x + x_{n-1})$ de degré $n - 1$ donne

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & \lambda_1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \beta_{n-1} & \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} = A_{n-1} \prod_1^{n-1} (x_i + x_k).$$

La comparaison de ces divers résultats donne

$$A_n = A_{n-1} = A_{n-2} = \dots = A_2.$$

La valeur commune de tous les coefficients A est l'unité, comme le montre le calcul direct de A_2 . On a donc en définitive

$$\Delta = x_1 x_2 \dots x_n \left[\prod_1^n (x_i + x_k) \right]^2.$$

Il résulte immédiatement de là la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Si $f(x) = 0$ n'a pas de racine commune avec $f(-x) = 0$, sa forme associée T est une somme de n carrés indépendants.*

En effet, si $f(x)$ et $f(-x)$ n'ont pas de racine commune, on a

$$x_1 x_2 \dots x_n \neq 0, \quad \prod_1^n (x_i + x_k) \neq 0.$$

Le discriminant Δ est différent de zéro et par suite la forme T est une somme de n carrés indépendants.

10. Deuxième application. — Décomposons à présent l'équation en facteurs réels du premier et du second degré :

$$f(x) = \prod_1^i (x + \alpha) \prod (x^2 + \beta x + \gamma).$$

On trouve

$$G_1(x, y) = \alpha_1, \quad G_2(x, y) = \alpha_2, \quad \dots, \quad G_i(x, y) = \alpha_i;$$

$$G_{i+1} = \beta_1 xy + \beta_1 \gamma_1, \quad G_{i+2}(x, y) = \beta_2 xy + \beta_2 \gamma_2, \quad \dots;$$

d'où

$$(11) \quad T(z_1, z_2, \dots, z_n) = \alpha_1 P_1^2 + \alpha_2 P_2^2 + \dots + \alpha_i P_i^2$$

$$+ \beta_1 Q_1^2 + \beta_2 Q_2^2 + \dots$$

$$+ \beta_1 \gamma_1 R_1^2 + \beta_2 \gamma_2 R_2^2 + \dots$$

Les P, Q, R désignent des formes linéaires en z_1, z_2, \dots, z_n à coefficients réels.

De la formule (11) résulte le théorème suivant :

THÉORÈME II. — Si $f(x) = 0$ n'a pas de racine commune avec $f(-x) = 0$, les racines pseudo-négatives et pseudo-positives de $f(x)$ sont respectivement en même nombre que les carrés positifs et négatifs indépendants de sa forme associée T .

Dans le cas général, l'énoncé précédent reste valable, avec cette restriction que la forme associée T ne contient aucun carré correspondant aux racines appartenant aux groupes $\pm \alpha$ ou $\pm \alpha \pm \beta i$ ($\alpha \neq 0$).

La première partie du théorème est la conséquence de la formule de décomposition (11) : si $f(x)$ et $f(-x)$ n'ont pas de racine commune, la forme associée T est une somme de n carrés indépendants (théorème I, n° 9) et la formule (11) établit une décomposition en une somme de n carrés réels.

On peut supposer que les trinomes $x^2 + \beta x + \gamma$ ont tous leurs racines imaginaires, sinon on les décomposerait en facteurs réels du premier degré. Les coefficients γ sont alors positifs.

Au facteur réel du premier degré $(x + \alpha)$ correspond le carré αP^2 qui est de signe contraire à la racine réelle $-\alpha$.

Au facteur réel du deuxième degré $x^2 + \beta x + \gamma$ correspond la somme des carrés $\beta Q^2 + \beta \gamma R^2$, qui sont tous deux de signe contraire à $-\frac{\beta}{2}$, partie réelle des deux racines imaginaires du trinome.

Ces remarques justifient l'énoncé de la première partie. La correspondance entre les signes des carrés de T et les racines, établie pour un mode particulier de décomposition en carrés de la forme T , subsiste pour tout autre mode de décomposition en vertu du théorème connu sous le nom de *loi d'inertie*.

Passons à la seconde partie du théorème. Si $f(x)$ et $f(-x)$ ont des racines communes, on peut écrire

$$f(x) = x^{\mu} \varpi(x^2) f'(x),$$

$f'(x)$ étant un polynôme de degré n' qui n'a pas de racine commune avec $f'(-x)$. Le facteur $x^{\mu} \varpi(x^2)$ est le plus grand commun diviseur de $f(x)$ et de $f(-x)$.

La condition est nécessaire : toutes les racines étant pseudo-négatives, deux racines ne peuvent donner une somme nulle, le polynome $f(x)$ est premier avec $f(-x)$, et T est une somme de n carrés indépendants qui sont tous positifs.

La condition est suffisante, car, si elle est remplie, l'équation admet n racines pseudo-négatives, c'est-à-dire que toutes les racines le sont.

11. Transformation des conditions. Introduction des polynomes $F(x, y)$, $F_1(x, y)$ associés à $f(x)$, et des formes quadratiques associées Θ et Θ_1 . — Mettons en évidence dans $f(x)$ les termes de même parité :

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2).$$

Portant cette valeur dans l'égalité (1), nous obtenons la nouvelle formule

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{\begin{vmatrix} \varphi(x^2) + x\psi(x^2) & \varphi(y^2) - y\psi(y^2) \\ \varphi(x^2) - x\psi(x^2) & \varphi(y^2) + y\psi(y^2) \end{vmatrix}}{2(x+y)} \\ &= \frac{x\psi(x^2)\varphi(y^2) + y\varphi(x^2)\psi(y^2)}{x+y}. \end{aligned}$$

Cette formule peut de nouveau se transformer : multiplions haut et bas par $(y-x)$, il vient

$$G(x, y) = xy \frac{\varphi(y^2)\psi(x^2) - \varphi(x^2)\psi(y^2)}{y^2 - x^2} + \frac{y^2\varphi(x^2)\psi(y^2) - x^2\varphi(y^2)\psi(x^2)}{y^2 - x^2},$$

ce que nous écrirons

$$(13) \quad G(x, y) = xy F(x^2, y^2) + F_1(x^2, y^2),$$

en désignant par $F(x, y)$ et $F_1(x, y)$ les deux polynomes symétriques en x et y définis par les égalités

$$(14) \quad F(x, y) = \frac{\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y)}{y-x},$$

$$(14') \quad F_1(x, y) = \frac{y\psi(y)\varphi(x) - x\psi(x)\varphi(y)}{y-x}.$$

Si l'on pose $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$, le polynome F est de

degré $m - 1$ et le polynome F_1 de degré $m - 1$ ou m , suivant la parité de n .

On reconnaît dans $F(x, y)$ le polynome générateur du résultant de $\varphi = 0, \psi = 0$, tel que le donne la méthode de Bezout (¹).

Pareillement, $F_1(x, y)$ sera le polynome générateur du résultant de $\varphi_1 = 0, \psi_1 = 0$, φ_1 et ψ_1 étant définis par les relations

$$f_1(x) = \varphi_1(x^2) + x \psi_1(x^2) = x f(x) = x^2 \psi(x^2) + x \varphi(x^2),$$

d'où

$$\varphi_1(x) = x \psi(x), \quad \psi_1(x) = \varphi(x).$$

Nous désignerons par Θ et Θ_1 les formes quadratiques admettant $F(x, y)$ et $F_1(x, y)$ comme polynomes générateurs, ce qu'expriment les égalités

$$\begin{aligned} xy F(x, y) &= \sum B x^\alpha y^\beta, & \Theta(X_1, X_2, \dots, X_m) &= \sum B X_\alpha X_\beta; \\ xy F_1(x, y) &= \sum C x^\alpha y^\beta, & \Theta_1(Y_1, Y_2, \dots) &= \sum C Y_\alpha Y_\beta. \end{aligned}$$

Pour simplifier le langage, nous dirons que $G(x, y), F(x, y), F_1(x, y)$ sont les polynomes G, F, F_1 associés à $f(x)$.

De même, $T(Z_1, Z_2, \dots), \Theta(X_1, X_2, \dots), \Theta_1(Y_1, Y_2, \dots)$ seront les formes quadratiques T, Θ, Θ_1 associées à $f(x)$.

Il résulte de la relation (12) que la forme T s'exprime en fonction de Θ et Θ_1 , conformément à la formule

$$(15) \quad T(z_1, z_2, \dots, z_n) = \Theta(z_2, z_4, \dots, z_{2m}) + \Theta_1(z_1, z_3, \dots)$$

annoncée au n° 2.

T ne contient donc aucun terme $Z_\alpha Z_\beta$ où α et β soient de parité différente.

12. Nouvel énoncé du premier critérium. — L'identité (15) permet d'énoncer comme suit le premier critérium :

Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que les formes Θ et Θ_1 soient définies positives.

(¹) L'introduction des polynomes $F(x, y)$ dans la théorie de l'élimination est due à Cauchy (voir n° 13, 3°).

Et pareillement :

Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-positives, il faut et il suffit que Θ et Θ_1 soient définies négatives.

Exemples et applications. — 1° $f(x) = a_0x + a_1$, $\varphi(x) = a_1$, $\psi(x) = a_0$:

$$F(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = \frac{ya_0a_1 - xa_0a_1}{y-x} = a_0a_1, \\ \Theta = 0, \quad \Theta_1 = a_0a_1Y_1^2.$$

2° $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $\varphi(x) = a_0x + a_2$, $\psi(x) = a_1$:

$$F(x, y) = \frac{(a_0y + a_2)a_1 - (a_0x + a_2)a_1}{y-x} = a_0a_1, \quad F_1(x, y) = a_1a_2, \\ \Theta = a_0a_1X_1^2, \quad \Theta_1 = a_1a_2Y_1^2.$$

3° $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $\varphi(x) = a_1x + a_3$, $\psi(x) = a_0x + a_2$:

$$\Theta = (a_1a_2 - a_0a_3)X_1^2, \quad \Theta_1 = a_2a_3Y_1^2 + 2a_0a_3Y_1Y_2 + a_0a_1Y_2^2.$$

Pour que toutes les racines de $f(x)$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que Θ et Θ_1 soient définies positives, ce qu'expriment les inégalités

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_2a_3 & a_0a_3 \\ a_0a_3 & a_0a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad a_0a_1 > 0.$$

La seconde inégalité s'écrit $a_0a_3(a_1a_2 - a_0a_3) > 0$, de sorte que le système des trois inégalités se réduit au suivant :

$$a_1a_2 - a_0a_3 > 0, \quad a_0a_1 > 0, \quad a_0a_3 > 0.$$

4° Donnons encore les expressions de Θ et Θ_1 pour l'équation du quatrième degré $f(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$:

$$\Theta = (a_2a_3 - a_1a_4)X_1^2 + 2a_0a_3X_1X_2 + a_0a_1X_2^2, \\ \Theta_1 = a_3a_4Y_1^2 + 2a_1a_4Y_1^2Y_2^2 + (a_1a_2 - a_0a_3)Y_2^2.$$

Nous savons maintenant comment les signes des parties réelles des racines d'un polynome $f(x)$ influent sur les signes de la décomposition

en carrés de la forme $T = \Theta(Z_2, Z_4, \dots, Z_{2m}) + \Theta_1(Z_1, Z_3, \dots)$. Il serait intéressant de savoir comment ils influent séparément sur les signes des carrés de Θ et Θ_1 . C'est la question que nous allons examiner dans la deuxième Partie.

DEUXIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS DES FORMES Θ , Θ_1 . SECOND CRITÉRIUM.

13. Préliminaires. Résultant de Bezout. Formes quadratiques.

— Soient $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ deux équations dont l'une au moins est de degré m , l'autre étant de degré $m' \leq m$.

On sait qu'on peut appliquer de deux manières différentes la méthode de Bezout au calcul du résultant R de ces deux équations.

D'habitude on étudie séparément le cas $m' = m$ et le cas $m' < m$. Pour $m' = m$ le résultant est mis sous forme de déterminant symétrique. Pour $m' < m$ on modifie la méthode en vue de réaliser certaines simplifications dans le calcul de R , mais la symétrie a disparu. Le second procédé, qu'on se contente généralement de mentionner, consiste à considérer le cas $m' = m$ comme le cas général, et à y ramener le cas $m' < m$ en se contentant d'annuler les termes de degré $m, m-1, \dots, m'+1$ dans l'une des équations; tous les raisonnements donnés dans le cas $m' = m$ restent en effet applicables avec $m' < m$. Dans le cas actuel, nous devons nécessairement recourir à la seconde méthode, qui est seule susceptible de fournir R sous forme de discriminant d'une forme quadratique. Rappelons, dans cet ordre d'idées, les énoncés des théorèmes que nous avons à utiliser dans cette étude.

Écrivons comme suit les développements des deux polynômes :

$$\varphi(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0,$$

$$\psi(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_0.$$

Par hypothèse, l'un au moins des deux coefficients A_m, B_m est différent de zéro. Formons le système des m polynômes de Bezout $F_1,$

ce qu'on peut encore écrire

$$F(x, y) = \psi(x) \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} - \varphi(x) \frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}.$$

Effectuons les divisions par $(y - x)$; nous obtiendrons la formule

$$F(x, y) = F_1(x) + y F_2(x) + \dots + y^{m-1} F_m(x).$$

Autrement dit, les polynomes de Bezout sont les coefficients du développement de $F(x, y)$ suivant les puissances croissantes de y .

Remplaçons dans $F(x, y)$ les F_1, F_2, \dots, F_m par leurs expressions explicites, et nous obtenons l'égalité

$$xy F(x, y) = \sum c_\beta^\alpha x^\alpha y^\beta = \sum c_\alpha^\beta x^\alpha y^\beta \quad (1 \leq \alpha, \beta \leq m).$$

Par conséquent, la forme quadratique $\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m)$, dont $F(x, y)$ est le polynome générateur, aura pour expression

$$\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m) = \sum c_\alpha^\beta X_\alpha X_\beta;$$

d'où ce théorème (Cauchy) :

Le discriminant de la forme quadratique Θ associée au polynome $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2)$ n'est autre que le résultant de Bezout relatif aux deux équations $\varphi(x) = 0, \psi(x) = 0$.

4° Pour que les équations $\varphi = 0, \psi = 0$ admettent k racines communes, il faut et il suffit que la forme quadratique $\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m)$ soit une somme de $(m - k)$ carrés indépendants. Le discriminant R de Θ est alors nul, ainsi que tous ses mineurs jusqu'à l'ordre k exclu, mais l'un au moins des mineurs d'ordre k est différent de zéro. En particulier, on a certainement

$$\frac{\partial^k R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_k^k} \neq 0.$$

Montrons d'abord que si les polynomes φ et ψ ont k racines communes, la forme quadratique Θ est une somme de $(m - k)$ carrés indépendants.

Soit $\varpi(x) = \alpha + \beta x + \dots + \lambda x^{k-1} + x^k$ le plus grand commun diviseur de φ et ψ . On aura

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varpi(x) \varphi'(x), \\ \psi(x) &= \varpi(x) \psi'(x). \end{aligned}$$

modifiées définissent une substitution dont le module est égal à μ , c'est-à-dire à l'unité. On a donc

$$\frac{\partial^k R}{\partial c_1^k \partial c_2^k \dots \partial c_k^k} = R' \mu^2 = R' \neq 0. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Il peut se faire qu'il n'y ait pas d'autre mineur d'ordre k différent de zéro : c'est, par exemple, ce qui se produira lorsque le facteur commun aux polynomes f et φ se réduira à x^k .

On démontrerait de même la formule plus générale

$$\frac{\partial^{k+p} R}{\partial c_1^k \partial c_2^k \dots \partial c_{k+p}^{k+p}} = \frac{\partial^p R'}{\partial c_1^k \partial c_2^k \dots \partial c_p^k},$$

formule qui nous sera utile plus tard.

Nous avons en définitive établi la proposition directe. La réciproque en découle par voie d'exclusion, car les polynomes φ et ψ ne peuvent avoir que 1, 2, ..., $(m-1)$ ou m racines communes, et nous venons de voir que Θ comprend $(m-1)$, $(m-2)$, ..., 1 ou zéro carrés indépendants.

Le théorème établi conduit à considérer les polynomes φ et ψ comme ayant m racines communes lorsque l'un de ces polynomes est identiquement nul. On peut d'ailleurs effectivement considérer le polynome nul comme contenant en facteur l'autre polynome non nul.

14. Équations vérifiant la condition $R \neq 0$. — Dans la première Partie, nous avons eu à nous occuper spécialement des équations $f(x) = 0$ n'admettant pas de racine commune avec $f(-x) = 0$. Les équations que nous aurons à considérer particulièrement sont d'un type un peu plus général : elles pourront admettre la racine simple $x = 0$, et seront seulement caractérisées par la condition de ne pas admettre de groupe de deux racines x' , x'' dont la somme $x' + x''$ soit nulle. Montrons que cette condition est $R \neq 0$.

Supposons, en effet, l'existence de deux racines x' , x'' telles que $x' + x'' = 0$, on aura

$$f(x) = \varpi(x^2) f'(x).$$

Mettant en évidence dans f et f' les termes de même parité

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2), \quad f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2),$$

nous obtiendrons

$$\varphi(x) = \varpi(x)\varphi'(x), \quad \psi(x) = \varpi(x)\psi'(x),$$

ce qui démontre que $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ont au moins une racine commune et que, par suite, on a $R = 0$.

Démontrons à présent la réciproque. Lorsque $R = 0$, deux cas peuvent se présenter (n° 13, 4°) : ou bien l'un des deux polynômes φ et ψ est identiquement nul, ou bien ces deux polynômes existent et ont au moins un facteur linéaire commun. Dans tous les cas, on aura

$$f(x) = \varpi(x^2)f'(x),$$

et $f(x)$ a deux racines égales et de signe contraire.

Par conséquent, $R \neq 0$ représente la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ n'admette pas de groupe de deux racines x' , x'' dont la somme $x' + x''$ soit nulle.

13. THÉORÈME III. — *Lorsque l'équation $f(x) = 0$ admet une racine réelle au plus, sa forme associée Θ est définie positive ou définie négative suivant que les racines imaginaires sont toutes pseudo-négatives ou toutes pseudo-positives.*

Lorsque l'équation est de degré pair et n'a par suite aucune racine réelle, cette proposition n'est qu'un cas particulier de l'énoncé donné au n° 12.

Supposons maintenant l'équation de degré impair. Mettons en évidence la racine réelle α , nous écrivons

$$f(x) = (x - \alpha)f'(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2),$$

f' n'ayant que des racines imaginaires. Supposons-les, par exemple, pseudo-négatives.

Dans cette hypothèse, l'équation $f(x)$ n'admet, quel que soit α , aucun couple de racines dont la somme soit nulle; par conséquent, le résultant $R(\alpha)$ des équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ne s'annule pour aucune

valeur de α . Comme c'est une fonction continue de α , il garde un signe constant et, par suite, la forme quadratique Θ associée à $f(x)$ conserve les mêmes nombres de carrés positifs et négatifs quand α varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour déterminer la nature de Θ , supposons $\alpha < 0$. Il résulte de l'énoncé du n° 12 que Θ est définie positive. Elle l'est donc dans tous les cas.

On démontrerait de même que Θ est définie négative lorsque les racines de $f'(x)$ sont pseudo-positives.

16. THÉORÈME IV. — *Lorsqu'une équation vérifiant la condition $R \neq 0$ admet une racine réelle au plus, les carrés positifs et négatifs de sa forme associée Θ sont respectivement en même nombre que les couples de racines imaginaires pseudo-négatives et pseudo-positives.*

Pour établir ce théorème, nous allons rechercher comment varie le nombre des carrés positifs de Θ lorsqu'on modifie continûment les parties réelles des racines.

Choisissons comme équation initiale l'équation

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) \quad (n = 2m \text{ ou } 2m + 1)$$

qui est supposée vérifier les conditions du théorème IV, et dont les $2m$ racines imaginaires sont pseudo-négatives. Il résulte du théorème III que sa forme associée Θ est une somme de m carrés positifs indépendants.

Soient

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \quad \alpha_2 \pm i\beta_2, \quad \dots, \quad \alpha_m \pm i\beta_m$$

les m couples de racines imaginaires, rangés dans un ordre quelconque. Plusieurs des quantités α pourront être égales entre elles, mais nous supposerons en premier lieu que les β sont tous différents.

Laissons les β constants, faisons varier α_1 depuis sa valeur négative initiale jusqu'à la valeur $-\alpha_1$: tant que α_1 est différent de zéro, le résultant R de φ et de ψ reste différent de zéro. Lorsque α_1 passe par la valeur zéro, un carré de Θ et un seul s'annule. En effet, pour $\alpha_1 = 0$, on a

$$f(x) = (x^2 + \beta_1^2)f'(x),$$

$f'(x)$ n'admettant aucun couple de racines dont la somme soit nulle. Par conséquent, si l'on écrit $f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2)$, les équations $\varphi' = 0$, $\psi' = 0$ n'ont pas de racine commune, et les équations

$$\varphi(x) = (x + \beta_1)\varphi'(x) = 0, \quad \psi(x) = (x + \beta_1)\psi'(x) = 0$$

admettent une racine commune et une seule, d'où résulte (n° 15, 4°) pour Θ un carré déficient et un seul.

En résumé, le passage de α_1 par la valeur zéro modifie d'une unité, tout au plus, le nombre de carrés positifs. Montrons que ce nombre diminue effectivement d'une unité. A cet effet, faisons varier α_2 depuis α_2 jusqu'à $-\alpha_2$, α_3 depuis α_3 jusqu'à $-\alpha_3$, et ainsi de suite.

L'équation à laquelle nous aboutirons finalement aura m couples de racines imaginaires pseudo-positives, et par application du théorème III, sa forme associée Θ sera une somme de m carrés négatifs indépendants. De là résulte que le passage de chaque quantité α par la valeur zéro diminue d'une unité le nombre de carrés positifs de Θ .

Le théorème est donc démontré lorsque les β sont tous différents; étendons-le au cas où plusieurs β sont égaux entre eux.

Soit $f(x) = 0$ une équation vérifiant la condition $R \neq 0$ et admettant $2p$ racines imaginaires pseudo-négatives, $2q$ racines imaginaires pseudo-positives et une racine réelle au plus.

Considérons l'un des groupes de racines ayant même partie imaginaire; soient

$$\alpha_1 \pm \beta_1 i, \quad \alpha_2 \pm \beta_1 i, \quad \dots, \quad \alpha_r \pm \beta_1 i.$$

Parmi les $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, il n'existe pas de groupe α', α'' dont la somme $\alpha' + \alpha'' = 0$, sinon le résultant R serait nul. Déterminons un intervalle $\beta' < \beta < \beta''$ contenant β , mais ne contenant pas de coefficient β_s afférent aux autres racines de l'équation; choisissons, dans cet intervalle, des nombres $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ tous différents et faisons varier continûment les racines $\alpha_1 \pm \beta_1 i, \alpha_2 \pm \beta_1 i, \dots, \alpha_r \pm \beta_1 i$ depuis ces valeurs initiales jusqu'aux valeurs

$$\alpha_1 \pm \beta_1 i, \quad \alpha_2 \pm \beta_2 i, \quad \dots, \quad \alpha_r \pm \beta_r i.$$

Opérons successivement de même pour tous les autres groupes de racines ayant même partie imaginaire. Finalement, nous aboutirons

à une équation $f'(x) = 0$, admettant $2p$ racines imaginaires pseudo-négatives et $2q$ racines imaginaires pseudo-positives, comme l'équation proposée $f(x) = 0$. Les formes quadratiques Θ associées à $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même nature, puisque le résultant R ne s'est jamais annulé au cours de ces transformations et, par application de la première partie de la démonstration, Θ est une somme de p carrés positifs et de q carrés négatifs indépendants. Le théorème se trouve donc établi dans toute sa généralité.

17. Étudions à présent l'équation la plus générale qui vérifie la condition $R \neq 0$ et, à cet effet, commençons par définir ce que nous entendrons par l'expression « rang d'une racine réelle » de l'équation.

Soient x_1, x_2, \dots, x_p les racines réelles de $f(x)$. Cette équation vérifie par hypothèse la condition $R \neq 0$, et il n'y a pas deux racines réelles qui soient égales et de signe contraire. Nous supposons les racines réelles rangées par ordre de grandeur croissant des valeurs absolues :

$$|x_1| \leq |x_2| \leq |x_3| \leq \dots \leq |x_p|,$$

chaque racine multiple étant répétée un nombre de fois égal à son degré de multiplicité. Par définition, le nombre p représentera le rang de la racine x_p .

Soit, par exemple,

$$f(x) = (x + 2)^3 (x + 1)^2 x (x - 3)^2 (x^2 + x + 4)$$

qui vérifie $R \neq 0$. Nous formerons la suite

$$0 \quad -1 \quad -1 \quad -2 \quad -2 \quad -2 \quad +3 \quad +3,$$

et nous dirons que l'équation possède : trois racines négatives de rang pair, à savoir $-1, -2, -2$; une racine positive de rang pair, à savoir 3 .

18. THÉORÈME V. — Lorsque $f(x) = 0$ vérifie la condition $R \neq 0$, le nombre des carrés positifs de Θ est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-négatives de l'équation, augmenté du nombre des racines réelles négatives de rang pair.

De même, le nombre de carrés négatifs de Θ est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-positives de l'équation, augmenté du nombre de racines réelles positives de rang pair.

Soient $\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2$ les couples de racines imaginaires; x_1, x_2, \dots, x_r les racines réelles rangées par ordre de grandeur croissant des valeurs absolues.

Faisons varier la racine x_1 depuis x_1 jusqu'à x_2 par valeurs réelles, puis passons par continuité de la racine double x_2 au couple de racines imaginaires $x_2 \pm \gamma i$, le nombre positif γ étant choisi inférieur au plus petit des nombres β . Pendant cette transformation, la condition $R \neq 0$ a été constamment vérifiée, car l'égalité $x' + x'' = 0$ n'a été satisfaite à aucun instant. Par conséquent la nature de Θ n'a pas été modifiée.

Opérons de même sur le groupe x_3, x_4 de manière à aboutir à un couple de racines imaginaires $x_4 \pm \delta i$, δ étant positif et inférieur à γ , et ainsi de suite. Nous transformerons finalement $f(x)$ en un polynôme de même degré $f'(x)$ vérifiant les conditions du théorème IV, et dont la forme associée Θ' est de même nature que Θ . Comptons les couples de racines imaginaires de $f'(x)$, nous obtenons :

- 1° Les couples de racines imaginaires de $f(x)$;
- 2° p couples de racines imaginaires pseudo-négatives, en désignant par p le nombre de racines négatives contenues dans la suite x_2, x_4, x_6, \dots ;
- 3° q couples de racines imaginaires pseudo-positives, en désignant par q le nombre de racines positives contenues dans la même suite.

Appliquant le théorème IV à l'équation $f'(x) = 0$, nous en déduisons le théorème V.

19. Il est facile de modifier l'énoncé du théorème V pour le rendre applicable au cas où R serait nul :

THÉORÈME V a. — *Le nombre des carrés positifs de Θ est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-négatives de l'équation, augmenté du nombre des racines négatives de rang pair.*

De même, le nombre des carrés négatifs de Θ est égal au nombre des couples de racines imaginaires pseudo-positives de l'équation, augmenté du nombre des racines réelles positives de rang pair.

Toutefois, si l'équation admet des groupes de racines de la forme $\pm \alpha$ ou $\pm \alpha \pm \beta i$ ($\alpha \neq 0$), il ne doit être tenu compte ni des uns ni des autres dans le décompte des nombres des divers genres de racines.

Le nouvel énoncé conduit aux mêmes résultats que l'ancien dans le cas où $R \neq 0$. Si au contraire R est nul, on a vu (n° 15, 4°) qu'on peut poser

$$f(x) = \varpi(x^2) f'(x),$$

$f'(x)$ n'admettant plus de groupes de racines telles que $x' + x'' = 0$. $\varpi(x^2)$ peut contenir x en facteur, mais seulement à une puissance paire.

En écrivant

$$f(x) = \varphi(x^2) + x \psi(x^2), \quad f'(x) = \varphi'(x^2) + x \psi'(x^2),$$

on aura

$$\varphi(x) = \varpi(x) \varphi'(x), \quad \psi(x) = \varpi(x) \psi'(x).$$

Désignant par $F(x, y)$ et $F'(x, y)$ les polynomes F associés à $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$, il viendra

$$F(x, y) = \frac{\varphi(y) \psi(x) - \varphi(x) \psi(y)}{y - x} = \varpi(x) \varpi(y) F'(x, y).$$

La répétition de raisonnements déjà faits plusieurs fois montre alors que les formes Θ et Θ' associées à $f(x)$ et $f'(x)$ contiennent le même nombre de carrés indépendants et que ces carrés sont de même signe. Nous voyons ainsi que la décomposition de Θ en carrés ne donne d'indication que sur les racines de $f'(x)$, à l'exclusion des racines $\pm \alpha$ et $\pm \alpha \pm \beta i$ provenant du polynome $\varpi(x^2)$.

La forme quadratique Θ , donne lieu à un énoncé analogue à celui du théorème Va, sauf que le mot *pair* doit être remplacé par le mot *impair*.

La forme Θ , est en effet associée à l'équation $f_1(x) = x f(x) = 0$ comme Θ l'est à $f(x) = 0$, et l'adjonction de la racine réelle $x = 0$

transforme toutes les racines réelles de rang impair de $f(x)$ en racines de rang pair pour f_1 .

20. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder la démonstration du second critérium, relatif aux équations ayant toutes leurs racines pseudo-négatives.

SECOND CRITÉRIUM. — Soit le polynome à coefficients réels

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x^2) + x \psi(x^2).$$

Pour que les racines de $f = 0$ soient pseudo-négatives, il faut et il suffit que la forme quadratique Θ soit définie positive et que le polynome $\varphi(x)$ ait tous ses coefficients du même signe que a_0 .

Les conditions sont nécessaires : Tout d'abord nous avons démontré (n° 12) que Θ devait être définie positive. En second lieu décomposons $f(x)$ en un produit de facteurs réels du premier et du deuxième degré

$$f(x) = a_0 \Pi(x + \alpha) \Pi(x^2 + \beta x + \gamma).$$

Lorsque toutes les racines sont pseudo-négatives, les α, β, γ sont tous positifs, et, par conséquent, le polynome $f(x)$ est complet et a tous ses coefficients du même signe que a_0 . Pareille propriété est vérifiée *a fortiori* par $\varphi(x)$.

Les conditions sont suffisantes : En premier lieu, la forme Θ étant définie positive, le polynome $f(x)$ vérifie la condition $R \neq 0$, et il résulte du théorème V que l'équation ne peut posséder de racines imaginaires pseudo-positives. Pour démontrer qu'elle ne peut posséder de racines réelles positives, faisons à présent intervenir les conditions relatives à $\varphi(x)$; nous allons montrer que l'existence de racines positives conduirait à une contradiction.

A cet effet, désignons par u la plus grande racine positive et prouvons que la forme quadratique $\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m)$ serait négative pour les valeurs particulières

$$X_1 = 1, \quad X_2 = u^2, \quad X_3 = u^4, \quad \dots, \quad X_m = u^{2m-2}.$$

Soit, comme précédemment, $F(x, y) = \frac{\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y)}{y - x}$ le

polynome générateur de Θ . On a, par définition,

$$\Theta(1, u^2, u^4, \dots, u^{2m-2}) = F(u^2, u^2) = \lim_{x=y=u^2} \frac{\varphi(y)\psi(x) - \varphi(x)\psi(y)}{y-x},$$

c'est-à-dire

$$\Theta(1, u^2, u^4, \dots) = \varphi'(u^2)\psi(u^2) - \varphi(u^2)\psi'(u^2),$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\Theta = \psi(u^2)[\varphi'(u^2) + u\psi'(u^2)],$$

en tenant compte de l'égalité $\varphi(u^2) + u\psi(u^2) = f(u) = 0$.

Faisons à présent intervenir la condition que $\varphi(x)$ a tous ses coefficients de même signe que a_0 . Ceci entraîne

$$a_0 \varphi(u^2) > 0$$

ou

$$a_0 \psi(u^2) < 0,$$

en utilisant à nouveau la condition $f(u) = 0$.

Comme, d'autre part, u est la plus grande racine de $f(x)$, on a

$$a_0 f'(u) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$a_0 \psi(u^2) + 2a_0 u[\varphi'(u^2) + u\psi'(u^2)] \geq 0$$

et, *a fortiori*,

$$a_0[\varphi'(u^2) + u\psi'(u^2)] > 0,$$

d'où

$$\Theta(1, u^2, u^4, \dots) < 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse. Le critérium est donc démontré.

Un critérium analogue s'obtient en utilisant, avec la forme Θ , le polynome ψ et le coefficient a_n au lieu de φ et a_0 . La démonstration est la même, sauf que u devrait représenter la plus petite racine et non la plus grande.

On peut enfin remplacer Θ par Θ_1 , à condition de permuter le rôle de φ et de ψ .

21. Applications. Conduite des calculs. — L'application des théorèmes qu'on vient d'établir nécessite la détermination du signe des carrés indépendants des formes quadratiques Θ et Θ_1 . Tant qu'il s'agit d'équations numériques de faible degré, on peut procéder effec-

tivement à la décomposition en carrés ; mais, dans la majorité des cas, il est préférable de recourir à un théorème que nous allons rappeler et qui n'exige que le calcul des discriminants R et R_1 et de mineurs de ces déterminants.

Soit une forme quadratique Θ à m variables

$$\Theta = \sum c_{\alpha}^{\beta} X_{\alpha} X_{\beta}.$$

Considérons la suite formée par le discriminant R de Θ et des dérivées successives de ce discriminant :

$$(2) \quad R, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1^1}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^m R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_m^m}.$$

Les termes de cette suite sont des mineurs symétriques de R , et le dernier terme est égal à 1.

Le théorème annoncé est le suivant :

1° Lorsque la forme Θ est définie positive, tous les termes de la suite sont positifs.

2° D'une manière générale, lorsque $R, \frac{\partial R}{\partial c_1^1}, \dots$ sont différents de zéro, le nombre de carrés positifs indépendants de Θ est égal au nombre de permanences de la suite (2) et les carrés négatifs sont en nombre égal aux variations (Williamson).

Ces résultats classiques se rattachent à la formule de décomposition

$$\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m) = \varepsilon_1 X_1^2 + \varepsilon_2 (\alpha_2^2 X_1 + X_2)^2 + \dots + \varepsilon_m (\alpha_m^1 X_1 + \alpha_m^2 X_2 + \dots + X_m)^2,$$

laquelle formule suppose que $\Theta(X_1, \dots, X_m), \Theta(0, X_2, \dots, X_m), \dots, \Theta(0, 0, \dots, 0, X_m)$ contiennent respectivement $m, (m-1), (m-2), \dots, 2, 1$ carrés indépendants, autrement dit que les quantités $R, \frac{\partial R}{\partial c_1^1}$, etc. sont différentes de zéro.

Inversement, si ces conditions sont remplies, la décomposition donnée par la formule précédente est possible et d'une seule manière, et les coefficients des carrés sont donnés par les formules d'Hermite

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_m = R, \quad \varepsilon_2 \varepsilon_3 \dots \varepsilon_m = \frac{\partial R}{\partial c_1^1}, \quad \dots, \quad \varepsilon_m = \frac{\partial^{m-1} R}{\partial c_1^1 \dots \partial c_{m-1}^{m-1}}.$$

En divisant ces équations deux à deux, on aura les valeurs de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ et il est évident qu'on obtiendra pour les ε autant de nombres positifs que la suite (2) présente de permanences.

On a supposé qu'on prenait les dérivées successivement par rapport à $c_1^1, c_2^2, \dots, c_m^m$. En principe, on peut intervertir à volonté l'ordre des dérivations. Cependant l'ordre des dérivations peut cesser d'être indifférent lorsque des termes de la suite sont nuls. La démonstration précédente tombe du reste en défaut dans ce cas, et il nous faut entrer dans quelques explications complémentaires.

Plusieurs éventualités peuvent se produire :

1° En premier lieu, la forme quadratique Θ peut se réduire à une somme de $(m - k)$ carrés indépendants. Les k premiers termes de la suite sont alors nuls.

Si la forme quadratique Θ était du type le plus général, il conviendrait de former tous les mineurs d'ordre k , et de s'assurer que l'un de ces mineurs est différent de zéro. Ce calcul est inutile avec les formes quadratiques particulières que nous avons à étudier, car on a démontré au n° 13, 4°, que Θ jouit de cette propriété remarquable que le mineur $\frac{\partial^k R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_k^k}$ est certainement différent de zéro lorsque les carrés indépendants sont en nombre $(m - k)$. En formant les dérivées de R dans l'ordre naturel, on est donc assuré que le nombre des carrés déficients est égal au nombre des premiers termes nuls rencontrés.

Soit donc

$$(3) \quad D^k R, \quad D^{k+1} R, \quad \dots, \quad D^m R \quad \left(D^k = \frac{\partial^k}{\partial c_1^1 \dots \partial c_k^k} \right)$$

la suite des dérivées successives de R , qui débute par le terme $D^k R$ différent de zéro. Si tous les termes de cette suite sont différents de zéro, on pourra appliquer à la forme Θ la règle précédemment énoncée : les carrés positifs et négatifs de Θ seront respectivement en même nombre que les permanences et variations de la suite (3). C'est ce qui résulte de la formule générale

$$\frac{\partial^{k+p} R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_{k+p}^{k+p}} = \frac{\partial^p R'}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_p^p},$$

qui a été donnée au n° 13, 4°.

Le cas où plusieurs termes de la suite (3), à l'exclusion du premier, sont nuls va faire l'objet des 2° et 3°.

2° Plusieurs termes non consécutifs de la suite (3) sont nuls.

Chaque terme nul est donc encadré par deux termes différents de zéro. Dans ce cas, la suite (3) possède les propriétés d'une suite de Sturm : les deux termes qui encadrent un terme nul sont de signes contraires. C'est ce qui résulte de la formule classique

$$R \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^2 \partial c_2^2} = \frac{\partial R}{\partial c_1} \frac{\partial R}{\partial c_2} - \left(\frac{\partial R}{\partial c_1} \right)^2.$$

Un raisonnement par continuité permettra alors d'établir que ce terme nul doit être compté comme formant une permanence et une variation avec les deux termes qui le comprennent.

Pour démontrer cette propriété, commençons par discuter le cas particulier où l'on a $R \neq 0$. Remplaçons l'équation

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

par l'équation plus générale

$$(a_0 + \alpha_0) x^n + (a_1 + \alpha_1) x^{n-1} + \dots + (a_n + \alpha_n) = 0,$$

dans laquelle les α sont arbitraires. Nous pourrions déterminer un domaine $|\alpha_i| < \varepsilon$, à l'intérieur duquel les termes de la suite $R, DR, \dots, D^{m-1}R$ qui sont différents de zéro quand on annule tous les α , gardent un signe constant. Quant aux termes qui s'annulent pour les $\alpha = 0$, ils pourront également s'annuler sur certaines lignes ou surfaces passant par l'origine $\alpha = 0$, mais il existera certainement une infinité de points de ce domaine auxquels correspondra une suite complète $R, DR, \dots, D^{m-1}R$. Pour s'en assurer il suffit de remarquer que les $D^k R$ sont des polynômes en a_0, a_1, \dots, a_n qui ne peuvent être identiquement nuls. Effectivement, nous avons démontré plus haut qu'à toute équation $f(x) = 0$, n'admettant que des racines pseudo-négatives, correspondait une forme quadratique Θ définie positive, et par conséquent une suite complète $R, DR, \dots, D^{m-1}R$. A tous ces points correspondent également des formes Θ de même nature, car R garde un signe constant. Raisonnant alors sur une de ces formes quadratiques Θ , nous en concluons le résultat énoncé : Quel que soit le signe pris par un terme de la suite qui s'annule pour $\alpha = 0$, ce terme

formera une permanence et une variation avec les deux termes non nuls qui le comprennent.

Ce résultat s'étend au cas plus général où Θ est une somme de $(m-k)$ carrés indépendants, comme il résulte des formules du n° 15, 4° :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \varpi(x^2) f'(x), \quad \varpi(x) = \alpha + \beta x + \dots + x^k, \\ \Theta(X_1, X_2, \dots) = \Theta'(X'_1, X'_2, \dots), \\ \frac{\partial^{k+p} R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_{k+p}^{k+p}} = \frac{\partial^p R'}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_p^p}. \end{array} \right.$$

Ne modifions pas le facteur $\varpi(x^2)$, mais, comme nous l'avions fait plus haut pour $f(x)$, remplaçons $f'(x)$ par la forme plus générale

$$(\alpha'_0 + \alpha'_0) x^{n-2k} + (\alpha'_1 + \alpha'_1) x^{n-2k-1} + \dots + (\alpha'_{n-2k} + \alpha'_{n-2k}).$$

Les formules (4) restent constamment vraies, et comme $f'(x)$ satisfait à la condition $R' \neq 0$ comme $f(x)$ satisfaisait tout à l'heure à la condition $R \neq 0$, la généralisation est immédiate.

Nos raisonnements supposent les dérivées prises successivement par rapport à $c_1^1, c_2^2, \dots, c_m^m$. Les explications données au 1° montrent que, si $R = 0$, on doit suivre l'ordre naturel jusqu'à la première dérivée non nulle rencontrée, mais à partir de ce moment il est indifférent d'effectuer les dérivations dans un ordre quelconque, à condition que les dérivées obtenues soient différentes de zéro, de telle sorte qu'il n'y ait pas d'ambiguïté possible sur le décompte des permanences et des variations.

Par continuité, il en sera encore de même lorsqu'il n'y a pas deux dérivées nulles de suite, chaque terme nul compris entre deux dérivées non nulles de signe contraire devant encore être considéré comme formant avec les deux dérivées qui l'encadrent une permanence et une variation.

3° Plusieurs termes consécutifs de la suite (3)

$$D^k R, \quad D^{k+1} R, \quad \dots, \quad D^{n-1} R, \quad 1$$

sont nuls.

$D^k R$ doit se calculer par la formule

$$D^k R = \frac{\partial^k R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2 \dots \partial c_k^k}.$$

Montrons que dans le calcul des termes qui suivent $D^k R$, on peut choisir l'ordre des nouvelles dérivations à effectuer, de telle manière que la circonstance 3° ne se produise pas.

Soient, en effet, Δ et $\Delta' = \frac{\partial \Delta}{\partial c_\alpha^\alpha}$ deux termes consécutifs de la suite (3).

Écrivons

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} c_\alpha^\alpha & \dots & c_\alpha^m \\ \dots & \dots & \dots \\ c_m^\alpha & \dots & c_m^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_\alpha^\alpha & \dots & c_\alpha^m \\ \dots & \Delta' & \dots \\ c_m^\alpha & \dots & c_m^m \end{vmatrix}.$$

Supposons $\Delta \neq 0$ et $\Delta' = 0$. Développons

$$\Delta = c_\alpha^\alpha \Delta' + \sum_{r=s=\alpha+1}^{r=s=m} c_m^r c_s^m \Delta'',$$

Δ'' désignant un mineur du premier ordre de Δ' .

Puisque $\Delta' = 0$ et $\Delta \neq 0$, c'est que l'un au moins de ces mineurs Δ'' est différent de zéro. Or on sait que, lorsqu'un mineur non symétrique d'un déterminant symétrique Δ' est différent de zéro, il existe au moins un mineur symétrique qui est aussi différent de zéro. Soit $\frac{\partial \Delta'}{\partial c_\varepsilon^\varepsilon}$ ce mineur. Prenons les dérivées dans l'ordre $c_1^1 c_2^2 \dots c_\alpha^\alpha c_\varepsilon^\varepsilon \dots$ et nous serons assurés que le terme Δ' se trouvera compris entre deux termes différents de zéro.

En définitive, dans l'hypothèse $R = 0$, on formera d'abord les dérivées dans l'ordre naturel, ce qui fournira sans ambiguïté le mineur principal. A partir de ce moment, il pourra être nécessaire de changer l'ordre des dérivations afin d'éviter la formation de termes consécutifs nuls. La suite obtenue fera connaître le nombre de carrés positifs et négatifs de la forme Θ .

22. *Formation des discriminants R et R₁.* — Soient

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_0, \\ \psi(x) &= B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + \dots + B_0 \end{aligned}$$

les deux polynomes dont il s'agit de former le résultant de Bezout. On démontre aisément que ce résultant, tel qu'il a été défini au n° 15, est

donné par la formule

$$R = \begin{vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \dots & & \Lambda_m \\ -B_1 & -B_2 & \dots & & -B_m \\ \Lambda_2 & \Lambda_3 & \dots & \Lambda_m & 0 \\ -B_2 & -B_3 & \dots & -B_m & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_m & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -B_m & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} B_0 & B_1 & \dots & B_{m-1} \\ \Lambda_0 & \Lambda_1 & \dots & \Lambda_{m-1} \\ 0 & B_0 & \dots & B_{m-2} \\ 0 & \Lambda_0 & \dots & \Lambda_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \Lambda_0 \end{vmatrix},$$

le produit de ces deux matrices s'effectuant par colonnes verticales, conformément aux règles connues du produit de deux déterminants.

Le déterminant R ainsi formé est symétrique; on calculera seulement les termes c_α^β , pour lesquelles $\alpha > \beta$, en désignant respectivement par α et β les rangs des colonnes de la première et de la seconde matrice qui servent à former le terme c_α^β .

Exemple. — Conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation du septième degré ait toutes ses racines pseudo-négatives. Soit

$$f(x) = a_0 x^7 + a_1 x^6 + \dots + a_7.$$

Écrivons $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2)$, nous aurons

$$\varphi(x) = a_1 x^3 + a_3 x^2 + a_5 x + a_7 = \Lambda_3 x^3 + \dots + \Lambda_0,$$

$$\psi(x) = a_0 x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6 = B_3 x^3 + \dots + B_0$$

et, par suite,

$$R = \begin{vmatrix} a_5 & a_3 & a_1 \\ -a_4 & -a_2 & -a_0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ -a_2 & -a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_6 & a_4 & a_2 \\ a_7 & a_5 & a_3 \\ a_6 & a_4 \\ a_7 & a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_5 a_6 - a_4 a_7 & a_3 a_6 - a_2 a_7 & a_1 a_6 - a_0 a_7 \\ a_3 a_6 - a_2 a_7 & a_3 a_4 - a_2 a_3 + a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_4 - a_0 a_5 \\ a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_1 a_4 - a_0 a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 \end{vmatrix},$$

et les conditions pour que l'équation du septième degré ait toutes ses

racines pseudo-négatives s'énoncent

$$R > 0, \quad \frac{\partial R}{\partial c_2^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^2 \partial c_2^2} > 0,$$

$$a_0 a_1 > 0, \quad a_0 a_2 > 0, \quad a_0 a_5 > 0, \quad a_0 a_7 > 0$$

(nous avons remplacé $\frac{\partial R}{\partial c_1^2}$ par $\frac{\partial R}{\partial c_2^2}$ dont l'expression est plus simple).

23. Dans l'étude des questions de stabilité d'un mouvement défini par une équation linéaire à coefficients constants, on aura à exprimer non seulement qu'il y a amortissement, mais encore que l'amortissement s'effectue avec une rapidité suffisante. En d'autres termes, il faut que les racines de l'équation caractéristique

$$f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n = 0$$

soient de la forme $-k^2 + \beta\sqrt{-1}$, k^2 étant supérieur à un nombre positif donné l . Ce problème se ramène au précédent, car, en posant $x = -l + z$, on devra écrire que les racines de l'équation en z : $f(-l + z) = 0$ sont pseudo-négatives. Il faudra donc remplacer, dans les équations de condition, les coefficients a_n, a_{n-1} , etc. par les quantités $f(-l), f'(-l), \frac{f'(-l)}{1.2}$, etc.

TROISIÈME PARTIE.

NOTES COMPLÉMENTAIRES.

24. Dans la seconde Partie de ce Mémoire, nous avons subordonné la démonstration du second critérium à la discussion du polynome $G(x, y)$ étudié dans la première Partie. L'introduction de ce polynome au début du Mémoire, incontestablement avantageuse au point de vue didactique, peut paraître artificielle, et de fait nous n'avons été conduits à le considérer qu'après avoir achevé l'étude du second critérium et approfondi les propriétés des formes quadratiques Θ et Θ_1 . Il n'est donc pas hors de propos d'insister davantage sur la proposition suivante qui a été le point de départ de toute cette étude.

THÉORÈME VI. — *La forme quadratique Θ associée à $f(x)$ est définie positive ou définie négative suivant que les racines de $f(x)$ sont toutes pseudo-négatives ou pseudo-positives.*

Ce cas particulier du premier critérium constitue le seul emprunt qui ait été fait à la première Partie du Mémoire quand il s'est agi d'établir la démonstration du second critérium. Pour établir ce théorème, nous avons eu primitivement recours à deux procédés différents : le premier fait appel à la continuité des racines des équations algébriques, tandis que le second utilise des formules de récurrence vérifiées par les formes Θ et Θ_1 . Nous allons exposer ces deux procédés.

25. *Premier procédé de démonstration du théorème VI.* — Soit l'équation à coefficients réels

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

dont nous supposons le coefficient a_0 constant, les autres pouvant prendre des valeurs arbitraires. On sait que les racines de $f(x) = 0$ sont des fonctions continues des coefficients a_1, a_2, \dots, a_n et réciproquement.

Soit D_0 le domaine des points $|a_1, a_2, \dots, a_n|$ tel que l'équation $f(x) = 0$ ne possède que des racines pseudo-négatives. Montrons que ce domaine est d'un seul tenant.

Écrivons à cet effet le tableau

$$\begin{array}{cccc} x_1, & x_2, & \dots, & x_n, \\ x'_1, & x'_2, & \dots, & x'_n \end{array}$$

des racines de deux équations $f(x) = 0, f'(x) = 0$ qui n'admettent, par hypothèse, que des racines pseudo-négatives. Nous disposerons en tête de chaque suite les couples de racines imaginaires conjuguées. Soient alors

$$\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n$$

des quantités qui varient à partir des valeurs initiales (x_1, x_2, \dots, x_n) pour aboutir aux valeurs $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$. Nous pouvons effectuer le passage des valeurs initiales aux valeurs finales, de telle sorte que la

partie réelle de chaque variable z garde un signe constant. Cela est évident quand x_p et x'_p sont réels, ou encore quand x_p et x_{p+1} sont imaginaires, conjugués en même temps que x'_p et x'_{p+1} . Reste à étudier le cas où des racines réelles x correspondent à des racines imaginaires x' (ou inversement). Supposons par exemple x_p et x_{p+1} réels, tandis qu'on a $x'_{p+1} = \alpha + \beta i$ et $x'_{p+1} = \alpha - \beta i$. On fera varier z_p et z_{p+1} depuis x_p et x_{p+1} jusqu'à α , et ensuite on dédoublera la racine double α en deux racines $\alpha + \beta i$ et $\alpha - \beta i$.

Dans ces transformations continues, les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n gardent des valeurs réelles et la chaîne de points $|a_1, a_2, \dots, a_n|$ se trouve entièrement contenue dans le domaine D_0 , car les quantités z restent constamment pseudo-négatives comme le sont les racines x et x' .

Le même raisonnement est applicable à tout domaine D_p tel que l'équation de degré n possède p racines pseudo-positives et $(n - p)$ racines pseudo-négatives. Tous ces domaines sont d'un seul tenant.

Mettons en évidence dans $f(x)$ les termes de même parité

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) \quad (n = 2m \text{ ou } 2m + 1),$$

et soit $\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m)$ la forme quadratique Θ associée à $f(x)$. C'est une fonction à m variables, et il résulte du n° 13 que le discriminant R de cette forme est différent de zéro lorsque toutes les racines de $f(x)$ sont pseudo-négatives. On en conclut que, dans le domaine D_0 , toutes les formes quadratiques Θ sont des sommes de m carrés indépendants et comportent le même nombre m' de carrés positifs. Il s'agit de démontrer qu'on a $m' = m$ et, à cet effet, il suffira de vérifier le théorème pour une équation particulière de chaque degré.

Tout d'abord, le théorème est vrai pour $n = 1$ et $n = 2$, car on a

$$\begin{array}{llll} n = 1, & f(x) = a_0x + a_1, & m = 0, & \Theta = 0, \\ n = 2, & f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2, & m = 1, & \Theta = a_0a_1X_1^2. \end{array}$$

Démontrons que, si le théorème est vrai pour n , on peut former une équation particulière de degré $n + 2$, vérifiant la même propriété. Voici deux solutions de ce problème :

Première solution. — Prenons

$$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)f(x);$$

$f(x)$ vérifie par hypothèse le théorème VI. On a

$$f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)[\varphi(x^2) + x\psi(x^2)],$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= (\alpha x + \gamma)\varphi(x) + \beta x\psi(x), \\ \psi'(x) &= (\alpha x + \gamma)\psi(x) + \beta\varphi(x).\end{aligned}$$

Faisons $\alpha = 1$, $\gamma = \beta^2$ et montrons qu'on peut choisir β positif suffisamment petit pour que la forme $\Theta'(X_1, X_2, \dots, X_{m+1})$ soit définie positive.

Remplaçant φ' et ψ' par leurs valeurs dans l'expression du polynôme $F'(x, y)$ générateur de Θ' , il vient

$$F'(x, y) = xyF(x, y) + \beta\varphi(x)\varphi(y) + A\beta^2 + B\beta^3 + C\beta^4,$$

A, B, C désignant des polynômes en x et y , dont nous n'aurons pas besoin de connaître l'expression. On a donc la formule de récurrence

$$\Theta'(X_1, X_2, \dots, X_{m+1}) = \theta'(X_1, \dots, X_{m+1}) + A'\beta^2 + B'\beta^3 + C'\beta^4,$$

en désignant par θ' la forme quadratique

$$\theta' = \Theta(X_2, X_3, \dots, X_{m+1}) + \beta P^2.$$

Sans insister sur les détails d'une démonstration rigoureuse, on se rend compte que pour $\beta > 0$ la forme θ' est définie positive et qu'on peut choisir β suffisamment petit pour que Θ' ait tous ses carrés de même signe que ceux de θ' , à la seule condition que les quantités X_1, X_2, \dots, X_{m+1} ne soient pas toutes nulles. Dans ces conditions, le polynôme $f'(x)$ de degré $n + 2$ satisfera bien au théorème VI.

Deuxième solution. — Choisissons α, β, γ de telle sorte que $\beta^2 = 2\alpha\gamma$ et prenons, par exemple,

$$f'(x) = \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)f(x).$$

En utilisant les formules de récurrence relatives à φ' et ψ' on trouve

$$\begin{aligned}F'(x, y) &= \left(\frac{1}{4} + xy\right)F(x, y) \\ &+ \frac{1}{2}\varphi(x)\varphi(y) + \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x)][\varphi(y) + \psi(y)],\end{aligned}$$

d'où, par application des règles du calcul symbolique,

$$\Theta'(X_1, X_2, \dots, X_{m+1}) = \frac{1}{4} \Theta(X_1, X_2, \dots, X_m) + \Theta(X_2, X_3, \dots, X_{m+1}) + \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} Q^2.$$

La forme Θ' est positive et ne peut s'annuler qu'en faisant $X_1 = X_2 = \dots = X_{m+1} = 0$. Elle est donc définie positive.

Une démonstration analogue s'applique au cas où les racines de $f(x)$ sont toutes pseudo-positives. Il suffit de changer le signe de β . La forme Θ est alors définie négative.

La proposition qui fait l'objet du théorème VI est donc établie; et comme ce résultat était le seul dont nous ayons tiré parti dans la démonstration du théorème V, n° 18, cette démonstration est rendue indépendante du premier critérium.

26. Montrons à présent que, inversement, le premier critérium est un corollaire immédiat du théorème V :

Soit $f(x) = 0$ une équation n'ayant pas de racine commune avec $f(-x) = 0$. Considérons les deux équations

$$f(x) = 0, \quad f_1(x) = x f(x) = 0,$$

et désignons par Θ et Θ_1 les formes quadratiques Θ associées à $f(x)$ et $f_1(x)$. Ces équations jouissent toutes deux de la propriété de n'admettre aucun groupe de racines ayant pour expression $\pm \alpha$ ou $\pm \alpha \pm \beta i$ ($\alpha \neq 0$). On peut donc leur appliquer le théorème V, et comme les racines réelles de rang impair de $f(x)$ sont racines de rang pair de $f_1(x)$, on en conclut que les carrés positifs et négatifs de la forme quadratique

$$\Theta(X_1, X_2, \dots, X_m) + \Theta_1(Y_1, Y_2, \dots)$$

sont respectivement en même nombre que les racines pseudo-positives et pseudo-négatives de $f(x)$.

Cette proposition comprend comme cas particulier le premier critérium.

Telle est la marche qui a été effectivement suivie dans l'étude des propriétés des formes quadratiques Θ , Θ_1 et T. Quant à l'idée d'introduire des formes quadratiques, elle a été suggérée par la remarque

suivante, énoncée dans un précédent travail ⁽¹⁾ : Soit D le résultant de Sylvester, relatif aux polynomes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ⁽²⁾. Pour les cinq premiers degrés il a été vérifié que, pour $a_0 > 0$, le déterminant D et tous ses mineurs sont positifs lorsque les racines de $f = 0$ sont toutes pseudo-négatives ⁽³⁾.

Or, le discriminant d'une forme quadratique positive a aussi tous ses mineurs symétriques positifs, et ce rapprochement de propriétés a suggéré l'idée d'introduire dans la question les formes quadratiques. En substituant au résultant de Sylvester le résultant de Bezout, de manière à avoir un déterminant symétrique, nous avons été conduits à étudier la forme quadratique Θ . Nous venons de voir comment s'est imposée l'introduction de la forme Θ , et enfin de la forme T .

Ayant reconnu l'intérêt de cette forme quadratique

$$T = \Theta(X_1, X_2, \dots, X_m) + \Theta_1(Y_1, Y_2, \dots),$$

la question s'est posée de trouver le polynome générateur $G(x, y)$ de cette forme T . Le problème comporte autant de solutions qu'on peut établir de lois de correspondance entre les suites

$$X_1, X_2, \dots, X_m; \quad Y_1, Y_2, \dots$$

et

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n.$$

On a fait choix de la solution

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_2, & X_2 &= Z_4, & \dots, & & X_m &= Z_{2m}, \\ Y_1 &= Z_1, & Y_2 &= Z_3, & \dots, & & & \end{aligned}$$

qui conduit, pour le polynome générateur, à la forme simple

$$G(x, y) = xy F(x^2, y^2) + F_1(x^2, y^2) = \frac{f(x)f(y) - f(-x)f(-y)}{2(x+y)}.$$

Ainsi se trouve justifiée l'introduction, au début de la théorie, du polynome G qui vérifie les formules de récurrence (3) et (4) données au n° 8.

⁽¹⁾ LIÉNARD, *Journal de Mathématiques spéciales*, mai 1911.

⁽²⁾ Pour la définition de ce résultant, se reporter au n° 29.

⁽³⁾ On suppose, dans cet énoncé, que a_0 est positif.

27. *Second procédé de démonstration du théorème VI.* — Il consiste à utiliser des formules de multiplication auxquelles satisfont les polynomes F et F_1 , et qui s'établissent comme celles relatives aux polynomes G .

Soient les polynomes

$$f(x) = f'(x)f''(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2),$$

$$f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2), \quad f''(x) = \varphi''(x^2) + x\psi''(x^2).$$

L'identification donne

$$\varphi(x) = \varphi'(x)\varphi''(x) + x\psi'(x)\psi''(x), \quad \psi(x) = \varphi'(x)\psi''(x) + \varphi''(x)\psi'(x).$$

Désignons par F, F', F'' les polynomes F associés à f, f', f'' ; par F_1, F'_1, F''_1 les polynomes F_1 associés à f, f', f'' , autrement dit les polynomes F associés à $f_1 = xf, f'_1 = xf', f''_1 = xf''$.

Calculons F et F_1 :

$$F(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi(y) & \psi(y) \\ \varphi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}}{y-x}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \varphi'(y)\varphi''(y) + y\psi'(y)\psi''(y) & \varphi'(y)\psi''(y) + \varphi''(y)\psi'(y) \\ \varphi'(x)\varphi''(x) + x\psi'(x)\psi''(x) & \varphi'(x)\psi''(x) + \varphi''(x)\psi'(x) \end{vmatrix}}{y-x}$$

$$= \varphi''(x)\varphi''(y)F(x, y) + \varphi'(x)\varphi'(y)F''(x, y)$$

$$+ \psi''(x)\psi''(y)F_1(x, y) + \psi'(x)\psi'(y)F'_1(x, y).$$

De même :

$$F_1(x, y) = \varphi''(x)\varphi''(y)F'_1(x, y) + \varphi'(x)\varphi'(y)F''_1(x, y)$$

$$+ xy\psi''(x)\psi''(y)F(x, y) + xy\psi'(x)\psi'(y)F'(x, y).$$

Posons

$$\varphi'(x) = A_1 + A_2x + \dots, \quad \varphi''(x) = C_1 + C_2x + \dots,$$

$$\psi'(x) = B_1 + B_2x + \dots, \quad \psi''(x) = D_1 + D_2x + \dots,$$

et désignons par $\Theta, \Theta', \Theta''; \Theta_1, \Theta'_1, \Theta''_1$, les formes qui admettent $F, F', F''; F_1, F'_1, F''_1$, comme polynomes générateurs. L'application du calcul symbolique défini aux nos 6, 7 conduit aux formules

$$\Theta(X_1, X_2, \dots) = \Theta'(C_1X_1 + C_2X_2 + \dots, C_1X_2 + C_2X_3 + \dots)$$

$$+ \Theta''(A_1X_1 + A_2X_2 + \dots, A_1X_2 + A_2X_3 + \dots)$$

$$+ \Theta'_1(D_1X_1 + D_2X_2 + \dots, D_1X_2 + D_2X_3 + \dots)$$

$$+ \Theta''_1(B_1X_1 + B_2X_2 + \dots, B_1X_2 + B_2X_3 + \dots)$$

et

$$\begin{aligned} \Theta_1(Y_1, Y_2, \dots) = & \Theta'_1(C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots, C_1 Y_2 + C_2 Y_3 + \dots) \\ & + \Theta''_1(A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \dots, A_1 Y_2 + A_2 Y_3 + \dots) \\ & + \Theta'(D_1 Y_2 + D_2 Y_3 + \dots, D_1 Y_3 + D_2 Y_4 + \dots) \\ & + \Theta''(B_1 Y_2 + B_2 Y_3 + \dots, B_1 Y_3 + B_2 Y_4 + \dots). \end{aligned}$$

Ces formules fournissent un nouveau procédé de démonstration du théorème VI, indépendant de toute considération relative à la continuité des racines. A cet effet, nous allons montrer que, si l'équation $f = 0$ a toutes ses racines pseudo-négatives, les formes Θ et Θ_1 , associées à f sont définies positives.

En effet, nous avons déjà vu que, dans cette hypothèse, le discriminant de Θ est différent de zéro. Il en est de même pour Θ_1 , car l'équation $f_1 = x f(x) = 0$ n'a qu'une racine nulle et partage avec $f = 0$ la propriété de ne pas admettre de groupe de racines x' , x'' telles que $x' + x'' = 0$.

D'autre part, les formules précédentes montrent avec évidence que, si le théorème est vrai pour f' et f'' , il est vrai pour le polynôme $f = f' f''$. Il suffit donc de le vérifier pour les deux premiers degrés, ce qui se fait immédiatement en se reportant aux valeurs données au n° 12.

28. Sur la condition $R > 0$. — Les développements qui précèdent ont mis en évidence la supériorité du second critérium au point de vue de la simplicité, la moitié des conditions que donne ce critérium se réduisant à la forme simple $a_0 a_k > 0$. Peut-on aller plus loin dans la voie de la simplification? A cet égard, nous allons montrer que la condition de degré le plus élevé, à savoir

$$R > 0,$$

est irréductible et ne peut être remplacée par aucune autre de degré inférieur.

Soit l'équation générale

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

dans laquelle a_0 est supposé constant. Nous considérerons, pour la commodité du langage, les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n comme les coor-

données d'un point M d'un hyperespace à n dimensions, et nous donnerons les noms de surfaces et de lignes à des multiplicités à $(n - 1)$ et $(n - 2)$ dimensions.

Soient $D_0, D_1, \dots, D_p, \dots, D_n$ les régions de l'hyperespace où l'équation $f(x) = 0$ admet $0, 1, \dots, p, \dots, n$ racines pseudo-positives. Nous avons démontré précédemment que ces régions sont d'un seul tenant. Cherchons à présent les équations des surfaces qui séparent ces $(n + 1)$ régions.

Lorsqu'on modifie les racines d'une façon continue, les coefficients a_1, a_2, \dots, a_n varient d'une façon continue et réciproquement. Le point figuratif $M(a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'une équation $f(x) = 0$ ne peut donc passer d'une région à une autre sans qu'une racine réelle s'annule ou qu'une racine imaginaire devienne purement imaginaire. Étudions successivement ces deux cas :

1° Lorsqu'une racine s'annule, il vient $a_n = 0$; et réciproquement, si a_n passe du positif au négatif, le nombre de racines positives change de parité. La totalité du plan $a_n = 0$ forme donc limite de régions D_0, D_1, \dots, D_n .

2° Lorsqu'une racine devient purement imaginaire, on a

$$f(x) = (x^2 + \beta^2) f'(x).$$

Posant

$$f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2), \quad f'(x) = \varphi'(x^2) + x\psi'(x^2),$$

on en conclut

$$\varphi(x) = (x + \beta^2) \varphi'(x), \quad \psi(x) = (x + \beta^2) \psi'(x),$$

et, par conséquent, les équations $\varphi = 0, \psi = 0$ ont une racine commune. Elles n'en ont qu'une seule si $f(x)$ n'admet pas d'autre groupe de racines purement imaginaires ou telles que $x' + x'' = 0$. Cela entraîne

$$(1) \quad R = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1} \neq 0.$$

Mais la réciproque n'est pas vraie. Tout point de la surface $R = 0$ vérifiant $\frac{\partial R}{\partial c_1} \neq 0$ n'est pas nécessairement limite de régions D_p et D_q ;

en effet, les conditions (1) entraînent

$$\varphi(x) = (x + \gamma) \varphi'(x), \quad \psi(x) = (x + \gamma) \psi'(x),$$

φ' et ψ' n'ayant pas de racine commune. Il en résulte que γ est réel, mais cette quantité réelle peut être positive, nulle ou négative, et il correspond aux valeurs négatives de γ une certaine nappe Σ de la surface $R = 0$, laquelle nappe n'est pas limite séparative des régions D .

Désignons par S le reste de la surface R , c'est-à-dire la nappe $\gamma > 0$. Tout point de cette nappe forme limite séparative, car aux environs de ce point l'équation $f(x) = 0$ admettra deux racines infiniment voisines de $\sqrt{-\gamma}$, c'est-à-dire telles que

$$\varepsilon \pm (1 + \eta) \sqrt{-\gamma},$$

avec ε et η infiniment petits et de signes quelconques. Le point M passera donc d'une région D_p à une région contiguë D_q lorsque ε passera du positif au négatif.

Enfin, si l'on a $R = 0$, $\frac{\partial R}{\partial c_1^1} = 0$, tous les mineurs du premier ordre de R sont nuls et, par suite, il en est de même pour les dérivées partielles

$$\frac{\partial R}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial a_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial R}{\partial a_n}.$$

Le point M est un point multiple de la surface $R = 0$. Des points de cette nature forment des lignes singulières dont il n'est pas nécessaire d'étudier ici les propriétés. Il nous suffit de remarquer que ni la nappe Σ , ni les lignes singulières ne peuvent pénétrer dans les régions D_0 et D_n , car, dans ces régions, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de racine commune avec $f(-x) = 0$, et par suite $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ n'ont pas de racine commune.

Étudions à présent la forme quadratique Θ . Son discriminant est égal à R et elle contient m variables en désignant par $2m$ ou $2m + 1$ le degré de $f(x)$. Pour $R \neq 0$, la forme Θ est décomposable en m carrés indépendants; pour $R = 0$, $\frac{\partial R}{\partial c_1^1} \neq 0$, un carré s'annule et par conséquent la surface $R(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ divise l'espace en $m + 1$ régions auxquelles correspondent $0, 1, 2, \dots, m$ carrés positifs pour Θ . A ce nouveau point de vue, les nappes S et Σ de la surface R inter-

viennent en totalité comme limites de régions, tandis que le plan $a_n = 0$ n'intervient pas. On se rend compte à présent que la surface $\Sigma = 0$ doit figurer comme un lieu de points pour lesquels les règles générales tombent en défaut, et l'on se rend compte en même temps de la raison pour laquelle la condition $R > 0$ est irréductible : la région D_0 , où doit se trouver le point figuratif $M(a_1, a_2, \dots, a_n)$ lorsque toutes les racines sont pseudo-négatives, est limitée par les surfaces

$$a_0 a_n = 0, \quad R = 0.$$

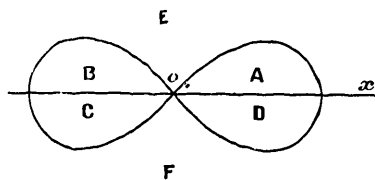
Les deux conditions $a_0 a_n > 0$ et $R > 0$ seraient donc suffisantes si le plan a_n et la surface R ne se coupaient plusieurs fois en divisant l'espace en plusieurs régions D_0, D', D'', \dots ; et c'est pour fixer le choix de la région D_0 qu'interviennent les $n - 2$ conditions additionnelles données par les deux critères.

Précisons ces considérations par un exemple :

Soit la lemniscate

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

qui, jointe à l'axe des x , divise le plan en six régions A, B, C, D, E, F.



Pour exprimer que le point (x, y) se trouve dans la région E, il suffit des deux inégalités

$$f(x, y) > 0 \quad (y > 0).$$

S'agit-il au contraire d'exprimer que ce point se trouve dans la région A, il faut écrire trois inégalités, savoir :

1° Les deux inégalités

$$f(x, y) < 0 \quad (y > 0),$$

qui sont vérifiées par les deux régions A et B.

2° Une dernière condition qui sera, par exemple, $x > 0$, mais qui pourrait tout aussi bien s'écrire $x + y > 0$ ou $ax - y^2 > 0$ et d'une façon générale $\varphi(x, y) > 0$, la courbe $\varphi = 0$ devant seulement être choisie de telle sorte qu'elle ne pénètre pas dans les régions A et B et qu'elle laisse ces deux régions de part et d'autre.

Mais, quelle que soit la troisième condition, les deux premières sont irréductibles.

QUATRIÈME PARTIE.

COMPARAISON AVEC LA MÉTHODE DE ROUTH.

29. Commençons par énoncer les relations qui existent entre les résultants R, R₁ de Bezout et le résultant D que fournit la méthode de Sylvester appliquée aux deux polynômes φ et ψ . Pour ne pas grossir démesurément le texte de ce travail, nous nous bornerons à de brèves indications.

Soit l'équation

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \varphi(x^2) + x \psi(x^2).$$

En rangeant dans un ordre convenable les lignes du résultant de Sylvester, on peut mettre ce résultant sous la forme

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & a_{n-2} & a_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2m+1-n} & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Le déterminant D est d'ordre $n - 1$ et sa diagonale principale est égale à a_1, a_2, \dots, a_{n-1} . Nous désignerons par Δ_p le mineur constitué par les p premières lignes et colonnes de D. On aura donc $\Delta_{n-1} = D$, puisque D est d'ordre $n - 1$.

Par analogie nous désignerons par Δ_n le déterminant

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{n-2m} & \dots & a_{n-2} & a_n \end{vmatrix}.$$

On a évidemment $\Delta_n = a_n D$. Le déterminant Δ_n n'est autre que le résultant de Sylvester relatif aux polynomes $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ définis par l'identité

$$x f(x) = f_1(x) = \varphi_1(x^2) + x \psi_1(x^2).$$

Distinguons deux cas suivant la parité de n :

1° $n = 2m + 1$. On a les formules

$$R = D = \Delta_{n-1}, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1^1} = \Delta_{n-3}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^1 \partial c_2^2} = \Delta_{n-5}, \quad \frac{\partial^{m-1} R}{\partial c_1^1 \dots \partial c_{m-1}^{m-1}} = \Delta_2.$$

Pour ne pas compliquer l'écriture, esquissons la démonstration dans le cas particulier $n = 7, (m = 3)$.

On a

$$D = \Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \end{vmatrix}.$$

Multiplions D par le déterminant μ (1)

$$\mu = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix} & -a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & -a_0 & -a_2 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = a_1^3.$$

(1) Cf. les expressions de D et μ avec celles des matrices du n° 22 dont le produit donne le résultant R de Bezout.

Effectuons l'opération par colonnes verticales :

$$\mu \Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_7 & a_5 & a_3 & a_1 a_2 - a_0 a_3 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & \\ 0 & a_7 & a_5 & a_1 a_4 - a_0 a_5 & a_3 a_4 - a_2 a_5 + a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_2 a_6 - a_2 a_7 & \\ 0 & 0 & a_7 & a_1 a_6 - a_0 a_7 & a_3 a_6 - a_2 a_7 & a_5 a_6 - a_4 a_7 & \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$a_1^3 \Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ a_5 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} \times R = a_1^3 R$$

ou

$$\Delta_6 = R.$$

L'égalité $\Delta_4 = \frac{\partial R}{\partial c_1^2}$ se démontrerait de même en supprimant : dans Δ_6 les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes; dans μ , les deux premières lignes, la première et la dernière colonne, et ainsi de suite. La démonstration est générale.

2° $n = 2m$. On a les formules

$$R = a_0 \Delta_{n-1}, \quad \frac{\partial R}{\partial c_1^2} = a_0 \Delta_{n-3}, \quad \frac{\partial^2 R}{\partial c_1^2 \partial c_2^2} = a_0 \Delta_{n-5}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^{m-1} R}{\partial c_1^2 \dots \partial c_{m-1}^2} = a_0 \Delta_1.$$

Enfin le second résultant R , de Bezout vérifie des relations analogues, à savoir :

1° Pour $n = 2m + 1$, la suite formée par R , et ses dérivées successives par rapport aux éléments de la diagonale principale s'écrit :

$$a_0 \Delta_n, \quad a_0 \Delta_{n-2}, \quad \dots, \quad a_0 \Delta_1, \quad 1.$$

2° Pour $n = 2m$, cette suite devient

$$\Delta_n, \quad \Delta_{n-2}, \quad \dots, \quad \Delta_2, \quad 1.$$

Rapprochant ces résultats, nous voyons que les deux suites formées par les dérivées successives de R et de R , s'écrivent :

$$(1) \quad \begin{cases} 1, & \Delta_2, & \Delta_4, & \Delta_6, & \dots, \\ 1, & a_0 \Delta_1, & a_0 \Delta_3, & a_0 \Delta_5, & \dots \end{cases}$$

Les derniers termes de ces deux suites sont Δ_n et $\alpha_0 \Delta_{n-1}$ quand n est pair, et Δ_{n-1} et $\alpha_0 \Delta_n$ quand n est impair.

30. Ce sont ces relations qui vont permettre de ramener les résultats obtenus par Routh aux propositions démontrées dans la première Partie. Pour abrégé, bornons-nous au cas où toutes les quantités $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ sont différentes de zéro. Dans ce cas, les suites (1) sont complètes, les formes quadratiques Θ et Θ , possèdent le nombre maximum de carrés indépendants et les carrés positifs et négatifs de Θ et de Θ , sont respectivement en même nombre que les permanences et les variations des deux suites (1).

Transformons cet énoncé; deux nombres α, β forment une permanence ou une variation suivant que leur produit $\alpha\beta$ est positif ou négatif. Donc le nombre total des permanences (variations) des deux suites est égal au nombre de termes positifs (négatifs) des deux suites

$$\begin{array}{cccc} \Delta_2, & \Delta_2 \Delta_4, & \Delta_4 \Delta_6, & \dots, \\ \alpha_0 \Delta_1, & \alpha_0^2 \Delta_1 \Delta_3, & \alpha_0^2 \Delta_3 \Delta_5, & \dots, \end{array}$$

c'est-à-dire au nombre de termes positifs (négatifs) de la suite unique

$$\alpha_0 \Delta_1, \Delta_2, \Delta_1 \Delta_3, \Delta_2 \Delta_4, \Delta_3 \Delta_5, \dots, \Delta_{n-2} \Delta_n.$$

Ce nombre est d'autre part égal, pour une raison analogue à celle donnée ci-dessus, au nombre de permanences (variations) de la suite

$$(2) \quad \alpha_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \frac{\Delta_4}{\Delta_3}, \dots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

En résumé, l'énoncé du théorème II (n° 10) peut être mis sous la forme suivante :

THÉORÈME II a. — *Lorsque tous les Δ sont différents de zéro, le nombre de racines pseudo-négatives (pseudo-positives) d'une équation algébrique à coefficients réels est égal au nombre de permanences (variations) de la suite*

$$\alpha_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

On remarquera qu'on a

$$\Delta_1 = a_1, \quad \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = a_n.$$

31. Méthode de Routh. — Par application du théorème de Cauchy le nombre de racines pseudo-négatives d'une équation

$$f(z) = f(x + y\sqrt{-1}) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

est égal à la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (i = \sqrt{-1}),$$

évaluée le long d'un contour formé par l'axe des y et par une demi-circonférence de rayon infini situé du côté des x négatifs.

Désignons par $f_0(y)$ et $f_1(y)$ les deux polynomes

$$\begin{aligned} f_0(y) &= a_0 y^n - a_2 y^{n-2} + a_4 y^{n-4} + \dots, \\ f_1(y) &= a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

[Ces deux polynomes sont en valeur absolue égaux respectivement à $\varphi(-y^2)$ et $y\psi(-y^2)$ ou inversement.]

Nous obtiendrons pour valeur prise par $f(z)$ en un point de l'axe Oy :

$$f(z) = f(yi) = i^n [f_0(y) - i f_1(y)] = i^n \rho e^{i\varphi}.$$

L'intégrale étendue à l'axe Oy a donc pour valeur

$$\frac{1}{2\pi} \Delta\varphi.$$

$\Delta\varphi$ est la variation de l'argument φ lorsque y varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Pour calculer $\Delta\varphi$, il est nécessaire de connaître l'ordre dans lequel se succèdent les racines des deux équations $f_0(y) = 0$ et $f_1(y) = 0$, et à cet effet Routh effectue sur les polynomes f_0 et f_1 les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur et parvient au résultat suivant :

THÉORÈME DE ROUTH. -- Soit

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 Q_1 - f_2, \\ f_1 &= f_2 Q_2 - f_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ f_{n-2} &= f_{n-1} Q_{n-1} - f_n, \end{aligned}$$

l'algorithme du plus grand commun diviseur; le nombre des racines pseudo-négatives (pseudo-positives) de $f(x)$ est égal au nombre des permanences (variations) de la suite formée par les coefficients des termes de plus haut degré en y dans les polynomes f_0, f_1, \dots, f_n .

52. Comparaison entre le théorème de Routh et le théorème II a.

— L'identité de l'énoncé du théorème II a avec le théorème de Routh va résulter de la démonstration du théorème suivant :

Les coefficients de Routh sont respectivement égaux aux termes de la suite (2).

Pour faciliter la démonstration nous allons modifier les notations et écrire

$$\begin{aligned} f_0(y) &= a_0^0 y^n - a_2^0 y^{n-2} + a_4^0 y^{n-4} + \dots, \\ f_1(y) &= a_1^1 y^{n-1} - a_3^1 y^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Nous avons ajouté un second indice 0 aux coefficients de f_0 et un indice 1 aux coefficients de f_1 . De même nous poserons

$$\begin{aligned} f_2(y) &= a_2^2 y^{n-2} - a_4^2 y^{n-4} + \dots, \\ f_3(y) &= a_3^3 y^{n-3} - a_5^3 y^{n-5} + \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Effectuons les opérations de la recherche du plus grand commun diviseur, il vient

$$f_0(y) = \frac{a_0^0}{a_1^1} y f_1(y) - f_2(y),$$

ce qui fournit les formules d'identification

$$a_2^2 = a_2^0 - \frac{a_0^0}{a_1^1} a_3^1, \quad a_4^4 = a_4^0 - \frac{a_0^0}{a_1^1} a_5^1, \quad a_{2p}^{2p} = a_{2p}^0 - \frac{a_0^0}{a_1^1} a_{2p+1}^1.$$

Considérons maintenant le déterminant Δ_n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_3^1 & a_5^1 & \dots & 0 \\ a_0^0 & a_2^0 & a_4^0 & \dots & \cdot \\ 0 & a_1^1 & a_3^1 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

On ne modifie pas la valeur de Δ_n en ajoutant aux éléments de chacune des lignes de rang pair les éléments de la ligne de rang impair qui la précède immédiatement, multipliés par $-\frac{a_0^0}{a_1^1}$, et cette transformation n'altère pas non plus la valeur des mineurs $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$.

Or, après cette modification, les éléments d'une ligne de rang pair deviennent

$$0, a_2^2, a_4^2, a_6^2, \dots$$

De là résulte la formule

$$\Delta_n = a_1^1 \begin{vmatrix} a_2^2 & a_4^2 & a_6^2 & \dots \\ a_1^1 & a_3^1 & a_5^1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}.$$

Le nouveau déterminant est formé avec les coefficients de f_1 et f_2 de la même manière que Δ_n était formé avec ceux de f_0 et f_1 . Nous pourrions effectuer sur ce nouveau déterminant une transformation analogue qui mettra en évidence le facteur a_2^2 multiplié par une fonction des coefficients de f_2 et f_3 , etc. De proche en proche nous arrivons ainsi à la relation

$$\Delta_n = a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n.$$

Pareillement, la transformation s'appliquera aux mineurs Δ_p et conduira à la formule

$$\Delta_p = a_1^1 a_2^2 \dots a_p^p.$$

De ces formules résultent les égalités

$$a_1^1 = \Delta_1, \quad a_2^2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad a_3^3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad \dots, \quad a_n^n = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

ce qui démontre le théorème.

À la vérité, Routh conduit les calculs de la recherche du plus grand

commun diviseur d'une manière un peu différente de celle que nous venons d'indiquer pour les besoins de l'identification. A chaque division, Routh introduit un facteur positif choisi de manière à éviter les coefficients fractionnaires. Les calculs sont ainsi simplifiés tant qu'il s'agit d'équations numériques, mais cet avantage disparaît dans le cas des équations littérales.

La série des restes f_2, f_3, \dots, f_n est complète lorsque les quantités Δ sont toutes différentes de zéro. Dans le cas contraire, la série pourra comprendre moins de $n - 1$ termes, soit parce que f_0 et f_1 auront un plus grand commun diviseur, soit parce que le degré des restes s'abaissera de plus d'une unité à chaque opération. Nous renverrons au Mémoire de Routh pour l'examen des modifications à apporter à la méthode lorsque ces circonstances se produisent. C'est surtout dans ces cas que se manifeste la supériorité de la méthode de Routh appliquée aux équations numériques.

33. *Correspondance de nos résultats et de ceux d'Hermite.* — Soient $F(z) = 0$ une équation à coefficients imaginaires, $F_0(z)$ le polynome obtenu en changeant i en $-i$ dans tous les coefficients de $F(z)$. Hermite considère le polynome réel symétrique en z et z'

$$H(z', z) = -i \frac{F(z') F_0(z) - F(z) F_0(z')}{z' - z}$$

et démontre que la décomposition en carrés de la forme quadratique associée donne les signes des coefficients de i des racines de $F(z)$.

Soit $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2) = 0$ une équation à coefficients réels. Pour appliquer le théorème d'Hermite à la détermination du signe de la partie réelle des racines de $f(x)$, il suffit de considérer l'équation

$$F(z) = f(-iz) = \varphi(-z^2) - iz\psi(-z^2) = 0,$$

car les racines $f(-iz)$ sont celles de $f(x)$ multipliées par i . On trouve alors, tous calculs faits, pour la fonction $H(z', z)$ correspondant

$$H(z', z) = -2 \frac{z' \psi(-z'^2) \varphi(-z^2) - z \psi(-z^2) \varphi(-z'^2)}{z' - z}$$

que nous écrivons, en multipliant haut et bas, par $z' + z$,

$$\frac{H(z', z)}{2} = \frac{z'^2 \psi(-z'^2) \varphi(-z^2) + z z' [\psi(-z'^2) \varphi(-z^2) - \psi(-z^2) \varphi(-z'^2)] - z^2 \psi(-z^2) \varphi(-z'^2)}{z'^2 - z^2}.$$

Comparons à la fonction $G(x, y)$

$$G(x, y) = \frac{f(x) f(y) - f(-x) f(-y)}{2(x+y)} = \frac{x \psi(x^2) \varphi(y^2) + y \psi(y^2) \varphi(x^2)}{x+y}.$$

Multipliant haut et bas par $x - y$, on peut encore écrire

$$G(x, y) = \frac{-y^2 \psi(y^2) \varphi(x^2) + xy [\psi(y^2) \varphi(x^2) - \psi(x^2) \varphi(y^2)] + x^2 \psi(x^2) \varphi(y^2)}{x^2 - y^2}.$$

On passe de l'expression de $G(x, y)$ à celle de $-\frac{H(z', z)}{2}$ en changeant pour les puissances paires de x , x^{2p} en $(-z^2)^p$ et pour les puissances impaires, x^{2p+1} en $z(-z^2)^p$, et de même pour y et z' . On passera donc de la forme $T(Z_1, Z_2, \dots)$ associée à $G(x, y)$ à la forme quadratique associée à $-\frac{H(z', z)}{2}$ en changeant

$$\begin{array}{l} \text{en} \\ Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6, Z_7, \dots \\ Z_1, Z_2, -Z_3, -Z_4, Z_5, Z_6, -Z_7, \dots \end{array}$$

Le changement de signe de quelques variables n'ayant pas d'influence sur la décomposition en carrés, la correspondance des résultats est établie.

La règle de correspondance donnée ci-dessus entre les x et z ou entre les y et z' peut du reste se justifier en faisant les remarques suivantes :

1° L'application de cette règle de correspondance séparément aux numérateurs et aux dénominateurs de $-\frac{H}{2}$ et de G permute les numérateurs l'un dans l'autre et de même pour les dénominateurs.

2° Il revient au même d'effectuer la modification séparément sur le numérateur et le dénominateur ou de l'opérer sur le quotient Q après division effectuée. Cela tient à ce que le dénominateur $x^2 - y^2$ ne contient que des puissances paires de x et de y et qu'en multipliant Q par $x^2 - y^2$, les exposants de x et y gardent l'un et l'autre la même parité.

