JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE DUHEM

Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 10 (1914), p. 347-416.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10__347_0>

Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles;

PAR PIERRE DUHEM.

Il y a quelque temps, nous avons donné un Mémoire destiné à examiner et à éclaircir certains paradoxes qui s'étaient rencontrés dans l'étude des corps diamagnétiques ([1]). Dans ce Mémoire, nous avons été conduits à établir la stabilité ou l'instabilité de certains états d'équilibre électrique ou magnétique.

Les méthodes qui nous ont permis d'obtenir ces résultats offraient un assez grave inconvénient; développées pour le cas où le système étudié contient un seul corps homogène, elles ne paraissaient pas susceptibles de s'étendre aux systèmes composés de plusieurs corps de nature différente.

Pour remédier à cet inconvénient, nous avons tenté d'aborder d'un autre biais des questions analogues à celles qui se trouvaient traitées dans notre précédent Mémoire. La méthode suivie dans le présent travail consiste à tracer, en quelque sorte, la voie qu'il conviendrait de suivre si l'on voulait résoudre d'une manière effective le problème général de l'Électrodynamique, tel que la théorie de H. von Helmholtz le pose pour un système de corps immobiles.

Nous montrons comment la solution de ce problème se ramène à la détermination de quatre fonctions, la fonction potentielle électrostatique et les trois fonctions de Helmholtz. La détermination de la fonction potentielle électrostatique dépend de l'intégration d'une équation

([1]) *Sur le diamagnétisme* (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. IX, 1913, p. 89).

aux dérivées partielles qui, selon les circonstances, peut être du second ordre ou du troisième ordre. La fonction potentielle électrostatique une fois déterminée, la détermination de chacune des fonctions de Helmholtz résulte de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Pour chacun de ces problèmes, et dans chacun des cas qu'il peut présenter, nous examinons les questions de détermination et de stabilité.

CHAPITRE PREMIER.

PRÉLIMINAIRES.

1. *Grandeurs qui définissent l'état du système étudié.* — Le système étudié se compose de corps homogènes qui sont contigus les uns aux autres le long de surfaces de discontinuité.

Ces corps sont électrisés. L'électrisation du système est définie lorsque l'on connaît, en chaque point intérieur à un corps homogène, la *densité électrique solide* e, et, en chaque point des surfaces de discontinuité, la *densité électrique superficielle* E.

Ces corps sont parcourus par des courants de conduction; ces courants sont déterminés lorsque l'on connaît, en chaque point intérieur à un corps homogène, les composantes u, v, w de la *densité du courant de conduction*.

En tout point intérieur à un corps homogène, on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Soient :

S, la surface le long de laquelle se touchent deux corps homogènes 1 et 2;
M, un point de la surface S;
M_1, un point du corps 1, infiniment voisin du point M;
M_2, un point du corps 2, infiniment voisin du point M;
n_1, la demi-normale en M, à la surface S, dirigée vers l'intérieur du corps 1;

n_2, la demi-normale en M, à la surface S, dirigée vers l'intérieur du corps 2;
E, la densité électrique superficielle au point M;
(u_1, v_1, w_1), la densité du courant de conduction au point M_1;
(u_2, v_2, w_2), la densité de courant de conduction au point M_2.

On a, en tout point M de la surface S et à tout instant,

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \\
& + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z) + \frac{\partial E}{\partial t} = 0.
\end{aligned}
$$

Les corps du système sont des diélectriques polarisés; les composantes de l'*intensité de polarisation* sont, en un point d'un corps homogène, représentées par A′, B′, C′. Au même point, la *densité du courant de déplacement* a pour composantes

$$
(3) \qquad u' = \frac{\partial A'}{\partial t}, \qquad v' = \frac{\partial B'}{\partial t}, \qquad w' = \frac{\partial C'}{\partial t}.
$$

Au même point, la *densité du courant total* a pour composantes

$$
(4) \qquad \varphi = u + u', \qquad \psi = v + v', \qquad \chi = w + w'.
$$

Enfin, les divers corps du système sont aimantés; en un point d'un corps homogène, les composantes de l'*intensité d'aimantation* sont A, B, C.

2. *Fonctions employées.* — Au moyen des grandeurs que nous venons d'énumérer, on compose certaines fonctions dont nous allons rappeler les définitions.

Nous considérerons, en premier lieu, la *fonction potentielle des charges électriques* répandues sur le système. Au point (ξ, η, ζ), cette fonction a pour valeur

$$
(5) \qquad \Upsilon(\xi, \eta, \zeta) = \int \frac{e}{r} d\varpi + \int \frac{E}{r} dS.
$$

$d\varpi$ est un élément de volume d'un corps homogène;
dS, un élément d'une surface de discontinuité;
r, la distance, soit de l'élément $d\varpi$, soit de l'élément dS, au point (ξ, η, ζ);

enfin la première intégrale s'étend à tous les volumes homogènes, la seconde à toutes les surfaces de discontinuité.

La *fonction potentielle de la polarisation diélectrique* a pour valeur

$$(6) \qquad V'(\xi,\eta,\zeta)=\int\left(A'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+B'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+C'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi;$$

(x, y, z) est un point de l'élément $d\varpi$.

Nous aurons également à considérer les trois fonctions :

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{V}(\xi,\eta,\zeta)=\int\Big[&\frac{1+k}{2}\frac{\varphi}{r}\\
&+\frac{1-k}{2}\frac{x-\xi}{r}\left(\frac{x-\xi}{r}\varphi+\frac{y-\eta}{r}\psi+\frac{z-\zeta}{r}\chi\right)\Big]d\varpi,\\
\mathfrak{v}(\xi,\eta,\zeta)=\int\Big[&\frac{1+k}{2}\frac{\psi}{r}\\
&+\frac{1-k}{2}\frac{y-\eta}{r}\left(\frac{x-\xi}{r}\varphi+\frac{y-\eta}{r}\psi+\frac{z-\zeta}{r}\chi\right)\Big]d\varpi,\\
\mathfrak{W}(\xi,\eta,\zeta)=\int\Big[&\frac{1+k}{2}\frac{\chi}{r}\\
&+\frac{1-k}{2}\frac{z-\zeta}{r}\left(\frac{x-\xi}{r}\varphi+\frac{y-\eta}{r}\psi+\frac{z-\zeta}{r}\chi\right)\Big]d\varpi;
\end{aligned}\right.$$

k est une constante numérique, la *constante de Helmholtz*.

La *fonction potentielle magnétique* a pour valeur, au point (ξ, η, ζ),

$$(8) \qquad V(\xi,\eta,\zeta)=\int\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi.$$

Nous lui adjoindrons les trois fonctions

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned}
\Phi(\xi,\eta,\zeta)&=\int\left(C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}-B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi,\\
\Psi(\xi,\eta,\zeta)&=\int\left(A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-C\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)d\varpi,\\
X(\xi,\eta,\zeta)&=\int\left(B\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-A\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)d\varpi.
\end{aligned}\right.$$

3. *Propriétés analytiques, en tout point d'un milieu continu, des diverses fonctions employées.* — En vertu de leur définition même, ces fonctions possèdent diverses propriétés; nous allons rappeler celles dont nous aurons à faire usage, en commençant par celles qui sont vérifiées en tout point d'un milieu continu.

En tout point d'un tel milieu, on a :

$$\Delta \Upsilon = -4\pi e; \tag{10}$$

$$\Delta V' = 4\pi\left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z}\right); \tag{11}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta \mathfrak{V} &= -4\pi\varphi + (1-k)\frac{\partial^2(\Upsilon + V')}{\partial x\, \partial t}, \\ \Delta \mathfrak{Q} &= -4\pi\psi + (1-k)\frac{\partial^2(\Upsilon + V')}{\partial y\, \partial t}, \\ \Delta \mathfrak{W} &= -4\pi\chi + (1-k)\frac{\partial^2(\Upsilon + V')}{\partial z\, \partial t}; \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z} = -k\frac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial t}; \tag{13}$$

$$\Delta V = 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right); \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Delta \Phi &= 4\pi\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \\ \Delta \Psi &= 4\pi\left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right), \\ \Delta X &= 4\pi\left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right); \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0; \tag{16}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi A, \\ \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= -\frac{\partial V}{\partial y} + 4\pi B, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi C. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

4. *Propriétés analytiques, en tout point d'une surface de discontinuité, des diverses fonctions employées.* — Au passage de la surface de contact de deux milieux continus, 1 et 2, la fonction Υ demeure continue; ses dérivées partielles du premier ordre sont discontinues et vérifient la relation

$$(18)\qquad \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1}+\frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2}=-4\pi E.$$

Au passage d'une surface de discontinuité, la fonction V' est continue; ses dérivées partielles du premier ordre sont discontinues et vérifient la relation

$$(19)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial V'}{\partial n_1}+\frac{\partial V'}{\partial n_2}=4\pi[\ & A'_1\cos(n_1,x)+B'_1\cos(n_1,y)+C'_1\cos(n_1,z)\\ &+A'_2\cos(n_2,x)+B'_2\cos(n_2,y)+C'_2\cos(n_2,z)].\end{aligned}$$

Au passage d'une surface de discontinuité, les fonctions $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{W}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre.

En tout point d'une telle surface, la fonction V est continue; ses dérivées partielles du premier ordre sont discontinues et vérifient la relation

$$(20)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial n_1}+\frac{\partial V}{\partial n_2}=4\pi[\ & A_1\cos(n_1,x)+B_1\cos(n_1,y)+C_1\cos(n_1,z)\\ &+A_2\cos(n_2,x)+B_2\cos(n_2,y)+C_2\cos(n_2,z)].\end{aligned}$$

En tout point d'une surface de discontinuité, les trois fonctions Φ, Ψ, X demeurent continues; leurs dérivées partielles du premier ordre sont discontinues et vérifient la relation

$$(21)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial n_1}+\frac{\partial \Phi}{\partial n_2}=4\pi[\ & C_1\cos(n_1,y)-B_1\cos(n_1,z)\\ &+C_2\cos(n_2,y)-B_2\cos(n_2,z)]\end{aligned}$$

et deux relations analogues.

5. *Équations des mouvements électrique et magnétique.* — En vertu des lois, données par H. von Helmholtz, de l'induction électrodynamique et électromagnétique, les composantes de la densité de courant de conduction vérifient, en chaque point, les équations

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=-\frac{\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial(\Upsilon+V')}{\partial x}-\frac{a^2}{2\rho}\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}-\frac{a}{\rho\sqrt{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial t},\\ v&=-\frac{\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial(\Upsilon+V')}{\partial y}-\frac{a^2}{2\rho}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial t}-\frac{a}{\rho\sqrt{2}}\frac{\partial\Psi}{\partial t},\\ w&=-\frac{\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial(\Upsilon+V')}{\partial z}-\frac{a^2}{2\rho}\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}-\frac{a}{\rho\sqrt{2}}\frac{\partial X}{\partial t}.\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations,

ε' est la constante des actions électrostatiques,

$\frac{a^2}{2}$ la constante des actions électrodynamiques,

ρ la résistance spécifique du milieu.

La théorie de Helmholtz nous apprend également que les composantes A', B', C' de l'intensité de polarisation diélectrique vérifient les équations

$$
(23) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A' &= -\varepsilon' K' \frac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial x} - \frac{a^2}{2} K' \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - \frac{a}{\sqrt{2}} K' \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\
B' &= -\varepsilon' K' \frac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial y} - \frac{a^2}{2} K' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} - \frac{a}{\sqrt{2}} K' \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \\
C' &= -\varepsilon' K' \frac{\partial(\Upsilon + V')}{\partial z} - \frac{a^2}{2} K' \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} - \frac{a}{\sqrt{2}} K' \frac{\partial X}{\partial t}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations, K' est le coefficient de polarisation diélectrique du milieu.

Enfin les composantes A, B, C de l'aimantation vérifient les trois équations

$$
(24) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A &= -\varepsilon K \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} \right), \\
B &= -\varepsilon K \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} \right), \\
C &= -\varepsilon K \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations, ε est la constante des actions magnétiques et K le coefficient d'aimantation.

6. *Position du problème général de l'Électrodynamique pour un système immobile.* — Posons

$$
(25) \qquad \Upsilon + V' = W
$$

et donnons à cette fonction W le nom de *fonction potentielle électrostatique totale.*

Posons également

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{U} + \Phi = \mathfrak{F}, \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{V} + \Psi = \mathfrak{G}, \\ \dfrac{a}{\sqrt{2}}\mathfrak{W} + \mathrm{X} = \mathfrak{H}, \end{cases}$$

et donnons aux fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ le nom de *fonctions totales de Helmholtz.*

Si l'on connaît la fonction potentielle électrostatique totale W *et les trois fonctions totales de Helmholtz* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, *on peut déterminer toutes les grandeurs qui définissent l'état du système* et qui ont été énumérées au n° **1**.

En effet, en vertu des égalités (25) et (26), les égalités (22) et (23) peuvent s'écrire :

$$(27)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} - \dfrac{a}{\rho\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}, \\ v = -\dfrac{\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} - \dfrac{a}{\rho\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}, \\ w = -\dfrac{\varepsilon'}{\rho}\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} - \dfrac{a}{\rho\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}; \end{cases}$$

$$(28)\quad \begin{cases} \mathrm{A}' = -\varepsilon'\mathrm{K}'\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} - \dfrac{a\mathrm{K}'}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}, \\ \mathrm{B}' = -\varepsilon'\mathrm{K}'\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} - \dfrac{a\mathrm{K}'}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}, \\ \mathrm{C}' = -\varepsilon'\mathrm{K}'\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} - \dfrac{a\mathrm{K}'}{\sqrt{2}}\dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}. \end{cases}$$

Il résulte de ces équations que la connaissance des quatre fonctions W, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ entraîne la connaissance des composantes u, v, w de la densité du courant de conduction et des trois composantes A′, B′, C′ de la polarisation diélectrique.

La connaissance de ces trois dernières détermine, par les égalités (3), les composantes de la densité du courant de déplacement.

D'autre part, les égalités (11), (12) et (25) donnent, en chaque point d'un corps homogène appartenant au système,

$$\Delta W - 4\pi\left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z}\right) = -4\pi e.$$

De même, les égalités (18), (19) et (25) donnent, en chaque point d'une surface de discontinuité,

$$\frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{\partial W}{\partial n_2} - 4\pi[\ A'_1 \cos(n_1, x) + B'_1 \cos(n_1, y) + C'_1 \cos(n_1, z)] \\ + A'_2 \cos(n_2, x) + B'_2 \cos(n_2, y) + C'_2 \cos(n_2, z)] = -4\pi E.$$

W étant connu ainsi que A′, B′, C′, ces égalités font connaître, en tout point d'un corps homogène, la densité électrique solide e, et, en tout point d'une surface de discontinuité, la densité électrique superficielle E.

Les égalités (24) et (26) donnent les égalités

$$\begin{aligned} A &= -\varepsilon K\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right), \\ B &= -\varepsilon K\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial X}{\partial x}\right), \\ C &= -\varepsilon K\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right), \end{aligned}$$

que les égalités (17) transforment en

$$(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= -\frac{\varepsilon K}{1 + 4\pi\varepsilon K}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right), \\ B &= -\frac{\varepsilon K}{1 + 4\pi\varepsilon K}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right), \\ C &= -\frac{\varepsilon K}{1 + 4\pi\varepsilon K}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

Lorsque l'on connaît les fonctions totales de Helmholtz, ces égalités font connaître, en tout point du système, les composantes A, B, C de l'aimantation.

La proposition énoncée est ainsi justifiée.

Le problème général de l'Électrodynamique pour un système immobile consiste donc à déterminer les valeurs prises, en chaque point du système et à chaque instant, par les quatre fonctions W, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$.

7. *Conditions aux limites.* — Cette détermination est subordonnée à certaines conditions qui constituent les données du problème. Certaines de ces conditions doivent être vérifiées, quel que soit le temps t, en tout point de la surface fermée Σ qui borne le système; certaines autres doivent être vérifiées en tout point du système, mais seulement à l'instant initial.

En un point de la surface Σ qui limite le système, nous désignerons par N la normale dirigée vers l'intérieur du système. Nous supposerons alors que l'on connaisse, en chaque point de la surface Σ et à chaque instant t,

La valeur de W ou la valeur de $\frac{\partial W}{\partial N}$,

La valeur de $\mathcal{F}$ ou la valeur de $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}$,

La valeur de $\mathcal{G}$ ou la valeur de $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial N}$,

La valeur de $\mathcal{H}$ ou la valeur de $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N}$.

8. *Conditions initiales.* — A l'instant initial, nous supposons que l'on connaisse, en chaque point du système, les valeurs de W, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$. Ces déterminations doivent être, bien entendu, d'accord avec les conditions aux limites.

CHAPITRE II.

DÉTERMINATION DE LA FONCTION POTENTIELLE ÉLECTROSTATIQUE TOTALE.

9. Différentions la première des égalités (27) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, ajoutons-les membre à membre et observons :

1° Qu'en vertu des égalités (1) et (10),

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{\partial \Upsilon}{\partial t};$$

2° Qu'en vertu des égalités (13), (16), (25) et (26), on a, quel que soit t,

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = - k \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}$$

et, partant,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right) = - k \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}. \tag{30}$$

Nous trouvons l'équation

$$\Delta \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta \mathrm{W} - \frac{2\sqrt{2}\pi a k}{\rho} \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2} = 0. \tag{31}$$

Différentions la première des égalités (28) par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (11) et (30). Nous trouvons l'égalité

$$\Delta \mathrm{V}' + 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}' \Delta \mathrm{W} - 2\sqrt{2}\pi a k \mathrm{K}' \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2} = 0. \tag{32}$$

Prenons un point sur la surface qui sépare deux masses homogènes quelconques, 1 et 2. En ce point, l'égalité (18) est vérifiée quel que soit t. Différentions-la par rapport à t, en tenant compte de l'égalité (2); nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2}\right) &- u_1 \cos(n_1, x) - v_1 \cos(n_1, y) - w_1 \cos(n_1, z) \\ &- u_2 \cos(n_2, x) - v_2 \cos(n_2, y) - w_2 \cos(n_2, z) = 0.]\end{aligned}$$

Dans cette égalité, remplaçons les u, v, w par leurs expressions (27) et observons, comme nous l'avons vu au n° 4, qu'au passage à travers une surface de discontinuité, les dérivées partielles du premier ordre par rapport à x, y, z de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ varient d'une manière continue; nous trouvons qu'on doit avoir, en tout point d'une telle surface de discontinuité, l'équation

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n_1} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial n_2} = 0. \tag{33}$$

Enfin, dans l'équation (19), remplaçons les A', B', C' par leurs expressions (28), en observant qu'une surface de discontinuité laisse continues les dérivées partielles du premier ordre de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ par rapport à x, y, z; nous trouvons l'équation

$$(34) \qquad \frac{\partial V'}{\partial n_1} + \frac{\partial V'}{\partial n_2} + 4\pi\varepsilon' K'_1 \frac{\partial W}{\partial n_1} + 4\pi\varepsilon' K'_2 \frac{\partial W}{\partial n_2} = 0.$$

Les quatre égalités (31), (32), (33) et (34) vont nous conduire à la détermination de la fonction potentielle électrostatique totale W. Nous allons, en effet, en déduire des équations où ne figurent plus que W et ses dérivées partielles.

10. Différentions l'égalité (32) par rapport à t et, membre à membre, ajoutons l'égalité obtenue à l'égalité (31); souvenons-nous que

$$(25) \qquad \Upsilon + V' = W,$$

et posons, pour abréger,

$$(35) \qquad U = \frac{W}{\rho} + K' \frac{\partial W}{\partial t};$$

nous trouverons l'équation

$$(36) \qquad \Delta \frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \Delta U - 2\sqrt{2}\pi a k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre que W doit vérifier en tout point d'un corps homogène appartenant au système.

Différentions l'égalité (34) par rapport à t et, membre à membre, ajoutons l'égalité obtenue à l'égalité (33), en tenant compte des égalités (25) et (35); nous trouvons l'égalité

$$(37) \qquad \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \left(\frac{\partial U}{\partial n_1} + \frac{\partial U}{\partial n_2} \right) = 0.$$

Telle est la condition que doit vérifier la fonction W en tout point appartenant à une des surfaces de discontinuité du système.

Le premier des trois problèmes qu'il s'agit de résoudre consiste à déterminer, dans tout le système, une fonction W qui satisfasse aux conditions (36) et (37), lorsque l'on connaît, à chaque instant, les valeurs prises par cette fonction W en chacun des points de la surface Σ qui limite le système, et, à l'instant initial, les valeurs prises par certaines grandeurs convenablement choisies.

11. Supposons d'abord, et jusqu'à nouvel ordre, que la constante k de Helmholtz soit différente de zéro. Il est clair que, sans contredire aux équations (36) et (37), nous pouvons, à l'instant initial, choisir arbitrairement, en chaque point du système, les valeurs de W, $\frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, sous les seules restrictions suivantes :

1° En chaque point de chacune des surfaces de discontinuité du système, ces valeurs vérifient l'équation (37) et celle qu'on en déduit à l'aide d'une différentiation par rapport à t;

2° En chaque point de la surface qui limite le système, W, $\frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ prennent les valeurs données.

L'équation (36) détermine alors, en chaque point du système et à l'instant initial, la valeur prise par $\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}$.

12. Nous remarquons ensuite qu'on peut, sans contredire aucunement aux équations (31), (32), (33) et (34), choisir arbitrairement, à un instant donné, en tout point du système, les valeurs de W, $\frac{\partial W}{\partial t}, \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Ces valeurs une fois choisies, en effet, l'équation (32) nous apprend que $\Delta V'$ est déterminé en chaque point du système; et comme ΔW l'est également, $\Delta \Upsilon = \Delta W - \Delta V'$ est déterminé, à l'instant considéré, en chaque point du système.

L'équation (34) nous apprend qu'en chaque point d'une surface de discontinuité, $\frac{\partial V'}{\partial n_1} + \frac{\partial V'}{\partial n_2}$ a une valeur déterminée; mais

$$\frac{\partial W'}{\partial n_1} + \frac{\partial W'}{\partial n_2} = \frac{\partial V'}{\partial n_1} + \frac{\partial V'}{\partial n_2} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2}$$

a également, à ce même instant et en ce même point, une valeur déterminée; il en est donc de même de $\frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2}$.

L'équation (31) nous apprend qu'à l'instant considéré et en chaque point du système, $\Delta \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$ a une valeur déterminée; comme il en est de même de $\frac{\partial W}{\partial t}$ et, partant, de $\Delta \frac{\partial W}{\partial t}$, il en est aussi de même de $\Delta \frac{\partial V'}{\partial t}$.

Enfin l'équation (33) nous apprend qu'en chaque point d'une surface de discontinuité, à l'instant considéré, $\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$ a une valeur déterminée; comme il en est de même de

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial W'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial W'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial V'}{\partial t},$$

on voit qu'à cet instant et en ce point, $\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial V'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial V'}{\partial t}$ a une valeur déterminée.

Si l'on tient compte des égalités (1), (3), (10) et (12), on voit qu'en chaque point du système, à l'instant considéré, les quantités

$$\begin{gathered} e, \\ \frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \end{gathered}$$

ont des valeurs déterminées.

Si l'on tient compte des égalités (2), (3), (18) et (19), on voit qu'à l'instant considéré, en chaque point d'une surface de discontinuité appartenant au système, les quantités

$$\begin{gathered} E, \\ A'_1 \cos(n_1, x) + B'_1 \cos(n_1, y) + C'_1 \cos(n_1, z) \\ + A'_2 \cos(n_2, x) + B'_2 \cos(n_2, y) + C'_2 \cos(n_2, z), \\ u_1 \cos(n_1, x) + v_1 \cos(n_1, y) + w_1 \cos(n_1, z) \\ + u_2 \cos(n_2, x) + v_2 \cos(n_2, y) + w_2 \cos(n_2, z), \\ u'_1 \cos(n_1, x) + v'_1 \cos(n_1, y) + w'_1 \cos(n_1, z) \\ + u'_2 \cos(n_2, x) + v'_2 \cos(n_2, y) + w'_2 \cos(n_2, z) \end{gathered}$$

ont des valeurs déterminées.

Or, il est facile de déterminer d'une infinité de manières une polarisation diélectrique telle qu'en chaque point du système,

$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z} = f,$$

et qu'en chaque point d'une surface de discontinuité,

$$\begin{aligned} &A'_1 \cos(n_1, x) + B'_1 \cos(n_1, y) + C'_1 \cos(n_1, z) \\ &+ A'_2 \cos(n_2, x) + B'_2 \cos(n_2, y) + C'_2 \cos(n_2, z) = F, \end{aligned}$$

f et F ayant des valeurs données. Voici, en particulier, une solution immédiate de ce problème :

Posons

$$P = \frac{1}{4\pi}\int \frac{f}{r} d\varpi + \frac{1}{4\pi}\int \frac{F}{r} dS,$$

la première intégrale s'étendant au volume entier du système et la seconde à toutes les surfaces de discontinuité; et prenons ensuite en chaque point

$$A' = -\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad B' = -\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad C' = -\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Ce que nous venons de dire de la polarisation diélectrique se peut répéter des courants de conduction (u, v, w) et des courants de déplacement (u', v', w').

On voit donc qu'on peut, lorsqu'on a choisi arbitrairement, à un instant donné et en chaque point du système, les valeurs de W, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$, déterminer, en chaque point de ce système, la densité électrique solide ou superficielle, la polarisation diélectrique, la densité du courant de conduction et la densité du courant de déplacement de telle manière que les équations (31), (32), (33) et (34) soient vérifiées.

13. Considérons un des corps homogènes dont le système se compose; soit $d\varpi$ un élément du volume de ce corps.

Multiplions le premier membre de l'égalité (31) par $\frac{\partial W}{\partial t} d\varpi$ et intégrons pour le volume entier du corps considéré. Nous obtenons l'égalité

$$\frac{2\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho}\int \frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,d\varpi = \int\left(\Delta\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\Delta W\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi.$$

Soient S la surface qui limite le corps homogène considéré et, en un point de cette surface, n_i la normale dirigée vers l'intérieur du corps. L'égalité précédente peut se mettre sous la forme que voici :

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho}\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\
&= -\frac{2\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \\
&\quad -\int\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\
&\quad -\int\left(\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial n_i}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,dS.
\end{aligned}$$

Pour chacun des corps homogènes qui composent le système, écrivons une égalité analogue, et ajoutons membre à membre toutes ces égalités, en tenant compte des égalités (33). Nous obtiendrons ainsi l'égalité

$$\begin{aligned}
(38)\quad &\pi\frac{d}{dt}\int\left\{\frac{\sqrt{2}\,ak}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + \frac{2\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi \\
&= -\int\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\
&\quad -\int\left(\frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial N}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\Sigma.
\end{aligned}$$

Les deux premières intégrales s'étendent au volume entier du système; la troisième s'étend à la surface qui limite ce système.

Considérons maintenant l'égalité (32); différentions-la par rapport à t, multiplions le résultat par $\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi$ et intégrons pour le volume entier d'un des corps homogènes du système. Nous obtenons ainsi l'égalité

$$2\sqrt{2}\,\pi a k K'\int\frac{\partial W}{\partial t}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}\,d\varpi = \int\left(\Delta\frac{\partial V'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' K'\Delta\frac{\partial W}{\partial t}\right)\frac{\partial W}{\partial t}\,d\varpi.$$

Cette égalité peut se transformer en la suivante :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\,\pi a k \mathrm{K}' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\
&= 2\sqrt{2}\,\pi a k \mathrm{K}' \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi \\
&\quad - 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}' \int \left[\left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial t}\,d\mathrm{S}.
\end{aligned}$$

Pour chacun des corps homogènes qui composent le système, écrivons une égalité analogue; ajoutons membre à membre toutes ces égalités; observons que l'égalité (34), vérifiée à chaque instant en chaque point d'une surface de discontinuité, nous donne aussi, en ce point et à chaque instant, l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}'_1 \frac{\partial}{\partial n_1}\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon \mathrm{K}'_2 \frac{\partial}{\partial n_2}\frac{\partial \mathrm{W}'}{\partial t} = 0,$$

et nous obtiendrons l'égalité

$$\begin{aligned}
(39)\qquad &\pi \frac{d}{dt} \int \sqrt{2}\, a k \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\
&= 2\pi \int \Bigg\{ \sqrt{2}\, a k \mathrm{K}' \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}\right)^2 \\
&\qquad - 2\varepsilon' \mathrm{K}' \left[\left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] \Bigg\} d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 \mathrm{V}'}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\
&\quad - \int \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{N}}\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \mathrm{K}' \frac{\partial}{\partial \mathrm{N}}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\,d\Sigma.
\end{aligned}$$

Ajoutons maintenant membre à membre les deux égalités (38) et (39), en nous souvenant que

$$(25)\qquad \Upsilon + \mathrm{V}' = \mathrm{W},$$

et nous trouvons enfin l'égalité que voici :

$$(40)\quad \begin{aligned} &\pi \frac{d}{dt}\int\left\{\sqrt{2}\,ak\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + K'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right]\right. \\ &\qquad \left. + \frac{2\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]\right\} d\varpi \\ &= -\int(1 + 4\pi\varepsilon' K')\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ &\quad + 2\sqrt{2}\,\pi ak\int K'\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi \\ &\quad - \int\left[\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial N} + (1 + 4\pi\varepsilon' K')\frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial W}{\partial t}\right]\frac{\partial W}{\partial t}\,d\Sigma. \end{aligned}$$

Cette égalité fondamentale va nous servir à établir deux propositions importantes.

14. Nous allons examiner, d'abord, si la constante k de Helmholtz peut être négative.

Supposons qu'elle le soit, et voyons quelles conséquences découlent de cette supposition.

La résistance spécifique ρ est positive pour tous les corps.

L'expérience nous apprend qu'il existe assurément des corps pour lesquels le coefficient de polarisation diélectrique K' est positif.

Prenons un ou plusieurs de ces corps pour en composer le système que nous allons étudier; en tout point de la surface Σ qui borne ce système, maintenons à la fonction potentielle électrostatique totale W une valeur indépendante du temps t, la même en tout point de la surface Σ.

$\frac{\partial W}{\partial t}$ étant nul en tout point de la surface Σ, au second membre de l'égalité (40) la dernière intégrale disparaît.

Posons

$$(41)\quad \begin{aligned} J = \pi\int&\left\{\sqrt{2}\,ak\left[\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + K'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2\right]\right. \\ &\left. + \frac{2\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]\right\} d\varpi. \end{aligned}$$

L'égalité (40) deviendra

$$(42)\quad \frac{dJ}{dt} = -\int (1+4\pi\varepsilon' K')\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] d\varpi + 2\sqrt{2}\,ak\int K'\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)^2 d\varpi.$$

Le second membre de cette égalité (42) est forcément négatif, à moins qu'on n'ait simultanément, en tous les points du système, les quatre égalités

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

De ces égalités, les trois premières exigent que la fonction $\frac{\partial W}{\partial t}$, qui est continue dans tout le système, ait même valeur en tous les points de ce système; et comme $\frac{\partial W}{\partial t}$ est nul en tous les points de la surface Σ qui enclôt le système, la valeur en question ne peut être que zéro. Les trois premières égalités précédentes équivalent donc à l'égalité, vérifiée dans tout le système,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Mais au cas où cette dernière égalité serait vérifiée, J, en vertu de l'égalité (41), se réduirait à

$$2\pi\varepsilon'\int \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi,$$

quantité qui ne peut être que nulle ou positive. Si donc, à un certain instant, $\frac{dJ}{dt}$ s'annulait, c'est qu'à cet instant, J serait nul ou positif.

Soit J_0 la valeur initiale de J. Nous pouvons évidemment, dans le système, disposer des valeurs initiales de W, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ de telle manière que la valeur initiale J_0 soit négative. Cela se peut faire d'une infinité de manières; la suivante est évidente.

La fonction W est seulement assujettie à prendre une valeur donnée en tout point de la surface Σ; donnons-lui cette valeur en tout point du système; nous aurons alors, à l'instant initial, en tout point du système,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

La fonction $\frac{\partial W}{\partial t}$ est seulement assujettie à prendre la valeur o en tout point de la surface Σ; donnons-lui, aux divers points du système, des valeurs différentes de zéro.

La fonction $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ est seulement assujettie à prendre la valeur o en tout point de la surface Σ; donnons-lui, dans tout le système, la valeur o.

J_0 sera alors la valeur prise, à l'instant initial, par la quantité

$$\sqrt{2}\, ak\pi \int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi,$$

et cette valeur sera sûrement négative.

Ce que nous savons de J_0 et de $\frac{dJ}{dt}$ nous apprend que la quantité J sera constamment négative, qu'elle décroîtra constamment, et que sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite avec t.

Pour cela, il faut et il suffit ou bien que

$$\int \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t, ou bien que la quantité

$$\frac{d}{dt} \int K' \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

soit, à partir d'une certaine valeur de t, constamment positive et qu'elle croisse au delà de toute limite avec t. Mais alors, on peut affirmer que la quantité

$$\int K' \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

croîtra au delà de toute limite avec t.

Les propositions démontrées ne peuvent être exactes que si celle-ci l'est aussi : La valeur absolue de la quantité $\frac{\partial W}{\partial t}$ croît au delà de toute limite avec t, au moins en certains points du système.

D'ailleurs, comme $\frac{\partial W}{\partial t}$ demeure constamment nul en tout point de la surface Σ qui entoure le système, la proposition précédente entraîne celle-ci : Il existe dans le système au moins certains points où les valeurs absolues des quantités $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial t}$ croissent au delà de toute limite avec t.

De cette proposition, tirons une conclusion dont la signification physique soit plus claire.

Imaginons que l'équilibre électrique et magnétique soit établi sur notre système borné par une surface Σ en tout point de laquelle la fonction potentielle électrostatique totale W a la même valeur. On sait alors que W a aussi cette même valeur en tout point intérieur au système. Il n'y a, à l'intérieur de ce système, ni charge électrique ni polarisation diélectrique.

A ce système, imposons une perturbation initiale définie comme nous venons de le faire, et maintenons invariable la valeur uniforme du niveau potentiel électrostatique total auquel est portée la surface qui le termine. Il y aura certainement, dans le système, des points où la valeur absolue de la vitesse avec laquelle varie la fonction potentielle électrostatique totale croîtra au delà de toute limite avec le temps. Cela peut assurément être regardé comme marquant l'instabilité de l'équilibre électrique du système considéré.

Ainsi, si la constante k était négative, l'équilibre électrique serait instable sur un système à la fois conducteur et diélectrique dont on maintient la surface à un niveau potentiel électrostatique uniforme et constant.

La supposition que la constante k de Helmholtz est négative entraîne une impossibilité physique.

15. On ne peut donc attribuer à la constante k de Helmholtz qu'une valeur nulle ou positive. Réservons pour plus tard le cas où cette constante serait nulle, et supposons-la positive :

$$k > 0. \tag{43}$$

Imaginons qu'il existe un ou plusieurs corps dont le coefficient de polarisation diélectrique soit négatif :

$$(44) \qquad K' < 0,$$

mais dont le pouvoir inducteur spécifique soit positif :

$$1 + 4\pi\varepsilon' K' > 0.$$

Imaginons que le système soit formé d'un tel corps ou de plusieurs tels corps.

Pour ce système, écrivons encore les égalités (41) et (42). Ces égalités nous apprendront :

1° Que $\frac{dJ}{dt}$ est forcément négatif ou nul;

2° Que si $\frac{dJ}{dt}$ est nul, J est nécessairement positif ou nul.

Dès lors, si l'on peut s'arranger de telle sorte que la valeur initiale J_0 de J soit négative, J demeurera négatif quel que soit t, et sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite avec t.

Mais on peut évidemment faire en sorte que J_0 soit négatif. On y parviendra, par exemple, de la façon suivante :

W est assujetti seulement à prendre une valeur donnée sur la surface Σ. A l'instant initial, on lui donnera cette même valeur en tout point du système.

$\frac{\partial W}{\partial t}$ est assujetti seulement à prendre la valeur 0 en tout point de la surface Σ; on lui donnera, aux divers points du système, des valeurs arbitraires, mais généralement différentes de zéro.

$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ est assujetti seulement à prendre la valeur 0 en tout point de la surface Σ; en chaque point du système, donnons-lui une valeur de même signe que $\frac{\partial W}{\partial t}$ et dont la valeur absolue surpasse $\frac{1}{\rho K'} \frac{\partial W}{\partial t}$.

D'ailleurs, pour que J reste négatif quel que soit t et croisse au delà de toute limite avec t, il faut que

$$\int K' \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

demeure sans cesse négatif et que sa valeur absolue croisse au delà de toute limite avec t.

En reproduisant ce qui a été dit au numéro précédent, on voit que *si l'on maintient invariable la valeur uniforme du niveau potentiel électrostatique total à la surface du système considéré, l'équilibre électrique sera instable sur ce système.*

16. La constante k de Helmholtz ne peut être négative, et nous sommes convenus de laisser provisoirement de côté le cas où elle serait nulle.

Le coefficient de polarisation diélectrique K′ ne peut être négatif, et nous renvoyons à un autre Chapitre l'étude des corps non diélectriques pour lesquels il serait nul.

Nous allons donc nous borner à étudier le cas où nous avons les deux inégalités

$$k > 0, \tag{45}$$

$$K' > 0. \tag{46}$$

Une nouvelle égalité va nous fournir certaines propositions relatives à ce cas.

Multiplions les deux membres de l'égalité (36) par $\frac{\partial U}{\partial t} d\varpi$ et intégrons pour tous les éléments de volume de l'un des corps homogènes qui forment le système. Nous trouvons l'égalité

$$\int \frac{\partial U}{\partial t}\left(\Delta \frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \Delta U\right) d\varpi - 2\sqrt{2}\,\pi a k \int \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} d\varpi = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 d\varpi \\
&\quad + 2\pi\varepsilon' \frac{d}{dt}\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \\
&\quad + \int \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t} + \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right) d\varpi \\
&\quad + \int \frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial W}{\partial t} + 4\pi\varepsilon' \frac{\partial U}{\partial n_i}\right) dS \qquad = 0.
\end{aligned}$$

Mais, en vertu de l'égalité (33),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\frac{K'}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\frac{K'}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2,$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial t}\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2+\frac{K'}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\Bigg\{&\sqrt{2}\,\pi a k\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+2\pi\varepsilon'\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]\\&+\frac{K'}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]\Bigg\}d\varpi\\=&-\int\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi\\&-\int\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial n_i}\frac{\partial W}{\partial t}+4\pi\varepsilon'\frac{\partial U}{\partial n_i}\right)dS.\end{aligned}$$

Écrivons une telle égalité pour chacun des corps homogènes qui constituent le système, et ajoutons toutes ces égalités membre à membre en tenant compte de l'égalité (37). Nous trouverons l'égalité

$$\begin{aligned}(47)\quad\frac{d}{dt}\int\Bigg\{&\sqrt{2}\,\pi a k\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2+2\pi\varepsilon'\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]\\&+\frac{K'}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]\Bigg\}d\varpi\\=&-\int\frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi\\&-\int\frac{\partial U}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial W}{\partial t}+4\pi\varepsilon'\frac{\partial U}{\partial N}\right)d\Sigma.\end{aligned}$$

Cette égalité (47) va nous permettre de démontrer deux propositions importantes si nous supposons, conformément aux inégalités (43) et (46), que *la constante k de Helmholtz est positive* et que, *pour tous les corps du système, le coefficient de polarisation diélectrique* K' *est positif.*

17. La première de ces propositions sera la suivante :

Si la valeur de la fonction W *est donnée, à chaque instant, en tout point de la surface qui limite le système; si, à l'instant initial, les valeurs de* W, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ *sont données dans tout le système, il ne saurait exister deux intégrales continues distinctes des équations* (36) *et* (37).

Imaginons, en effet, que deux intégrales W′, W″, des équations (36) et (37), vérifient également la condition aux limites et les conditions initiales qui viennent d'être définies; posons

$$W = W'' - W';$$

W sera encore une intégrale des équations (36) et (37), en sorte que cette différence vérifiera l'égalité (47).

Mais, en chaque point de la surface Σ, W′ et W″ prennent, à chaque instant, la même valeur donnée; sur la surface Σ donc, leur différence W est constamment nulle; il en est, dès lors, de même de $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ et de

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}.$$

Au second membre de l'égalité (47), le second terme disparaît; il ne reste que le premier, qui ne peut être positif.

Posons

$$(48)\quad L = \int \Bigg\{ \sqrt{2}\,\pi a k \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + 2\pi\varepsilon' \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{K'}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right] \Bigg\}\, d\varpi.$$

L'égalité (47) nous enseigne maintenant que L ne peut être une fonction croissante de t. Cette quantité L, d'ailleurs, ne peut être négative; si donc elle est nulle à un instant quelconque, elle sera nulle à tout instant postérieur à celui-là.

Mais, à l'instant initial, on a, en tout point du système,

$$W' = W'', \qquad \frac{\partial W'}{\partial t} = \frac{\partial W''}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W''}{\partial t^2}$$

et, par conséquent,

$$W = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0.$$

La valeur initiale de L étant o, on a, quel que soit t,

$$L = 0. \tag{49}$$

Pour que cette égalité (49) soit vérifiée, il faut et il suffit qu'on ait, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t} = 0.$$

Les égalités de la seconde ligne peuvent, en vertu de la définition (35) de U, s'écrire

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial x} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} = 0,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial y} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t} = 0,$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial z} + K'\frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t} = 0.$$

Combinées avec les égalités de la troisième ligne, elles donnent les égalités

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

En vertu de ces égalités, W qui est, dans tout le système, une fonction continue de x, y, z, aura même valeur, à chaque instant, dans tout le système; mais sur la surface qui borde ce système, W est constamment nul; on a donc, à tout instant et en tout point du système,

$$W = 0$$

ou

$$W' = W'',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Au lieu de supposer que la valeur donnée, en tout point de la surface et à tout instant, soit celle de W, on peut supposer qu'elle soit celle de $\frac{\partial W}{\partial N}$; la démonstration précédente peut se reprendre presque textuellement; elle nous apprend que les deux solutions W′ et W″ du problème ne peuvent différer l'une de l'autre que par une quantité indépendante de x, y, z, t.

18. Avant d'énoncer et de démontrer la seconde proposition, définissons ce que nous entendrons par *stabilité électrostatique intégrale*.

Imaginons qu'en chaque point de la surface Σ qui limite le système étudié, la fonction potentielle électrostatique totale W garde une valeur indépendante de t, la même en tous les points de la surface Σ. Sur un tel système, l'équilibre électrostatique est possible. S'il est établi, la fonction W a même valeur dans toute l'étendue du système; le *champ électrostatique total*, dont les composantes sont

$$(50) \qquad X = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad Y = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial y}, \qquad Z = -\varepsilon' \frac{\partial W}{\partial z},$$

est nul en tout point du système; il en est de même de la *vitesse de variation de ce champ*, dont les composantes sont

$$(51) \qquad \frac{\partial X}{\partial t} = -\varepsilon' \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial t} = -\varepsilon' \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial t} = -\varepsilon' \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t},$$

et de l'*accélération de la variation de ce champ*, dont les composantes sont

$$(52) \qquad \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\varepsilon' \frac{\partial^3 W}{\partial x\, \partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -\varepsilon' \frac{\partial^3 W}{\partial x\, \partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -\varepsilon' \frac{\partial^3 W}{\partial z\, \partial t^2}.$$

Prenons notre système à la surface duquel la fonction W garde une valeur uniforme et constante, puis, en chaque point de ce système et à l'instant initial, donnons des valeurs généralement différentes de zéro au champ électrique, à la vitesse et à l'accélération de la variation de ce champ; à l'instant t, le champ aura en général, au sein du système, une valeur différente de zéro. *Si, aux valeurs absolues initiales du champ, de la vitesse et de l'accélération de sa variation, on peut,* *dans tout le système, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,*

$$\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi < P, \tag{53}$$

P *étant une quantité positive quelconque donnée d'avance, nous dirons que le système possède la stabilité électrostatique intégrale.*

19. Cette définition posée, nous allons démontrer que *le système considéré possède la stabilité électrostatique intégrale.*

En chaque point de la surface Σ, la fonction W garde une valeur indépendante du temps; en ce point, donc, $\frac{\partial W}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ et, partant, $\frac{\partial U}{\partial t}$ sont des quantités nulles; au second membre de l'égalité (47), le second terme disparaît; il n'y demeure que le premier terme qui ne peut être négatif. Si donc on garde à L le sens que définit l'égalité (47), cette quantité L ne pourra pas être fonction croissante de t; en désignant par L_0 sa valeur initiale, nous pourrons écrire

$$L \leqq L_0. \tag{54}$$

Cette inégalité (54) exige qu'on ait les deux inégalités

$$\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi \leqq \frac{L_0}{2\pi\varepsilon'}, \tag{55}$$

$$\int K' \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \right] d\varpi \leqq 2 L_0. \tag{56}$$

D'autre part, nous avons, par les égalités (50),

$$\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi = \varepsilon'^2 \int \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi.$$

Si R désigne la plus grande valeur que prenne, au sein du système, la résistance spécifique ρ, cette égalité nous permettra d'écrire

$$\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi \leqq \varepsilon'^2 R^2 \int \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi. \tag{57}$$

L'identité

$$(a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2$$

donne l'inégalité

$$(58)\qquad (a-b)^2 \leqq 2(a^2+b^2).$$

Or, l'égalité (35) nous permet d'écrire

$$\int \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$
$$=\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}-K'\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-K'\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-K'\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

L'inégalité (58) nous donne alors

$$(59)\qquad \int \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$
$$\leqq 2\int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$
$$+2\int K'^2\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Soit χ' la plus grande valeur que prenne, au sein du système, le coefficient de polarisation diélectrique K′. Nous aurons

$$(60)\qquad \int K'^2\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi$$
$$\leqq \chi'\int K'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Les inégalités (55), (56), (57), (59) et (60) nous fournissent l'inégalité suivante :

$$(61)\qquad \int (X^2+Y^2+Z^2)\,d\varpi \leqq \frac{(1+4\pi\varepsilon'\chi')R^2}{\pi\varepsilon'}L_0.$$

L'inégalité (53) sera donc certainement vérifiée, quel que soit t, si l'on a

$$(62)\qquad L_0 < \frac{\pi\varepsilon'}{(1+4\pi\varepsilon'\chi')R^2}P.$$

Pour que la proposition énoncée soit démontrée, il suffit désormais d'établir ceci : Aux valeurs absolues initiales du champ électrique total, de la vitesse et de l'accélération de la variation de ce champ, on peut assigner des limites supérieures telles que L_0 soit sûrement inférieur à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance.

Or, il est tout d'abord évident qu'on peut assigner ces limites supérieures de telle façon que deux des trois termes dont la somme compose L_0 soient inférieurs à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; les deux termes dont nous voulons parler sont les valeurs initiales de

$$2\pi\varepsilon'\int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi$$

et de

$$\frac{1}{2}\int K'\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}\right)^2\right]d\varpi.$$

Reste à établir qu'il en est de même pour la valeur initiale de

$$\sqrt{2}\,\pi a k\int\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Pour cela, il suffit de prouver qu'on peut assigner les limites supérieures en question de telle manière que la valeur absolue de

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t}+K'\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

soit inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance. Prouvons-le.

L'égalité précédente donne

$$\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right|\leqq\frac{1}{\rho}\left|\frac{\partial W}{\partial t}\right|+K'\left|\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right|.$$

$\frac{\partial W}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ sont nuls en tout point de la surface Σ qui borne le système. Soient donc :

M un point quelconque du système,
M_0 un point de la surface Σ,
M_0M un trajet quelconque joignant le point M_0 au point M.

Nous aurons, au point M,

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\int_{M_0M}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}dx+\frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial t}dy+\frac{\partial^2 W}{\partial z\,\partial t}dz\right),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\int_{M_0M}\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x\,\partial t^2}dx+\frac{\partial^3 W}{\partial y\,\partial t^2}dy+\frac{\partial^3 W}{\partial z\,\partial t^2}dz\right).$$

Soient λ et μ les plus grandes valeurs absolues initiales prises, au sein du système, par la vitesse et par l'accélération de la variation du champ; soit D la plus courte distance du point M à la surface Σ. Nous aurons, à l'instant initial,

$$\left|\frac{\partial W}{\partial t}\right| < \frac{\lambda D}{\varepsilon'}, \qquad \left|\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right| < \frac{\mu D}{\varepsilon'}$$

et, par conséquent,

$$\left|\frac{\partial U}{\partial t}\right| < \left(\frac{\lambda}{\rho} + \mu K'\right)\frac{D}{\varepsilon'}.$$

Il est évident qu'on peut limiter supérieurement λ et μ de telle manière que la valeur absolue initiale de $\frac{\partial U}{\partial t}$ soit, en tout point du système, inférieure à une quantité positive quelconque donnée d'avance.

La proposition énoncée est donc démontrée.

20. Cette proposition est complétée par celle que nous allons établir.

Au second membre de l'égalité (47), le second terme est, nous l'avons vu, égal à zéro. Dès lors, en vertu des égalités (48) et (51), cette égalité (47) peut s'écrire

$$(63) \qquad \frac{dL}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon'^2}\int \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi.$$

La quantité L possède ces deux caractères :

Elle ne peut jamais être négative;

Elle n'est jamais fonction croissante de t.

Dès lors, elle admet une limite inférieure positive ou nulle; ou bien elle atteint cette limite à un certain instant et lui demeure ensuite constamment égale; ou bien elle tend vers cette limite lorsque t croît indéfiniment.

Dans le premier cas, à partir d'un certain instant, $\frac{dL}{dt}$ demeure constamment égal à zéro; dans le second cas, $\frac{dL}{dt}$ tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment.

En tous cas, on peut donner à t une valeur assez grande pour que la somme

$$\int \left[\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi$$

relative à chacun des corps homogènes du système et, partant, pour que la même somme relative à tout le système soit désormais plus petite que n'importe quelle quantité positive donnée d'avance.

Il en résulte que *t croissant indéfiniment, la vitesse de variation du champ tend vers zéro en tout point du système, sauf peut-être en certains points qui ne composent pas un volume fini.*

21. Venons maintenant à l'examen du cas, délaissé jusqu'ici, où la constante de Helmholtz est nulle :

$$k = 0. \tag{64}$$

Dans ce cas, si l'on tient compte de l'expression (35) de U, l'égalité (36) devient

$$(1 + 4\pi\varepsilon' K') \Delta \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta W = 0, \tag{65}$$

tandis que l'égalité (37) devient

$$\begin{aligned}(1 + 4\pi\varepsilon\, K'_1) &\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial W}{\partial t} \\ &+ (1 + 4\pi\varepsilon' K'_2) \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \frac{\partial W}{\partial n_1} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_2} \frac{\partial W}{\partial n_2} = 0.\end{aligned} \tag{66}$$

Il est immédiatement évident qu'on ne peut plus, à l'instant initial, choisir arbitrairement dans tout le système les valeurs de W, de $\frac{\partial W}{\partial t}$, de $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$.

Si, à un instant donné, W a, en tout point du système, une valeur connue; si, au même instant, $\frac{\partial W}{\partial t}$ a une valeur connue en chaque point de la surface Σ qui borne le système, on sait qu'il ne peut exister deux déterminations distinctes pour la valeur prise par $\frac{\partial W}{\partial t}$ en chaque point du système.

En s'appuyant sur ce premier résultat et sur les égalités qu'on obtient en différentiant les égalités (65) et (66) par rapport à t, on peut établir cette autre proposition :

Si l'on connaît en outre, à l'instant considéré, la valeur prise par $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ en chaque point de la surface Σ, la valeur de $\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ en chaque point du système n'est pas susceptible de deux déterminations distinctes.

Supposons, en particulier, que W prenne, en tout point de la surface Σ, une même valeur C indépendante du temps t. $\frac{\partial W}{\partial t}$ sera alors constamment égal à zéro en tout point de la surface Σ. On vérifiera cette condition et les équations (65) et (66) si l'on pose, en tout point du système,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}(W - C). \tag{67}$$

D'après ce qui vient d'être dit, ce sera certainement la valeur de $\frac{\partial W}{\partial t}$.

L'égalité (67), vérifiée dans tout le système, nous donnera, d'ailleurs, les égalités

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial t} &= -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}\frac{\partial W}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial t} &= -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}\frac{\partial W}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial z\, \partial t} &= -\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}\frac{\partial W}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{68}$$

dont nous aurons à faire usage.

Si donc la surface terminale du système est maintenue à un niveau potentiel électrostatique total uniforme et constant C, si l'on désigne par W_0, X_0, Y_0, Z_0 les valeurs initiales de W et des composantes X, Y, Z du champ électrostatique total, on aura, en vertu des égalités (67) et (68),

$$W - C = (W_0 - C)\, e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}; \tag{69}$$

$$\left\{\begin{aligned} X &= X_0\, e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}, \\ Y &= Y_0\, e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}, \\ Z &= Z_0\, e^{-\frac{4\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t}. \end{aligned}\right. \tag{70}$$

22. Les équations (70) conduisent aux conclusions suivantes :

En chaque point du système, le champ électrostatique total garde, au cours du temps, une direction invariable.

Si le pouvoir inducteur spécifique d'un des corps du système est négatif :

$$1 + 4\pi\varepsilon' K' < 0,$$

en tout point de ce corps où la valeur initiale du champ électrostatique total n'est pas nulle, la valeur absolue de ce champ croît au delà de toute limite avec le temps. Sur un tel système, donc, l'équilibre électrique est instable.

Si, pour tous les corps du système, le pouvoir inducteur spécifique est positif :

$$1 + 4\pi\varepsilon' K' > 0,$$

la valeur absolue, en chaque point, du champ électrostatique total décroît sans cesse et tend vers zéro lorsque le temps croît au delà de toute limite; le système possède donc la stabilité électrostatique ponctuelle.

Cette stabilité ponctuelle entraîne, bien entendu, la stabilité intégrale qui se peut d'ailleurs vérifier directement, puisque les égalités (70) donnent l'égalité

$$\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi = \int e^{-\frac{8\pi\varepsilon'}{\rho(1+4\pi\varepsilon' K')}t} (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2)\, d\varpi.$$

23. *Supposons que le pouvoir inducteur spécifique ne soit nul pour aucun corps du système. Supposons qu'on donne la valeur de* W :

1° *A tout instant, en tout point de la surface* Σ *qui borne le système;*

2° *A l'instant initial, en tout point du système.*

Il ne peut exister deux intégrales distinctes des équations (65) *et* (66).

Supposons, en effet, qu'il en existe deux, W′ et W″, et soit

$$W = W'' - W'.$$

Comme W′ et W″, W vérifie les équations (66) et (67). En chaque point de la surface Σ, et à chaque instant, W′ et W″ prennent la même valeur; W est donc constamment nul sur la surface Σ. Dès lors, W vérifiera l'égalité (69) après qu'on y aura donné à C la valeur zéro.

D'autre part, en tout point du système, W′ et W″ ont même valeur initiale; W_0 est donc nul en tout point du système. L'égalité (69) montre alors que W est nul, en tout temps, dans tout le système, ce qui démontre la proposition énoncée.

Une partie des propositions qui viennent d'être établies pourraient être déduites soit de l'égalité (40), soit de l'égalité (47); mais cette déduction, moins rapide que la précédente, fournit des résultats moins complets.

CHAPITRE III.

DÉTERMINATION DES FONCTIONS TOTALES DE HELMHOLTZ.

24. Supposons désormais qu'on ait déterminé la fonction potentielle électrostatique totale W, et voyons comment on déterminera les fonctions totales de Helmholtz $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$.

Les égalités (3), (4), (27) et (28) nous donnent

$$\begin{aligned}\varphi = -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon'\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)\\ -K'\left(\varepsilon'\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t} + \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2}\right).\end{aligned}$$

Cette égalité, jointe aux égalités (12) et (25), donne

$$\begin{aligned}\Delta\mho = \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial W}{\partial x} + (4\pi\varepsilon' K' - k + 1)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial t}\\ + \frac{2\sqrt{2}\,\pi a}{\rho}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + 2\sqrt{2}\,\pi a K'\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2}.\end{aligned} \tag{71}$$

D'autre part, les égalités (24) donnent

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}}\left[\frac{\partial^2 \mho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mho}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}\right)\right]$$

ou bien, en vertu des égalités (13) et (24),

$$\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\varepsilon a K}{\sqrt{2}} \Delta \mathfrak{V} + \frac{\varepsilon a k K}{\sqrt{2}} \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial t}.$$

La première égalité (15) devient alors

$$(72) \qquad \Delta \Phi = 2\sqrt{2}\, \pi \varepsilon a K \, \Delta \mathfrak{V} + 2\sqrt{2}\, \pi \varepsilon a k K \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial t}.$$

Multiplions les deux membres de l'égalité (71) par $\frac{a}{\sqrt{2}}(1 + 4\pi\varepsilon K)$ et, membre à membre, ajoutons le résultat obtenu et l'égalité (72), en observant que

$$(27) \qquad \frac{a}{\sqrt{2}} \mathfrak{V} + \Phi = \mathfrak{F},$$

et nous trouvons la première des trois égalités suivantes :

$$(73) \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta \mathfrak{F} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} \\ &\quad = \frac{2\sqrt{2}\, \pi a \varepsilon' \mu}{\rho} \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}} (\mu D' - k) \frac{\partial^2 W}{\partial x \, \partial t}, \\ &\Delta \mathfrak{G} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathfrak{G}}{\partial t^2} \\ &\quad = \frac{2\sqrt{2}\, \pi a \varepsilon' \mu}{\rho} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{a}{\sqrt{2}} (\mu D' - k) \frac{\partial^2 W}{\partial y \, \partial t}, \\ &\Delta \mathfrak{H} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} \\ &\quad = \frac{2\sqrt{2}\, \pi a \varepsilon' \mu}{\rho} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{a}{\sqrt{2}} (\mu D' - k) \frac{\partial^2 W}{\partial z \, \partial t}. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières égalités (73) s'établissent par une démonstration analogue.

Dans ces égalités,

$$(74) \qquad \mu = 1 + 4\pi\varepsilon K$$

est la *perméabilité magnétique* du corps considéré et

$$(75) \qquad D' = 1 + 4\pi\varepsilon' K'$$

en est le *pouvoir inducteur spécifique*.

Chacune des trois fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ vérifie une équation aux dérivées partielles dont le second membre est connu lorsque la fonction W est déterminée.

Nous savons, par le n° **4**, que la traversée d'une des surfaces de discontinuité du système n'introduit aucune discontinuité dans les dérivées partielles du premier ordre de chacune des fonctions $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$.

D'autre part, en vertu des égalités (24), l'égalité (21) devient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 2\sqrt{2}\,\pi\varepsilon a \mathrm{K}\left\{ \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial x}\right)[\cos(n_1, y) + \cos(n_2, y)] + \left(\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial x}\right)[\cos(n_1, z) + \cos(n_2, z)]\right\}$$

ou

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 0.$$

Le magnétisme doit donc se distribuer sur le système de telle façon que les dérivées partielles de la fonction Φ ne subissent, elles non plus, aucune discontinuité à la traversée de l'une des surfaces de discontinuité du système. Il en est de même des fonctions Ψ et X.

Dès lors, les égalités (26) nous apprennent que, dans tout le système, les trois fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre.

25. Posons, pour abréger,

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{F} &= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \mu}{\rho}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu \mathrm{D}' - k)\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial x\,\partial t}, \\ \mathrm{G} &= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \mu}{\rho}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y} + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu \mathrm{D}' - k)\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial y\,\partial t}, \\ \mathrm{H} &= \frac{2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \mu}{\rho}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu \mathrm{D}' - k)\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z\,\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Les équations (76) deviennent

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\mathcal{F} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu \mathrm{K}'\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} &= \mathrm{F}, \\ \Delta\mathcal{G} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu \mathrm{K}'\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} &= \mathrm{G}, \\ \Delta\mathcal{H} - \frac{2\pi a^2 \mu}{\rho}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} - 2\pi a^2 \mu \mathrm{K}'\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} &= \mathrm{H}. \end{aligned}\right.$$

Remarquons de suite que, si $\mu K'$ n'est pas nul, ces équations permettent de choisir arbitrairement, à l'instant initial, les valeurs de

$$\mathcal{F}, \quad \mathcal{G}, \quad \mathcal{H},$$
$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Elles déterminent alors, en tout point du système, les valeurs initiales de

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}.$$

Multiplions par $\mathcal{F} d\varpi$ les deux membres de la première équation (77) et, pour le volume entier du système, intégrons le résultat obtenu; nous trouvons ainsi l'égalité suivante :

$$\pi a^2 \frac{d}{dt} \int \mu \left(\frac{\mathcal{F}}{\rho} + K' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) \mathcal{F} \, d\varpi$$
$$= \int \mathcal{F} \Delta \mathcal{F} \, d\varpi + 2\pi a^2 \int \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right)^2 d\varpi - \int F \mathcal{F} \, d\varpi.$$

Une intégration par parties, portant sur le premier terme du second membre, transforme cette égalité en la suivante :

$$(78) \qquad \pi a^2 \frac{d}{dt} \int \mu \left(\frac{\mathcal{F}}{\rho} + K' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right) \mathcal{F} \, d\varpi$$
$$= - \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \right)^2 - 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \right)^2 \right] d\varpi$$
$$- \int F \mathcal{F} \, d\varpi - \int \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N} d\Sigma.$$

Pour les fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, on peut écrire deux égalités analogues.

Supposons qu'en tout point de la surface Σ on garde à la fonction W une même valeur C indépendante de t, et aux fonctions $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ la valeur o. De telles conditions seront compatibles avec un état d'équilibre électrique sur tout le système.

Supposons la constante k de Helmholtz positive ou nulle, et le coefficient de polarisation K' *positif ou nul pour tous les corps du système. Si la perméabilité magnétique* μ *est négative pour tous les corps du système, l'équilibre électrique est instable dans les conditions considérées.*

Les conditions imposées à W et à $\mathfrak{F}$ en tout point de la surface Σ font, au second membre de l'égalité (78), évanouir le troisième terme.

D'autre part, pour démontrer l'instabilité de l'état d'équilibre, nous pouvons particulariser la perturbation initiale.

Si k est positif, nous pouvons, à l'instant initial, choisir arbitrairement, en tout point du système, les valeurs de W et de $\frac{\partial W}{\partial t}$, à la seule condition de ne pas contredire à ce qui a été supposé aux divers points de la surface Σ. En particulier, nous pouvons prendre, en tout point du système,

$$W = C, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0.$$

Nous savons, alors, qu'à tout instant et en tout point du système, W sera égal à C et $\frac{\partial W}{\partial t}$ à zéro, en sorte que la quantité F y sera constamment nulle.

Si k est nul, nous pouvons, à l'instant initial et en tout point du système, prendre arbitrairement la valeur de W, pourvu que cette valeur se réduise à C en tout point de la surface Σ. En particulier, nous pouvons, en tout point du système et à cet instant, prendre $W = C$. Alors, en vertu de l'égalité (69), dans tout le système et à tout instant, nous aurons $W = C$, en sorte que la quantité F sera encore nulle.

Si nous posons

$$M = \int \mu\left(\frac{\mathfrak{F}^2}{\rho} + K'\mathfrak{F}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) d\varpi, \tag{79}$$

l'égalité (78) se réduira à

$$\pi a^2 \frac{dM}{dt} = -\int \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right)^2 - 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi. \tag{80}$$

K' étant positif et μ négatif, le second membre de l'égalité (80) ne peut être que nul ou négatif. D'ailleurs, pour que ce second membre soit nul, il faut qu'on ait, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = 0.$$

Comme, dans tout le système, $\mathcal{J}$ est supposé fonction continue de x, y, z, les trois premières égalités exigent que $\mathcal{J}$ ait même valeur dans tout le système; et comme, sur la surface Σ, cette valeur est zéro, ces égalités exigent qu'on ait, dans tout le système, $\mathcal{J} = 0$ et, par conséquent, que la quantité M soit égale à zéro.

Dès lors, si la valeur initiale de M est négative, M demeurera sans cesse négatif, sa valeur absolue sera fonction croissante de t et croîtra au delà de toute limite avec t.

Or, comme nous disposons arbitrairement, sauf sur la surface Σ, des valeurs initiales de $\mathcal{J}$ et de $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}$, nous pouvons toujours faire en sorte que $\left(\frac{\mathcal{J}^2}{\rho} + K'\mathcal{J}\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}\right)$ soit positif à l'instant initial; la valeur initiale de M est alors négative, et la valeur absolue de M croît au delà de toute limite avec t.

Il faut pour cela que la valeur absolue de l'une au moins des quantités suivantes

$$\int \frac{\mu}{\rho} \mathcal{J}^2 \, d\varpi, \qquad \int \mu K' \mathcal{J} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \, d\varpi,$$

ou bien encore l'une au moins des deux quantités

$$\int \mathcal{J}^2 \, d\varpi, \qquad \int \mathcal{J} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} \, d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t.

Partant, l'une au moins des deux quantités $\mathcal{J}$ et $\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t}$ a une valeur absolue qui, en certains points du système, croît au delà de toute limite avec t. Cette conséquence est incompatible avec la stabilité de l'équilibre électrique.

26. *Supposons maintenant que la constante k de Helmholtz soit égale à zéro; supposons que, pour tous les corps du système, la perméabilité magnétique μ soit positive et le coefficient de polarisation diélectrique K′ négatif; nous savons que, sur le système considéré, l'équilibre électrique possède la stabilité électrostatique intégrale; mais il est affecté d'instabilité électrodynamique.*

Nous pouvons reprendre à peu près textuellement le raisonnement qui précède. La quantité M, à laquelle nous avons pu donner une valeur initiale négative, demeurera sans cesse négative; sa valeur absolue sera fonction croissante de t et croîtra au delà de toute limite avec t.

Pour cela, il faudra que la valeur absolue de la quantité

$$\int \mu K' \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} d\varpi$$

croisse au delà de toute limite avec t; partant, qu'au moins en certains points du système, la valeur absolue de l'une au moins des quantités $\mathcal{F}$ et $\frac{\mathcal{F}}{\partial t}$ croisse au delà de toute limite avec t; par là se trouve justifiée la proposition que nous avons énoncée.

27. Revenons à la première équation (77); multiplions-en les deux membres par $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} d\varpi$ et intégrons, pour tout le volume du système, le résultat ainsi obtenu; nous trouvons l'égalité

$$\int \Delta \mathcal{F} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} d\varpi - \pi a^2 \frac{d}{dt} \int \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi - 2\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi = \int F \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} d\varpi.$$

Une intégration par parties, portant sur le premier terme du premier membre, transforme cette égalité en la suivante

$$(81) \qquad \begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ &\quad = -4\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi - 2 \int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N} d\Sigma - 2 \int F \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} d\varpi. \end{aligned}$$

Nous allons tirer diverses conséquences de cette égalité.

La première sera la suivante :

Supposons que, pour tous les corps du système, le coefficient de polarisation diélectrique et la perméabilité magnétique soient positifs ou nuls. Si la fonction W *a été déterminée au préalable; si la valeur de la fonction* $\mathcal{F}$ *est connue, à tout instant, en tout point de la surface* Σ *qui borne le système; si, à l'instant initial, les valeurs de* $\mathcal{F}$ *et de* $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}$ *sont données dans tout le système, on ne peut trouver* *deux intégrales distinctes de l'équation* (77), *continues dans tout le système ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre.*

Chacune des deux fonctions $\mathcal{G}$ *et* $\mathcal{H}$ *donne lieu à un théorème analogue.*

Supposons, en effet, qu'il existe deux intégrales, $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$, de l'équation (77) et posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}'' - \mathcal{F}'.$$

La fonction $\mathcal{F}$ vérifiera l'équation en laquelle se transforme l'équation (77) lorsqu'on y fait $F = 0$; partant, elle vérifiera ce que devient l'égalité (81) après qu'on y a fait $F = 0$.

En chaque point de la surface Σ, on a, à chaque instant $\mathcal{F}' = \mathcal{F}''$, partant $\mathcal{F} = 0$, ce qui entraîne $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0$. L'égalité (81) se réduit donc à

$$\frac{dN}{dt} = -4\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi, \tag{82}$$

égalité dans laquelle

$$N = \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi. \tag{83}$$

D'après l'égalité (83), la quantité N ne peut jamais être négative. D'après l'égalité (82), où la perméabilité magnétique μ est positive ou nulle pour tous les corps du système, la grandeur N ne peut jamais être une fonction croissante de t. Si donc elle est nulle à l'instant initial, elle demeure constamment nulle.

Or, à l'instant initial, on a, en tout point du système,

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}'', \qquad \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{F}''}{\partial t},$$

ou

$$\mathcal{F} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0,$$

ce qui entraîne l'égalité à zéro de la quantité N.

On a donc, quel que soit t,

$$N = 0.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait, à tout instant et en tout point du système,

$$(84)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} = 0.$$

Si μ et K' sont positifs et non pas nuls, il faut, à ces égalités, joindre l'égalité

$$(85)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0.$$

La fonction $\mathcal{F}$ étant continue dans tout le système, les égalités (84) exigent qu'à un même instant elle ait, dans tout ce système, la même valeur; or, à tout instant, elle est nulle en tout point de la surface Σ; on a donc, dans tout le système et à tout instant, $\mathcal{F} = 0$ ou

$$\mathcal{F}' = \mathcal{F}'',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Si, au lieu de donner, en chaque point de la surface Σ et à chaque instant, la valeur de $\mathcal{F}$, on donne la valeur de $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}$, on peut encore, avec une très légère modification, reprendre la démonstration précédente; on obtient les égalités (84); elles nous apprennent que les deux solutions $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ du problème ne peuvent différer l'une de l'autre que par une fonction du temps, la même en tous les points du système. Si, en outre, ni μ ni K' n'est égal à zéro, on peut écrire l'égalité (85), et cette fonction du temps se réduit à une constante.

28. Le *champ électrodynamique et électromagnétique* a pour composantes

$$(86)\qquad \mathcal{X} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}, \qquad \mathcal{Y} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}, \qquad \mathcal{Z} = -\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

Le *champ électrique total* a pour composantes

$$X + \mathcal{X}, \quad Y + \mathcal{Y}, \quad Z + \mathcal{Z}.$$

Imaginons qu'à partir d'un état d'équilibre on impose au système une perturbation initiale, et qu'on le maintienne ensuite dans des conditions bien déterminées; si, aux valeurs absolues des grandeurs qui définissent la perturbation initiale, on peut imposer des limites supérieures telles que

$$\int (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)\, d\varpi$$

ne surpasse jamais une grandeur positive quelconque, donnée d'avance, on dit que le système jouit, dans les conditions considérées, de la *stabilité électrodynamique intégrale*.

Si, d'une façon semblable, on peut empêcher

$$\int [(X + \mathcal{X})^2 + (Y + \mathcal{Y})^2\, d\varpi + (Z + \mathcal{Z})^2]\, d\varpi$$

de jamais franchir une grandeur positive quelconque, donnée d'avance, on dit que le système jouit, dans les conditions considérées, de la *stabilité électrique intégrale*.

29. *Supposons la constante de Helmholtz nulle ou positive. Considérons un système exclusivement formé de corps dont le coefficient de polarisation diélectrique et la perméabilité magnétique soient positifs. Sur toute la surface qui borne ce système, maintenons à la fonction potentielle électrostatique totale* W *une même valeur* C *indépendante du temps. En chaque point de cette surface, à chacune des fonctions totales de Helmholtz,* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, *gardons une valeur indépendante du temps. Ces conditions sont compatibles avec l'établissement de l'équilibre électrodynamique.*

Nous allons démontrer que *cet équilibre jouit de la stabilité électrique lorsqu'on astreint la perturbation initiale à une condition particulière.*

Cette condition sera définie de la manière suivante :

Si la constante k de Helmholtz est positive, nous prendrons à l'instant initial, et en tout point du système,

$$W = C, \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \tag{87}$$

Si la constante k de Helmholtz est nulle, nous prendrons à l'instant initial et en tout point du système,

$$W = C.$$

Les conditions données permettent d'attribuer la valeur C à la fonction W en tout point du système et à tout instant; et ce que nous avons dit aux n^{os} **17** et **22** montre qu'on ne saurait lui attribuer une autre valeur.

Le champ électrostatique total est donc constamment nul en tout point du système; le champ électrique total se réduit au champ électrodynamique et électromagnétique, la stabilité électrique à la stabilité électrodynamique.

On a, en vertu des égalités (86),

$$(88)\qquad \int(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2+\mathcal{Z}^2)\,d\varpi = \frac{a^2}{2}\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi$$

ou bien

$$\int(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2+\mathcal{Z}^2)\,d\varpi \leqq \frac{a^2}{2m\varkappa'}\int\mu\mathrm{K}'\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)^2\right]d\varpi,$$

m étant la plus petite valeur de la perméabilité magnétique et $\varkappa'$ la plus petite valeur du coefficient de polarisation diélectrique pour les divers corps du système.

Si donc Q désigne une quantité positive donnée, pour avoir

$$(89)\qquad \int(\mathcal{X}^2+\mathcal{Y}^2+\mathcal{Z}^2)\,d\varpi \leqq \mathrm{Q},$$

il suffira d'avoir

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\mu\mathrm{K}'\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \frac{2m\varkappa'\mathrm{Q}}{3a^2},\\ &\int\mu\mathrm{K}'\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \frac{2m\varkappa'\mathrm{Q}}{3a^2},\\ &\int\mu\mathrm{K}'\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \frac{2m\varkappa'\mathrm{Q}}{3a^2}.\end{aligned}\right.$$

Mais, d'autre part, l'égalité (82) nous apprend que la quantité N ne peut jamais être une fonction croissante de t, en sorte que si l'on désigne par N_0 la valeur initiale de cette quantité, on a, quel que soit t,

$$\mathrm{N} \leqq \mathrm{N}_0,$$

ce qui entraîne les deux inégalités

$$(91)\qquad \int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi \leqq \mathrm{N}_0,$$

$$(92)\qquad 2\pi a^2\int\mu\mathrm{K}'\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \mathrm{N}_0.$$

Laissons de côté, pour le moment, l'inégalité (91), qui nous sera utile tout à l'heure, et considérons seulement l'inégalité (92). Elle nous apprend que nous aurons certainement, quel que soit t, la première des inégalités (90), si, aux valeurs absolues initiales de $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}$, nous imposons des limites supérieures telles que nous ayons

$$(93) \qquad N_0 \leqq \frac{4\pi m x'}{3} Q.$$

On voit ainsi que le système possède, dans les conditions considérées, la stabilité électrodynamique intégrale.

30. Il serait souhaitable que la proposition précédente fût démontrée sans qu'aucune restriction fût imposée à la perturbation initiale; mais nous n'avons pu, jusqu'ici, obtenir ce résultat; nous ne pourrons établir la proposition en question, pour une perturbation initiale quelconque, qu'en lui imposant une restriction d'une autre nature; nous devrons supposer *que le système soit formé d'un seul corps homogène.*

Nous supposons positif le coefficient de polarisation diélectrique K' et, par conséquent, le pouvoir inducteur $D' = (1 + 4\pi\varepsilon' K')$.

Si la constante k de Helmholtz est nulle, l'égalité (69) nous permet de formuler cette proposition :

Aux valeurs absolues des grandeurs qui déterminent la perturbation électrostatique initiale, on peut assigner des limites supérieures telles que les quantités

$$\int (W - C)^2 d\varpi, \qquad \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

demeurent, quel que soit t, respectivement inférieures à deux quantités positives quelconques données d'avance.

Si la constante de Helmholtz est positive, cette proposition n'est plus démontrée; cependant, nous la supposerons vraie, et c'est sous le bénéfice de cette supposition que se poursuivra notre déduction.

Posons

$$(94) \qquad T = \frac{2\sqrt{2}\pi a \varepsilon' \mu}{\rho}(W - C) + \frac{a}{\sqrt{2}}(\mu D' - k)\frac{\partial W}{\partial t}.$$

Dans cette formule, C désigne une constante qui est, pour le moment, quelconque, mais qui, tout à l'heure, sera prise égale à la valeur uniforme de W sur la surface Σ.

Les égalités (76) pourront s'écrire

$$(95) \qquad F = \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad G = \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad H = \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Ajoutons membre à membre, en tenant compte de ces égalités (95), l'égalité (81) et les égalités analogues qu'on peut former pour les fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Nous trouvons l'égalité suivante, où nous avons supposé que le système fût formé d'un corps homogène unique,

$$(96) \quad \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + 2\pi a^2 \mu K' \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 + \ldots\right] d\varpi \\ &\quad = -4\pi a^2 \frac{\mu}{\rho}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 + \ldots\right] d\varpi - 2\int\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N} + \ldots\right) d\Sigma \\ &\quad\quad - 2\int\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right) d\varpi. \end{aligned}$$

Dans cette égalité et dans celles qui suivront, le signe $+\ldots$ désigne des termes qui sont relatifs aux deux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ et qui ont même forme que les termes, relatifs à la fonction $\mathcal{F}$, écrits avant ce signe.

Dans cette égalité (96), transformons le dernier terme du second membre. Le système étant homogène, nous pouvons écrire :

$$(97) \quad \begin{aligned} &-2\int\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\right) d\varpi \\ &= 2\int T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right) d\varpi \\ &\quad + 2\int T\left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\cos(N, x) + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}\cos(N, y) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}\cos(N, z)\right] d\Sigma. \end{aligned}$$

Si le système était formé de corps homogènes divers, cette égalité ne serait plus exacte, car, en vertu de sa définition (94), la fonction T varie d'une manière discontinue lorsque le point auquel elle se rapporte traverse la surface de contact de deux corps différents.

D'après l'égalité (30), nous avons

$$2\int T\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right) d\varpi = -2k\int T\,\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\,d\varpi.$$

Dans le second membre de cette égalité, remplaçons T par son expression (94), et nous trouvons successivement

$$2\int \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi$$
$$=-4\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon' k\frac{\mu}{\rho}\int(\mathrm{W}-\mathrm{C})\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2}d\varpi$$
$$-\frac{ka}{\sqrt{2}}(\mu\mathrm{D}'-k)\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2 d\varpi,$$

$$(98)\qquad 2\int \mathrm{T}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi$$
$$=-\frac{ka}{\sqrt{2}}\frac{d}{dt}\int\left[(\mu\mathrm{D}'-k)\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2+8\pi\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}(\mathrm{W}-\mathrm{C})\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right]d\varpi$$
$$+4\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon' k\frac{\mu}{\rho}\int\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2 d\varpi.$$

Supposons, désormais, que les valeurs de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ soient maintenues constantes en chaque point de la surface Σ; nous aurons, à chaque instant et en chaque point de cette surface,

$$(99)\qquad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}=0.$$

Réunissons toutes les égalités (96) à (99), et posons

$$(100)\qquad \mathrm{P}=\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2+2\pi a^2\mu\mathrm{K}'\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2+\ldots\right]d\varpi.$$

Nous trouverons

$$(101)\qquad \frac{d\mathrm{P}}{dt}=-4\pi a\frac{\mu}{\rho}\int\left\{a\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2+\ldots\right]+\sqrt{2}\,k\varepsilon'\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2\right\}d\varpi$$
$$-\frac{ka}{\sqrt{2}}(\mu\mathrm{D}'-k)\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$
$$-4\sqrt{2}\,\pi a\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}\frac{d}{dt}\int(\mathrm{W}-\mathrm{C})\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t}d\varpi.$$

La quantité k est supposée nulle ou positive; la quantité μ est supposée positive; partant, au second membre de l'égalité (101), le premier terme ne peut être que nul ou négatif, en sorte qu'on a l'inégalité

$$(102)\quad \begin{aligned} P \leqq P_0 &- \frac{ka}{\sqrt{2}}(\mu D' - k)\left[\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi - \int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0^2 d\varpi\right] \\ &- 4\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\left[\int (W - C)\frac{\partial W}{\partial t} d\varpi - \int (W_0 - C)\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0 d\varpi\right]. \end{aligned}$$

Dans cette inégalité, l'indice o désigne la valeur, à l'instant initial, de la quantité qu'il affecte.

La quantité K′ est supposée positive; la quantité P ne peut être que positive ou nulle; il en est forcément de même du second membre de l'inégalité (102), en sorte que ce second membre est égal à sa valeur absolue.

D'ailleurs, si l'on regarde ce second membre comme la somme algébrique d'un certain nombre de termes, sa valeur absolue sera au plus égale à la somme arithmétique des valeurs absolues de ces termes.

Enfin les deux égalités

$$\left[(W - C) + \frac{\partial W}{\partial t}\right]^2 = (W - C)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 + 2(W - C)\frac{\partial W}{\partial t},$$

$$\left[(W - C) - \frac{\partial W}{\partial t}\right]^2 = (W - C)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - 2(W - C)\frac{\partial W}{\partial t},$$

dont les premiers membres ne peuvent être négatifs, nous montrent que la valeur absolue du produit $2(W - C)\frac{\partial W}{\partial t}$ est au plus égale à

$$(W - C)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2.$$

En vertu de ces diverses remarques, l'inégalité (102) entraîne celle-ci :

$$(103)\quad \begin{aligned} P \leqq P_0 &+ 2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\int (W_0 - C)^2 d\varpi \\ &+ \frac{a}{\sqrt{2}}\left(k\,|\mu D' - k| + 4\pi\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}\right)\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0^2 d\varpi \\ &+ 2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\int (W - C)^2 d\varpi \\ &+ \frac{a}{\sqrt{2}}\left(k\,|\mu D' - k| + 4\pi\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}\right)\int\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Dans cette inégalité, $|\mu D' - k|$ désigne la valeur absolue de $(\mu D' - k)$.

La proposition que nous voulons établir sera évidemment démontrée si nous démontrons ceci :

Aux valeurs absolues des données initiales, tant électrostatiques qu'électrodynamiques, nous pouvons imposer des limites supérieures telles que P ne surpasse jamais une quantité positive A, quelconque d'ailleurs, donnée d'avance.

Or nous avons admis qu'aux valeurs absolues des données électrostatiques initiales, on pouvait imposer des limites supérieures telles que les deux quantités

$$\int (W - C)^2 d\varpi, \qquad \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

demeurassent toujours respectivement inférieures à deux quantités positives quelconques données d'avance. On pourra donc, à ces valeurs absolues des données électrostatiques initiales, imposer des limites supérieures telles qu'on ait, quel que soit t,

$$2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho} \int (W - C)^2 d\varpi \leqq \frac{A}{8},$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(k \,|\, \mu D' - k \,| + 4\pi\varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\right) \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 d\varpi \leqq \frac{A}{8}$$

et, en particulier,

$$2\sqrt{2}\,\pi a \varepsilon' \frac{\mu}{\rho} \int (W_0 - C)^2 d\varpi \leqq \frac{A}{8},$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}}\left(k \,|\, \mu D' - k \,| + 4\pi\varepsilon' \frac{\mu}{\rho}\right) \int \left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)_0^2 d\varpi \leqq \frac{A}{8}.$$

Dès lors, l'inégalité (103) nous permet d'énoncer cette proposition :

Pour être assuré d'avoir, quel que soit t, l'inégalité

$$P \leqq A, \tag{104}$$

il suffit d'imposer aux valeurs absolues des données électrodynamiques initiales des limites supérieures telles qu'on ait

$$P_0 \leqq \frac{A}{2}. \tag{105}$$

Ainsi se trouve établie la stabilité que nous voulions justifier.

51. Toutes les fois que, pour un système, on a démontré, d'une part, la stabilité électrostatique intégrale et, d'autre part, la stabilité électrodynamique intégrale, la stabilité électrique intégrale se trouve, par là même, établie pour ce système.

On a, en effet,

$$(X + \mathcal{X})^2 = 2X^2 + 2\mathcal{X}^2 - (X - \mathcal{X})^2$$

et, par conséquent,

$$(X + \mathcal{X})^2 \leqq 2X^2 + 2\mathcal{X}^2.$$

Cette inégalité et deux inégalités analogues permettent d'écrire

$$\begin{aligned}&\int [(X + \mathcal{X})^2 + (Y + \mathcal{Y})^2 + (Z + \mathcal{Z})^2]\, d\varpi \\ &\leqq 2\int (X^2 + Y^2 + Z^2)\, d\varpi + 2\int (\mathcal{X}^2 + \mathcal{Y}^2 + \mathcal{Z}^2)\, d\varpi.\end{aligned}$$

Si le système jouit de la stabilité électrostatique intégrale, on peut limiter supérieurement les valeurs absolues des données initiales de telle manière que la première intégrale du second membre demeure inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; si le système jouit de la stabilité électrodynamique intégrale, on peut limiter supérieurement les valeurs absolues des données initiales de telle manière que la seconde intégrale du second membre demeure constamment inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; si donc le système possède, à la fois, ces deux stabilités, on peut, aux valeurs absolues des données initiales, imposer des limites supérieures telles que l'intégrale du premier membre demeure toujours inférieure à n'importe quelle quantité positive donnée d'avance; c'est précisément ce qui définit la stabilité électrique intégrale.

Ce théorème peut être appliqué au système qui a été étudié au n° **30**.

32. En un point quelconque du système, il résulte des égalités (24) que le champ magnétique a pour composantes

$$(106)\qquad \left\{\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right),\\ \mathcal{M} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}\right),\\ \mathcal{N} &= -\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\varepsilon a}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\right).\end{aligned}\right.$$

Si l'on applique à ces égalités (106) les calculs qui, des égalités (24), ont tiré les égalités (29), on trouve, en tenant compte de l'égalité (74),

$$(107)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right), \\ \mathcal{M} &= -\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right), \\ \mathcal{N} &= -\frac{\varepsilon}{\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right). \end{aligned} \right.$$

Dans des conditions données, compatibles avec l'équilibre magnétique, un système possède la *stabilité magnétique intégrale* si, aux valeurs absolues des données initiales, tant électrostatiques qu'électrodynamiques, on peut imposer des limites supérieures telles que l'intégrale

$$(108)\qquad J = \int (\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2)\, d\varpi$$

demeure toujours inférieure à une quantité positive quelconque, donnée d'avance.

La première égalité (107) donne

$$\mathcal{L}^2 = \frac{\varepsilon^2}{\mu^2}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2.$$

D'ailleurs l'égalité

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 = 2\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2$$

permet d'écrire

$$\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 \leqq 2\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2.$$

Si l'on désigne par m la plus petite valeur prise, dans le système, par la perméabilité magnétique μ, que nous supposons positive, l'égalité (108) nous donnera l'inégalité

$$J \leqq \frac{2\varepsilon^2}{m^2}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2\right] d\varpi$$

et *a fortiori*

$$(109)\qquad J \leqq \frac{2\varepsilon^2}{m^2}\int\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + \dots\right] d\varpi.$$

On voit, dès lors, que *le système étudié au n° **29** possède la stabilité magnétique intégrale.*

L'inégalité (91), en effet, nous apprend qu'on a, quel que soit t,

$$(91) \qquad \int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi \leqq \mathrm{N}_0,$$

N_0 étant une quantité positive qu'on peut, en limitant supérieurement les valeurs absolues des données électrodynamiques initiales, rendre aussi petite qu'on voudra. On peut d'ailleurs, pour chacune des deux quantités $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, établir une inégalité analogue à l'inégalité (91).

Le système étudié au n° **30** possède également la stabilité électromagnétique intégrale. Nous avons vu, en effet, qu'en limitant supérieurement les valeurs absolues des données initiales, tant électrostatiques qu'électrodynamiques, on pouvait faire qu'on eût, quel que soit t, l'inégalité

$$(104) \qquad \mathrm{P} \leqq \mathrm{A},$$

où A est une quantité positive quelconque donnée d'avance.

D'après l'expression (100) de P, cette inégalité (104) entraîne celle-ci :

$$\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2+\ldots\right]d\varpi \leqq \mathrm{A},$$

qui assure la stabilité magnétique intégrale.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME FORMÉ DE CORPS PUREMENT CONDUCTEURS.

33. Si les corps qui composent le système sont des corps *purement conducteurs*, incapables de toute polarisation diélectrique, ou bien encore si ce sont des corps *purement diélectriques*, privés de toute conductibilité, les démonstrations exposés aux deux Chapitres précédents requièrent certaines modifications que nous nous proposons d'indiquer d'une façon rapide dans ce Chapitre et dans le suivant.

Nous considérerons d'abord le cas où le système est exclusivement formé de corps purement conducteurs.

La fonction potentielle électrostatique totale W se réduit à la fonction potentielle Υ des charges électriques distribuées sur le système.

En tout point d'un corps homogène appartenant au système, cette fonction Υ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho} \Delta \Upsilon - \frac{2\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho} \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = 0, \tag{110}$$

à laquelle se réduit l'équation (31). En tout point de la surface de contact entre deux corps homogènes, cette fonction vérifie la relation

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial n_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} - \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho_1} \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_1} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2} \frac{\partial \Upsilon}{\partial n_2} = 0, \tag{111}$$

à laquelle se réduit la relation (33).

Si la constante k de Helmholtz n'est pas nulle, on peut, à l'instant initial, choisir arbitrairement, en tout point du système, les valeurs de Υ et de $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$, sous la condition, toutefois, que l'égalité (111) soit vérifiée en tout point des surfaces de discontinuité.

Quant au cas où la constante k de Helmholtz serait nulle, il est inutile de l'examiner en particulier ; ce qui a été dit au n° **21** peut être répété ici après qu'on y aura fait

$$K' = 0, \qquad W = \Upsilon.$$

Multiplions par $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\, d\varpi$ les deux membres de l'équation (110), intégrons pour le volume entier du système, et transformons l'intégrale au moyen d'intégrations par parties où il sera tenu compte de la relation (111) ; nous trouverons l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int \left\{ \frac{2\pi\varepsilon'}{\rho}\left[\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\sqrt{2}\,\pi a k}{\rho}\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right)^2 \right\} d\varpi \\ = -\int \left[\left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z\, \partial t}\right)^2\right] d\varpi \\ - \int \left(\frac{\partial}{\partial N}\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} + \frac{4\pi\varepsilon'}{\rho}\frac{\partial \Upsilon}{\partial N}\right)\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\, d\Sigma. \end{aligned} \tag{112}$$

Supposons qu'en chaque point de la surface Σ, borne du système, la quantité Υ garde une valeur indépendante du temps; alors, en tout point de la surface Σ, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$ sera nul. Posons

$$(113) \quad J = \pi \int \left\{ \frac{2\varepsilon'}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right)^2 \right] + \frac{\sqrt{2}\,ak}{\rho} \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right)^2 \right\} d\varpi.$$

L'égalité (112) deviendra

$$(114) \quad \frac{dJ}{dt} = -\int \left[\left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial x\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial y\, \partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z\, \partial t}\right)^2 \right] d\varpi.$$

Le second membre de l'égalité (114) ne peut être que nul ou négatif; pour qu'il s'annule d'ailleurs, il faut que $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$ soit nul en tout point du système et, dans ce cas, J est forcément nul ou positif. On voit donc que, si la valeur initiale de J est négative, J demeurera constamment négatif, et sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite avec t.

Or si la constante k de Helmholtz est négative, on peut toujours faire en sorte que la valeur initiale de J soit négative; il suffit, à l'instant initial, de prendre, en tout point du système,

$$\Upsilon = 0, \qquad \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \neq 0.$$

On voit donc que, *si la constante de Helmholtz est négative, le système est affecté d'instabilité électrostatique.*

Si la constante de Helmholtz est positive ou nulle, J ne peut jamais être négatif; alors, à partir d'une valeur initiale positive, J ne peut jamais croître. On en conclut sans peine cette proposition : *Lorsque la constante de Helmholtz est positive ou nulle, le système jouit de la stabilité électrostatique intégrale.*

Enfin l'égalité (114) permet d'établir cette autre proposition :

Si la valeur de Υ est donnée, à tout instant, en tout point de la surface qui borne le système; si, à l'instant initial, les valeurs de Υ et de $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$ sont données en tout point du système; si, d'autre part, la constante de Helmholtz est positive, on ne peut trouver deux solutions continues distinctes des équations (110) *et* (111).

34. Les équations (77), que doivent vérifier les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, se réduisent ici à

$$(115)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\mathcal{F} - \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} &= \mathrm{F},\\ \Delta\mathcal{G} - \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t} &= \mathrm{G},\\ \Delta\mathcal{H} - \frac{2\pi a^2\mu}{\rho}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} &= \mathrm{H}.\end{aligned}\right.$$

Elles permettent de se donner arbitrairement les valeurs initiales de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$; les valeurs initiales de $\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}$, $\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}$ sont alors déterminées.

Multiplions la première de ces équations par $\mathcal{F}d\varpi$ et intégrons pour le volume entier du système; nous obtenons une égalité qui se transforme aisément en la suivante :

$$(116)\qquad \begin{aligned}\pi a^2\frac{d}{dt}\int\frac{\mu}{\rho}\mathcal{F}^2\,d\varpi = &-\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi\\ &-\int\mathrm{F}\mathcal{F}\,d\varpi\\ &-\int\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mathrm{N}}\,d\Sigma.\end{aligned}$$

Supposons, en premier lieu, qu'en chaque point de la surface Σ qui limite le système, chacune des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ soit constamment nulle; au second membre de l'égalité (116), le second terme disparaît.

Supposons, en second lieu, que la fonction Υ soit maintenue constamment égale à zéro en tout point de la surface Σ; qu'à l'instant initial on prenne, dans tout le système, $\Upsilon = 0$, et en outre, si la constante k n'est pas nulle, $\frac{\partial\Upsilon}{\partial t} = 0$. Si la constante k est nulle ou positive, Υ demeurera constamment nul en tout point du système, il en sera de même de F, G, H. D'où la conclusion suivante : Au second membre de l'égalité (116), le second terme disparaît.

L'égalité (116) devient, dans ces conditions,

$$(117)\qquad \pi a^2\frac{d}{dt}\int\frac{\mu}{\rho}\mathcal{F}^2\,d\varpi = -\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2\right]d\varpi.$$

Cette égalité nous permet, en premier lieu, de démontrer la proposition suivante :

Si la perméabilité magnétique μ est négative pour tous les corps du système, ce système est affecté d'instabilité électrodynamique.

En effet, le second membre de l'égalité (117) est négatif ou nul. Pour qu'il soit nul à un certain instant, il faut qu'on ait, en tout point du système et à ce même instant,

$$\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial z} = 0.$$

Il faut donc qu'à cet instant la fonction continue $\mathfrak{J}$ ait, dans tout le système, une même valeur; cette valeur ne saurait être que la valeur o prise par cette fonction en tout point de la surface Σ. Ainsi la quantité

$$\int \frac{\mu}{\rho} \mathfrak{J}^2 \, d\varpi$$

doit s'annuler à tout instant où le second membre de l'égalité (117) prend la valeur o.

Si la valeur initiale de $\mathfrak{J}$ n'est pas identiquement nulle dans tout le système, la valeur initiale de l'intégrale considérée est forcément négative, puisque la perméabilité μ est négative pour chacun des corps du système; sa valeur absolue va donc croître au delà de toute limite avec t, ce qu'on peut regarder comme une marque de l'instabilité électrodynamique du système.

L'équation (117) va nous fournir la démonstration d'un autre théorème.

Supposons que la fonction Υ ait été déterminée sans ambiguïté pour tout instant et en tout point du système;

Supposons que la valeur de $\mathfrak{J}$ soit donnée, à tout instant, en tout point de la surface Σ qui borne le système, et en tout point du système à l'instant initial.

Si la perméabilité magnétique μ est positive pour chacun des corps qui composent le système, la première équation (115) *ne peut admettre deux intégrales continues distinctes.*

Imaginons, en effet, qu'elle en admette deux, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$, et posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}'' - \mathcal{F}'.$$

Chacune des deux fonctions $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ est une fonction continue qui vérifie la première équation (115), la valeur de F étant, pour toutes deux, la même; $\mathcal{F}$ est donc une fonction continue qui vérifie ce que devient la première équation (115) quand on y fait $F = 0$.

$\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ prenant la même valeur en chaque point de la surface Σ, $\mathcal{F}$ est constamment égal à zéro en tout point de cette surface.

$\mathcal{F}$ vérifie donc l'équation (117).

$\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ prenant la même valeur initiale en chaque point du système, la valeur initiale de $\mathcal{F}$ est nulle en tout point du système.

La perméabilité magnétique μ étant positive en tout point du système, la quantité

$$\int \frac{\mu}{\rho} \mathcal{F}^2 \, d\varpi,$$

dont la valeur initiale est nulle, ne peut jamais devenir négative. D'autre part, d'après l'égalité (117), elle ne peut jamais être une fonction croissante de t. Elle demeure donc constamment nulle.

Pour cela, il faut et il suffit que $\mathcal{F}$ soit égal à zéro à tout instant, en tout point du système. Partant, $\mathcal{F}'$ ne diffère jamais de $\mathcal{F}''$.

Une dernière proposition nous est fournie par l'inégalité (117).

Sur la surface Σ qui borne le système, la fonction Υ garde constamment une même valeur C *et les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont maintenues égales à zéro.*

La perturbation électrostatique initiale est nulle, de telle façon que, dans tout le système, Υ demeure constamment égal à C.

Si la perméabilité magnétique est positive pour chacun des corps du système, on peut, aux valeurs absolues des grandeurs qui déterminent la perturbation électrodynamique initiale, assigner des limites supérieures telles que

$$\int (\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2) \, d\varpi$$

ne surpasse jamais une quantité positive quelconque donnée d'avance.

On peut regarder cette propriété comme la marque d'une certaine stabilité électrodynamique intégrale, mais non pas de celle qui a été définie au n° **28**.

35. On peut se demander si la proposition précédente subsiste *dans le cas où la perturbation électrostatique initiale n'est pas identiquement nulle*. Nous allons démontrer que *cette proposition subsiste pourvu que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

1° *Le système se compose d'un corps homogène unique;*

2° *La perméabilité magnétique de ce corps n'est pas inférieure à la constante k de Helmholtz.*

Ajoutons membre à membre, en effet, l'égalité (116) et les deux égalités analogues qu'on peut former pour les deux fonctions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$; tenons compte, en outre, des égalités (95); nous obtenons une égalité que l'homogénéité du corps permet de transformer en la suivante :

$$(118)\qquad \begin{aligned} &\pi a^2 \frac{\mu}{\rho}\frac{d}{dt}\int(\mathcal{F}^2+\mathcal{G}^2+\mathcal{H}^2)\,d\varpi \\ &= -\int\left[\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right)^2+\ldots\right]d\varpi \\ &\quad+\int \mathrm{T}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi \\ &\quad+\int\left\{\mathcal{F}\left[\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial \mathrm{N}}-\mathrm{T}\cos(\mathrm{N},x)\right]+\ldots\right\}d\Sigma. \end{aligned}$$

Tenons compte maintenant des égalités (13), (16), (25) et (26) qui nous donnent ici

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}=-k\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}.$$

Invoquons également l'égalité (94), après y avoir remplacé W par Υ et D′ par l'unité; nous trouverons

$$(119)\qquad \begin{aligned} &\int \mathrm{T}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right)d\varpi \\ &= -\sqrt{2}\,\pi k a\varepsilon'\frac{\mu}{\rho}\frac{d}{dt}\int(\Upsilon-\mathrm{C})^2\,d\varpi \\ &\quad-\frac{a}{\sqrt{2}}k(\mu-k)\int\left(\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}\right)^2 d\varpi. \end{aligned}$$

Si, comme nous le supposons, les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, sont maintenues constamment nulles en tout point de la surface Σ, les égalités (118) et (119) donnent l'égalité

$$(120)\quad \pi a \frac{\mu}{\rho} \frac{d}{dt} \int \left[a(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2 + \mathcal{H}^2) + \sqrt{2}\, k\varepsilon'(\Upsilon - C)^2 \right] d\varpi$$
$$= \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 + \ldots + \frac{a}{\sqrt{2}} k(\mu - k) \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right)^2 \right] d\varpi.$$

Si, comme nous l'avons supposé, la constante k est nulle ou positive, si elle ne surpasse pas la perméabilité magnétique μ, le second membre de cette égalité (120) ne peut jamais être négatif. On établit aisément alors la proposition énoncée.

En outre, si la constante k est positive, on démontre, à l'aide de cette égalité (120), la proposition que voici :

On peut limiter supérieurement les valeurs absolues des grandeurs qui déterminent la perturbation initiale de telle manière que l'intégrale

$$\int (\Upsilon - C)^2 d\varpi$$

ne surpasse jamais une quantité positive quelconque donnée d'avance.

36. Pour un système exclusivement formé de corps conducteurs purs, on peut encore écrire l'équation (81), après y avoir remplacé K' par o. Dans les conditions où l'équation (81) se réduit à l'égalité (82), nous pourrons écrire ici :

$$(121)\qquad \frac{dN}{dt} = -4\pi a^2 \int \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

avec

$$(122)\qquad N = \int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\right)^2 \right] d\varpi.$$

L'égalité (121) nous permet de démontrer trois propositions dont voici la première :

En tout point de la surface Σ qui borne le système, on maintient à la fonction Υ une valeur uniforme et constante C. En tout point de cette même surface, les trois fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont maintenues égales à zéro.

Si la constante k de Helmholtz est positive ou nulle et si la perméabilité magnétique est négative pour tous les corps du système, l'équilibre électrique qui correspond à ces conditions est affecté d'instabilité électrodynamique.

Supposons nulle la perturbation électrostatique initiale; comme la constante k est supposée positive ou nulle, on sera assuré que la fonction Υ garde, sans cesse et dans tout le système, la valeur C.

L'égalité (120) se réduira à la forme (121).

Le second membre de l'égalité (121) ne peut être que nul ou positif.

Pour que le second membre s'annule, il faut qu'on ait, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial t} = 0.$$

En vertu de la première égalité (115), où F est, ici, égal à zéro, cette égalité ne peut avoir lieu à un instant donné, en tout point du système, à moins qu'on n'ait en même temps

$$\Delta \mathcal{J} = 0.$$

Mais comme $\mathcal{J}$ est nul en tout point de la surface qui borne le système, $\mathcal{J}$ ne peut, en tout point de ce système, vérifier l'équation de Laplace, à moins d'être nul en tout point du système, cas auquel on a, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z} = 0.$$

Si donc, le second membre de l'égalité (121) s'annule à un instant donné, N s'annule au même instant. On en conclut sans peine que N croîtra au delà de toute limite avec t si sa valeur initiale est positive.

Or, pour valeur initiale de $\mathcal{J}$, prenons une quantité qui ne soit pas identiquement nulle dans tout le système. Comme $\mathcal{J}$ est nul sur la surface qui borne le système, $\mathcal{J}$ n'aura pas, à l'instant initial, même valeur dans tout le système et l'on n'aura pas, à cet instant, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial z} = 0.$$

La valeur initiale de N sera donc positive; N croîtra au delà de toute limite avec t, ce que nous pouvons regarder comme une marque d'instabilité électrodynamique.

Notre second théorème sera celui-ci :

Supposons la perméabilité magnétique positive pour tous les corps qui composent le système.

Si la fonction Υ *est connue, à tout instant, en tout point du système; si les fonctions* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *sont données, à tout instant, en tout point de la surface qui borne le système, et, à l'instant initial, en tout point du système, aucune des équations* (115) *ne peut admettre deux intégrales continues distinctes.*

Gardons les notations dont, au n° **34**, nous avons fait usage pour démontrer ce même théorème.

La fonction $\mathfrak{F}$ vérifie l'égalité (121) dont le second membre ne peut être que nul ou négatif; la quantité N, qui ne peut être que nulle ou positive, ne peut surpasser sa valeur initiale. Or, à l'instant initial, $\mathfrak{F}$ est nul en tout point du système; il en est donc de même de

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}.$$

La valeur initiale de N est o. Dès lors, N est constamment nul. Partant, on a, à tout instant, en tout point du système,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} = 0,$$

en sorte qu'à chaque instant la fonction continue $\mathfrak{F}$ a même valeur en tout point du système; mais cette valeur, qui doit être zéro en tout point de la surface qui limite le système, ne peut être partout que zéro. On a donc, en tout point du système et à tout instant,

$$\mathfrak{F} = 0$$

ou

$$\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'',$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Voici enfin notre troisième proposition :

Supposons positive ou nulle la constante de Helmholtz.

Supposons positive la perméabilité magnétique de chacun des corps du système.

Imaginons qu'en tout point de la surface qui borne le système la fonction Υ *garde une valeur uniforme et constante* C, *et que les trois fonctions* $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *restent constamment égales à zéro.*

Pour toute perturbation initiale qui n'altère ni Υ *ni (si* k *est positif)* $\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}$, *l'équilibre compatible avec ces conditions possède la stabilité magnétique intégrale.*

Dans ce cas, en effet, Υ demeure constamment égal à C, et F, G et H à zéro. On peut écrire l'égalité (121). Celle-ci nous apprend que N ne peut jamais surpasser sa valeur initiale. De ce résultat les considérations développées au n° **32** permettent de tirer la proposition énoncée.

De l'égalité (121) nous pouvons également conclure que la première des trois quantités

$$\int \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2 d\varpi, \qquad \int \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}\right)^2 d\varpi, \qquad \int \frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right)^2 d\varpi$$

tend vers zéro lorsque t croît indéfiniment; il en va naturellement de même des deux autres. On peut, si l'on veut, regarder cette propriété comme constituant une certaine espèce de stabilité électrodynamique intégrale; mais cette stabilité n'est pas identique à celle qui a été définie au n° **28**.

Les résultats qui ont été établis, en dernier lieu, au sujet de la stabilité magnétique et de la stabilité électrodynamique, peuvent être, à l'aide d'une démonstration semblable à celle qui a été donnée au n° **30**, affranchis de toute restriction relative à la perturbation initiale. En revanche, il faut alors supposer le système formé d'un seul corps homogène, et admettre les deux postulats qui ont été énoncés au n° **30**. De ces deux postulats il en est un qui peut ici, comme nous l'avons vu au numéro précédent, être justifié, du moins si la constante de Helmholtz ne surpasse pas la perméabilité magnétique du corps qui constitue le système.

CHAPITRE V.

ÉTUDE D'UN SYSTÈME FORMÉ DE CORPS PUREMENT DIÉLECTRIQUES.

37. Nous allons maintenant étudier un système formé de corps dénués de toute conductibilité; pour chacun de ces corps, la résistance spécifique ρ sera infinie.

Dans un tel système, la fonction potentielle électrostatique totale W se réduit à la fonction potentielle V′ de la polarisation diélectrique. L'équation (32), vérifiée en tous les points du système, se réduit à

$$(1+4\pi\varepsilon' K')\Delta V' - 2\sqrt{2}\,\pi a k K' \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} = 0. \tag{123}$$

L'équation (34), vérifiée en tout point de la surface de contact de deux corps homogènes, devient

$$(1+4\pi\varepsilon' K'_1)\frac{\partial V'}{\partial n_1} + (1+4\pi\varepsilon' K'_2)\frac{\partial V'}{\partial n_2} = 0. \tag{124}$$

Ce sont là les équations qui doivent servir à déterminer la fonction V′.

A l'instant initial, on pourra, *si la constante k de Helmholtz n'est pas nulle*, choisir arbitrairement, dans tout le système, les valeurs de V′ et de $\frac{\partial V'}{\partial t}$, sous la réserve que l'égalité (124), et celle qu'en déduit une différentiation par rapport à t, soient vérifiées; sous la réserve aussi que soit vérifiée la condition imposée à la fonction V′ en tout point de la surface qui limite le système.

38. Multiplions par $V' d\varpi$ les deux membres de l'égalité (123) et, pour le volume entier du système, intégrons le résultat obtenu; nous parviendrons à une égalité qu'il est aisé de transformer en la suivante :

$$\int (1+4\pi\varepsilon' K')V'\Delta V' d\varpi + 2\sqrt{2}\,\pi a k \int K'\left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2 d\varpi - 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int K' V' \frac{\partial V'}{\partial t} d\varpi.$$

Cette égalité peut, à son tour, moyennant l'égalité (124), se transformer en la suivante :

$$(125) \qquad 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int \mathrm{K}'\mathrm{V}'\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t}\,d\varpi$$
$$= -\int \left\{ (1+4\pi\varepsilon'\mathrm{K}')\left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z}\right)^2\right] - 2\sqrt{2}\,\pi a k \mathrm{K}'\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t}\right)^2 \right\} d\varpi$$
$$- \int (1+4\pi\varepsilon'\mathrm{K}')\mathrm{V}'\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial \mathrm{N}}\,d\Sigma.$$

D'autre part, multiplions par $d\varpi$ les deux membres de l'égalité (123) et intégrons pour le volume entier du système; en vertu de l'égalité (124) l'égalité obtenue se transformera en celle-ci :

$$(126) \qquad 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int \mathrm{K}'\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t}\,d\varpi = -\int (1+4\pi\varepsilon'\mathrm{K}')\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial \mathrm{N}}\,d\Sigma.$$

De l'égalité (125) retranchons membre à membre l'égalité (126), après avoir multiplié les deux membres de celle-ci par une constante quelconque C. Nous trouverons l'égalité

$$(127) \qquad 2\sqrt{2}\,\pi a k \frac{d}{dt}\int \mathrm{K}'(\mathrm{V}'-\mathrm{C})\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t}\,d\varpi$$
$$= -\int \left\{ (1+4\pi\varepsilon'\mathrm{K}')\left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial z}\right)^2\right] - 2\sqrt{2}\,\pi a k \mathrm{K}'\left(\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial t}\right)^2 \right\} d\varpi$$
$$- \int (1+4\pi\varepsilon'\mathrm{K}')(\mathrm{V}'-\mathrm{C})\frac{\partial \mathrm{V}'}{\partial \mathrm{N}}\,d\Sigma.$$

Supposons ou bien que la fonction V' *garde, en tout point de la surface qui borne le système, une valeur uniforme et constante* C, *ou bien que le champ électrique soit, en tout point de cette surface, maintenu constamment nul. Ces hypothèses sont compatibles avec l'établissement d'un état d'équilibre électrique.*

Si, pour chacun des corps du système, les deux inégalités

$$(128) \qquad 1+4\pi\varepsilon'\mathrm{K}' > 0,$$
$$(129) \qquad k\mathrm{K}' < 0$$

sont vérifiées, cet équilibre est instable.

En effet, au second membre de l'égalité (127), le second terme disparaît en vertu des hypothèses faites.

Grâce aux inégalités (128) et (129), le premier terme ne peut être que négatif ou nul. Pour qu'il soit nul, d'ailleurs, il faut qu'on ait, en tout point du système,

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial t} = 0,$$

cas auquel la quantité

$$k \int K'(V' - C) \frac{\partial V'}{\partial t} d\varpi$$

est égal à zéro. Si donc, à l'instant initial, cette quantité est négative, elle demeurera toujours négative et, avec le temps, sa valeur absolue croîtra au delà de toute limite.

Or, après avoir, à l'instant initial, donné à V', en chaque point du système, une valeur généralement différente de C, mais qui se réduise à C en tout point de la surface Σ, et qui vérifie l'égalité (124) en chaque point d'une surface de discontinuité, nous serons libres de prendre, à ce même instant initial et en chaque point du système,

$$\frac{\partial V'}{\partial t} = \lambda(V' - C),$$

λ étant une constante positive. Alors, en vertu de l'égalité (129), la valeur initiale de

$$k \int K'(V' - C') \frac{\partial V'}{\partial t} d\varpi$$

sera sûrement négative, et le théorème énoncé sera démontré.

De ce théorème nous pouvons tirer deux corollaires :

1° *Il existe certainement des corps dont le coefficient de polarisation* K' *est positif. Pour un système formé de tels corps, l'équilibre électrique serait instable si la constante k de Helmholtz était négative, en sorte que cette hypothèse doit être rejetée.*

2° *Supposons positive la constante k de Helmholtz; on ne peut admettre l'existence de corps dont le coefficient de polarisation diélectrique* K' *serait négatif et le pouvoir inducteur spécifique* $(1 + 4\pi\varepsilon' K')$ *positif; sur un système formé de tels corps, en effet, l'équilibre électrique serait instable.*

39. Laissons de côté, pour le moment, le cas où la constante de Helmholtz serait nulle. *Supposons, désormais, que cette constante soit positive :*

$$k > 0, \tag{130}$$

et qu'il en soit de même, pour tout corps du système, du coefficient de polarisation diélectrique :

$$K' > 0. \tag{131}$$

Multiplions par $\frac{\partial V'}{\partial t} d\varpi$ les deux membres de l'équation (123) et intégrons, pour le volume entier du système, le résultat de cette multiplication; nous obtiendrons une égalité que l'égalité (124) permet aisément de transformer en la suivante :

$$\begin{aligned}(132)\quad \frac{d}{dt}\int\Big\{(1+4\pi\varepsilon' K')\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right]&\\ +2\sqrt{2}\,\pi a k K'\left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2\Big\}\,d\varpi&\\ +2\int(1+4\pi\varepsilon' K')\frac{\partial V'}{\partial t}\,\frac{\partial V'}{\partial N}\,d\Sigma = 0.&\end{aligned}$$

Cette égalité (132) va nous permettre d'établir deux propositions dont voici la première :

Si l'on se donne à chaque instant, en tout point de la surface Σ *qui borne le système, soit la valeur de* V', *soit la valeur de* $\frac{\partial V'}{\partial n}$; *si, à l'instant initial, on se donne, en tout point du système, la valeur de* V' *et celle de* $\frac{\partial V'}{\partial t}$, *il ne peut exister deux intégrales continues distinctes des équations* (123) *et* (124).

Supposons, en effet, qu'il en existe deux, V'' et V''', et posons

$$V' = V''' - V''.$$

Chacune des deux fonctions continues V'', V''' vérifiant les égalités (123) et (124), on peut en dire autant de leur différence V', en sorte que V' vérifie l'égalité (132).

Mais, en chaque point de la surface Σ, on a ou bien $V'' = V'''$, ou bien $\frac{\partial V''}{\partial N} = \frac{\partial V'''}{\partial N}$; on a donc ou bien $V' = 0$, ou bien $\frac{\partial V'}{\partial N} = 0$; la première de ces deux égalités, vérifiée quel que soit t, entraîne d'ailleurs $\frac{\partial V'}{\partial t} = 0$. Ainsi, au premier membre de l'égalité (132), le second terme disparaît. Si l'on pose

$$(133) \quad P = \int \left\{ (1 + 4\pi\varepsilon' K') \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2 \right] + 2\sqrt{2}\,\pi a k K' \left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right)^2 \right\} d\varpi,$$

et si l'on désigne par P_0 la valeur initiale de P, l'égalité (132) se réduit à

$$(134) \qquad P = P_0.$$

Mais, à l'instant initial, on a, dans tout le système,

$$V'' = V''',$$

partant

$$V' = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial z} = 0.$$

On a aussi

$$\frac{\partial V''}{\partial t} = \frac{\partial V'''}{\partial t} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial V'}{\partial t} = 0.$$

Ici donc $P_0 = 0$, et l'égalité (134) nous montre que, quel que soit t,

$$P = 0.$$

En vertu des inégalités (130) et (131), cette égalité ne saurait avoir lieu si l'on n'avait, en tout point du système et à tout instant,

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V'}{\partial t} = 0.$$

Cette dernière égalité nous apprend qu'en tout point du système V' garde sans cesse la valeur 0 que cette grandeur avait à l'instant initial, en sorte que, sans cesse aussi, on y a

$$V'' = V'''.$$

Voici notre seconde proposition :

En tout point de la surface qui borne le système, ou bien la fonction potentielle V' *garde une même valeur indépendante du temps* $\left(\frac{\partial V'}{\partial t}=0\right)$, *ou bien le champ électrostatique est maintenu égal à zéro* $\left(\frac{\partial V'}{\partial N}=0\right)$. *Ces conditions sont compatibles avec un état d'équilibre électrique. Cet état d'équilibre possède assurément la stabilité électrostatique intégrale.*

Au premier membre de l'égalité (132), les hypothèses faites font disparaître le second terme, en sorte que l'égalité (132) se réduit à l'égalité (134). Celle-ci, à son tour, en vertu de l'égalité (133) et des inégalités (130) et (131), donne l'inégalité

$$(135)\qquad \int (1+4\pi\varepsilon' K')\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right] d\varpi \leqq P_0.$$

Les composantes du champ électrostatique sont ici

$$X=-\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial x},\qquad Y=-\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial y},\qquad Z=-\varepsilon'\frac{\partial V'}{\partial z}.$$

L'inégalité (135) entraîne donc celle-ci :

$$(136)\qquad \int (X^2+Y^2+Z^2)\,d\varpi \leqq \frac{P_0}{\varepsilon'^2(1+4\pi\varepsilon'\varkappa')},$$

$\varkappa'$ étant la plus petite valeur prise, au sein du système, par le coefficient de polarisation diélectrique K'.

Si l'on veut que le premier membre de cette inégalité demeure toujours inférieur à une quantité positive A donnée d'avance, il suffit de limiter supérieurement, en tout point du système, les valeurs absolues initiales du champ et de $\frac{\partial V'}{\partial t}$, de telle manière qu'on ait

$$P_0 < \varepsilon'^2(1+4\pi\varepsilon'\varkappa')A.$$

40. Venons maintenant au *cas où la constante de Helmholtz est nulle :*

$$k=0.$$

L'équation (123) se réduit à l'équation de Laplace

$$(137)\qquad \Delta V'=0.$$

Les équations (137) et (124) sont celles qui déterminent la polarisation diélectrique d'équilibre. Si le pouvoir inducteur spécifique $(1 + 4\pi\varepsilon' K')$ est positif pour tous les corps du système, on sait que cette distribution est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on se donne, en chaque point de la surface qui borne le système, soit la valeur de V', soit la valeur de $\frac{\partial V'}{\partial N}$

Ainsi, à chaque instant, la polarisation diélectrique sur le système est celle qui correspond à l'état d'équilibre déterminé par les valeurs que V' *ou* $\frac{\partial V'}{\partial N}$ *prennent, à cet instant, en chaque point de la surface qui borne le système.*

En particulier, si V' *garde sans cesse, sur cette surface, une valeur uniforme et constante, ou bien si* $\frac{\partial V'}{\partial N}$ *est maintenu constamment égal à zéro, le système demeure constamment exempt de polarisation diélectrique.*

La question de stabilité ne se pose plus pour un tel état d'équilibre.

41. Une fois V' connu, les trois fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont déterminées par les équations (77) qui deviennent ici

$$(138)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta\mathcal{F} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} &= F, \\ \Delta\mathcal{G} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} &= G, \\ \Delta\mathcal{H} - 2\pi a^2 \mu K' \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2} &= H. \end{aligned} \right.$$

Au sujet de ces égalités, nous pouvons répéter textuellement tout ce qui a été dit du n° **25** au n° **32**. Il suffit, dans les démonstrations et dans les égalités, de biffer tout terme qui contient $\frac{1}{\rho}$ en facteur.