JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Des polynômes invariants par une substitution linéaire

Journal de mathématiques pures et appliquées 6e série, tome 10 (1914), p. 97-104.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1914_6_10__97_0>

Des polynomes invariants par une substitution linéaire;

Par Camille JORDAN.

I. Une substitution linéaire S peut être mise sous la forme canonique

$$S = \begin{vmatrix} x_m & x_{m-1} & \ldots & x_0, & a(x_m + x_{m-1}) & a(x_{m-1} + x_{m-2}) & \ldots & ax_0 \\ y_n & y_{n-1} & \ldots & y_0, & b(y_n + y_{n-1}) & b(y_{n-1} + y_{n-2}) & \ldots & by_0 \\ z_p & z_{p-1} & \ldots & z_0, & c(z_p + z_{p-1}) & c(z_{p-1} + z_{p-2}) & \ldots & cz_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

les constantes a, b, c, ... étant égales ou inégales.

Elle est le produit des deux substitutions suivantes :

$$S_1 = \begin{vmatrix} x_m & \ldots & x_0, & ax_m & \ldots & ax_0 \\ y_n & \ldots & y_0, & by_n & \ldots & by_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} x_m & \ldots & x_0, & x_m + x_{m-1} & \ldots & x_0 \\ y_n & \ldots & y_0, & y_n + y_{n-1} & \ldots & y_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Soit, d'autre part, F un polynome où figurent les variables de S. Désignons par $F_{\lambda\mu\nu\ldots}$ l'ensemble de ceux de ses termes qui sont de degré λ par rapport aux variables x, de degré μ par rapport aux variables y, de degré ν par rapport aux variables z, etc.

La substitution S étant linéaire par rapport à chacune des séries de variables, transformera $F_{\lambda\mu\nu\ldots}$ en une autre forme $G_{\lambda\mu\nu\ldots}$ également homogène et de degré λ par rapport aux x, homogène et de degré μ par rapport aux y, etc.

Pour que le polynome $F = \Sigma F_{\lambda\mu\nu\ldots}$ soit identique à son transformé

$G = \Sigma G_{\lambda\mu\nu\ldots}$, il faut qu'on ait pour chaque système des valeurs de λ, μ, ν, ...

$$F_{\lambda\mu\nu\ldots} = G_{\lambda\mu\nu\ldots},$$

car aucune réduction n'est possible entre des termes pour lesquels λ, μ, ν, ... ont des valeurs différentes.

La construction des polynomes invariants est ainsi ramenée au cas des formes homogènes séparément par rapport à chacune des séries de variables $x, y, z, \ldots$.

Si nous désignons par D l'opération

$$x_{m-1}\frac{\partial}{\partial x_m} + x_{m-2}\frac{\partial}{\partial x_{m-1}} + \ldots + x_0\frac{\partial}{\partial x_1} + y_{n-1}\frac{\partial}{\partial y_n} + \ldots + y_0\frac{\partial}{\partial y_1} + z_{p-1}\frac{\partial}{\partial z_p} + \ldots + z_0\frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots,$$

nous aurons pour $G_{\lambda\mu\nu\ldots}$ le développement symbolique

$$G_{\lambda\mu\nu\ldots} = a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots \left(1 + D + \frac{D^2}{1.2} + \ldots + \frac{D^k}{1.2\ldots k} + \ldots\right) F_{\lambda\mu\nu}.$$

Convenons d'assigner à chacune des variables $x, y, z, \ldots$ un poids égal à son indice. L'opération D, effectuée sur un monome T de poids p, donne pour résultat une somme de termes de poids $p - 1$.

Soit donc $F_{\lambda\mu\nu\ldots} = \Phi + \Psi$, Φ désignant l'ensemble des termes de poids maximum p. L'ensemble des termes de poids p dans $G_{\lambda\mu\nu\ldots}$ sera $a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots \Phi$; mais on doit avoir

$$G_{\lambda\mu\nu\ldots} - F_{\lambda\mu\nu\ldots} = 0, \tag{1}$$

d'où cette première condition

$$a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots = 1,$$

laquelle exprime que la substitution S_1 laisse F et Φ invariants.

En la supposant remplie, la relation (1) se réduira à

$$\left(D + \frac{D^2}{1.2} + \ldots + \frac{D^k}{1.2\ldots k} + \ldots\right)(\Phi + \Psi) = 0.$$

Les termes de poids maximum $p - 1$ dans le premier membre devant s'annuler séparément, on aura

$$D\Phi = 0.$$

Si cette seconde condition est remplie, on en déduira

$$D^2\Phi = D(0) = 0, \qquad D^3\Phi = 0, \qquad \ldots.$$

Donc Φ sera une forme invariante et Ψ devra l'être également.

On voit de même que l'ensemble Φ_1 des termes de poids maximum dans Ψ doit être invariant, et ainsi de suite.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Tout polynome F *invariant par la substitution* S *est une somme de formes invariantes* Φ, *homogènes par rapport à chacune des séries de variables* $x, y, z, \ldots$ *et isobares.*

Les degrés $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ *de chacune de ces formes* Φ *par rapport aux* x, *aux* y, *aux* $z, \ldots$ *satisfont à la relation*

$$a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots = 1, \tag{2}$$

laquelle exprime son invariance par la substitution S_1.

On a, en outre, la condition

$$D\Phi = 0, \tag{3}$$

qui exprime son invariance par la substitution S_2.

Discutons successivement les conditions (2) et (3).

II. Soient

$$\begin{array}{llll} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1, & \ldots, \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

les solutions linéairement indépendantes de l'équation (2) en nombres entiers (positifs, nuls ou négatifs).

La solution générale en nombres entiers sera

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots, \\ \mu = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots, \\ \nu = \nu_1 m_1 + \nu_2 m_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{4}$$

$m_1, m_2, \ldots$ étant des entiers (positifs, nuls ou négatifs).

Si quelqu'un des entiers m, tel que m_1, est négatif, on mettra son signe en évidence, et l'on aura ce nouveau système

$$\lambda = -\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots,$$
$$\mu = -\mu_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où m_1 est positif.

On pourra donc supposer qu'aucun des entiers m n'est négatif, à la condition de considérer, après le système (4), ceux qui s'en déduisent par le changement de signe des coefficients de quelques colonnes.

Remarquons d'ailleurs que, Φ étant un polynome entier, on doit rejeter tous les systèmes de valeurs de m_1, m_2, ... qui rendraient négatifs quelqu'un des entiers λ, μ, ν, ...

Pour déterminer les systèmes admissibles, considérons tout d'abord la première équation du système (4)

$$\lambda = \lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots, \tag{5}$$

jointe à l'inégalité

$$\lambda \geqq 0. \tag{6}$$

Si $m'_1, m'_2, \ldots; \lambda'$ et $m''_1, m''_2, \ldots; \lambda''$ sont deux solutions de ces relations autres que la solution banale o, o, ...; o qui correspond à $\Phi = \text{const.}$, leur addition donnera une nouvelle solution

$$m'_1 + m''_1, \quad m'_2 + m''_2, \quad \ldots; \quad \lambda' + \lambda''.$$

Nous dirons qu'une solution est *primitive* si elle ne peut s'obtenir ainsi par l'addition de deux solutions plus simples.

Ces solutions primitives sont en nombre limité.

En effet, si λ_1, λ_2, ... sont tous positifs, les solutions

$$\begin{array}{llll} 1, & 0, & 0, & \ldots; \ \lambda_1, \\ 0, & 1, & 0, & \ldots; \ \lambda_2, \\ ., & ., & ., & \ldots; \ \ldots \end{array}$$

seront seules primitives ; car toute solution

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots; \quad \lambda,$$

dans laquelle $m_1 + m_2 + \ldots$ surpasse l'unité (m_1 par exemple n'étant pas nul) résulte de l'addition des deux solutions

$$\begin{array}{lllll} 1, & 0, & 0, & \ldots; & \lambda_1, \\ m_1-1, & m_2, & m_3, & \ldots; & \lambda-\lambda_1. \end{array}$$

Supposons, au contraire, que quelques-uns des λ soient négatifs; mettant le fait en évidence, nous aurons une égalité de la forme

$$\lambda = \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_{k-1} m_{k-1} - \lambda_k m_k - \lambda_{k+1} m_{k+1} - \ldots.$$

Pour que la solution

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots; \quad \lambda$$

soit primitive, il faudra qu'aucun des entiers m_k, m_{k+1}, ... ne surpasse $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1}$.

Car si m_k, par exemple, était plus grand que cette somme, l'ensemble des termes négatifs qui entrent dans l'expression de λ serait plus grand en valeur absolue que $\lambda_k(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1})$. L'ensemble des termes positifs

$$\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 + \ldots + \lambda_{k-1} m_{k-1}$$

le serait *a fortiori* puisque λ n'est pas négatif. Donc l'un au moins des entiers m_1, ..., m_{k-1}, par exemple m_1, serait $> \lambda_k$.

Cela posé, la solution donnée résulterait de l'addition des deux suivantes :

$$\begin{array}{lllllll} \lambda_k, & 0, & \ldots, & \lambda_1, & 0, & \ldots; & 0, \\ m_1-\lambda_k, & 0, & \ldots, & m_k-\lambda_1, & 0, & \ldots & \lambda; \end{array}$$

elle ne serait donc pas primitive.

La valeur absolue z de la somme s des termes négatifs, dans l'expression de λ, ne peut donc surpasser la quantité fixe

$$(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k-1})(\lambda_k + \lambda_{k+1} + \ldots).$$

Celle des termes positifs sera au moins égale à s; mais chacun des entiers m_1, ..., m_{k-1} sera limité. En effet, considérons m_1 par exemple.

Si λ_1 n'est pas nul, m_1 ne pourra surpasser $\frac{s}{\lambda_1} + 1$. Autrement on aurait

$$\lambda \gtreqless \lambda_1 m_1 \gtreqless s + \lambda_1,$$

et la solution considérée serait la somme des deux suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1, & 0, & 0, & \ldots;\ \lambda_1, \\ m_1-1, & m_2, & \ldots; & \lambda-\lambda_1. \end{array}$$

Si λ_1 est nul, m_1 ne peut surpasser l'unité; autrement la solution considérée serait la somme des deux suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1, & 0, & 0, & \ldots;\ 0, \\ m_1-1, & m_2, & \ldots; & \lambda \end{array}$$

Les solutions primitives

$$\begin{array}{llll} m'_1, & m'_2, & \ldots; & \lambda', \\ m''_1, & m''_2, & \ldots; & \lambda'', \\ \ldots, & \ldots, & \ldots; & \ldots \end{array}$$

des relations (5) et (6) étant en nombre limité comme nous venons de l'établir, la solution la plus générale résultant de leur addition sera

$$\begin{aligned} m_1 &= m'_1 t_1 + m''_1 t_2 + \ldots, \\ m_2 &= m'_2 t_1 + m''_2 t_2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda &= \lambda' t_1 + \lambda'' t_2 + \ldots, \end{aligned}$$

les t étant des entiers positifs ou nuls.

Substituons ces valeurs de m_1, m_2, ... dans la seconde des relations (4)

$$\mu = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 + \ldots.$$

Elle prendra la forme

$$\mu = \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \ldots. \tag{5'}$$

A cette équation nous devrons joindre l'inégalité

$$\mu \gtreqless 0. \tag{6'}$$

Nous pouvons raisonner sur ces relations comme nous l'avons fait sur les relations analogues (5) et (6), et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à obtenir les valeurs définitives de λ, μ, ν, ... Elles seront de la forme

$$\begin{aligned}
\lambda &= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots,\\
\mu &= \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \ldots,\\
\nu &= \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

les β, γ, δ, ... étant des entiers déterminés et les u des entiers arbitraires, les uns et les autres étant positifs ou nuls.

III. Il reste enfin à construire les polynomes F invariants par la substitution S_2. Nous avons vu qu'ils ont pour caractère distinctif de satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\mathrm{DF} = 0. \tag{7}$$

Cette équation admet comme solutions particulières les polynomes suivants :

$$(8)\quad \begin{cases}
Z_k = z_0^{k-1} z_k - z_0^{k-2} z_{k-1} z_1 + z_0^{k-3} z_{k-2} \dfrac{z_1^2}{1.2} - \ldots + (-1)^{k-1} z_1 \dfrac{z_1^{k-1}}{(k-1)!} \\
\qquad (k = 2, \ldots, p); \\
Y_1 = z_0 y_1 - y_0 z_1, \\
Y_k = y_0^{k-1} y_k - y_0^{k-2} y_{k-1} y_1 + y_0^{k-3} y_{k-2} \dfrac{y_1^2}{1.2} - \ldots + (-1)^{k-1} y_1 \dfrac{y_1^{k-1}}{(k-1)!} \\
\qquad (k = 2, \ldots, n); \\
X_1 = y_0 x_1 - x_0 y_1, \\
X_k = x_0^{k-1} x_k - x_0^{k-2} x_{k-1} x_1 + x_0^{k-3} x_{k-2} \dfrac{x_1^2}{1.2} - \ldots + (-1)^{k-1} x_1 \dfrac{x_1^{k-1}}{(k-1)!} \\
\qquad (k = 2, \ldots, m).
\end{cases}$$

On a, en effet, par exemple,

$$\begin{aligned}
\mathrm{DZ}_k &= z_{k-1} \frac{\partial Z_k}{\partial z_k} + z_{k-2} \frac{\partial Z_k}{\partial z_{k-1}} + \ldots + z_0 \frac{\partial Z_k}{\partial z_1} \\
&= y_0^{k-1} y_{k-1} - y_0^{k-2} y_{k-2} y_1 + y_0^{k-3} y_{k-3} \frac{y_1^2}{1.2} - \ldots \\
&\qquad + (-y_0^{k-1} y_{k-1} + y_0^{k-2} y_{k-2} y_1 - \ldots) = 0,
\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\mathrm{DY}_1 = y_0 \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + z_0 \frac{\partial Y_1}{\partial z_1} = z_0 y_0 - y_0 z_0 = 0.$$

Tout polynome formé avec ceux-ci et avec les variables x_0, y_0, z_0

sera encore invariant; et si, après substitution des valeurs des X, Y, Z, il contient en facteur commun quelques puissances de x_0, y_0, z_0, on pourra supprimer ce facteur commun; le quotient sera encore invariant.

Réciproquement tout polynome invariant s'obtiendra par ce procédé.

Soit, en effet, F un polynome formé avec les variables x, y, z. Résolvons les équations (8) par rapport à $z_2, \ldots, z_p; y_1, \ldots, y_n; x_1, \ldots, x_m$. Les valeurs trouvées seront rationnelles et auront pour dénominateur commun le déterminant

$$z_0 z_0^2 \ldots z_0^{p-1} z_0 . y_0 y_0^2 \ldots y_0^{n-1} y_0 . x_0 x_0^2 \ldots x_0^{m-1},$$

de ces équations.

Substituant ces valeurs dans F et chassant les dénominateurs, nous obtiendrons un résultat de la forme

$$x_0^\alpha y_0^\beta z_0^\gamma \mathrm{F} = \mathrm{P},$$

P étant un polynome en $Z_2, \ldots, Z_p; Y_1, \ldots, Y_n; X_1, \ldots, X_m; x_0, y_0, z_0, z_1$.

Si l'on veut que F soit invariant, il faut que DP soit nul. Mais les Z, Y, X étant invariants, DP se réduit à $z_0 \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial z_1}$. Donc P est indépendant de z_1, ce qui démontre notre proposition.