JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. GOURSAT

Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 241-259.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__241_0>

Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux;

PAR E. GOURSAT.

---

1. Je me propose de compléter sur quelques points les résultats d'un Mémoire antérieur *Sur les invariants intégraux* (*Journal de Mathématiques*, 6e série, t. IV, 1908, p. 331-365). J'emploierai les mêmes notations que dans ce travail, sauf que j'écrirai, afin d'abréger, un seul signe $\int$ pour désigner une intégrale multiple, ce qui ne peut entraîner aucune ambiguïté.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes et $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} (p \leq n)$ un système de fonctions de ces n variables, dont chacune est affectée de p indices différents $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, pris parmi les n premiers nombres. Les fonctions dont les indices ne diffèrent que par leur ordre sont égales *au signe près*. Si $(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p)$ est une nouvelle permutation des indices $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, on a

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} = \pm A_{\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_p},$$

le signe + convenant au cas où les deux permutations sont de la même classe, et le signe — au cas où ces permutations sont de classes différentes. L'expression

$$I_p = \int \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p},$$

où le signe Σ est étendu à tous les arrangements des n premiers nombres p à p, représente une intégrale multiple d'ordre p. Pour avoir la valeur de cette intégrale étendue à une multiplicité (E_p) de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, nous supposerons les coordonnées d'un point de cette multiplicité exprimées au moyen de p paramètres

$u_1, u_2, \ldots, u_p$, de façon que la multiplicité (E_p) corresponde point par point à une autre multiplicité (e_p) de l'espace à p dimensions $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$. La valeur de l'intégrale I_p, étendue à la multiplicité (E_p), peut alors s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes

$$I_p = \int \left(\Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial u_p} \right) du_1\, du_2 \ldots du_p,$$

le signe Σ étant étendu à tous les arrangements p à p des n indices,

$$I_p = \int \left[\Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{D(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_p})}{D(u_1, u_2, \ldots, u_p)} \right] du_1\, du_2 \ldots du_p,$$

le signe Σ étant étendu à toutes les combinaisons des indices p à p, et les deux intégrales étant étendues à la multiplicité (e_p). Quand on change l'ordre dans lequel on écrit les variables $u_1, u_2, \ldots, u_p$, la valeur de I_p peut changer de signe, de même qu'une intégrale de surface change de signe quand on change le côté de la surface suivant lequel elle est prise. Dans ce qui suit, nous aurons à considérer des intégrales étendues à une multiplicité (E_p), qui varie d'une manière continue avec un paramètre t. Les coordonnées d'un point de cette multiplicité sont fonctions des p paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_p$ et de t. Une fois qu'on a choisi l'ordre dans lequel on écrit les variables x_i et les paramètres $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ pour une valeur particulière de t, on conservera le même ordre pour toutes les valeurs de t. Il est clair que la valeur de l'intégrale multiple est une fonction continue de t.

2. Soit

$$(1) \qquad I_p = \int \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}\, dx_{\alpha_1}\, dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

un invariant intégral d'ordre p du système

$$(2) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt;$$

je supposerai, pour fixer les idées, que l'on a écrit tous les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ correspondant à tous les arrangements p à p des n premiers nombres. Soit E_{p-1} une multiplicité à $p-1$ dimensions de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ non formée de caractéristiques, c'est-à-dire de courbes intégrales des équations (2). Quand on fait varier t de o à T, le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui, pour $t=0$, coïncide avec un point $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ de E_{p-1} décrit un segment de caractéristique C allant du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ à un point $(x_1^T, x_2^T, \ldots, x_n^T)$, et ces segments de caractéristiques engendrent une multiplicité E_p limitée par E_{p-1}, par la multiplicité E'_{p-1} décrite par le point $(x_1^T, x_2^T, \ldots, x_n^T)$ et par une autre multiplicité E''_{p-1} engendrée par les segments de caractéristiques issues des différents points de la multiplicité E_{p-2} qui limite E_{p-1}. Nous allons calculer la valeur de l'intégrale I_p étendue à cette multiplicité E_p. Pour cela, supposons les coordonnées d'un point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de E_{p-1} exprimées au moyen de $p-1$ variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$; les coordonnées d'un point de la multiplicité E_p seront alors des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ et de la variable t, pour lesquelles on aura

$$(2)' \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'intégrale cherchée peut s'écrire

$$\begin{aligned} I_p &= \int_{E_p} \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p} \\ &= \int_{E_p} \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial t} du_1 \ldots du_{p-1}\, dt, \end{aligned}$$

la sommation indiquée par le signe Σ étant étendue à tous les arrangements d'indices p à p. On peut encore écrire I_p, d'après les relations $(2)'$,

$$(3) \qquad I_p = \int_0^T dt \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \frac{\partial x_{\alpha_2}}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} du_1 \ldots du_{p-1},$$

en posant

$$(4) \qquad C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i;$$

cette expression de I_p prend aussi la forme abrégée équivalente

$$(3)' \qquad I_p = \int_0^T dt \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

La valeur de I_p est une fonction de la variable T, dont la dérivée pour $T = 0$ a pour valeur

$$(5) \qquad \left(\frac{dI_p}{dT}\right)_0 = \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}.$$

Considérons en second lieu une multiplicité E_p définie en partant de E_{p-1} d'une façon plus générale. A chaque point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de E_{p-1} faisons correspondre une valeur de θ variant d'une manière continue avec la position de ce point. Le segment de caractéristique issue du point $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ décrit par le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ quand t varie entre 0 et θ, engendre une multiplicité E_p, bornée par E_{p-1} et une autre multiplicité E'_{p-1} lieu de l'extrémité du segment variable de caractéristique. De chaque point m de cette multiplicité E_p part une caractéristique; si l'on fait varier t à 0 à T, le point m vient occuper une position m', dont le lieu est une autre multiplicité E'_p que l'on peut évidemment déduire de E_p en ajoutant à celle-ci la multiplicité μ'_p décrite par E'_{p-1} quand on fait croître t de 0 à T, et en retranchant la multiplicité μ_p décrite par E_{p-1} quand t varie de 0 à T. Puisque I_p est un invariant intégral, l'intégrale I_p a la même valeur pour les multiplicités E_p et E'_p, et par suite pour les multiplicités μ_p et μ'_p. La dérivée $\left(\frac{dI_p}{dT}\right)_0$ a donc la même valeur pour les deux multiplicités E_{p-1} et E'_{p-1},

$$(6) \quad \int_{E_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_{p-1}} = \int_{E'_{p-1}} \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots, dx_{\alpha_{p-1}},$$

quelle que soit la façon dont θ varie avec la position du point $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ sur E_{p-1}. En particulier, si l'on suppose que θ a une valeur constante, on voit que

$$(7) \qquad I_{p-1} = \int \Sigma C_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{p-1}}$$

est un invariant intégral d'ordre $p-1$ pour les équations (2). Mais c'est un invariant intégral d'une espèce particulière, car il conserve la même valeur pour toute multiplicité que l'on déduit de E_{p-1} en faisant décrire à chaque point de E_{p-1} la caractéristique issue de ce point suivant une loi arbitraire. En continuant d'employer le langage géométrique, si nous appelons *tube de caractéristiques* la multiplicité d'ordre p engendrée par les caractéristiques issues des différents points d'une multiplicité d'ordre $p-1$, non formée de caractéristiques, et *section* de ce tube toute multiplicité continue d'ordre $p-1$ obtenue en prenant un point arbitrairement sur chacune de ces caractéristiques, on peut dire que l'intégrale I_{p-1} a la même valeur pour toutes les sections d'un tube caractéristique. Nous dirons pour abréger que tout invariant intégral qui jouit de cette propriété est *attaché aux caractéristiques*. D'après cela, tout invariant attaché aux caractéristiques est aussi un invariant intégral pour le système d'équations différentielles obtenu en multipliant $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par une fonction arbitraire $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, puisque les caractéristiques restent les mêmes.

Ce qui précède n'est au fond que le raisonnement de M. Poincaré (*Acta mathematica*, t. XIII, p. 66), présenté sous sa forme la plus générale. Le résultat peut s'énoncer comme il suit :

De tout invariant intégral absolu I_p du système (2), *on peut déduire* (*en général*) *un invariant I_{p-1} attaché aux caractéristiques de ce système.*

On est ainsi conduit à se poser les deux questions suivantes :

1° Obtient-on par ce procédé tous les invariants intégraux attachés aux caractéristiques ?

2° Un invariant intégral étant donné, comment reconnaître s'il est attaché aux caractéristiques ?

On verra que ces deux questions se résolvent en même temps d'une façon très simple.

3. Dans le travail antérieur déjà rappelé, j'ai appelé (E) l'opération par laquelle on passe de l'invariant (1) I_p à l'invariant (7) I_{p-1}. La liaison entre ces deux invariants peut être résumée par la relation

$$(8) \qquad \left(\frac{dI_p}{dT}\right)_{T=0} = I_{p-1},$$

l'invariant I_{p-1} étant étendu à une multiplicité quelconque E_{p-1} et l'invariant I_p à la multiplicité E_p que l'on déduit de E_{p-1} par le procédé expliqué plus haut. Il est clair que cette relation se conserve quand on change d'une façon quelconque les fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sans changer la variable t. En d'autres termes l'opération (E) est covariante pour toute transformation de la forme

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

après cette transformation, les équations (2) sont remplacées par un nouveau système

$$(2)' \qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt,$$

tandis que les invariants I_p et I_{p-1} deviennent respectivement

$$I'_p = \int \Sigma A'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} dy_{\alpha_1} \ldots dy_{\alpha_p}, \qquad I'_{p-1} = \int \Sigma C'_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} dy_{\alpha_1} \ldots dy_{\alpha_{p-1}}.$$

L'invariant I'_{p-1} se déduit de I'_p de la même façon que I_{p-1} se déduit de I_p, c'est-à-dire que l'on a

$$C'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}} = \sum_{i=1}^{n} A'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} Y_i,$$

comme on peut le vérifier directement.

L'opération (E) appliquée à un invariant I_p conduit à un invariant I_{p-1} identiquement nul si les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ vérifient les relations

$$(9) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i = 0$$

pour tous les arrangements d'indices $p - 1$ à $p - 1$. J'ai appelé $I_p^{(e)}$ les invariants qui jouissent de cette propriété. On voit immédiatement que tout invariant I_p, déduit d'un invariant I_{p+1} par l'opération (E) est $I_p^{(e)}$; la réciproque sera établie un peu plus loin.

On peut caractériser les invariants $I_p^{(e)}$ par la propriété suivante : *la valeur d'un invariant intégral $I_p^{(e)}$, étendue à une multiplicité quelconque d'ordre p, engendrée par des courbes caractéristiques, est toujours nulle; et réciproquement, tout invariant intégral jouissant de cette propriété est un invariant intégral $I_p^{(e)}$.*

Toute multiplicité d'ordre p composée de caractéristiques peut être définie comme la multiplicité E_p considérée plus haut; les coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'un point de cette multiplicité sont des fonctions de p variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, t$, dont les dérivées partielles $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ sont égales aux fonctions X_i. La valeur de l'invariant intégral I_p étendue à une multiplicité de cette espèce a donc pour expression

$$I_p = \int_{E_p} \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} X_i \, du_1 \, du_2 \ldots du_{p-1} \, dt,$$

ce qui peut s'écrire encore

$$I_p = \int_{E_p} \sum \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} \left(\sum_{i=1} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i \right) du_1 \, du_2 \ldots du_{p-1} \, dt.$$

Cette intégrale ne peut être nulle quelle que soit la multiplicité considérée que si tous les éléments sont nuls, c'est-à-dire si l'on a identiquement

$$\sum \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_{p-1}}}{\partial u_{p-1}} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, i} X_i \right) = 0.$$

Il en est évidemment ainsi si les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ de l'invariant intégral I_p vérifient les relations (9). Inversement, ces conditions sont nécessaires, car pour un système de valeurs données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut choisir arbitrairement les valeurs de toutes les dérivées partielles $\frac{\partial x_k}{\partial u_i}$. L'invariant considéré est donc un invariant I_p^e.

Il est évident que cette propriété est indépendante du choix des inconnues. Si un changement de variables $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ramène le système (2) au système (2)′ et l'invariant intégral (1) à la forme

$$I'_p = \int \Sigma A'_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \, dy_{\alpha_1} \ldots dy_{\alpha_p},$$

les coefficients du nouvel invariant I'_p vérifient les relations

$$(9)' \qquad \sum_{i=1}^{n} A'_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} i} Y_i = 0,$$

si les relations (9) sont vérifiées.

4. Supposons en particulier que l'on ait ramené, par un changement de fonctions inconnues, le système (2) à la forme réduite souvent employée par Poincaré dans ses raisonnements,

$$(10)\qquad \frac{dy_1}{0} = \frac{dy_2}{0} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{0} = \frac{dy_n}{1} = dt.$$

Tout invariant intégral d'ordre p est de la forme

$$\int B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}\, dy_{\alpha_1}\, dy_{\alpha_2} \ldots dy_{\alpha_p},$$

les coefficients $B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ ne dépendant pas de y_n, et pouvant être des fonctions quelconques de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$. Avec ce système de variables les conditions (9) deviennent

$$B_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_n} = 0.$$

Donc la différentielle dy_n ne doit pas figurer dans l'expression de l'invariant, pour qu'il soit un invariant $I_p^{(e)}$; un invariant de cette espèce ne contient donc ni y_n, ni dy_n, tandis qu'un invariant intégral quelconque ne contient pas y_n, mais peut contenir dy_n. Pour appliquer l'opération (E) à un invariant I_p, nous supposerons qu'on l'écrive en ne prenant que les combinaisons de n indices p à p, et en mettant toujours le facteur dy_n le dernier dans les termes où ce facteur figure. Pour passer de I_p à l'invariant qui s'en déduit $I_{p-1}^{(e)}$, il suffit alors de supprimer le facteur dy_n dans tous les termes où il figure, et de supprimer tous les termes qui ne contiennent pas ce facteur.

Inversement, étant donné un invariant $I_p^{(e)}$, on peut le déduire d'un invariant I_{p+1} par l'opération (E) (et en général d'une infinité de façons). En effet, cet invariant $I_p^{(e)}$ étant écrit en ne prenant que les combinaisons des n indices p à p, il suffira d'ajouter le facteur dy_n à chaque terme de $I_p^{(e)}$, et de lui ajouter ensuite un invariant quelconque $I_{p+1}^{(e)}$, pour avoir un invariant d'ordre $p+1$ dont l'invariant $I_p^{(e)}$ se déduira par l'opération (E). Il est clair qu'on aura ainsi tous les invariants d'ordre $p+1$ dont l'invariant donné $I_p^{(e)}$ se déduit par l'opération (E). Il n'y a qu'un moyen d'appliquer ce procédé lorsque $p = n - 1$, car il n'existe évidemment aucun invariant $I_n^{(e)}$ sauf zéro. Tout invariant $I_{n-1}^{(e)}$ correspond donc à un multiplicateur déterminé du système d'équations différentielles et réciproquement. C'est du reste en partant d'un multiplicateur que Poincaré a donné la construction générale d'un invariant I_{n-1} attaché aux caractéristiques, dans le cas particulier où $n = 3$ (*voir* aussi le n° **16** de mon premier Mémoire). Les autres théorèmes démontrés dans ce travail (nos **6-9**) sur les invariants $I_p^{(c)}$ pourraient aussi être établis aisément sur la forme réduite. Je ne m'y arrêterai pas. Remarquons seulement qu'il est évident, d'après l'expression de ces invariants, qu'ils sont attachés aux caractéristiques. Supposons, pour simplifier, $n = 3$; un invariant $I_2^{(c)}$ est de la forme

$$I_2^{(c)} = \int\int B(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2.$$

Les caractéristiques sont des droites parallèles à l'axe Oy_3. Étant donné un tube de caractéristiques, il est clair que la valeur de l'intégrale $I_2^{(c)}$, étendue à une section quelconque de ce tube, est la même pour toutes ces sections.

5. Il nous reste à démontrer que les invariants $I_p^{(c)}$ sont les seuls invariants attachés aux caractéristiques. La démonstration directe suivante s'applique à la fois à la proposition elle-même et à sa réciproque. Reprenons, comme au n° **2**, une multiplicité E_p $(p < n)$ non formée de caractéristiques, limitée par une multiplicité E_{p-1} qui peut disparaître si E_p est une multiplicité fermée. De tout point m de E_p part une caractéristique, sur laquelle nous prenons arbitrairement un point m', de façon à respecter la continuité. Quand le point m décrit E_p, le segment mm' de caractéristique engendre une multiplicité E_{p+1}, dont la limite se compose :

1° De la multiplicité donnée E_p;

2° De la multiplicité E'_p décrite par l'extrémité m' du segment de caractéristique considérée lorsque m décrit E_p;

3° De la multiplicité E''_p engendrée par les segments de caractéristiques issues des différents points de E_{p-1}.

Cela étant, soit I_p un invariant intégral. La différence entre les valeurs de l'intégrale multiple I_p étendue aux deux multiplicités E_p et E'_p dans des sens correspondants (n° **1**) est égale, d'après le théorème de Stokes généralisé, à l'intégrale I_p étendue à E''_p, augmentée d'une intégrale $I_{p+1}^{(d)}$, étendue à la multiplicité E_{p+1}, $I_{p+1}^{(d)}$ étant un invariant intégral d'ordre $p+1$ qui se déduit de I_p par l'opération (D) (*voir* le Mémoire cité n° **2**). Pour que cette différence soit toujours nulle, il faut et il suffit que l'intégrale I_p étendue à E''_p et l'intégrale $I_{p+1}^{(d)}$ étendue à E_{p+1} soient nulles séparément.

Cette condition est nécessaire. En effet, on peut supposer que la multiplicité E''_p disparaît; il suffit pour cela de limiter E_p et E''_p à la même multiplicité E_{p-1}. L'intégrale $I_{p+1}^{(d)}$ étendue à la multiplicité E_{p+1} formée de caractéristiques doit donc être nulle, ce qui exige que l'invariant intégral $I_{p+1}^{(d)}$ soit un invariant $I_{p+1}^{(d,e)}$ (n° 3). S'il en est ainsi, l'intégrale I_p étendue à la multiplicité E''_p, qui est une multiplicité quelconque formée de caractéristiques, doit aussi être nulle. Donc l'invariant I_p doit lui-même être un invariant $I_p^{(e)}$. Cette dernière condition entraîne la première, comme je l'ai démontré dans le premier travail (n° **8**).

En résumé, les seuls invariants attachés aux caractéristiques sont les invariants $I_p^{(e)}$, dont les coefficients vérifient les relations (9).

Remarque I. — On peut encore démontrer comme il suit que les conditions (9) sont nécessaires pour que I_p soit un invariant attaché aux caractéristiques. En effet, s'il en est ainsi, les conditions qui expriment que I_p est un invariant intégral doivent encore être vérifiées quand on multiplie les fonctions X_i par une fonction arbitraire $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$, puisque cela ne change pas les caractéristiques. Pour qu'il en soit ainsi, la fonction λ doit vérifier les relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_{\alpha_1}}\left(\sum_h A_{h\alpha_2,\ldots,\alpha_p} X_h\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x_{\alpha_2}}\left(\sum_h A_{\alpha_1 h,\ldots,\alpha_p} X_h\right) + \ldots = 0,$$

et, comme cette fonction λ est arbitraire, les coefficients $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_p}$ doivent satisfaire aux conditions (9).

Remarque II. — Il résulte aussi de la démonstration précédente que, si une expression

$$U = \int \Sigma A_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_p}$$

est une différentielle exacte, et si les coefficients vérifient les conditions (9), cette expression est un invariant $I_p^{(d,e)}$ des équations (2). Il est facile de vérifier ce résultat en combinant les équations (9) avec les relations qui expriment que U est une différentielle exacte.

6. Nous n'avons considéré jusqu'ici que des invariants absolus. Mais on peut aussi définir des invariants relatifs attachés aux caractéristiques. Soit, pour fixer les idées,

$$J_1 = \int A_1\,dx_1 + \ldots + A_n\,dx_n$$

un invariant relatif du premier ordre du système (2), on peut le remplacer par l'invariant absolu

$$I_2^{(d)} = \int \sum \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \right) dx_i\,dx_k.$$

Si cet invariant $I_2^{(d)}$ est $I_2^{(d,e)}$, le raisonnement du numéro précédent prouve que l'intégrale J_1 prise le long d'une courbe fermée quelconque C_0 est égale à la même intégrale prise le long d'une autre courbe fermée C_1, obtenue en prenant, suivant une loi arbitraire, un point m' sur la caractéristique issue d'un point m de C_0. En effet, la différence de ces deux intégrales est égale, d'après le théorème de Stokes généralisé, à l'intégrale double $I_2^{(e)}$ étendue à la multiplicité E_2 engendrée par les segments de caractéristiques $m\,m'$, intégrale qui est nulle d'après la propriété qui caractérise les invariants $I_p^{(e)}$.

De tout invariant $I_{p+1}^{(d,e)}$ on peut de même déduire un invariant absolu ou relatif d'ordre p attaché aux caractéristiques.

Il peut se faire qu'un invariant intégral I_p ne soit un invariant $I_p^{(e)}$ que pour l'ensemble des caractéristiques qui satisfont à certaines conditions. Supposons par exemple que les équations (2) admettent une intégrale première $F = C$. Les caractéristiques pour lesquelles la constante C a une valeur déterminée forment un système dépendant de $(n-2)$ constantes arbitraires seulement, et peuvent être considérées comme les caractéristiques d'un système de $(n-1)$ équations différentielles que l'on obtiendrait en résolvant par rapport à l'une des variables, x_n par exemple, la relation $F = C$, et portant cette valeur dans les équations

$$(2)' \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}} = dt.$$

Si l'on fait la même substitution dans l'invariant I_p, on obtient un invariant I'_p des équations (2)' qui peut être un invariant $I'^{(e)}_p$ pour ce système. Mais on peut se dispenser de ce calcul, en vérifiant que l'intégrale I_p est nulle sur toute multiplicité E_p composée de caractéristiques pour lesquelles la constante C a la même valeur numérique. Considérons par exemple le système canonique

$$(11) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui admet l'invariant intégral

$$(12) \qquad I_2 = \int\int dx_1\, dp_1 + \ldots + dx_n\, dp_n;$$

à moins que F ne soit une constante, cet invariant I_2 n'est pas $I_2^{(e)}$. D'autre part, le système (11) admet l'intégrale première $F = C$. Nous allons montrer que l'intégrale I_2 étendue à toute multiplicité E_2 engendrée par des caractéristiques, pour lesquelles la constante C a une valeur numérique déterminée, est toujours nulle. En effet, les coordonnées (x_i, p_i) de tout point d'une multiplicité de cette espèce peuvent s'exprimer au moyen de deux variables indépendantes t et u, les dérivées par rapport à t étant données par les formules

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

On a alors

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{D(x_i, p_i)}{D(t, u)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) = \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Mais F étant constant sur cette multiplicité, on a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

et par suite la valeur de I_2 est nulle (*cf.* HADAMARD, *Calcul des variations*, p. 154-155).

7. Les propriétés des invariants $I_p^{(e)}$ expliquent de la façon la plus simple pourquoi la connaissance d'un invariant $I_{n-2}^{(e)}$ permet de trouver une équation $Y(f) = 0$ formant avec l'équation

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

un système complet. Supposons d'abord $n = 3$, et soit

$$I_1^{(e)} = \int A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3 \tag{13}$$

un invariant intégral du système

$$\frac{dx_1}{dX_1} = \frac{dx_2}{dX_2} = \frac{dx_3}{dX_3} = dt, \tag{14}$$

dont les coefficients A_1, A_2, A_3 vérifient la relation

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0.$$

Soit Γ une courbe telle que les coordonnées (x_1, x_2, x_3) d'un de ses points soient des fonctions d'un paramètre u vérifiant la relation

$$A_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + A_2 \frac{\partial x_2}{\partial u} + A_3 \frac{\partial x_3}{\partial u} = 0.$$

Il existe évidemment une infinité de courbes de cette espèce puisqu'on peut choisir arbitrairement deux des coordonnées x_1, x_2, x_3, en fonction de u. Nous supposerons de plus que la courbe Γ n'est pas une caractéristique; il suffit pour cela de prendre pour x_1 et x_2 des fonctions de u telles que $X_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - X_1 \frac{\partial x_2}{\partial u}$ ne soit pas nul. Cela étant, les caractéristiques issues des divers points de Γ engendrent une surface S, et l'intégrale $\int A_1\, dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$, prise le long d'une courbe quelconque située sur S, est nulle, puisque cette intégrale est nulle le long de Γ, et que l'invariant considéré est $I_1^{(e)}$. Tout élément linéaire de S satisfait donc à la relation

$$A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + A_3\, dx_3 = 0; \tag{15}$$

comme il passe évidemment une surface de cette espèce par tout point de l'espace, il s'ensuit que l'équation précédente est complètement intégrable, et l'intégration donnera une intégrale première du système (14).

Ce résultat se vérifie immédiatement au moyen des relations

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 0,$$

$$X(A_i) + A_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_i} + A_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_i} + A_3 \frac{\partial X_3}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

qui expriment que $I_1^{(c)}$ est un invariant absolu. En différentiant la première par rapport à x_i et comparant aux suivantes, on en déduit

$$\frac{X_1}{\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}} = \frac{X_2}{\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}} = \frac{X_3}{\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}},$$

et par suite

$$A_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) + A_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right) + A_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right) = 0,$$

ce qui exprime que l'équation $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3$ est complètement intégrable. Si l'invariant $I_1^{(c)}$ n'est pas un invariant $I_1^{(d.c)}$, on en déduira par l'opération (D) un invariant $I_2^{(d.c)}$ et par suite un multiplicateur. L'intégration du système (14) s'achèvera donc par une quadrature.

Plus généralement, considérons un invariant $I_{n-2}^{(c)}$

$$I_{n-2}^{(c)} = \int \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-2}} dx_{\alpha_1} dx_{\alpha_2} \ldots dx_{\alpha_{n-2}}.$$

On peut déterminer une infinité de multiplicités E_{n-2}, non composées de caractéristiques, telles que l'intégrale $I_{n-2}^{(c)}$ étendue à ces multiplicités soit nulle. En effet, supposons cette multiplicité E_{n-2} définie par deux équations

$$x_{n-1} = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}), \qquad x_n = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2});$$

l'intégrale étendue à cette multiplicité a pour expression

$$\int B\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-2},$$

B dépendant des variables x_i et des dérivées partielles du premier ordre des fonctions φ_1 et φ_2. Dans l'équation $B = 0$, on peut choisir arbitrairement l'une des fonctions φ_1, φ_2, et l'autre est déterminée par une équation aux dérivées partielles du premier ordre. On peut même choisir la multiplicité de façon qu'elle passe par une multiplicité E_{n-3} donnée à l'avance, non composée de courbes caractéristiques.

Soit E_{n-2} une multiplicité non composée de caractéristiques satisfaisant à la condition précédente. Soit E_{n-1} la multiplicité engendrée par les caractéristiques issues des divers points de E_{n-2}. Nous allons montrer que *l'intégrale $I^{(e)}_{n-2}$ étendue à une multiplicité quelconque E'_{n-2} située sur E_{n-1} est nulle*. En effet, E'_{n-2} se déduit de E_{n-2} en prenant un point sur chaque caractéristique issue des divers points de E_{n-2}, et, d'après la propriété essentielle de l'invariant $I^{(e)}_{n-2}$, l'intégrale étendue à E'_{n-2} est égale à l'intégrale étendue à E_{n-2}, c'est-à-dire nulle.

Ces multiplicités E_{n-1}, qui sont évidemment des multiplicités intégrales du système (2), peuvent être obtenues directement. D'une façon plus générale, pour que l'intégrale

$$I_p = \int \Sigma A_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_p}$$

étendue à toute multiplicité E_p renfermée dans la multiplicité E_{n-1} définie par l'équation $F = 0$ soit nulle, on vérifie sans peine que la fonction F doit satisfaire aux conditions suivantes, de formes différentes suivant la parité de p :

1° Si p est impair on a les conditions

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} - A_{\alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots + A_{\alpha_{p+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_p}} = 0,$$

avec des signes $+$ et $-$ alternativement.

2° Si p est pair, on n'a que des signes $+$

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_{p+1}}} + A_{\alpha_2, \ldots, \alpha_p, \alpha_{p+1}} \frac{\partial F}{\partial x_{\alpha_1}} + \ldots = 0.$$

Dans le cas actuel, où $p = n - 2$, nous savons *a priori* que ces équations doivent former un système complet. On le vérifie immédiatement en supposant le système (2) ramené à la forme réduite (10).

8. Je vais montrer en terminant comment on peut compléter un résultat démontré dans le Mémoire antérieur. Soit

$$J = \int A_1 dx_1 + \ldots + A_n dx_n$$

un invariant intégral relatif (ou absolu) du système (2); les conditions pour qu'il en soit ainsi expriment que l'expression

$$(16)\quad \left(\sum_{k=1}^{n} X_k B_{1k}\right) dx_1 + \left(\sum_{k=1}^{n} X_k B_{2k}\right) dx_2 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} X_k B_{nk}\right) dx_n,$$

où

$$B_{ik} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i},$$

est une différentielle exacte dU, et il est clair que $U =$ const. est une intégrale première du système (2). Il peut d'ailleurs arriver que la fonction U se réduise à une constante, et dans ce cas j'ai indiqué le parti que l'on peut tirer de la connaissance de l'invariant J pour le problème de l'intégration.

Revenons au cas où $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ne se réduit pas à une constante. Imaginons que l'on fasse un changement de variables

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de façon que cette intégrale première devienne $y_n =$ const. Les équations (2) sont remplacées par un système

$$(2)'\qquad \frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{Y_{n-1}} = \frac{dy_n}{0} = dt$$

pour lequel on a $Y_n = 0$. Quant à l'invariant intégral J, il se change en un invariant intégral J' du système (2)'

$$J' = \int a_1\, dy_1 + \ldots + a_{n-1}\, dy_{n-1} + a_n\, dy_n,$$

et il est clair que l'intégrale première y_n doit se déduire de l'invariant J' de la même façon que $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se déduit de J. On aura donc

$$dy_n = \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k b_{1k}\right) dy_1 + \ldots + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k b_{nk}\right) dy_n, \qquad b_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial y_k} - \frac{\partial a_k}{\partial y_i},$$

et par suite, puisque $Y_n = 0$,

$$(17)\qquad \sum_{k=1}^{n-1} Y_k b_{1k} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} Y_k b_{n-1,k} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n-1} Y_k b_{nk} = 1.$$

Les $n-1$ premières relations expriment, d'après la remarque du n° **3**, que l'intégrale double

$$\int \Sigma b_{ik}\, dy_i\, dy_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{18}$$

est un invariant intégral $I_2^{(d,e)}$ du système

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \frac{dy_2}{Y_2} = \ldots = \frac{dy_{n-1}}{Y_{n-1}} = dt,$$

où l'on considère y_n comme une constante. On a vu dans le premier travail quelles sont les simplifications qui peuvent en résulter pour l'intégration.

La conclusion est en défaut si l'invariant intégral (18) est identiquement nul, ce qui exige que $a_1 dy_1 + \ldots + a_{n-1} dy_{n-1}$ soit la différentielle totale exacte d'une fonction

$$V = \int a_1\, dy_1 + a_2\, dy_2 + \ldots + a_{n-1}\, dy_{n-1}$$

en y regardant toujours y_n comme une constante. Posons

$$W = a_n - \frac{\partial V}{\partial y_n} = a_n - \int \frac{\partial a_1}{\partial y_n} dy_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial y_n} dy_{n-1};$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{\partial a_n}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial a_n}{\partial y_{n-1}}\frac{dy_{n-1}}{dt} - \left(\frac{\partial a_1}{\partial y_n}\frac{dy_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial y_n}\frac{dy_{n-1}}{dt}\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} Y_i\left(\frac{\partial a_n}{\partial y_i} - \frac{\partial a_i}{\partial y_n}\right),\end{aligned}$$

et le second membre est égal à l'unité, d'après la dernière des relations (17). On aura donc, dans ce cas, une nouvelle intégrale première renfermant t,

$$a_n - \int \frac{\partial a_1}{\partial y_n} dy_1 + \ldots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial y_n} dy_{n-1} = t + \text{const.}; \tag{19}$$

il en sera ainsi en particulier pour $n = 3$.

9. Revenons au cas où l'on connaît un invariant intégral $I_2^{(d,e)}$ du système (2)

$$I_2^{d,e} = \int \Sigma A_{ik}\, dx_i\, dx_k; \tag{20}$$

les n relations

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_{11}\,dx_1+A_{12}\,dx_2+\ldots+A_{1n}\,dx_n=0,\\ &A_{21}\,dx_1+A_{22}\,dx_2+\ldots+A_{2n}\,dx_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &A_{n1}\,dx_1+A_{n2}\,dx_2+\ldots+A_{nn}\,dx_n=0,\end{aligned}\right.$$

qui se réduisent à $n-p$ relations distinctes ($p>0$), forment un système complètement intégrable dont toutes les intégrales sont aussi des intégrales du système (2). Si $p>1$, on peut ainsi former un système complet admettant moins de $n-1$ intégrales distinctes qui appartiennent au système (2). Si $p=1$, le système (21) est équivalent au système (2), mais on peut en déduire un multiplicateur.

Supposons $p>1$; les équations (21) admettent $q=n-p$ intégrales distinctes que l'on obtiendra par l'intégration d'un système complet de p équations. Imaginons que l'on fasse un changement de variables $x_i=\varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de façon que $y_1, y_2, \ldots, y_q$ soient précisément ces n intégrales. L'invariant (20) se change en un nouvel invariant de même espèce $I_2^{(d\,e)}$

$$(20)'\qquad I'=\int\Sigma a_{ik}\,dy_i\,dy_k,$$

et le système invariant (21) devient

$$(21)'\qquad \left\{\begin{aligned} &a_{11}\,dy_1+a_{12}\,dy_2+\ldots+a_{1n}\,dy_n=0,\\ &a_{21}\,dy_1+a_{22}\,dy_2+\ldots+a_{2n}\,dy_n=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &a_{n1}\,dy_1+a_{n2}\,dy_2+\ldots+a_{nn}\,dy_n=0.\end{aligned}\right.$$

Ce système doit être équivalent au système $dy_1=0, \ldots, dy_q=0$; il faut donc que tous les coefficients a_{ik} pour lesquels l'un des indices i ou k est supérieur à q soient nuls. De plus, le système

$$\begin{aligned} &a_{11}\,dy_1+\ldots+a_{1q}\,dy_q=0,\\ &a_{21}\,dy_1+\ldots+a_{2q}\,dy_q=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &a_{q1}\,dy_1+\ldots+a_{qq}\,dy_q=0\end{aligned}$$

doit entraîner les relations $dy_1=0, \ldots, dy_q=0$. Le déterminant de Pfaff doit être différent de zéro, et par suite $q=n-p$ est nécessairement un nombre pair $2r$, ce qui se déduirait aussi aisément de la théorie du problème de Pfaff. Les conditions

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial y_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial y_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial y_k} = 0,$$

qui expriment que $\Sigma a_{ik}\, dy_i\, dy_k$ est un invariant I_2^d montrent en outre que les coefficients a_{ik}, où i et k sont au plus égaux à $2r$, ne dépendent que de $y_1, y_2, \ldots, y_{2r}$. Il est clair que la connaissance d'un tel invariant ne peut être d'aucune utilité pour achever l'intégration du système transformé qui est de la forme

$$\frac{dy_1}{0} = \ldots = \frac{dy_{2r}}{0} = \frac{dy_{2r+1}}{Y_{2r+1}} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt.$$