JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. WORONETZ

Sur le mouvement d'un point matériel, soumis à une force donnée, sur une surface fixe et dépolie

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 261-275.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__261_0>

Sur le mouvement d'un point matériel, soumis à une force donnée, sur une surface fixe et dépolie;

PAR P. WORONETZ,

Professeur à l'Université de Saint-Wladimir. Karawaiewskaïa, 9, à Kieff (Russie).

La Note présente se divise en deux Parties :

Dans la première (nos **1** à no **8**), nous nous proposons, en employant les coordonnées curvilignes u et v de Gauss, d'obtenir l'équation différentielle de la trajectoire d'un point matériel M, soumis à une force active donnée Φ et contraint à se mouvoir sur une surface donnée S, fixe et dépolie. Dans la seconde Partie (nos **9** et **10**), en supposant que le mouvement du point M, sous l'action de la même force Φ et sur la même surface S, mais dépourvue de frottement (mouvement non troublé), soit donné, nous considérons les constantes d'intégration du problème non troublé comme variables dans le problème troublé (mouvement de M sur S avec frottement) et nous développons les équations différentielles qui définissent ces nouvelles variables en fonction du temps t.

I.

1. Soient les équations de la surface donnée S

$$x = f_1(u, v), \qquad y = f_2(u, v), \qquad z = f_3(u, v),$$

x, y, z désignant les coordonnées rectangulaires d'un point de S; soient E, F, G; D, D', D'' les coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de la surface S, de sorte que l'arc ds d'une courbe C tracée sur S, les composantes de la courbure $\frac{1}{\rho}$ de C suivant la normale n de S et suivant la direction p orthogonale à n et à ds, s'expriment par les formules

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
& ds^2 = (\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\dot{v} + \mathrm{G}\dot{v}^2)\,du^2,\\
& \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{D} + 2\mathrm{D}'\dot{v} + \mathrm{D}''\dot{v}^2}{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\dot{v} + \mathrm{G}\dot{v}^2},\\
& \frac{\cos(\rho, p)}{\rho} = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\mathrm{H}}\left(\frac{d}{du}\frac{\mathrm{F} + \mathrm{G}\dot{v}}{\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\dot{v} + \mathrm{G}\dot{v}^2}} - \frac{\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} + 2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial v}\dot{v}^2}{2\sqrt{\mathrm{E} + 2\mathrm{F}\dot{v} + \mathrm{G}\dot{v}^2}}\right),\\
& \mathrm{H} = +\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2};
\end{aligned}
\right.
$$

où $\dot{v}$ est la dérivée de v par rapport à u, $\frac{1}{\mathrm{R}}$ la courbure de la section normale de S tangente à la courbe C, $\frac{1}{\Gamma}$ la courbure géodésique de cette courbe C. La normale n est dirigée par rapport aux courbes u(v=const.) et v(u = const.), comme l'axe Oz l'est par rapport aux axes Ox et Oy; la perpendiculaire p par rapport à ds et à n est dirigée comme l'axe Oy par rapport aux axes Ox et Oz, de sorte qu'on a, comme il est facile de l'établir,

$$
(2)\quad \mathrm{H}\,ds\cos(p, x) = \left[\mathrm{E}\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\mathrm{F}\frac{\partial x}{\partial v} - \mathrm{G}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\dot{v}\right]du, \qquad \ldots
$$

Nous supposerons, en outre, que la direction de la normale n coïncide avec celle dans laquelle le point matériel M peut quitter la surface, ce qu'on peut obtenir toujours en choisissant convenablement les désignations u et v pour les courbes coordonnées de la surface S. Ainsi la réaction normale N de la surface sera toujours dirigée suivant la direction de n.

La direction positive de l'arc s coïncidera avec celle de la vitesse w du point M à l'instant considéré. La projection de la force Φ sur une direction quelconque ω sera désignée par Φ_ω.

Quant à la force de frottement, nous acceptons l'hypothèse habituelle : cette force a la direction opposée à la vitesse w de M et sa grandeur est proportionnelle à la réaction normale N de la surface; le coefficient de frottement sera désigné par f.

Le problème du mouvement d'un point M sur une surface donnée S se résout, comme on sait, par l'intégration de deux équations du second ordre qui définissent les coordonnées curvilignes u et v en fonction du temps t. Quand la force Φ, comme nous supposerons, ne dépend que de la position de M sur S, on peut encore éliminer dt entre ces équations, et l'on obtient alors l'équation de la trajectoire de M sous la forme

$$\psi(u, v, \dot{v}, \ddot{v}, \dddot{v}) = 0, \tag{3}$$

où le nombre des points sur v indique l'ordre de la dérivée correspondante.

Nous allons déduire maintenant cette équation.

2. La projection de l'accélération du point M sur la direction de ρ est évidemment égale à

$$\frac{w^2}{\rho} = \frac{2\varpi}{m\rho},$$

ϖ et m désignant la demi-force vive et la masse du point M ; par conséquent, en projetant l'accélération du point M sur les directions n et p, et en considérant les équations (1), on obtient, selon la deuxième loi de Newton, les deux équations suivantes (équations intrinsèques) :

$$\frac{2\varpi}{R} = \Phi_n + N, \qquad \frac{2\varpi}{\Gamma} = \Phi_p. \tag{4}$$

Si l'on tire de ces équations les valeurs de ϖ et de N,

$$\varpi = \frac{1}{2}\Gamma\Phi_p, \qquad N = \frac{\Gamma}{R}\Phi_p - \Phi_n, \tag{5}$$

on peut donner au théorème des forces vives

$$d\varpi = (\Phi_s - fN)\,ds \tag{6}$$

la forme suivante :

$$\frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}\Gamma\Phi_p\right) = \left(\Phi_s - f\frac{\Gamma}{R}\Phi_p + f\Phi_n\right)\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}. \tag{7}$$

Le radical prend le signe +, quand u croît avec le temps, et le signe — dans le cas opposé.

En y substituant les valeurs de R et Γ tirées des équations (1), nous parvenons à l'équation cherchée (3) de la trajectoire du point M.

Lorsqu'il existe une fonction de forces $U(u, v)$, on trouve, au moyen des équations (2),

$$\Phi_s\, ds = dU, \qquad H\Phi_p\, ds = \left[E\frac{\partial U}{\partial v} - F\frac{\partial U}{\partial u} + \left(F\frac{\partial U}{\partial v} - G\frac{\partial U}{\partial u}\right)\dot{v}\right] du,$$

et l'équation (7) peut être remplacée par la suivante :

$$(8)\quad \frac{d}{du}\left[\frac{\Gamma}{2H}\,\frac{E\frac{\partial U}{\partial v} - F\frac{\partial U}{\partial u} + \left(F\frac{\partial U}{\partial v} - G\frac{\partial U}{\partial u}\right)\dot{v}}{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}\right]$$
$$= \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial v}\dot{v} - \frac{f}{H}\frac{\Gamma}{R}$$
$$\times\left[E\frac{\partial U}{\partial v} - F\frac{\partial U}{\partial u} + \left(F\frac{\partial U}{\partial v} - G\frac{\partial U}{\partial u}\right)\dot{v}\right] + f\Phi_n\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}.$$

Après avoir intégré l'équation (7) ou (8), c'est-à-dire après avoir déterminé v en fonction de u et de trois constantes arbitraires, on trouve le temps t par une quadrature

$$(9)\qquad t - t_0 = \sqrt{m}\int \frac{\sqrt{E + 2F\dot{v} + G\dot{v}^2}}{\sqrt{\Gamma\Phi_p}}\, du,$$

t_0 désignant la quatrième et dernière constante.

Cette formule est déduite de la première équation (5) par la substitution

$$(10)\qquad 2\mathfrak{T} = m\frac{ds^2}{dt^2}.$$

Il faut encore remarquer que le mouvement du point M sur la surface S n'est possible que quand on a [formule (5)]

$$(11)\qquad N = \frac{\Gamma}{R}\Phi_p - \Phi_n \geq 0.$$

II.

5. Avant de faire quelques applications des formules obtenues, nous allons discuter un cas spécial qui doit être traité particulièrement.

C'est, d'après M. P. Painlevé [1], le cas des trajectoires remarquables pour le problème en question.

Supposons que la surface S et la force Φ soient données d'une telle manière que les équations

$$(12)\qquad \frac{1}{\Gamma}=0, \qquad \Phi_p=0$$

puissent être satisfaites simultanément. La deuxième des équations (4) sera alors satisfaite, mais évidemment on ne peut pas obtenir la solution indiquée, en employant l'équation (7) de la trajectoire.

Il résulte de la première des formules (12) que le point M décrit sur la surface S une ligne géodésique. Cette courbe étant donnée par les équations

$$u=\varphi_1(s), \qquad v=\varphi_2(s),$$

il reste encore à exprimer le temps t en fonction de s. Pour obtenir cela nous éliminons N entre les équations (4) et (6) :

$$d\mathfrak{T}+2f\frac{ds}{R}\mathfrak{T}=(\Phi_s+f\Phi_n)\,ds;$$

par conséquent, on a

$$\mathfrak{T}=\left[\int(\Phi_s+f\Phi_n)\,e^{2f\int\frac{ds}{R}}ds+\text{const.}\right]e^{-2f\int\frac{ds}{R}}=\mathfrak{T}(s).$$

En employant maintenant la formule (10), on obtient définitivement

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{ds}{\mathfrak{T}(s)}+\text{const.}$$

Le mouvement, en vertu de l'équation (4), n'est possible que si l'on a

$$(13)\qquad N=\frac{2\mathfrak{T}}{R}-\Phi_n\geqq 0.$$

4. Soit, par exemple, S la surface d'Enneper :

$$x=3u+3uv^2-u^3, \qquad y=3v+3u^2v-v^3, \qquad z=3u^2-3v^2;$$

$$E=G=9(1+u^2+v^2)^2, \qquad F=0; \qquad D=6, \qquad D'=0, \qquad D''=-6;$$

$$\frac{1}{R}=\frac{2}{3(1+u^2+v^2)^2}\,\frac{1-\dot v^2}{1+\dot v^2}, \qquad \frac{1}{\Gamma}=\frac{(1+u^2+v^2)\ddot v+2(u\dot v-v)(1+\dot v^2)}{3(1+u^2+v^2)^2(1+\dot v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

[1] P. Painlevé, *Sur les mouvements et les trajectoires réels des systèmes* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXII, 1894).

Soit Φ la résultante de deux forces : l'une, répulsive de l'origine O des coordonnées rectangulaires, proportionnelle à la distance; l'autre, répulsive du plan Oxy, aussi proportionnelle à la distance :

$$\Phi_x = \varepsilon^2 x, \qquad \Phi_y = \varepsilon^2 y, \qquad \Phi_z = \varepsilon^2 z + \varepsilon_1^2 z.$$

Soit

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2,$$

on trouve alors

$$\Phi_n = -2\varepsilon^2(u^2 - v^2), \qquad \Phi_p = \frac{\varepsilon^2(u^2 + v^2 + 3)(v - u\dot{v})}{\sqrt{1 + \dot{v}^2}}.$$

Les conditions (12) sont donc remplies, si l'on a

$$v = cu,$$

c désignant une constante arbitraire.

Cette équation détermine un système de lignes géodésiques qui passent par l'origine O et qui coupent toutes les lignes de courbure u sous un angle constant i, égal à arc tang c.

La formule (13) donne

$$N = 2(1 - c^2)\left(3m\frac{du^2}{dt^2} + \varepsilon^2 u^2\right).$$

Le mouvement sur la surface S n'est donc possible que lorsqu'on a

$$c \leq 1,$$

c'est-à-dire lorsque la trajectoire se trouve au-dessus du plan Oxy.

5. Le problème précédent pourrait être généralisé. La force active Φ étant donnée, nous nous proposons de trouver l'équation la plus générale d'une surface sur laquelle un point matériel, sollicité par la force donnée, peut se mouvoir suivant les formules (12). Soit Φ la force de la pesanteur.

Cherchons l'équation de la surface sous la forme

$$z = \text{fonct.}(x, y),$$

en prenant l'axe Oz dirigé verticalement.

On peut alors formuler ainsi le problème posé : Il faut trouver une surface sur laquelle existe une ligne géodésique telle que la direction p, pour tous les points de cette ligne, soit perpendiculaire à Oz.

La direction p étant normale à ds et à n, on a, pour chaque point de la courbe cherchée,

$$\frac{dx}{ds}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{dy}{ds}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Or, pour pouvoir nous servir de la condition qui exige que la courbe cherchée doit être une ligne géodésique, différentions l'équation précédente :

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{dx}{ds}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{ds}\right) - \frac{dy}{ds}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

remarquons qu'on a pour une ligne géodésique

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

et éliminons les dérivées de x et y par rapport à s.

Nous parvenons de cette manière à l'équation

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

qui définit la surface cherchée.

L'intégration de cette équation ne présente pas de difficultés, et nous obtenons l'intégrale générale sous la forme

$$x\sin\omega + y\cos\omega + \varphi(\omega) + \psi(z) = 0,$$

où φ et ψ désignent des fonctions arbitraires et où le paramètre ω doit être éliminé à l'aide de l'équation

$$x\cos\omega - y\sin\omega + \frac{d\varphi}{d\omega} = 0.$$

III.

6. Dans le problème du mouvement d'un point matériel sur une surface donnée, fixe et polie, l'intégration des équations du mouvement se ramène, comme on sait, à des quadratures, quand une des coordonnées curvilignes, par exemple v, est cyclique, c'est-à-dire quand la fonction de forces U et les coefficients E, F, ..., D″ de la surface ne renferment pas explicitement cette coordonnée v.

Appliquons à ce cas l'équation (8) de la trajectoire sur une surface dépolie. Cette équation, quand v est cyclique, devient l'équation différentielle du second ordre par rapport à $\dot{v}$:

$$(14)\qquad \frac{d}{du}\left(\frac{\Gamma}{2H}\frac{F+G\dot{v}}{\sqrt{E+2F\dot{v}+G\dot{v}^2}}\dot{U}\right) + \dot{U} + f\frac{\Gamma}{HR}(F+G\dot{v})\dot{U} + f\Phi_n\sqrt{E+2F\dot{v}+G\dot{v}^2} = 0.$$

En posant

$$(15)\qquad \eta = \frac{F+G\dot{v}}{\sqrt{E+2F\dot{v}+G\dot{v}^2}},$$

nous obtenons, à l'aide des formules (1), l'équation

$$(16)\qquad \dot{\eta}\ddot{\eta} = \frac{\ddot{U}}{\dot{U}}\eta\dot{\eta} + 3\dot{\eta}^2 + 2f\frac{H}{\sqrt{G-\eta^2}}\left(\frac{1}{\overline{R}}\eta\dot{\eta} + \frac{\Phi_n}{\dot{U}}\dot{\eta}^2\right),$$

où $\overline{R}$ désigne la valeur de R, exprimée en fonction de u et η :

$$(17)\qquad \frac{1}{\overline{R}} = \frac{DG-FD'}{H^2G}(G-\eta^2) + \frac{D''}{G^2}\eta^2 + \frac{D'G-D''F}{G^2H^2}\left(2H\eta - F\sqrt{G-\eta^2}\right)\sqrt{G-\eta^2}.$$

7. Par exemple, pour l'hélicoïde gauche à plan directeur nous avons

$$x = u\cos v,\qquad y = u\sin v,\qquad z = hv;$$

$$E = 1,\qquad F = 0,\qquad G = u^2+h^2;\qquad D = 0,\qquad D' = -\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}},\qquad D'' = 0.$$

Soit le point M repoussé par l'axe de l'hélicoïde avec une force inversement proportionnelle au cube de la distance :

$$U = -\frac{\varepsilon^2}{2u^2},\qquad \Phi_n = 0.$$

L'équation (16) donne, en vertu de la formule (17),

$$\eta\ddot{\eta} = -\frac{3}{u}\eta\dot{\eta} + 3\dot{\eta}^2 - \frac{4hf}{(u^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\eta^2\dot{\eta}.$$

Contentons-nous de considérer une solution particulière. L'équation précédente admet, comme on le voit immédiatement, l'intégrale particulière

$$\eta = -\frac{h}{f}\frac{\sqrt{u^2+h^2}}{u}.$$

Écrivons cette équation, suivant la formule (15), sous la forme

$$u\frac{\sqrt{u^2+h^2}\,\dot{v}}{\sqrt{1+(u^2+h^2)\dot{v}^2}} = -\frac{h}{f};$$

il en résulte

$$u \sin\varphi = -\frac{h}{f} = \text{const.},$$

φ désignant l'angle sous lequel la trajectoire coupe les génératrices rectilignes de la surface.

La solution analytique s'exprime en fonctions elliptiques.

L'équation de la trajectoire est

$$u \cos \operatorname{am}\left(\frac{v_1 - v}{\sqrt{1-k^2}}\right) = \frac{h}{k}\sqrt{1-k^2},$$

où le module k est défini par la formule

$$k^2 = \frac{f^2}{1+f^2}$$

et où v_1 désigne une constante qui est égale à la valeur de v pour $u = h:f$.

La formule (9) devient

$$\frac{\varepsilon}{h}(t-t_1) = \int_{\frac{h}{f}}^{u} \frac{u^2\,du}{\sqrt{u^2+h^2}\sqrt{u^2-\frac{h^2}{f^2}}},$$

t_1 désignant la valeur de t pour $u = h:f$.

En posant

$$u = \frac{h}{f\cos\varphi},$$

on a

$$\frac{k}{1+k^2}\frac{\varepsilon}{h^2}(t-t_1) = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \Pi(\varphi, -1, k).$$

Le mouvement sur la surface est admissible, parce que, d'après la formule (11), nous avons

$$N = \frac{2\varepsilon^2}{f} \frac{\sqrt{u^2 - \frac{h^2}{f^2}}}{u^4} > 0.$$

8. On peut aussi se servir de l'équation (16) de la trajectoire pour le problème inverse de la Dynamique. Cherchons, par exemple, une surface de révolution :

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v, \qquad z = z(u);$$

$$E = 1 + \dot{z}^2, \quad F = 0, \quad G = u^2; \quad D = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{1+\dot{z}^2}}, \quad D' = 0, \quad D'' = \frac{u\dot{z}}{\sqrt{1+\dot{z}^2}},$$

telle qu'un point pesant

$$U = mgz, \qquad \Phi_n = \frac{mg}{\sqrt{1+\dot{z}^2}},$$

en glissant sur elle, puisse décrire une courbe loxodromique

$$\eta = u\sin i,$$

c'est-à-dire une courbe qui coupe les méridiens sous un angle constant i.

En remplaçant, dans la formule (16), η par sa valeur $u\sin i$, on obtient l'équation

$$(u\ddot{z} + 3\dot{z})\cos i + 2f\left[1 + \dot{z}^2 + \left(\frac{u\ddot{z}}{1+\dot{z}^2} - \dot{z}\right)\dot{z}\cos^2 i\right] = 0$$

qui définit z en fonction de u et, par conséquent, qui détermine la surface cherchée.

Évidemment l'intégration de cette équation se ramène à des quadratures.

IV.

9. Procédons maintenant au développement de la seconde méthode indiquée dans la Préface.

En désignant par u' et v' les dérivées de u et v par rapport au temps t

et par ϖ la demi-force vive du point M :

$$\varpi = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\mathrm{E}u'^2 + 2\,\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2),$$

écrivons les équations de Lagrange pour le mouvement du point M sur la surface S :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial u'}\right) - \frac{\partial\varpi}{\partial u} = \mathrm{Q}_u, \qquad \dots$$

Pour obtenir Q_u on imprimera au point M un déplacement virtuel de δs_u obtenu en laissant t et v constants et faisant varier seulement u de δu; le travail virtuel des forces qui agissent sur M sera $\mathrm{Q}_u\delta u$. S'il existe une fonction des forces $\mathrm{U}(u, v)$, ce travail virtuel de la force Φ sera égal à $\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u}\delta u$; quant à la force de frottement, on calcule son travail virtuel de la manière suivante :

$$-f\mathrm{N}\cos(w, u)\,\delta s_u = -f\mathrm{N}\frac{\sqrt{\mathrm{E}}\,u' + \dfrac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{E}}}v'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\,\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}}\sqrt{\mathrm{E}}\,\delta u.$$

On a donc

$$\mathrm{Q}_u = \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u} - f\mathrm{N}\frac{\mathrm{E}u' + \mathrm{F}v'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\,\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}}.$$

En remplaçant N par sa valeur tirée de la formule (4) et en tenant compte des formules (1), on obtient les équations de Lagrange qui définissent u et v en fonction de t sous la forme

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varpi}{\partial u'}\right) - \frac{\partial\varpi}{\partial u}\\ &\quad = \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial u} - mf\left(\mathrm{D}u'^2 + 2\,\mathrm{D}'u'v' + \mathrm{D}''v'^2 - \frac{1}{m}\Phi_n\right)\frac{\mathrm{E}u' + \mathrm{F}v'}{\sqrt{\mathrm{E}u'^2 + 2\,\mathrm{F}u'v' + \mathrm{G}v'^2}},\end{aligned}$$

. . . .

Introduisons alors les variables p et q par les formules

$$p = \frac{\partial\varpi}{\partial u'}, \qquad q = \frac{\partial\varpi}{\partial v'}.$$

Au moyen d'une transformation bien connue, nous aurons les équations d'Hamilton

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial p}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial u} - f S p, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial v} - f S q, \end{aligned}\right.$$

où il est posé

$$T = \frac{1}{2mH^2}(Gp^2 - 2Fpq + Eq^2),$$

$$S = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2T}}\left[D\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + 2D'\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial T}{\partial q} + D''\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{m}\Phi_n\right].$$

Ces équations définissent les variables u, v, p, q en fonction de t et de quatre constantes arbitraires.

Or, d'après Jacobi, prenons l'équation différentielle partielle d'Hamilton et de Jacobi pour le mouvement non troublé, c'est-à-dire pour le mouvement du point M, sous l'action de la même force Φ et sur la même surface S, mais sans frottement ($f = 0$). Cette équation est

$$T = \frac{1}{2mH^2}\left[G\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} + E\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right] = U(u, v) + a,$$

a désignant une constante arbitraire.

Soit l'intégrale complète de cette équation

$$W(u, v, a, b) + \text{const.},$$

b désignant une autre constante arbitraire. Remplaçons dans les équations du mouvement (18) les variables u, v, p, q par les variables a, b, α, β déterminées par les équations

$$(19)\qquad p = \frac{\partial W}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial W}{\partial v}, \qquad \alpha + t = \frac{\partial W}{\partial a}, \qquad \beta = \frac{\partial W}{\partial b}.$$

Pour y parvenir, différentions les formules précédentes, en ayant égard aux équations (18) :

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial u} - f S p = \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial a}\frac{da}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial b}\frac{db}{dt},$$

....

et remarquons, par la définition de la fonction W, que l'on a

$$\frac{\partial T}{\partial u}+\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+\frac{\partial T}{\partial q}\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial U}{\partial u}, \qquad \ldots.$$

Donc nous parvenons aux équations

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial b}\frac{db}{dt}=-f\mathrm{S}\frac{\partial W}{\partial u}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial a^2}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}\frac{db}{dt}=\frac{d\alpha}{dt},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial b}\frac{db}{dt}=-f\mathrm{S}\frac{\partial W}{\partial v}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial a\,\partial b}\frac{da}{dt}+\frac{\partial^2 W}{\partial b^2}\frac{db}{dt}=\frac{d\beta}{dt}.$$

Or, lorsqu'on tire des équations (19) les variables u et v :

$$u=\overline{u}(a,\,b,\,\alpha+t,\,\beta), \qquad v=\overline{v}(a,\,b,\,\alpha+t,\,\beta),$$

de sorte qu'on a

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial a}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial a}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \alpha}=1, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial b}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \alpha}+\frac{\partial^2 W}{\partial v\,\partial b}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \alpha}=0, \qquad \ldots,$$

les formules obtenues nous donnent

$$\frac{da}{dt}=-f\mathrm{S}\left(\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \alpha}+\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \alpha}\right), \qquad \ldots$$

ou définitivement

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{da}{dt}=-f\overline{\mathrm{S}}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \alpha}, \qquad &&\frac{d\alpha}{dt}=f\overline{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial a}-\alpha-t\right),\\ &\frac{db}{dt}=-f\overline{\mathrm{S}}\frac{\partial \overline{W}}{\partial \beta}, \qquad &&\frac{d\beta}{dt}=f\overline{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial b}-\beta\right),\end{aligned}\right.$$

$\overline{\mathrm{S}}$ et $\overline{W}$ désignant les fonctions S et W exprimées, à l'aide des formules (19), en fonction de a, b, $\alpha+t$, β.

Les équations précédentes définissent les variables a, b, α, β en fonction de t et de quatre constantes arbitraires.

10. Soit, par exemple, S un cône de révolution :

$$x=u\cos v, \qquad y=u\sin v, \qquad z=u\cot i;$$

$$\mathrm{E}=\frac{1}{\sin^2 i}, \qquad \mathrm{F}=0, \qquad \mathrm{G}=u^2; \qquad \mathrm{D}=0, \qquad \mathrm{D}'=0, \qquad \mathrm{D}''=u\cos i.$$

Soit le point **M** repoussé par l'axe du cône avec une force inversement proportionnelle au cube de la distance :

$$U = -\frac{\varepsilon^2}{2u^2}, \qquad \Phi_n = -\frac{\varepsilon^2}{u^3}\cos i.$$

Supposons la masse du point M égale à l'unité. L'équation différentielle partielle d'Hamilton et de Jacobi, pour le mouvement non troublé du point M, sera

$$\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 \sin^2 i + \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2 = 2a - \frac{\varepsilon^2}{u^2}$$

et l'intégrale complète

$$W = bv + \frac{1}{\sin i}\int\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}\,du.$$

Les formules (19) nous donnent donc

$$p = \frac{1}{\sin i}\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}, \qquad \alpha + t = \frac{1}{\sin i}\int\frac{du}{\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}},$$

$$q = b, \qquad \beta = v - \frac{b}{\sin i}\int\frac{1}{\sqrt{2a - \frac{\varepsilon^2 + b^2}{u^2}}}\,\frac{du}{u^2}.$$

Nous calculons ensuite les fonctions $\overline{W}$ et $\overline{S}$ et nous trouvons

$$\overline{W} = b\beta + 2a(\alpha + t) - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + b^2}\sin i}\,\text{arc tang}\,\frac{2a(\alpha + t)\sin i}{\sqrt{\varepsilon^2 + b^2}},$$

$$\overline{S} = \frac{2a(b^2 + \varepsilon^2)\cos i}{[4a^2(\alpha + t)^2\sin^2 i + \varepsilon^2 + b^2]\sqrt{4a^2(\alpha + t)^2\sin^2 i + b^2}}.$$

On remarque que $\overline{W}$ et $\overline{S}$ ne contiennent la variable α que dans la combinaison $a(\alpha + t)$. Introduisons donc, au lieu de α, une nouvelle variable

$$\gamma = a(\alpha + t)$$

et remplaçons les équations (20) par les suivantes

$$\frac{da}{dt} = -fS_1\frac{\partial W_1}{\partial \gamma}a, \qquad \frac{db}{dt} = -fS_1 b,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -fS_1\gamma + a, \qquad \frac{d\beta}{dt} = fS_1\left(\frac{\partial W_1}{\partial b} - \beta\right),$$

où S_1 et W_1 désignent les fonctions $\overline{S}$ et $\overline{W}$ exprimées en fonction de a, b, γ, β :

$$W_1 = b\beta + 2\gamma - \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^2+b^2}\sin i}\operatorname{arc\,tang}\frac{2\gamma\sin i}{\sqrt{\varepsilon^2+b^2}},$$

$$S_1 = \frac{2a(b^2+\varepsilon^2)\cos i}{(4\gamma^2\sin^2 i+\varepsilon^2+b^2)\sqrt{4\gamma^2\sin^2 i+b^2}}.$$

Évidemment l'intégration de ces équations se ramène à des quadratures, si l'on a obtenu γ en fonction de b, c'est-à-dire si l'on a intégré l'équation

$$\frac{d\gamma}{db} = \frac{\gamma}{b} - \frac{4\gamma^2\sin^2 i+\varepsilon^2+b^2}{2fb(b^2+\varepsilon^2)\cos i}\sqrt{4\gamma^2\sin^2 i+b^2};$$

en posant

$$2\gamma\sin i = \frac{b\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad b^2+\varepsilon^2 = \xi,$$

on aura

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\operatorname{tang} i}{2f}\,\frac{\xi-\varepsilon^2\eta^2}{\xi(\xi-\varepsilon^2)};$$

c'est une équation de Riccati. Pour la remplacer par une équation linéaire du second ordre changeons les variables :

$$\eta = \frac{2f}{\operatorname{tang} i}\,\frac{\xi_1-1}{\xi_1} + \frac{2f}{\operatorname{tang} i}\,\frac{\xi_1-1}{\eta_1}\,\frac{d\eta_1}{d\xi_1}, \qquad \xi = \varepsilon^2\left(1-\frac{1}{\xi_1}\right)$$

et nous parvenons à l'équation

$$\xi_1(1-\xi_1)\frac{d^2\eta_1}{d\xi_1^2} + (2-3\xi_1)\frac{d\eta_1}{d\xi_1} - \left(1-\frac{\operatorname{tang}^2 i}{4f^2}\right)\eta_1 = 0;$$

d'où l'on conclut que la solution générale du problème posé s'exprime en fonctions hypergéométriques de Gauss.