JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FRANÇOIS JAGER

Sur les marées d'un bassin à parois verticales

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 1 (1915), p. 297-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1915_7_1__297_0>

Sur les marées d'un bassin à parois verticales;

Par François JAGER.

INTRODUCTION.

L'étude des marées océaniques peut sembler au premier abord de peu d'intérêt : c'est un phénomène considéré comme bien connu, puisqu'on arrive à le prédire sans mécompte et avec une précision très satisfaisante.

Cependant, même en faisant complètement abstraction de l'intérêt purement mathématique qu'elle présente, leur étude théorique peut permettre d'élucider plusieurs points encore obscurs de la Science. Si, en effet, les résultats théoriques ne coïncident pas avec les données expérimentales (et c'est ce qui semble résulter d'un récent travail de M. Blondel) le point de départ sera nécessairement faux; et, par là même, on contrôlera la légitimité des hypothèses fondamentales relatives à la nature du phénomène.

Dans la théorie que nous allons exposer, presque tout peut être considéré comme certain d'avance. Deux points seuls restent douteux :

1° Le frottement est-il négligeable? Le fait n'est pas douteux pour les bassins très profonds et peu accidentés, comme le prouvent les calculs de M. Hough et les mesures du coefficient de viscosité de l'eau. Mais en est-il encore de même pour les bassins océaniques dont les fonds accidentés peuvent engendrer des tourbillons capables de rendre sensible l'influence du frottement? Le calcul permettrait sans doute de déterminer l'ordre de grandeur du phénomène.

2° Nous supposerons la croûte terrestre indéformable. Or les marées de l'écorce ont été mises en évidence et ont sur les marées océaniques une influence que la théorie permettrait peut-être de mesurer : on pourrait en déduire le coefficient d'élasticité du noyau de la Terre.

Le problème dans toute sa complexité n'a pu être abordé avec succès que grâce aux nouvelles méthodes introduites en Analyse, depuis quelques années, par M. Fredholm, en particulier; et c'est à M. Poincaré qu'on doit en fait la première solution du problème envisagé au point de vue général.

Dans ce travail, je me suis borné à l'étude des marées proprement dites, c'est-à-dire des oscillations contraintes d'un bassin limité par des parois verticales, en tenant compte de la force centrifuge composée due à la rotation de la Terre.

Pour ne pas trop compliquer la forme des équations, j'ai négligé l'attraction sur lui-même du bourrelet liquide, dû à la marée, ainsi que le frottement. Enfin, j'ai supposé la croûte terrestre indéformable.

Dans le Chapitre I, je rappellerai brièvement la mise en équation du problème général des marées, telle que l'a indiquée M. Poincaré à son Cours.

Le Chapitre II comprendra l'application des équations de Fredholm à la démonstration de l'existence de la solution. J'ai utilisé pour cette démonstration une méthode introduite par M. Picard dans son Mémoire : *Sur la solution du problème général de Dirichlet.* Cela m'a conduit à la considération de la fonction de Green, relative à l'équation de Laplace, qui serait définie par la condition au contour

$$\frac{\partial G}{\partial n} + C\frac{\partial G}{\partial s} = f(s),$$

$f(s)$ étant donnée.

En achevant, en campagne, la rédaction de ce travail, je me suis aperçu que le raisonnement par lequel j'essayais de prouver l'existence de cette fonction de Green était insuffisant. Désespérant de ponvoir le compléter dans les conditions où je me trouve actuellement, je me suis décidé à publier un travail incomplet; peut-être trouvera-t-on qu'il n'est pas sans intérêt d'avoir ramené la solution du problème des marées à celle d'une question relative à l'équation simple de Laplace.

Enfin, au Chapitre III, nous ferons application de la méthode de Ritz, remarquable au point de vue de certaines applications numériques, mais qui, au point de vue purement théorique, donne lieu à de nombreuses difficultés.

On me permettra, en terminant, de dire toute ma vive reconnaissance à MM. Appell et Picard pour la haute bienveillance qu'ils ont bien voulu me témoigner; et à M. Lebesgue pour les précieux conseils et les encouragements qu'il n'a cessé de me donner. Enfin, je tiens à rendre ici un dernier hommage à la mémoire de Henri Poincaré qui avait bien voulu me guider au début de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE.

Hough, *Philos. Trans. of the Roy. Soc. of London*, vol. CLXXXIX (1897) et CXCI (1898).

G.-H. Darwin, *Scientific Papers*, vol. I et II. Cambridge, 1907 et 1908.

A.-Rollin Harrys, *Mémoires* publiés par le Coast and Geodetic Survey.

Lallemand, *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. CXLIX, 1909, p. 474.

A.-E.-H. Love, *Proceedings of the Roy. Soc. of London*, série A, vol. LXXXII, p. 43; *Proc. of the London Math. Soc.*, série 2, vol. XII, p. 309; *Some Problems of Geodynamics* (Cambridge, 1911); *Mémoire* lu au Congrès international des Mathématiciens (Cambridge).

Lord Rayleigh, *Notes on Tidal oscillations upon a Rotating globe* (*Proc. of the Roy. Soc. of London*, série A, vol. LXXXII, p. 448).

Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. III; *Théorie des marées*.

Blondel, *Sur les marées de la mer Rouge* (Thèse de doctorat).

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION GÉNÉRALE DES MARÉES.

Prenons comme unité le rayon de la sphère terrestre, et comme coordonnées des points de cette surface la colatitude θ et la longitude ψ.

En faisant une représentation conforme de la surface du bassin considéré sur une carte géographique, nous désignerons par x, y les coordonnées rectangulaires sur la carte du point (θ, ψ).

A un élément de courbe ds, ou de surface $d\sigma$ de la sphère, correspondra un élément semblable de courbe ds' ou de surface $d\sigma'$ sur la carte. Soit $k(x,y)$ le rapport de similitude. On aura

$$ds' = k\,ds, \qquad d\sigma' = k^2\,d\sigma.$$

Considérons le cône ayant pour sommet le centre de la sphère et pour directrice la courbe C limitant le domaine $\mathfrak{D}$ considéré, dont l'élément soit $d\sigma$. En vertu de la marée, le volume du liquide renfermé dans ce cône subira une variation que nous allons exprimer de deux manières différentes :

1° L'augmentation du volume sera d'abord représentée par la quantité de liquide qui pénètre à travers la surface latérale. Soit h la profondeur comptée positivement vers le bas à partir de la surface non troublée. En appelant N la composante normale du déplacement à l'élément ds, il entrera par ce rectangle élémentaire la quantité $h\mathrm{N}\,ds$, donc pour toute la surface latérale la quantité

$$\int_{\mathrm{C}} h\mathrm{N}\,ds;$$

2° En appelant ζ la surélévation due à la marée (ζ étant comptée comme h), l'accroissement de volume pourra s'écrire

$$-\iint_{\mathfrak{D}} \zeta\,d\sigma.$$

Donc

$$\int_C h\,\mathrm{N}\,ds = -\int\int_{(\mathrm{D})} \zeta\, d\sigma$$

ou, en passant de la sphère à la carte,

$$\int_C h\,\mathrm{N}\,ds' = -\int\int_{(\mathrm{D})} \frac{\zeta}{k^2}\, d\sigma. \tag{1}$$

Il faut évaluer $h\mathrm{N}$. Pour cela, négligeons d'abord la courbure de la sphère. Soient u, v, w les trois composantes du déplacement, $\mathrm{X}\,dm$, $\mathrm{Y}\,dm$, $\mathrm{Z}\,dm$ les composantes de la force appliquée à l'élément de masse dm, p la pression. Les équations générales de l'Hydrodynamique sont :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mathrm{X} - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mathrm{Y} - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mathrm{Z} - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Ici, les forces appliquées sont : la pesanteur, la force centrifuge composée et les forces perturbatrices, dues aux astres et soumises au potentiel V. En supposant une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe $\mathrm{O}z$ et les déplacements u, v, w proportionnels à $e^{\lambda t}$, λ étant la période de la force perturbatrice considérée, on aura

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^2 u - 2\omega\lambda v &= \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \lambda^2 v + 2\omega\lambda u &= \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \lambda^2 w \qquad\qquad &= \lambda^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

où l'on a posé

$$\varphi = \frac{\mathrm{V} - p}{\lambda^2}.$$

Mais, au fond du bassin considéré, on aura, la composante normale du déplacement étant nulle,

$$u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = w.$$

Si donc les dérivées de h sont petites relativement à u et v, w sera également petit vers le fond du bassin. Soit w_0 la valeur de w au fond. En un point quelconque du liquide, situé à une distance z de la surface libre, on aura

$$w = w_0 + (z - h)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Mais dans tous les bassins océaniques, on peut considérer la profondeur h comme très petite par rapport aux deux autres dimensions : donc $z - h$ l'est aussi; $\frac{\partial w}{\partial z}$ est du même ordre de grandeur que les déplacements des molécules, donc aussi que $z - h$. Donc w sera toujours négligeable devant u et v. Les équations (3) résolues par rapport à u et v donneront donc

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right),\\ v &= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).\end{aligned}\right.$$

Nous aurons alors

$$(5)\qquad \mathrm{N} = -u\frac{\partial y}{\partial s} + v\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{2\omega}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right).$$

Si maintenant nous passons à un élément de la surface sphérique, nous pourrons le considérer comme plan et, dans la formule (5), pour chaque élément de la surface sphérique, la rotation sera $\omega\cos\theta$ au lieu de ω. Donc, il suffira de remplacer ω par $\omega\cos\theta$ dans la formule (5), pour obtenir

$$(6)\qquad \mathrm{N} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 4\omega^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right),$$

ω désignant la vitesse de rotation de la Terre et $\omega\cos\theta$ étant sa projection sur la ligne des pôles.

En posant

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} h_1 &= \frac{\lambda^2 h}{\lambda^2 + 4\omega^2\cos^2\theta},\\ h_2 &= \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}h_1,\end{aligned}\right.$$

et en passant à la carte, on obtient

$$\int_C h\,\mathrm{N}\,ds' = \int_C \left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - h_2 \frac{\partial \varphi}{\partial s'} \right) ds', \tag{8}$$

ds' et dn' indiquant, comme nous l'avons expliqué, l'élément de contour et l'élément de normale au contour sur la carte.

En transformant cette dernière intégrale en intégrale de surface, il vient

$$\int_C h\,\mathrm{N}\,ds' = -\int\int_{(\mathfrak{D})} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial h_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx\,dy. \tag{9}$$

Donc, à cause de la relation (1),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial(h_2, \varphi)}{\partial(x, y)} = \frac{\zeta}{k^2}. \tag{10}$$

Pour évaluer ζ, on se servira de la relation évidente

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\zeta,$$

en appelant V_0 la valeur de V sur la surface en équilibre. Mais on a sensiblement, à cause de l'éloignement des astres,

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} = g,$$

g désignant la valeur de l'accélération due à la pesanteur à la surface de la Terre; et V_0 n'est autre chose que le potentiel $\mathrm{C}e^{\lambda t}$ de l'astre perturbateur. Enfin, à la surface libre, p est nulle; donc

$$\mathrm{V} = \lambda^2 \varphi.$$

D'où

$$\zeta = \frac{\lambda^2 \varphi}{g} - \frac{\mathrm{C}e^{\lambda t}}{g}. \tag{11}$$

Nous obtenons ainsi l'équation définitive

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial(h_2, \varphi)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2 \varphi}{g k^2} = -\frac{\mathrm{C}e^{\lambda t}}{g k^2} \tag{12}$$

à laquelle la fonction φ doit satisfaire à l'intérieur du domaine $\mathfrak{D}$ qui correspond sur la carte au bassin considéré. Le second membre représente l'une des composantes isochrones du potentiel des forces perturbatrices.

Comme nous nous bornons à étudier ici les oscillations contraintes, $C(x,y)$ et λ feront partie des données du problème. L'étude des oscillations propres consisterait au contraire à calculer la valeur de λ satisfaisant à l'équation (12) sans second membre.

Dans le cas des oscillations contraintes, λ sera toujours purement imaginaire, les forces perturbatrices étant périodiques : les coefficients h_1 et h_2 peuvent donc devenir infinis, quand θ est solution de l'équation

$$\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2\theta = 0.$$

C'est la latitude critique.

Conditions aux limites. — Deux cas sont à distinguer :

D'une part, le bassin peut être limité par des parois verticales. La fonction devra donc annuler sur le bord la composante normale N du déplacement. Il faudra donc que la relation

$$(13) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0$$

soit satisfaite en tout point du contour.

Si, au contraire, les parois du bassin sont inclinées, on aura $h = 0$ le long du contour, et φ ne sera assujettie qu'à la seule condition de rester finie au bord. Cette condition n'est pas superflue, et, pour s'en rendre compte, il suffit de se reporter à l'équation (12) sans second membre, en supposant que φ et tous les coefficients ne dépendent que de x. On verra immédiatement que cette équation différentielle peut admettre une solution infinie. En effet, soient φ et ψ ses deux solutions, φ étant supposée finie. Entre φ et ψ existe donc la relation

$$h_1(\varphi''\psi - \psi''\varphi) + h'_1(\varphi'\psi - \psi'\varphi) = 0$$

qui donne

$$h(\varphi'\psi - \psi'\varphi) = C$$

ou

$$\psi = C\varphi\int\frac{dx}{h\varphi^2}$$

qui devient infinie pour $h = 0$.

CHAPITRE II.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE FREDHOLM.

Je me bornerai presque exclusivement au cas d'un bassin limité par des parois verticales.

Pour plus de simplicité, je supposerai toujours le domaine qui représente sur la carte le bassin considéré, limité par un contour régulièrement analytique.

1. *Fonction de Green.* — L'application de la méthode de Fredholm à notre problème repose sur l'emploi de la fonction de Green généralisée et sur les propriétés du potentiel logarithmique de simple couche.

Nous appellerons fonction de Green $G(x,y;\xi,\eta)$ relative au domaine $\mathcal{D}$ limité par le contour C la fonction assujettie aux conditions suivantes :

1° En tout point intérieur au domaine $\mathcal{D}$, la fonction $G_1(x,y;\xi,\eta)$, définie par la relation

$$G_1(x,y;\xi,\eta) = \log\frac{1}{r} - G(x,y;\xi,\eta),$$

où

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2},$$

est harmonique.

2° Sur le contour, G satisfait à la relation

$$\frac{\partial G}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial G}{\partial s} = 0,$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial s}$ désignent comme précédemment les dérivées normales et tangentielles, ω la vitesse angulaire de la rotation de la Terre, θ la colatitude correspondant au point (x,y), λ la période de la fonction perturbatrice considérée.

C'est l'existence de cette fonction G qu'il s'agit d'établir tout d'abord. Mais nous verrons plus loin qu'elle dépend elle-même de la solution du problème préliminaire suivant :

Établir l'existence d'une fonction $V(x, y)$ *harmonique en tout point intérieur au domaine* ω *et assujettie à vérifier, sur le contour* C, *la relation*

$$\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{2\omega \cos\theta}{\lambda} \frac{\partial V}{\partial s} = \chi(x, y),$$

où $\chi(x, y)$ *est une fonction donnée.*

2. *Existence de la fonction harmonique* $V(x, y)$. — Je me bornerai à indiquer la mise en équation du problème, sans donner une démonstration rigoureuse de l'existence de cette fonction.

Rappelons d'abord brièvement quelques propriétés du potentiel logarithmique de simple couche.

Soient (ξ, η) un point de la ligne attirante qui sera ici le contour, $\rho(\xi, \eta)$ une fonction continue de ξ et η, ds l'élément du contour C au point (ξ, η), (x, y) un point attiré du plan et

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2};$$

on aura pour expression du potentiel logarithmique $V(x, y)$ relatif au point (x, y), à la densité ρ et à la ligne attirante C,

$$V(x, y) = \int_C \rho(\xi, \eta) \log\frac{1}{r}\, ds' :$$

1° En tout point du plan, le potentiel est une fonction continue des variables x et y.

2° En tout point n'appartenant pas à la courbe C, V est une fonction harmonique de x, y.

3° Quand le point (x, y) se trouve sur la courbe C, l'intégrale

$$\int_C \rho(\xi, \eta) \frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial M} ds'$$

qui représente la dérivée de $V(x, y)$ au point (x, y), prise suivant la direction M, garde une signification précise quand la direction M devient celle de la normale à la courbe. Elle représente alors la moyenne arithmétique des valeurs des dérivées normales, suivant les deux directions de la normale au contour : elle diffère de chacune de ces dérivées de $\pi\rho$.

Au contraire, l'intégrale considérée n'a plus de signification précise quand la direction M devient celle de la tangente à la courbe C. En effet, l'élément d'intégrale devient infini pour la valeur de s' correspondant à un point (ξ, η) du contour, confondu avec le point attiré (x, y). Pour le voir, il suffit de considérer cette intégrale qui peut s'écrire

$$\text{(T)} \qquad \int_C \rho(\xi, \eta) \frac{\sin\psi}{r} ds',$$

où ψ désigne l'angle que fait la normale intérieure au contour, menée par le point (x, y), et la demi-droite (x, y); (ξ, η). Quand le point (x, y) se confond avec le point (ξ, η), cette expression n'a plus de sens, puisqu'en ce point, $\sin\psi = 1, r = 0$.

Il faudra donc remplacer l'expression (T) par une autre (T′) qui, tout en représentant bien la dérivée tangentielle, nous permette d'en calculer la valeur.

Pour cela, nous utiliserons cette remarque de Poincaré que la dérivée tangentielle du potentiel en un point de la ligne attirante peut encore s'exprimer par l'intégrale

$$\text{(T}'\text{)} \qquad \int_C \rho(\xi, \eta) \frac{\sin\psi}{r} ds'$$

à condition d'entendre par ce symbole la limite, pour $h = 0$, de l'intégrale étendue à la courbe C moins l'arc compris entre les points $s'_0 - h$, $s'_0 + h$, en désignant par s'_0 l'abscisse curviligne sur C du point (x, y). Cette proposition se démontre facilement; il suffit de supposer que le rayon de courbure du contour reste supérieur à un nombre fixe, et que la fonction $\rho(s')$ a une dérivée. Avec ces hypothèses, la convergence uniforme de (T′) vers sa limite, la dérivée tangentielle, est uniforme quel que soit le point (x, y) sur le contour.

Ceci posé, nous pouvons mettre en équation le problème qui nous occupe :

Trouver une fonction $V(x,y)$ harmonique à l'intérieur du domaine $\mathfrak{D}$ et satisfaisant sur son contour à la relation

$$\frac{\partial V}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial s} = \chi(x,y), \tag{14}$$

$\chi(x, y)$ étant une fonction dont les valeurs successives le long du contour sont données.

Donnons à V la forme d'un potentiel logarithmique de simple couche

$$V(x,y) = \int_C \rho(\xi,\eta)\log\frac{1}{r}\,ds'.$$

Il s'agit de déterminer la fonction inconnue ρ, qui joue ici le rôle de densité, de manière que V satisfasse à la condition aux limites (14). ρ devra donc vérifier l'équation

$$\begin{aligned}(15)\quad & \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial V}{\partial s} \\ & = \pi\rho(x,y) + \int_C \rho(\xi,\eta)\frac{\cos\psi + \frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\sin\psi}{r}\,ds' = \chi(x,y),\end{aligned}$$

ψ désignant comme précédemment l'angle de la normale intérieure à C, au point (x,y) avec la demi-droite (x,y); (ξ,η), et le symbole $\int_C$ ayant la signification (T′) déjà définie. Nous poserons pour abréger

$$\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda} = C(x,y).$$

C'est bien une équation du type de celle de Fredholm. Mais le signe d'intégration qui y figure n'a plus le sens ordinaire. Les équations intégrales où figurent des intégrales principales de Cauchy n'ont pas été étudiées ([1]).

Leur théorie paraît devoir être assez différente de celle des équations ordinaires. Si, dans l'équation (15), on remplace l'intégrale le long

---

([1]) Incidemment, M. Picard (*Comptes rendus*, 1910) a cependant rencontré une intégrale de ce type.

de C par celle le long de C, l'arc $(s-h, s+h)$ étant exclu, on a une équation (15 *bis*) du type de Fredholm et la question revient à l'étude de la convergence vers une limite de la solution de (15 *bis*) quand h tend vers zéro.

On peut donner un autre sens à l'équation (15), en s'appuyant sur la continuité de $\frac{\partial V}{\partial s}$ au voisinage d'un point de la simple couche. Soit C' un contour parallèle à C et la distance h de C et convenons de substituer, dans l'équation (15), à la partie $\frac{\sin\psi}{r}$ du noyau ce qu'elle deviendrait si le point x, y était déplacé normalement à C jusqu'à venir sur C'. On obtient ainsi une équation (15 *ter*) du type exact de Fredholm; mais il y a encore à étudier la convergence de cette solution quand h tend vers zéro [1].

J'espère pouvoir reprendre prochainement l'étude de cette question.

3. *Existence de la fonction de Green.* — Le problème précédent étant résolu, je dis qu'on pourra calculer la fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$ correspondant aux conditions aux limites du problème des marées.

Cette fonction G sera définie de la manière suivante :

1° En tout point (x, y) intérieur au domaine ω, la fonction $G_1(x, y; \xi, \eta)$, définie par la relation

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{r} - G(x, y; \xi, \eta)$$
$$\left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right),$$

devra être harmonique,

$$\Delta G_1 = 0;$$

2° Si le point (x, y) se trouve sur le contour, elle devra satisfaire à

[1] C'est aussi la convergence de la solution d'une équation de Fredhlom variable que M. Picard a étudié dans la Note citée.

l'équation

$$(16)\qquad \frac{\partial G_1}{\partial n} + C\frac{\partial G_1}{\partial s} = \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} + C\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s} = \frac{\cos\psi}{r} + C\frac{\sin\psi}{r}.$$

C'est le problème posé au paragraphe précédent.

Posons

$$G_1 = \int_C \rho \log\frac{1}{r}\,ds',$$

ρ étant la fonction inconnue à déterminer. Dans cette égalité, G_1 dépendant de deux points, soit (x,y), (ξ,η) pour fixer les idées, ρ devra être fonction de deux points également (ξ,η), (λ,μ). r désignera alors la distance du point (x,y) au point (λ,μ) et ds' l'élément de contour au point (λ,μ).

En explicitant, nous poserons donc

$$G_1(x,y;\xi,\eta) = \int_C \rho(\lambda,\mu;\xi,\eta)\log\frac{1}{r(x,y;\lambda,\mu)}\,ds(\lambda,\mu),$$

et en portant cette valeur dans l'équation (16), nous obtiendrons

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\pi\rho(x,y;\xi,\eta)\\ &\quad+\int_C \rho(\lambda,\mu;\xi,\eta)\frac{\cos\psi(x,y;\lambda,\mu)+C(x,y)\sin\psi(x,y;\lambda,\mu)}{r(x,y;\lambda,\mu)}\,ds(\lambda,\mu)\\ &\quad=\frac{\cos\psi(x,y;\xi,\eta)+C(x,y)\sin\psi(x,y;\xi,\eta)}{r(x,y;\xi,\eta)};\end{aligned}\right.$$

le point (x,y) étant lui-même assujetti à rester sur le contour. Nous retombons encore sur une équation du type de Fredholm, à la seule condition de remplacer l'intégrale, au voisinage du point $(x,y)=(\lambda,\mu)$, par sa valeur principale au sens de Cauchy, comme nous l'avons fait au paragraphe précédent.

4. *Le problème des marées* (¹). — L'existence de la fonction de

(¹) F. JAGER, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 2 mars 1914.

Green relative à nos conditions aux limites étant ainsi établie, revenons à l'équation des marées, telle que nous l'avons obtenue au Chapitre I :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial(h_2, \varphi)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2 \varphi}{g k^2} = -\frac{C e^{\lambda t}}{g k^2}$$

ou en développant et divisant par h_1 qui ne peut s'annuler, les parois étant verticales,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{h_1}\left[\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] - \frac{\lambda^2 \varphi}{g k^2 h_1} = -\frac{C e^{\lambda t}}{g k^2 h_1}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta,$$

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) = a,$$

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) = b,$$

$$\frac{\lambda^2}{g k^2 h_1} = c,$$

$$-\frac{C e^{\lambda t}}{g k^2 h_1} = e$$

et nous obtiendrons l'équation

$$\Delta \varphi + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} + b \frac{\partial \varphi}{\partial y} + c \varphi = e, \tag{18}$$

à laquelle la fonction inconnue φ devra satisfaire en tout point intérieur au domaine $\mathcal{D}$; sur le contour C, elle sera assujettie à la condition

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{2\omega \cos\theta}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0.$$

Nous supposerons que tous les coefficients a, b, c, e sont finis et continus et ont des dérivées premières elles-mêmes finies et continues en tout point du domaine et de sa frontière. Ceci exclut en particulier le cas où le domaine serait rencontré par la latitude critique définie par la relation

$$\lambda^2 + 4\omega^2 \cos^2\theta = 0,$$

car, en tout point vérifiant cette relation, les coefficients h_1 et h_2 deviennent infinis.

Ces hypothèses faites, et $G(x,y;\xi,\eta)$ étant la fonction de Green précédemment obtenue, considérons [1] une fonction $\varphi(x,y)$ définie par la relation suivante

$$(19)\quad \varphi(x,y) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{D})}\left(a'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi} + b'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta} + c'\varphi' - e'\right)G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = 0$$

où, dans les termes accentués, x, y doivent être remplacés par ξ, η. Cette relation peut aussi s'écrire

$$(20)\quad \varphi(x,y) - \frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{D})}\left(a'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi} + b'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta} + c'\varphi' - e'\right) \times\left[\log\frac{1}{r} - G_1(x,y;\xi,\eta)\right]d\xi\,d\eta = 0,$$

G_1 désignant la fonction harmonique définie par la relation

$$G_1(x,y;\xi,\eta) = \log\frac{1}{r} - G(x,y;\xi,\eta).$$

Nous obtenons ainsi deux intégrales distinctes : la première est évidemment harmonique en (x,y), G_1 étant harmonique. La deuxième représente un potentiel logarithmique dont la densité serait au point (x,y)

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\varphi - e\right).$$

Donc, en vertu de l'équation de Poisson, la fonction $\varphi(x,y)$ tirée de (18) satisfera à l'équation proposée, à condition que la densité $\rho(x,y)$ soit continue et ait des dérivées premières finies à l'intérieur de tout le domaine $\mathfrak{D}$: cela revient à montrer que $\varphi(x,y)$ a des dérivées secondes finies.

---

[1] Cette méthode a été indiquée par M. E. Picard dans son Mémoire : *Sur la solution du problème général de Dirichlet* (*Ann. de l'École Normale*, 1906).

Pour résoudre cette équation (19), commençons par lui donner la forme de celle de Fredholm. Intégrons par parties; il vient

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\varphi(x,y)+\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(\mathfrak{D})}\left[\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi}+\frac{\partial(b'G)}{\partial\eta}-c'G\right]\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\\ &\quad-\frac{1}{2\pi}\int_{C}(a'\alpha'+b'\beta')G\,\varphi(\xi,\eta)\,ds'\\ &\quad=-\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(\mathfrak{D})}e'G\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}$$

en désignant par α' et β' les cosinus directeurs de la normale intérieure à l'élément ds' du contour.

Faisons ici une remarque qui guidera la suite du raisonnement. Admettons pour un instant que cette équation puisse être résolue par la méthode de Fredholm, et soit φ sa solution. Pour que cette fonction φ soit également solution de (19), puis de (18), c'est-à-dire permette de remonter jusqu'à l'équation de départ et de la vérifier, quelles conditions devra-t-elle remplir?

1° Pour passer de l'équation (21) à l'équation (19), il faudra que φ tirée de (21) ait des dérivées premières finies à l'intérieur du domaine et sur son contour.

2° Pour remonter de l'équation intégrale (19) à l'équation aux dérivées (18), il faudra que la parenthèse qui, dans l'équation intégrale, joue le rôle de densité, ait des dérivées premières finies à l'intérieur du domaine. Cette parenthèse contenant elle-même les dérivées premières de φ, c'est l'existence des dérivées secondes de φ à l'intérieur du domaine qu'il faut établir.

Démontrons tout d'abord que les intégrales doubles qui figurent dans l'équation (21) ont un sens, donc que la méthode de Fredholm est bien applicable. Considérons d'abord l'intégrale double du premier membre et supposons, pour simplifier, que C soit rencontré seulement en deux points 1 et 2 par une parallèle à $O\eta$. En laissant de côté la partie voisine du point (x,y) qu'on entourera d'une petite courbe γ, on a

$$(22)\qquad \int_1^2 a'G\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\,d\xi=-\int_1^2\varphi'\,\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi}\,d\xi,$$

si la droite 1, 2 ne rencontre pas γ. Si cette droite rencontre γ en deux points, $1'$ et $2'$, on prendra l'intégrale sur les deux segments $1\,1'$, $2'2$ et le second membre de (22) sera remplacé par

$$-\int_1^{1'} \varphi' \frac{\partial(a'G)}{\partial\xi}\,d\xi - \int_{2'}^{2} \frac{\partial(a'G)}{\partial\xi}\,d\xi + (a'G\varphi')_{1'} - (a'G\varphi')_{2'}.$$

Donc, pour l'aire comprise entre C et γ, on aura

$$\iint_{C-\gamma} a'G\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta = -\int_\gamma a'G\varphi'\,d\eta - \iint_{C-\gamma} \varphi'\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta.$$

Supposons que γ soit un cercle de rayon ρ. En posant

$$\eta = \rho\cos\theta,$$

on voit immédiatement que l'intégrale simple tend vers $\rho\log\rho$ pour $\rho = 0$, donc qu'elle est nulle à la limite. Donc les intégrales doubles resteront finies.

De même, l'élément de l'intégrale de ligne

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C (a'\alpha' + b'\beta')G\varphi'\,ds',$$

figurant aussi dans l'équation (21), n'aura qu'une singularité logarithmique : donc cette intégrale a toujours un sens.

Suivant la remarque de Fredholm, on pourra, en itérant le noyau, obtenir une nouvelle équation équivalente à l'ancienne et qui ne présentera plus de singularité. Le noyau itéré comprendra quatre parties : une intégrale quadruple, deux intégrales triples et une intégrale double.

Posons

$$f(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi} + \frac{\partial(b'G)}{\partial\eta} - c'G\right],$$

$$g(x,y;\xi,\eta) = -\frac{1}{2\pi}(a'\alpha' + b'\beta')G.$$

L'intégrale quadruple aura la forme

$$\iint_{\textcircled{D}}\left[\iint_{\textcircled{D}} f(x,y;u,v)f(u,v;w,z)\,du\,dv\right]\varphi(w,z)\,dw\,dz.$$

Dans cette intégrale, considérons le noyau itéré

$$\iint_{(\mathrm{D})} f(x, y; u, v) f(u, v; w, z)\, du\, dv.$$

C'est une fonction de (x, y), (w, z) mais qui n'aura évidemment plus de pôle pour $(x, y) = (w, z)$. Donc cette partie du noyau aura des dérivées premières finies. On raisonnerait de même sur les deux intégrales triples et sur l'intégrale double, qui s'étendent au contour C lui-même. Donc le noyau itéré tout entier a des dérivées finies même sur le bord.

Quant aux termes tout connus, on peut les écrire avec les notations précédentes

$$(23)\quad \iint_{(\mathrm{D})} f(x, y; \xi, \eta) \chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + \int_{\mathrm{C}} g(x, y; \xi, \eta) \chi(\xi, \eta)\, ds' + \chi(x, y),$$

en posant

$$\chi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{(\mathrm{D})} e' \mathrm{G}\, d\xi\, d\eta.$$

Nous avons supposé que e avait des dérivées premières dans tout le domaine et sur sa frontière : χ aura donc des dérivées comme un potentiel logarithmique. En intégrant par parties le premier terme de (23), on obtiendra des expressions de la forme

$$\iint_{(\mathrm{D})} \frac{\partial(a'\mathrm{G})}{\partial\xi} \chi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = -\iint_{(\mathrm{D})} a' \mathrm{G} \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\, d\xi\, d\eta - \int_{\mathrm{C}} a' \chi(\xi, \eta)\, \mathrm{G}\, ds'.$$

Or le premier de ces derniers termes aura des dérivées premières finies même sur le bord et des dérivées secondes à l'intérieur du domaine puisque χ a des dérivées secondes et a, b des dérivées premières; et le second terme est un potentiel logarithmique de simple couche de densité $a\chi$. Quant au deuxième terme de (23), il est également assimilable à un potentiel.

Nous avons ainsi démontré l'existence des dérivées premières, à l'intérieur de D et sur C, de la fonction φ tirée de l'équation itérée, équivalente à (21).

Ce résultat permet donc d'affirmer que toute solution de (21) sera aussi solution de (19).

Enfin, pour démontrer que toute solution de (19) satisfait à l'équation proposée (18), il faut encore établir que φ, tirée de l'équation itérée, a des dérivées secondes à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. Mais cela résulte immédiatement de ce qui précède : nous venons de voir que tous les termes indépendants de φ ont des dérivées secondes; et tous les termes contenant φ sont assimilables à des potentiels logarithmiques et ont des dérivées secondes puisqu'on sait déjà que φ, qui joue ici le rôle de densité, a des dérivées premières.

La proposition suivante est donc établie :

L'équation de Fredholm (21) *donne bien la solution du problème des marées.*

Il reste à préciser dans quelles conditions cette équation (21) aura une solution.

Elle aura toujours une solution unique, continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, et vérifiant sur le contour les conditions aux limites du problème, sauf si $\mu = 1$ est une valeur singulière du paramètre μ pour l'équation

$$(24) \qquad \Delta\varphi + \mu\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{dy} + c\varphi\right) = e.$$

Or ces valeurs singulières de μ sont les racines de la fonction entière en μ, associée à l'équation suivante de Fredholm

$$(25) \qquad \begin{aligned} \varphi(x,y) &+ \frac{\mu}{2\pi}\int\!\!\int_{(\mathfrak{D})}\left[\frac{\partial(a'G)}{\partial\xi} + \frac{\partial(b'G)}{\partial\eta} - c'G\right]\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\ &- \frac{\mu}{2\pi}\int_{C}(a'\alpha' + b'\beta')G\,\varphi(\xi,\eta)\,ds' \\ &= -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(\mathfrak{D})} e'G\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Ces valeurs sont aussi celles pour lesquelles l'équation (24), mais sans second membre, aura une solution non identiquement nulle.

Mais l'équation (24) sans second membre, dans laquelle on fait $\mu = 1$, est précisément celle qui détermine la période des oscillations propres du bassin considéré. Voici d'ailleurs comment on pourra obtenir les oscillations propres du système.

Quand il s'agissait d'oscillations contraintes, λ, période de l'oscillation contrainte, était une donnée du problème. Pour les oscillations propres, λ est l'inconnue. Pour la calculer, reprenons la fonction $D(\mu, \lambda)$, entière en μ, associée à (25) : cette fonction est aussi une fonction entière en λ pour le problème qui nous occupe.

En effet, dans nos équations, les coefficients a, b, c, e peuvent être considérés comme des polynomes entiers en λ : il en sera donc de même du noyau tout entier. En développant la fonction $D(\mu, \lambda)$ suivant les puissances de μ, le coefficient S_n de μ_n satisfait à l'inégalité

$$S_n < \frac{M^n}{\sqrt{n!}},$$

M désignant le maximum du module du noyau. On a donc

$$S_n < \frac{A_n \lambda^{np}}{\sqrt{n!}}.$$

S_n est donc une fonction entière en λ; donc aussi $D(\mu, \lambda)$. En faisant dans cette dernière $\mu = 1$ et en l'égalant à zéro, on obtiendra toutes les valeurs de λ satisfaisant à notre équation sans second membre, c'est-à-dire les périodes de toutes les oscillations propres du système.

Donc notre méthode donne bien la solution du problème des marées, sauf si la période de l'oscillation contrainte donnée coïncide avec celle d'une oscillation propre du bassin, c'est-à-dire sauf au cas de résonance.

5. *Cas des parois inclinées.* — Nous nous bornerons à étudier sommairement le cas très particulier où l'on néglige la force centrifuge composée et où la relation

$$\frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

est satisfaite sur le contour.

Dans ce cas, l'équation peut s'écrire

$$\Delta(h\varphi) + m\varphi = n.$$

Posons

$$h\varphi = \psi$$

et cherchons la solution de

$$\Delta\psi + \frac{m}{h}\psi = n,$$

nulle au bord. Nous obtiendrons une équation de Fredholm, dont le noyau pourra devenir infini comme $\frac{1}{r \log r}$ pour $r = 0$. Donc en itérant le noyau, on pourra raisonner comme précédemment et obtenir ainsi pour φ une fonction restant finie sur le bord.

Le cas général nécessite un changement dans le chemin d'intégration et nous ne le traiterons pas ici.

CHAPITRE III.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE RITZ.

L'application de cette méthode comprend essentiellement les trois points suivants :

1° Réduction du problème des marées à un problème du calcul des variations;

2° Démonstration de la convergence en moyenne des fonctions minimisantes;

3° Identification des fonctions minimisantes et de la solution du problème.

Ici encore, nous n'étudierons que le cas d'un bassin limité par des parois verticales et n'ayant avec la latitude critique aucun point commun.

1. *Le problème du calcul des variations.* — Rappelons l'équation générale de notre problème, et la signification de ses divers coefficients.

A l'intérieur du domaine $\mathfrak{D}$, la fonction inconnue $\varphi(x,y)$ devait satisfaire à l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial(h_2,\varphi)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2\varphi}{gk^2}=-\frac{Ce^{\lambda t}}{gk^2}, \tag{26}$$

où

$$h_1=\frac{\lambda^2 h}{\lambda^2+4\omega^2\cos^2\theta},$$
$$h_2=\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}h_1.$$

h est la profondeur, quantité essentiellement réelle; λ, période de l'oscillation contrainte considérée, est purement imaginaire; ω désigne la vitesse de rotation de la Terre; θ, la colatitude. Il en résulte que h_1 représente une quantité réelle et h_2 une quantité purement imaginaire.

Enfin g désigne l'accélération due à la pesanteur à la surface d'équilibre des mers, h^2 est le rapport de similitude d'un élément du bassin à l'élément correspondant de la carte; C, une fonction donnée de x et y.

Sur le contour, la fonction φ est assujettie à la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0.$$

Cela étant rappelé, pour obtenir la forme cherchée, séparons les parties réelles et les parties imaginaires (nous verrons plus loin que cette séparation est nécessaire dans le cas général) et posons

$$\varphi=\varphi_1+i\varphi_2,$$
$$h_2=i\eta,$$
$$Ce^{\lambda t}=C_1+iC_2.$$

L'équation (26) équivaut alors aux deux suivantes :

$$(27)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial(\varphi_2,\eta)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2\varphi_1}{gk^2}+\frac{C_1}{gk^2}=0,\\&\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial(\varphi_1,\eta)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2\varphi_2}{gk^2}+\frac{C_2}{gk^2}=0,\end{aligned}\right.$$

et la condition aux limites donne

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+i\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\frac{2\omega\cos\theta}{\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}+i\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\right)=0,$$

ou, λ étant purement imaginaire,

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\dfrac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}-\dfrac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}=0.\end{cases}$$

Multiplions respectivement ces deux équations (27) par $\delta\varphi_1\,dx\,dy$, $\delta\varphi_2\,dx\,dy$, ajoutons et intégrons par rapport à x et y dans tout le domaine $\mathfrak{D}$ considéré; cette intégrale devra évidemment être nulle.

Nous allons établir que cette intégrale se réduit à la variation exacte d'une autre intégrale : et la recherche du maximum (ou du minimum) de cette dernière constituera un problème équivalent à l'ancien.

Transformons successivement chaque terme, au moyen d'intégrations par parties, de manière à obtenir des variations exactes, sans nous préoccuper pour l'instant des intégrales de ligne que nous introduirons.

Les deux premiers termes de la première équation (27) donneront

$$\int\!\!\int_{(\mathfrak{D})}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]\delta\varphi_1\,dx\,dy$$
$$=-\int\!\!\int_{(\mathfrak{D})}h_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial y}\right)dx\,dy+\int_{\mathrm{C}}h_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dx\right)\delta\varphi_1.$$

La même transformation s'applique pour les termes analogues de la deuxième équation.

L'ensemble des termes provenant des déterminants fonctionnels pourra s'écrire

$$\int\!\!\int_{(\mathfrak{D})}\left[\delta\varphi_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)-\delta\varphi_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-\delta\varphi_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+\,\delta\varphi_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]dx\,dy$$

et, en intégrant par parties, on obtiendra une intégrale double

$$\int\int_{(\mathfrak{L})} \eta \left(-\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial\,\delta\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \right) dx\,dy,$$

qui est une variation exacte

$$\delta \int\int_{(\mathfrak{L})} \eta \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} \right) dx\,dy = \delta \int\int_{(\mathfrak{L})} \eta \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}\,dx\,dy$$

et des intégrales de ligne

$$\int_{\mathrm{C}} \eta \left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\delta\varphi_1\,dx - \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\delta\varphi_1\,dy + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\delta\varphi_2\,dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\delta\varphi_2\,dy \right).$$

Dans toutes les intégrales de ligne que nous avons introduites, mettons en évidence les coefficients de $\delta\varphi_1$ et $\delta\varphi_2$. En se rappelant que

$$\eta = \frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}h_1,$$

les intégrales de ligne deviennent

$$\int_{\mathrm{C}} \left\{ \begin{aligned} & h_1\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dx - \frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy\right)\right]\delta\varphi_1 \\ & + h_1\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dx + \frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dy\right)\right]\delta\varphi_2 \end{aligned} \right\}.$$

Chacun des deux crochets étant nul tout le long du bord en vertu des relations (28), les intégrales de ligne sont donc toutes nulles.

Quant aux derniers termes des équations (27), leur transformation est immédiate. Les termes en φ_1 et φ_2 se réduisent à une variation exacte

$$\delta \int\int_{(\mathfrak{L})} -\frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)\,dx\,dy,$$

et les termes tous connus, n'ayant pas de variation, donnent

$$\delta \int\int_{(\mathfrak{L})} \frac{1}{gk^2}(\mathrm{C}_1\varphi_1 + \mathrm{C}_2\varphi_2)\,dx\,dy.$$

Donc, avec les conditions aux limites du problème, tout système de solutions des équations (27) devra annuler la variation première de l'intégrale suivante, que nous appellerons pour abréger *intégrale de Poincaré*,

$$J = \iint_{(D)} \Big\{ -\frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right] + \eta\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{gk^2}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2)\Big\} dx\, dy.$$

Il peut être intéressant de rechercher à quelle condition l'équation proposée est équivalente à la variation exacte d'une intégrale ne dépendant que de φ; ou, en d'autres termes, quand la séparation des parties réelles et imaginaires est nécessaire. Nous supposerons toujours que les coefficients des dérivées secondes ne peuvent s'annuler dans le domaine considéré.

Considérons d'abord le cas d'une équation différentielle ordinaire du second ordre

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f,$$

où a, b, c, f sont des fonctions données de x. Supposons qu'on cherche la solution telle que

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_1} = 0.$$

Multiplions l'équation par $\delta y\, dx$ et intégrons de x_0 à x_1

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(a\frac{d^2y}{dx^2}\delta y + b\frac{dy}{dx}\delta y + cy\,\delta y - f\delta y\right)dx = 0.$$

Les deux derniers termes sont des variations exactes et, en intégrant par parties le premier, il vient

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(-\frac{dy}{dx}\frac{da\,\delta y}{dx} + b\frac{dy}{dx}\delta y + cy\,\delta y - f\delta y\right)dx = 0$$

ou

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(-a\frac{dy}{dx}\frac{d\,\delta y}{dx} - \frac{da}{dx}\frac{dy}{dx}\delta y + b\frac{dy}{dx}\delta y + cy\,\delta y - f\delta y\right)dx = 0,$$

et le premier terme étant une variation exacte, il faudra que le coefficient de δy soit nul, c'est-à-dire

$$b = \frac{da}{dx}.$$

Je dis que cette condition peut toujours être remplie. Récrivons, en effet, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{b}{a}\frac{dy}{dx}+\frac{c}{a}y=\frac{f}{a}.$$

Posons

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{\mathrm{A}}\frac{d\mathrm{A}}{dx}$$

et, par une simple quadrature,

$$\mathrm{A}=e^{\int\frac{b}{a}dx}.$$

En remplaçant $\frac{b}{a}$ par sa valeur dans l'équation, on obtient donc la forme cherchée.

Revenons à l'équation générale aux dérivées partielles, du type elliptique

$$a\,\Delta\varphi+b\frac{\partial\varphi}{\partial x}+c\frac{\partial\varphi}{\partial y}+e\varphi=f,$$

où a, b, c, e, f sont des fonctions données de x, y et où a ne peut s'annuler dans le domaine considéré. En supposant les conditions aux limites telles que les intégrales de ligne, introduites par l'intégration par parties, soient nulles, en multipliant par $\delta\varphi\,dx\,dy$ et intégrant dans le domaine $\mathcal{D}$, on trouverait comme précédemment

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}}\Big[&-a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi}{\partial y}\right)\\&-\left(\frac{\partial a}{\partial x}-b\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta\varphi-\left(\frac{\partial a}{\partial y}-c\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta\varphi+e\varphi\,\delta\varphi-f\,\delta\varphi\Big]dx\,dy=0,\end{aligned}$$

et il faudrait que l'on ait

$$\frac{\partial a}{\partial x}=b,$$

$$\frac{\partial a}{\partial y}=c.$$

Écrivons comme précédemment

$$\Delta\varphi+\frac{b}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{c}{a}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{e}{a}\varphi=\frac{f}{a}.$$

En posant

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial x},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\Lambda}\frac{\partial \Lambda}{\partial y},$$

on obtiendra encore Λ par quadrature

$$\Lambda = e^{\int \frac{b}{a} dx} = e^{\int \frac{c}{a} dy};$$

mais il faudra évidemment que l'on ait

$$\frac{\partial \left(\frac{b}{a}\right)}{\partial y} = \frac{\partial \left(\frac{c}{a}\right)}{\partial x}.$$

Telle est la relation qui doit exister entre les trois coefficients a, b, c pour que l'intégrale en φ soit une variation exacte. Appliquons ce résultat à l'équation des marées. Nous obtiendrons la condition

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial h_2}{\partial y}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\right],$$

où h_1 et h_2 ne dépendent que de la colatitude $\theta(x, y)$ et, linéairement, de la profondeur $h(x, y)$.

Cette relation sera toujours vérifiée si l'on néglige la force centrifuge composée, car dans ce cas h_2 est nulle. Mais elle ne le sera évidemment pas dans le cas général.

2. *Définitions des* ψ, *de* φ_m *et de* J_m. — Nous venons de voir que le problème des marées se ramenait à la recherche du minimum (ou du maximum) d'une certaine intégrale J que nous avons appelée *intégrale de Poincaré*. Il s'agit de trouver la fonction qui « minimisera » cette intégrale J. Nous nous servirons pour cela de la méthode de Ritz. On sait qu'elle consiste à remplacer la fonction inconnue φ par une série de fonctions arbitrairement choisies, dont on détermine les coefficients, indépendants de x et y, de façon à annuler la variation première de l'intégrale J.

Soient donc

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_m, \quad \ldots$$

une suite illimitée de fonctions réelles de x et y, et

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m, \quad \ldots,$$
$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_m, \quad \ldots$$

des nombres actuellement indéterminés. Nous poserons

$$\varphi_{1,m} = a_1\psi_1 + a_2\psi_2 + \ldots + a_m\psi_m,$$
$$\varphi_{2,m} = b_1\psi_1 + b_2\psi_2 + \ldots + b_m\psi_m$$

et nous assujettirons les fonctions ψ aux conditions suivantes :

1° Elles sont déterminées, finies et continues ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres dans le domaine ω et sur sa frontière.

2° Les conditions aux limites du problème doivent être remplies par $\varphi_{1,m}$ et $\varphi_{2,m}$, quels que soient les nombres $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$,

$$\sum_{i=1}^{i=m} a_i \frac{\partial\psi_i}{\partial n} + \frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda} \sum_{i=1}^{i=m} b_i \frac{\partial\psi_i}{\partial s} = 0,$$
$$\sum_{i=1}^{i=m} b_i \frac{\partial\psi_i}{\partial n} - \frac{2\omega\cos\theta}{i\lambda} \sum_{i=1}^{i=m} a_i \frac{\partial\psi_i}{\partial s} = 0,$$

ce qui entraîne la condition

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial n} = \frac{\partial\psi_i}{\partial s} = 0$$

en tout point du contour.

3° Enfin, nous serons obligés de supposer que la relation

$$\int\int_{(\omega)} \eta \frac{\partial(\psi_i, \psi_j)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy = 0$$

est satisfaite pour toutes valeurs des indices i, j. En particulier, on pourra y satisfaire en supposant que

$$\int\int_{(\omega)} \eta \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\psi_j}{\partial y}\, dx\, dy = 0$$

quels que soient i, j sauf pour $i = j$.

Posons enfin

$$\begin{aligned} J_m = \int\int_{(\omega)} \Bigg\{ &-\frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2\right] \\ &+ \eta\frac{\partial(\varphi_{1,m}, \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{2gk_2}(\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}^2) + \frac{1}{gk^2}(C_1\varphi_{1,m} + C_2\varphi_{2,m})\Bigg\}\, dx\, dy, \end{aligned}$$

et cherchons à déterminer les paramètres a_i et b_i de façon à rendre l'intégrale J_m minima.

Comme J_m est une fonction du second degré des paramètres a_i, b_i et ne dépend pas de x, y, nous n'avons qu'à résoudre le système linéaire en a_i et b_i, à coefficients constants, des $2m$ équations suivantes :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial J_m}{\partial a_n} &= \int\int_{(\mathfrak{L})} \Big[-h_1\Big(\frac{\partial \varphi_{1.m}}{\partial x}\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1.m}}{\partial y}\frac{\partial \psi_n}{\partial y}\Big) \\ &\quad + \eta_1 \frac{\partial(\psi_n, \varphi_{2.m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{1,m}\psi_n + \frac{C_1}{gk^2}\psi_n\Big]\, dx\, dy = 0, \\ \frac{\partial J_m}{\partial b_n} &= \int\int_{(\mathfrak{L})} \Big[-h_1\Big(\frac{\partial \varphi_{2.m}}{\partial x}\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{2.m}}{\partial y}\frac{\partial \psi_n}{\partial y}\Big) \\ &\quad + \eta_1 \frac{\partial(\varphi_{1.m}, \psi_n)}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{2.m}\psi_n + \frac{C_2}{gk^2}\psi_n\Big]\, dx\, dy = 0 \\ &\qquad (n = 1, 2, \ldots, m); \end{aligned}\right.$$

ou, en posant,

$$\alpha_{i.j} = \int\int_{(\mathfrak{L})} \Big[-h_1\Big(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y}\frac{\partial \psi_j}{\partial y}\Big) - \frac{\lambda^2}{gk^2}\psi_i\psi_j\Big]\, dx\, dy,$$

$$\beta_{i.j} = \int\int_{(\mathfrak{L})} \eta_1 \frac{\partial(\psi_i, \psi_j)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy,$$

$$-\gamma_{1.n} = \int\int_{(\mathfrak{L})} \frac{C_1}{gk^2}\psi_n\, dx\, dy,$$

$$-\gamma_{2.n} = \int\int_{(\mathfrak{L})} \frac{C_2}{gk^2}\psi_n\, dx\, dy,$$

il vient

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=m} a_j\alpha_{j.n} - \sum_{j=1}^{j=m} b_j\beta_{j.n} &= \gamma_{1.n} \\ \sum_{j=1}^{j=m} a_j\beta_{j.n} + \sum_{j=1}^{j=m} b_j\alpha_{j.n} &= \gamma_{2.n} \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour que ce système admette un système de solutions non identiquement nulles, il faut que le déterminant des coefficients α et β soit différent de zéro.

Mais dans le cas des oscillations propres, ce sont précisément les racines en λ de ce déterminant qui déterminent la période de ces oscillations. Comme nous ne nous occupons ici que des oscillations contraintes, où λ est une donnée du problème, et que de plus nous supposons qu'il n'y a pas résonance, notre déterminant sera toujours différent de zéro.

Ce déterminant permet de retrouver des résultats que M. Poincaré avait obtenus par une autre voie.

Si l'on change λ en $-\lambda$ dans ce déterminant, on se rend compte facilement que les coefficients α ne changent pas tandis que les coefficients β changent de signe : donc le déterminant lui-même ne change pas. Donc, si λ est une période d'oscillation propre, $-\lambda$ le sera aussi.

Enfin, ce déterminant est une fonction entière en λ : la multiplicité des racines en λ reste finie. Pour le voir on appliquera la méthode qui sert à Poincaré pour l'étude des systèmes finis de points (*Théorie des marées*, Chap. I).

Avant d'aller plus loin, donnons au système (29) une forme différente qui nous servira dans un moment. Soient

$$\begin{matrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_m, \\ B_1, & B_2, & \ldots, & B_m \end{matrix}$$

des nombres arbitraires. Posons

$$\begin{aligned} \zeta_{1.m}(x, y) &= A_1\psi_1 + A_2\psi_2 + \ldots + A_m\psi_m, \\ \zeta_{2.m}(x, y) &= B_1\psi_1 + B_2\psi_2 + \ldots + B_m\psi_m. \end{aligned}$$

En multipliant chacune des équations (29) respectivement par les quantités A_i et B_i et ajoutant, ce système (29) se résume dans les deux équations suivantes :

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int\!\!\int_{(\mathrm{D})} \left[-h_1 \left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x} \frac{\partial\zeta_{1,m}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y} \frac{\partial\zeta_{1,m}}{\partial y} \right) \right. \\ &\qquad \left. + \eta \frac{\partial(\zeta_{1,m}\varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} \varphi_{1,m}\zeta_{1,m} + \frac{C_1}{gk^2} \zeta_{1,m} \right] dx\,dy = 0, \\ &\int\!\!\int_{(\mathrm{D})} \left[-h_1 \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x} \frac{\partial\zeta_{2,m}}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y} \frac{\partial\zeta_{2,m}}{\partial y} \right) \right. \\ &\qquad \left. + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}\zeta_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} \varphi_{2,m}\zeta_{2,m} + \frac{C_1}{gk^2} \zeta_{2,m} \right] dx\,dy = 0. \end{aligned} \right.$$

5. *Définition de* J''_m. — Le système (30) peut s'écrire, en y faisant

$$\zeta_{1,m} = \varphi_{1,m},$$
$$\zeta_{2,m} = \varphi_{2,m},$$

c'est-à-dire en particularisant les coefficients arbitraires de $\zeta_{1,m}$, $\zeta_{2,m}$:

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \left\{ -h_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m} \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} \varphi_{1,m}^2 + \frac{C_1}{gk^2} \varphi_{1,m} \right\} dx\, dy = 0,$$

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \left\{ -h_1 \left[\left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m} \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} - \frac{\lambda^2}{gk^2} \varphi_{2,m}^2 + \frac{C_2}{gk^2} \varphi_{2,m} \right\} dx\, dy = 0.$$

Ces deux équations nous donnent donc pour valeurs de

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \frac{C_1}{gk^2} \varphi_{1,m}\, dx\, dy$$

et de

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \frac{C_2}{gk^2} \varphi_{2,m}\, dx\, dy$$

deux intégrales dont les éléments sont des formes quadratiques des fonctions $\varphi_{1,m}$, $\varphi_{2,m}$ et de leurs dérivées premières. Portons ces valeurs dans l'intégrale J_m qu'il s'agit de *minimiser*. Nous obtiendrons ainsi une nouvelle intégrale J''_m, dite *minimisée* et dont l'élément sera une forme quadratique des fonctions $\varphi_{1,m}$, $\varphi_{2,m}$ et de leurs dérivées premières

$$J^0_m = \iint_{(\mathfrak{b})} \left\{ \frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y} \right)^2 \right] - \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m} \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} + \frac{\lambda^2}{2gk^2} (\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}^2) \right\} dx\, dy.$$

Cette intégrale J''_m n'est autre que la valeur de J_m après la détermination des $2m$ coefficients de $\varphi_{1,m}$ et $\varphi_{2,m}$.

Avant d'étudier la convergence de ces intégrales J''_m, il faut les assujettir à garder un signe constant.

4. *Le signe de* J_m^0. — Remarquons que J_m^0 peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\iint_{(\mathrm{D})}\Bigg\{&\frac{h_1-\eta}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2\right]\\&+\frac{\eta}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2\right]\\&+\frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_{1,m}^2+\varphi_{2,m}^2)\Bigg\}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

λ étant purement imaginaire, le dernier terme sera toujours négatif. Si donc on pouvait avoir

$$h_1-\eta<0,$$
$$\eta<0,$$

la forme serait toujours définie négative. Mais en remplaçant η et h_1 par leurs valeurs et en effectuant le calcul, on aboutit à une contradiction.

On peut cependant trouver des conditions suffisantes pour que cette intégrale garde un signe constant. Pour cela, je supposerai que les conditions suivantes sont remplies

$$(31)\qquad\begin{cases}h_1-\eta>0,\\ \eta>0.\end{cases}$$

En les explicitant, deux cas seront à distinguer :

1° Si $2\omega\cos\theta<0$ (hémisphère austral), il faudra que

$$i\lambda<0$$

et

$$i\lambda<\min 2\omega\cos\theta.$$

2° Si $2\omega\cos\theta>0$ (hémisphère boréal), il faudra que

$$i\lambda>0$$

et

$$i\lambda>\max 2\omega\cos\theta.$$

C'est donc encore la latitude critique

$$\lambda^2+4\omega^2\cos^2\theta=0$$

qui s'introduit ici.

Ces conditions supposées remplies, je dis que l'intégrale aura un signe constant.

Remarquons d'abord que η étant positif, le deuxième crochet de l'intégrale J''_m le sera également. Il nous suffira donc d'établir que

$$\int\int_{(\mathfrak{D})}\left\{\frac{h_1-\eta}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dy}\right)^2\right]+\frac{\lambda^2}{2gk^2}\varphi_{1,m}^2\right\}dx\,dy>0,$$

$$\int\int_{(\mathfrak{D})}\left\{\frac{h_1-\eta}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{dy}\right)^2\right]+\frac{\lambda^2}{2gk^2}\varphi_{2,m}^2\right\}dx\,dy>0,$$

ou en posant

$$\frac{h_1-\eta}{2}=a^2,$$

$$\frac{\lambda^2}{2gk^2}=-b^2,$$

a et b désignant des quantités réelles,

$$\int\int_{(\mathfrak{D})}\left\{a^2\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dy}\right)^2\right]-b^2\varphi_{1,m}^2\right\}dx\,dy>0.$$

Il suffira donc que

$$\int\int_{(\mathfrak{D})}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dy}\right)^2-\frac{b^2}{a^2}\varphi_{1,m}^2\right]dx\,dy>0.$$

Divisons notre domaine $(\mathfrak{D})$ en petits rectangles $\mathfrak{R}$, par des parallèles aux axes de coordonnées, pour fixer les idées. Notre intégrale deviendra une somme d'intégrales de mêmes formes, mais étendues à chacun des petits rectangles $\mathfrak{R}$.

On sait que, pour un domaine suffisamment petit, on a, d'après un lemme connu de Poincaré [1],

$$\int\int_{\mathfrak{R}}\left\{\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dx}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{dy}\right)^2-\frac{24}{7l^2}\varphi_{1,m}^2\right\}dx\,dy>0,$$

l désignant la plus grande dimension du domaine $\mathfrak{R}$. Il suffira donc

(1) Poincaré, *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, 1894).

qu'on ait

$$\max \frac{b^2}{a^2} < \frac{24}{7 l^2},$$

ce qui est toujours possible, en prenant l assez petit, les dimensions de chacun des petits rectangles étant arbitraires.

Le lemme de Poincaré suppose que

$$\iint_{\mathcal{R}} \varphi_{1,m}\, dx\, dy = 0.$$

Il faudrait donc, dans cette méthode, assujettir les fonctions ψ à vérifier les relations

$$(32) \qquad \iint_{\mathcal{R}} \psi_i\, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m, \ldots),$$

quel que soit celui des rectangles $\mathcal{R}$ envisagé.

Il est bien évident qu'au lieu de rectangles on pourrait choisir n'importe quel autre mode de subdivision.

Donc, en supposant les conditions (31) remplies et les ψ assujettis à vérifier les relations (32), l'intégrale J_m^0 restera toujours positive.

5. *Convergence de* J_m^0. — L'intégrale J_m^0 étant supposée positive, posons

$$\Phi_1 = \varphi_{1,m+n} - \varphi_{1,m},$$
$$\Phi_2 = \varphi_{2,m+n} - \varphi_{2,m}$$

et formons la différence des valeurs non minimisées de J

$$\begin{aligned}
J_{m+n} - J_m = \iint_{(\mathrm{L})} \Bigg\{ & \frac{-h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial(\varphi_{1,m}+\Phi_1)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_{2,m}+\Phi_2)}{\partial x}\right)^2 \right.\\
& \left. + \left(\frac{\partial\varphi_{1,m}+\Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\varphi_{2,m}+\Phi_2)}{\partial y}\right)^2 \right] + \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}+\Phi_1, \varphi_{2,m}+\Phi_2)}{\partial(x,y)} \\
& - \frac{\lambda^2}{2gk^2}[(\varphi_{1,m}-\Phi_1)^2 + (\varphi_{2,m}+\Phi_2)^2] \\
& + \frac{1}{gk^2}[C_1(\varphi_{1,m}+\varphi_1) + C_2(\varphi_{2,m}+\Phi_2)] \\
& + \frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2\right] - \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}, \varphi_{2,m})}{\partial(x,y)} \\
& + \frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}) - \frac{1}{gk^2}(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) \Bigg\} dx\, dy.
\end{aligned}$$

Or, les équations (30) s'écrivent, pour l'indice $m+n$,

$$\iint_{(\mathrm{D})}\Big\{-h_1\left[\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta_{1,m+n}}{\partial x}+\left(\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)\frac{\partial\zeta_{1,m+n}}{\partial y}\right]$$
$$+\eta\frac{\partial[\zeta_{1,m+n},(\varphi_{2,m}+\Phi_2)]}{\partial(x,y)}$$
$$-\frac{\lambda^2}{gk^2}(\varphi_{1,m}+\Phi_1)\zeta_{1,m+n}+\frac{C_1}{gk^2}\zeta_{1,m+n}\Big\}dx\,dy=0.$$

$$\iint_{(\mathrm{D})}\Big\{-h_1\left[\left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta_{2,m+n}}{\partial x}+\left(\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)\frac{\partial\zeta_{2,m+n}}{\partial y}\right]$$
$$+\eta\frac{\partial[(\varphi_{1,m}+\Phi_1),\zeta_{2,m+n}]}{\partial(x,y)}$$
$$-\frac{\lambda^2}{gk^2}(\varphi_{2,m}+\Phi_2)\zeta_{2,m+n}+\frac{C_2}{gk^2}\zeta_{2,m+n}\Big\}dx\,dy=0.$$

Dans ces dernières expressions, faisons

$$\zeta_{1,m+n}=\Phi_1,$$
$$\zeta_{2,m+n}=\Phi_2,$$

ce qui est possible, puisque les ζ ont des coefficients arbitraires et sont de l'ordre de $m+n$. En tenant compte des relations ainsi obtenues dans l'expression de $J_{m+n}-J_m$, nous minimisons ces intégrales, et nous pourrons écrire, après réductions,

$$J^0_{m+n}-J^0_m=\iint_{(\mathrm{D})}\Big\{-\frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right)^2\right]$$
$$+\eta\frac{\partial(\Phi_1,\Phi_2)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2}{2gk^2}(\Phi_1^2+\Phi_2^2)\Big\}dx\,dy.$$

Mais avec les hypothèses faites au paragraphe précédent, cette intégrale reste toujours négative,

$$J^0_{m+n}-J^0_m<0$$

et J^0_m restant positive, quel que soit m, à tout nombre ε_m donné à l'avance, on peut faire correspondre un nombre M tel que, pour toute valeur de $m>M$, on ait

$$|J^0_{m+n}-J^0_m|<\varepsilon_m$$

quel que soit n.

Donc, les intégrales minimisées J^0_m tendent vers une valeur limite quand m croît indéfiniment.

6. *Convergence de* $\int\int_{(\mathfrak{L})} \Phi_1^2 \, dx\, dy$, ... — Malheureusement, la méthode précédente ne nous permet pas de passer de la convergence des intégrales J_m^0 à celle des intégrales

$$\int\int_{(\mathfrak{L})} \Phi_1^2 \, dx\, dy, \qquad \int\int_{(\mathfrak{L})} \Phi_2^2 \, dx\, dy.$$

où

$$\Phi_1 = \varphi_{1,m+n} - \varphi_m,$$
$$\Phi_2 = \varphi_{2,m+n} - \varphi_m.$$

En effet, elle ne nous renseigne que sur la convergence de

$$\int\int_{(\mathfrak{L})} \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)^2 dx\, dy,$$
$$\int\int_{(\mathfrak{L})} \frac{\eta}{2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)^2 dx\, dy,$$

ce qui ne nous est d'aucune utilité.

On peut cependant arriver au résultat cherché en changeant les hypothèses faites, au paragraphe précédent, sur η, h_1 et les fonctions ψ.

Nous supposerons maintenant

$$h_1 < 0$$

ou, en explicitant, il faudra :

1° Si $2\omega\cos\theta < 0$ (hémisphère austral)

$$|i\lambda| < |2\omega\cos\theta|;$$

2° Si $2\omega\cos\theta > 0$ (hémisphère boréal)

$$|i\lambda| < 2\omega\cos\theta,$$

donc toujours

$$|i\lambda| < |2\omega\cos\theta|.$$

Enfin, assujettissons les fonctions ψ (qui doivent d'ailleurs satisfaire aux conditions données sur le contour) à vérifier la relation

$$\int\int_{(\mathfrak{L})} \eta \frac{\partial(\psi_i, \psi_j)}{\partial(x, y)} dx\, dy = 0$$

quelles que soient les valeurs des indices i, j.

En particulier, on pourra choisir les fonctions ψ telles que la relation

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \eta \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx\, dy = 0$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs des indices i et j, sauf pour $i=j$.

Telles sont les hypothèses que nous adopterons définitivement, à l'exclusion de celles que nous avions faites au paragraphe précédent.

L'intégrale

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \eta \frac{\partial(\varphi_{1,m}, \varphi_{2,m})}{\partial(x, y)} dx\, dy = 0$$

étant nulle, J_m^0 se réduira ici à

$$J_m^0 = \iint_{(\mathfrak{b})} \left\{ \frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{1,m}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_{2,m}}{\partial y}\right)^2 \right] + \frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_{1,m}^2 + \varphi_{2,m}^2) \right\} dx\, dy$$

et sera toujours négative, puisque λ est purement imaginaire et que nous avons fait l'hypothèse $h_1 < 0$.

Dans les mêmes conditions, $J_{m+n}^0 - J_m^0$ se réduira à l'intégrale

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \left\{ -\frac{h_1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)^2 \right] - \frac{\lambda^2}{2gk^2}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \right\} dx\, dy$$

et restera donc toujours positive, ce qui nous permet d'écrire comme précédemment

$$| J_{m+n}^0 - J_m^0 | < \varepsilon_m$$

et chaque partie de l'élément de cette intégrale étant négative, nous obtenons les six inégalités suivantes :

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{1,m+n} - \varphi_{1,m})}{\partial x} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m;$$

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{2,m+n} - \varphi_{2,m})}{\partial x} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m;$$

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{1,m+n} - \varphi_{1,m})}{\partial y} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m;$$

$$\iint_{(\mathfrak{b})} \left| \frac{h_1}{2} \left[\frac{\partial(\varphi_{2,m+n} - \varphi_{2,m})}{\partial y} \right]^2 \right| dx\, dy < \varepsilon_m$$

et

$$\iint_{(\mathfrak{D})}\left|\frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_{1,m+n}-\varphi_{1,m})^2\right|dx\,dy<\varepsilon_m;$$

$$\iint_{(\mathfrak{D})}\left|\frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_{2,m+n}-\varphi_{2,m})^2\right|dx\,dy<\varepsilon_m.$$

Ces inégalités vont nous permettre d'établir la convergence uniforme de nos fonctions presque partout.

7. *La convergence en moyenne des fonctions* φ_m. — Montrons [1] que de la suite donnée

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \ldots,\quad \varphi_m,\quad \ldots$$

on peut en extraire une autre qui converge uniformément en général vers une fonction finie et bien déterminée, en tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, sauf peut-être en un ensemble de points dont la mesure superficielle est nulle.

De cette suite donnée on sait d'abord qu'à tout nombre $\varepsilon_m > 0$, donné à l'avance, on peut faire correspondre un nombre m tel que, pour toute valeur de $n > m$, on ait

$$\iint_{(\mathfrak{D})}(\varphi_m-\varphi_n)^2\,dx\,dy<\varepsilon_m.$$

Cela résulte de la dernière inégalité du paragraphe précédent, puisque, dans cette inégalité, le coefficient $\frac{\lambda^2}{2gk^2}$ est toujours négatif.

On sait de plus que

$$\lim_{m=\infty}\varepsilon_m=0.$$

On peut donc choisir d'une infinité de manières une suite de nombres positifs décroissants

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_m,\quad \ldots.$$

---

[1] La démonstration suivante a été donnée, pour le cas d'une variable, par M. Plancherel (*Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. XXX, 1910). Pour simplifier les notations, nous raisonnerons sur une suite à un seul indice : la démonstration s'applique donc soit à $\varphi_{1,m}$, soit à $\varphi_{2,m}$.

tels que la série

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} \varepsilon_i$$

soit convergente.

Désignons par $E'(\eta)$ l'ensemble des points intérieurs au domaine ω, pour lesquels une fonction quelconque φ_m de notre suite a un module supérieur à un nombre positif η :

$$|\varphi_m| > \eta.$$

La mesure superficielle $m_s[E'(\eta)]$ de cet ensemble vérifiera l'inégalité

$$\eta^2\, m_s[E'(\eta)] < \iint_{(\omega)} \varphi_m^2\, dx\, dy.$$

D'où

$$m_s[E'(\eta)] < \frac{1}{\eta^2} \iint_{(\omega)} \varphi_m^2\, dx\, dy.$$

Soit $E(\eta)$ le complémentaire de $E'(\eta)$, c'est-à-dire l'ensemble des points intérieurs à ω et ne faisant pas partie de $E'(\eta)$. La mesure de ce nouvel ensemble vérifiera l'égalité

$$m_s[E(\eta)] = D - m_s[E'(\eta)],$$

en appelant D l'aire du domaine ω, au sens élémentaire du mot. Donc

$$m_s[E(\eta)] > D - \frac{1}{\eta^2} \iint_{(\omega)} \varphi_m^2\, dx\, dy$$

et, en chaque point de cet ensemble $E(\eta)$, nous aurons par définition

$$|\varphi_m| < \eta.$$

Ces notions étant rappelées, nous allons déterminer une limite inférieure de la mesure superficielle de l'ensemble $E_{m'}(\eta_m)$ des points en chacun desquels on ait

$$|\varphi_{m'} - \varphi_n| < \eta_m,$$

quels que soient m' et $n > m$, η_m désignant un nombre positif donné tendant vers zéro quand m augmente indéfiniment. Nous désignerons par $E'_{m'}(\eta_m)$ son complémentaire. En tout point de $E_{m'}(\eta_m)$, nous avons

$$\begin{array}{l} |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+1}| < \eta_m, \\ |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+2}| < \eta_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| < \eta_m, \end{array}$$

$p > m'$ désignant un entier positif d'ailleurs quelconque. En chaque point de $E_{m'}(\eta_m)$, il y a un des premiers membres de ces p inégalités supérieur ou égal aux $p-1$ autres : la fonction égale en chaque point de $E_{m'}(\eta_m)$ à ce module maximum sera appelée $\varphi_{m',p}$.

L'ensemble $\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)$ des points en lesquels on a

$$\varphi_{m',p} > \eta_m$$

aura une mesure superficielle inférieure à

$$\frac{1}{\eta_m^2}\int\int_{(D)} \varphi_{m',p}^2\, dx\, dy.$$

Cela va nous permettre de trouver une limite supérieure de $m_s[E'_{m'}(\eta_m)]$, c'est-à-dire la limite inférieure de $m_s[E_{m'}(\eta_m)]$ que nous cherchons.

En effet, remarquons d'abord que l'ensemble $\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)$ est intérieur à $\mathcal{E}'_{m',p+1}(\eta_m)$, ce dernier à $\mathcal{E}'_{m',p+2}(\eta_m)$, ...

Cela résulte de leur définition même, puisqu'en un point où l'on a, par exemple,

$$\varphi_{m',p+1} > \eta_m,$$

on aura *a fortiori*

$$\varphi_{m',p} > \eta_m,$$

car $\varphi_{m',p+1}$ désigne en chaque point la plus grande des fonctions

$$|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+1}|, \quad \dots \quad |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}|, \quad |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p+1}|$$

et $\varphi_{m',p}$ la plus grande de ces p premières fonctions.

Donc, tous ces ensembles seront contenus dans le suivant :

$$\lim_{p\to\infty} \mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m).$$

De plus, je dis que tout point de $E_{m'}(\eta_m)$ appartient à l'un au moins des ensembles

$$\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m), \quad \mathcal{E}'_{m',p+1}(\eta_m), \quad \dots.$$

En effet, un point appartient à $E'_{m'}(\eta_m)$ quand l'une au moins des inégalités de la forme

$$|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| < \eta_m \qquad (p > m')$$

n'est pas vérifiée. En d'autres termes, en tout point de $E'_{m'}(\eta_m)$, on a au moins une inégalité de la forme

$$|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| \geqq \eta_m.$$

Mais, par définition, on a

$$\varphi_{m',p} \geqq |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| \geqq \eta_m.$$

Donc ce point fera nécessairement partie d'un ensemble $\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)$. Donc

$$m_s[E'_{m'}(\eta_m)] \leqq m_s\left[\lim_{p=\infty} \mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)\right].$$

Tout revient donc à trouver une limite supérieure de cette dernière quantité.

Or, nous avons vu que

$$m_s[\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)] \leqq \frac{1}{\eta_m^2} \int\int_{D} \varphi_{m',p}^2 \, dx \, dy,$$

et, d'autre part, on a évidemment

$$\varphi_{m',p} \leqq |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}| + \varphi_{m',p-1}$$

puisque, par définition, $\varphi_{m',p}$ est toujours égale à l'un ou l'autre des termes du second membre. Il en résulte

$$\varphi_{m',p}^2 \leqq 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}|^2 + 2\varphi_{m',p-1}^2,$$

et comme $\varphi_{m',p-1}$ satisfait à une inégalité analogue, on arrive de proche en proche à l'inégalité

$$\varphi_{m',p}^2 \leqq 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}|^2 + 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p-1}|^2 + \ldots + 2|\varphi_{m'} - \varphi_{m'+1}|^2.$$

En se rappelant les inégalités du début

$$\int\int_{(D)} |\varphi_{m'} - \varphi_{m'+p}|^2 \, dx \, dy < \varepsilon_{m'+p}, \qquad \ldots,$$

on obtient

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \varphi_{m',p}^2 \, dx \, dy \leqq 2(\varepsilon_{m'+p} + \varepsilon_{m'+p-1} + \ldots + \varepsilon_{m'+1}),$$

et le second membre étant convergent pour la suite extraite qui nous occupe

$$m_s[\mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)] \leqq \frac{1}{\eta_m^2} \iint_{(\mathfrak{D})} \varphi_{m',p}^2 \, dx \, dy \leqq \frac{2}{\eta_m^2} \sum_{p=m'+1}^{p=\infty} \varepsilon_p,$$

et comme m' peut être choisi aussi grand qu'on le veut, on est assuré que

$$\omega_m = \frac{2}{\eta_m^2} \sum_{p=m'+1}^{p=\infty} \varepsilon_p$$

peut être rendu aussi petit que l'on veut et, en particulier, tel que la série

$$\Sigma \omega_m$$

converge.

D'après ce qui précède,

$$m_s[\mathrm{E}'(\eta_m)] \leqq m_s\left[\lim_{p=\infty} \mathcal{E}'_{m',p}(\eta_m)\right] \leqq \omega_m.$$

On obtiendrait de la même manière

$$m_s[\mathrm{E}'(\eta_p)] \leqq \omega_p \qquad (p > m)$$

qui définit l'ensemble où l'une au moins des inégalités

$$|\varphi_p - \varphi_n| < \eta_p \qquad (n > p)$$

n'est pas vérifiée. Finalement, nous sommes assurés de la convergence uniforme de nos fonctions φ_m en tout point n'appartenant pas à l'un des ensembles $\mathrm{E}'(\eta_m)$. Mais la somme des mesures de ces ensembles, à partir du rang p, est inférieure à

$$\sum_{m=p}^{m=\infty} \omega_m,$$

et cette dernière série étant convergente, cette somme peut être rendue aussi petite que l'on veut. Comme c'est une constante, elle est rigoureusement nulle.

Donc nos fonctions convergent uniformément en tout point du domaine $\mathfrak{D}$, sauf peut-être en un ensemble de points, de mesure nulle.

Dans cette démonstration, le choix des fonctions formant la suite extraite n'a été soumis qu'à la seule restriction que $\Sigma\varepsilon_m$ soit convergente. A cette seule condition, toutes les suites extraites tendront, dans le domaine indiqué, vers une fonction limite φ.

On voit immédiatement que cette fonction φ est de carré intégrable: à cause de la convergence uniforme, on a en effet

$$\int\int_{E_n} \varphi^2\, dx\, dy = \lim_{m=\infty} \int\int_{E_n} \varphi_m^2\, dx\, dy,$$

E_n désignant le domaine de convergence uniforme de φ_m. Comme de

$$|\varphi_m| < |\varphi_p - \varphi_m| + |\varphi_p| \qquad (p < m)$$

on tire

$$\begin{aligned}\int\int_{E_n} \varphi_m^2\, dx\, dy &\leqq 2\int\int_{E_n} (\varphi_p - \varphi_m)^2\, dx\, dy + 2\int\int_{E_n} \varphi_p^2\, dx\, dy \\ &\leqq 2\varepsilon_p + 2\int\int_{(\mathfrak{D})} \varphi_p^2\, dx\, dy,\end{aligned}$$

il vient

$$\int\int_{E_n} \varphi^2\, dx\, dy \leqq 2\varepsilon_p + 2\int\int_{(\mathfrak{D})} \varphi_p^2\, dx\, dy,$$

et comme la limite du premier membre n'est autre chose que

$$\int\int_{(\mathfrak{D})} \varphi^2\, dx\, dy,$$

φ^2 est bien intégrable.

Cette fonction φ est d'ailleurs unique. En partant de sa définition même

$$\varphi = \lim_{m=\infty} \varphi_m,$$

on peut écrire

$$\int\int_{E_n} (\varphi - \varphi_p)^2\, dx\, dy = \lim_{m=\infty} \int\int_{E_n} (\varphi_m - \varphi_p)^2\, dx\, dy,$$

et le second membre tendant vers zéro quand p augmente indéfiniment

$$\lim_{p=\infty} \iint_{(\mathfrak{D})} (\varphi - \varphi_p)^2\, dx\, dy = 0.$$

En prenant une autre fonction φ_q de la suite, on obtiendrait également

$$\lim_{q=\infty} \iint_{(\mathfrak{D})} (\varphi - \varphi_q)^2\, dx\, dy = 0,$$

puisque

$$|\varphi - \varphi_q| \leqq |\varphi - \varphi_p| + |\varphi_p - \varphi_q|,$$

et que

$$\lim_{p,q=\infty} \iint_{(\mathfrak{D})} |\varphi_p - \varphi_q|^2\, dx\, dy = 0.$$

Donc nos fonctions tendent presque partout vers une fonction unique.

Passons à la convergence des dérivées premières. Nous aurons encore ici

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \left[\frac{\partial(\varphi_m - \varphi_n)}{\partial x}\right]^2 dx\, dy < \varepsilon_m,$$

$$\iint_{(\mathfrak{D})} \left[\frac{\partial(\varphi_m - \varphi_n)}{\partial y}\right]^2 dx\, dy < \varepsilon_m,$$

puisque le coefficient h_1 a été supposé négatif. De plus, ε_m est le même que celui que nous avons rencontré dans l'étude de la convergence de φ_m. On pourra donc choisir la même suite de nombres positifs décroissants

$$\varepsilon_1,\quad \varepsilon_2,\quad \ldots,\quad \varepsilon_m,\quad \ldots$$

et tels que la série $\Sigma\varepsilon_i$ converge d'une manière identique à celle employée dans le cas de φ_m. Les suites extraites se correspondront donc entièrement, au point de vue des indices, dans les deux cas.

On démontrerait sans peine, par un raisonnement analogue à celui employé précédemment, que $\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}$ tendent uniformément en tout point du domaine, respectivement vers des fonctions uniques X, Y, sauf peut-être en des ensembles E'_x, E'_y de points, de mesure nulle.

Mais les fonctions X, Y ainsi obtenues sont-elles bien les dérivées de la fonction φ? La correspondance absolue des indices, et par conséquent des suites extraites, permet d'affirmer qu'en dérivant φ terme à terme, on retombera sur X et Y (formellement). Comme on est assuré de la convergence uniforme de φ, X, Y, sauf peut-être respectivement sur les ensembles E', E'_x, E'_y, on peut dire que X et Y seront bien les dérivées de φ, sauf peut-être en un ensemble de points

$$E' + E'_x + E'_y,$$

dont la mesure sera nulle.

En raisonnant comme précédemment, on démontrerait également l'unicité de chacune des deux fonctions limites X, Y et l'intégrabilité de leurs carrés.

Il reste à voir si les fonctions limites ainsi obtenues sont bien solution du problème.

8. *Existence de la solution fondamentale.* — Pour démontrer l'identité de nos fonctions limites et de la solution du problème proposé, il est nécessaire d'établir l'existence d'une certaine fonction que j'appellerai *solution fondamentale* de notre équation et que je définirai de la manière suivante :

En reprenant les notations du Chapitre II, écrivons l'équation des marées sous la forme

$$\Delta\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\varphi = f(x, y)$$

et posons

$$\mathcal{F}(\varphi) = \Delta\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\varphi.$$

Pour ne pas compliquer inutilement l'écriture, nous supposerons tous les coefficients de cette équation réels.

La solution fondamentale $H(x, y, \xi, \eta)$ sera définie par les deux conditions suivantes :

1° En tout point intérieur au domaine ω, sauf au point $(x, y) = (\xi, \eta)$, la fonction

$$H_1(x, y; \xi, \eta) = H(x, y; \xi, \eta) - \log\frac{1}{r}$$

vérifie l'équation

$$\mathcal{F}(H_1) = -\mathcal{F}\left(\log\frac{1}{r}\right).$$

2° Sur le contour, on a

$$\frac{\partial H}{\partial n} + C\frac{\partial H}{\partial s} = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} + C\frac{\partial H_1}{\partial s} = -\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} - C\frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s}.$$

Tout revient donc à calculer cette fonction H_1. Pour cela, il suffit de se rappeler les propriétés de la fonction de Green généralisée, étudiée au Chapitre II, et définie par les conditions :

1° $$G_1(x, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) - \log\frac{1}{r}$$

est harmonique à l'intérieur de $\mathfrak{D}$.

2° Sur le contour, on a

$$\frac{\partial G}{\partial n} + C\frac{\partial G}{\partial s} = 0.$$

Je dis que la fonction $H_1(x, y; \xi, \eta)$, définie par l'équation suivante, répond à la question

$$\begin{aligned}(33)\quad & H_1(x, y; \xi, \eta) \\ & = G_1(x, y; \xi, \eta) \\ & \quad - \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{D}}\left\{a'\frac{\partial H'_1}{\partial \lambda} + b'\frac{\partial H'_1}{\partial \mu} + c'H'_1 + \mathfrak{F}\left[\log\frac{1}{r(\lambda, \mu; \xi, \eta)}\right]\right\} \\ & \quad \times G(x, y; \lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu,\end{aligned}$$

où, dans les termes accentués, x, y doivent être remplacés par λ, μ. Le point $(\lambda, \mu) = (\xi, \eta)$ ayant été exclu précédemment, dans le terme tout connu

$$\iint \mathfrak{F}\left[\log\frac{1}{r(\lambda, \mu; \xi, \eta)}\right] G(x, y; \lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu,$$

l'intégrale sera étendue au domaine $\mathfrak{D}$ à l'exclusion d'un petit cercle entourant le point $(\lambda, \mu) = (\xi, \eta)$, et dont on fera ensuite évanouir le rayon.

On voit immédiatement, en vertu de l'équation de Poisson et de la relation $\Delta G_1 = 0$, que, sauf au point $(x, y) = (\xi, \eta)$,

$$\Delta H_1 = -a\frac{\partial H_1}{\partial x} - b\frac{\partial H_1}{\partial y} - cH_1 - \mathfrak{F}\left[\log\frac{1}{r(x, y; \xi, \eta)}\right],$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}(H_1) = -\mathcal{F}\left(\log\frac{1}{r}\right).$$

Enfin, à cause de l'équation (33) et de

$$\frac{\partial G}{\partial n} + C\frac{\partial G}{\partial s} = 0,$$

au bord, on aura

$$\frac{\partial H_1}{\partial n} + C\frac{\partial H_1}{\partial s} = \frac{\partial G_1}{\partial n} + C\frac{\partial G_1}{\partial s} = -\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial n} - C\frac{\partial \log\frac{1}{r}}{\partial s}.$$

Donc

$$H = H_1 + \log\frac{1}{r}$$

répond bien à la question.

L'équation (33) n'a pas tout à fait la forme de celle de Fredholm, mais nous avons vu qu'il était facile de l'y ramener en intégrant par parties les termes de l'intégrale contenant les dérivées premières de la fonction. Il suffit donc d'appliquer ici les raisonnements faits plus haut pour arriver au résultat cherché.

9. *La fonction limite et la solution du problème.* — On sait que, pour répondre à cette question, il existe plusieurs méthodes :

1° Celle fondée sur l'emploi du lemme de M. Hilbert revient essentiellement à intégrer la fonction obtenue pour permettre ensuite le passage à la limite. Elle a été employée par Ritz dans tous ses travaux, mais ne semble pas applicable à notre problème à cause de la dissymétrie de notre fonction de Green.

2° Celle qui consiste à remplacer la valeur de la fonction en un point par ses valeurs le long d'un contour. Elle a été appliquée, sous des formes diverses, au problème de Dirichlet, par MM. Lebesgue (¹), Fubini (²), etc.

Comme dans la méthode précédente, le passage à la limite est encore obtenu grâce à une intégration.

Nous essaierons d'appliquer à notre problème une méthode ana-

---

(¹) *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, 1907.

(²) *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, 1906 et 1907.

logue à celle de M. Fubini. Rappelons brièvement le principe de cette méthode dans le cas du problème de Dirichlet.

Soient $U(x,y)$ une fonction harmonique à l'intérieur d'un domaine $\mathfrak{D}$, et γ un cercle situé tout entier à l'intérieur. Soient enfin (x, y) un point situé sur la circonférence de γ, (a, b) un point situé à l'intérieur de $\mathfrak{D}$, r leur distance. On sait que l'expression

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\gamma\left(U\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds$$

représente $U(a, b)$ si le point (a, b) est intérieur au cercle γ. Elle est nulle s'il lui est extérieur.

Soit maintenant une suite

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_m,\quad \ldots,$$

minimisante pour l'intégrale de Riemann

$$\int\int_{\mathfrak{D}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

M. Fubini recherche pour ces fonctions minimisantes une propriété analogue à celle de la fonction harmonique, et il établit le théorème suivant :

En tout point intérieur au domaine $\mathfrak{D}$, *la fonction*

$$u = -\frac{1}{2\pi}\lim_{m\infty}\int_\gamma\left(u_m\frac{\partial \log r}{\partial n} - \log r\frac{\partial u_m}{\partial n}\right)ds$$

existe. Elle est nulle si (a, b) *est extérieur à* γ; *elle est indépendante de* γ *et ne dépend que de* (a, b) *si* (a, b) *est intérieur à* γ.

Cette propriété permet d'affirmer, en balayant tout le domaine avec le cercle γ, que u est harmonique et représente la fonction $\lim_{m\infty} u_m$ partout où elle existe.

Pour appliquer cette méthode au problème des marées, il faut commencer par généraliser la formule de Green (¹). Ici, l'intégrale de Poincaré jouera le même rôle que l'intégrale de Riemann dans le cas du problème de Dirichlet.

(¹) F. JAGER, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 27 avril 1914.

Nous suivrons une méthode analogue à celle que l'on emploie pour établir la formule de Green classique, et pour cela nous partirons de l'intégrale suivante :

$$(34)\quad \mathrm{I}=\iint_{(\mathfrak{D})}\left\{\frac{\eta-h_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\chi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\chi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\chi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\chi_2}{\partial y}\right)\right.$$
$$-\frac{\eta}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial x}-\frac{\partial\chi_2}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\chi_1}{\partial y}+\frac{\partial\chi_2}{\partial x}\right)\right]-\frac{\lambda^2}{2gk^2}(\varphi_1\chi_1+\varphi_2\chi_2)\right\}dx\,dy,$$

qui, en y faisant $\chi_1=\varphi_1$, $\chi_2=\varphi_2$, reproduit, aux termes tout connus près, l'intégrale de Poincaré. En d'autres termes, elle jouera ici le rôle de

$$\iint_{(\mathfrak{D})}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy$$

pour l'intégrale de Riemann.

Récrivons nos équations (27) du début et, pour abréger, désignons respectivement par $\mathcal{F}_1(\quad)$ et par $\mathcal{F}_2(\quad)$ chacun de leurs premiers membres.

De l'intégrale I on déduira alors, au moyen d'intégrations par parties (il est inutile de donner le détail du calcul puisqu'on se borne aux opérations inverses de celles qu'on a faites pour obtenir l'intégrale de Poincaré),

$$\mathrm{I}=\iint_{(\mathfrak{D})}\varphi_1\mathcal{F}_1(\chi_1)+\varphi_2\mathcal{F}_2(\chi_2)\,dx\,dy+\int_{\mathrm{C}}\varphi_1\left(h_1\frac{\partial\chi_1}{\partial n}ds-\eta\,d\chi_2\right)$$
$$+\int_{\mathrm{C}}\varphi_2\left(h_1\frac{\partial\chi_2}{\partial n}ds+\eta\,d\chi_1\right),$$

et comme l'intégrale I du premier membre ne change pas quand on permute (φ_1, φ_2), (χ_1, χ_2), on a

$$(35)\quad \iint_{(\mathfrak{D})}[\varphi_1\mathcal{F}_1(\chi_1)-\chi_1\mathcal{F}_1(\varphi_1)+\varphi_2\mathcal{F}_2(\chi_2)-\chi_2\mathcal{F}_2(\varphi_2)]\,dx\,dy$$
$$=\int_{\mathrm{C}}-h_1\left(\varphi_1\frac{\partial\chi_1}{\partial n}-\chi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}+\varphi_2\frac{\partial\chi_2}{\partial n}-\chi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)ds$$
$$+\int_{\mathrm{C}}\eta\,(\varphi_1\,d\chi_2-\chi_1\,d\varphi_2-\varphi_2\,d\chi_1+\chi_2\,d\varphi_1).$$

Enfin, soient $\varphi_1 + i\varphi_2$ une solution des équations associées, G_1 et G_2 des solutions fondamentales, on aura, en entourant le point (ξ, η) d'un petit cercle dont on fait tendre ensuite le rayon vers zéro,

$$(36)\quad [h_1(\varphi_1+\varphi_2)]_{\xi,\eta} = -\frac{1}{2\pi}\int_C h_1\left(\varphi_1\frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \varphi_2\frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right)ds$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_C \eta(\varphi_1\, dG_2 - G_1\, d\varphi_2 - \varphi_2\, dG_1 + G_2\, d\varphi_1)$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{D})}(G_1 f_1 + G_2 f_2)\,dx\,dy,$$

en désignant par $-f_1$ et $-f_2$ les seconds membres des équations proposées. Pour $h = 1$, $\eta = 0$, nos équations se réduisant à celle de Laplace, on retombe sur la formule de Green ordinaire.

Si nous assujettissons les fonctions φ à satisfaire aux conditions aux limites du problème, les fonctions G prenant d'ailleurs des valeurs quelconques le long du contour, on obtient

$$[h_1(\varphi_1+\varphi_2)]_{\xi,\eta} = -\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G_1}{\partial s}\right)\right]ds$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_{(\mathfrak{D})}(f_1 G_1 + f_2 G_2)\,dx\,dy.$$

Telle est l'expression qui sera vérifiée pour toutes les fonctions associées φ_1 et φ_2, solutions du problème, pourvu que (ξ, η) soit intérieur au contour.

Cherchons une propriété analogue pour nos fonctions minimisantes et montrons que, pour de telles fonctions, l'expression suivante, où γ désigne un cercle quelconque intérieur à $\mathfrak{D}$,

$$-\frac{1}{2\pi}\lim_{m\,\infty}\int_\gamma\left[\varphi_{1,m}\left(h_1\frac{\partial G_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G_2}{\partial s}\right) + \varphi_{2,m}\left(h_1\frac{\partial G_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G_1}{\partial s}\right)\right]ds$$
$$+\frac{1}{2\pi}\iint_\gamma(f_1 G_1 + f_2 G_2)\,dx\,dy$$

est constante si le point ξ, η est extérieur au cercle γ; et qu'elle ne dépend pas de γ, mais seulement du point (ξ, η), si (ξ, η) lui est intérieur.

Pour cela, nous partirons de l'intégrale suivante :

$$(37)\quad \iint_{(\mathfrak{D})}\left[-h_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\chi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\chi_2}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\chi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\chi_2}{\partial y}\right)\right.$$
$$\left.+\eta\frac{\partial(\chi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)}-\eta\frac{\partial(\chi_2,\varphi_1)}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2}{gk^2}(\varphi_1\chi_1+\varphi_2\chi_2)+f_1\chi_1+f_2\chi_2\right]dx\,dy.$$

Je dis que cette intégrale est nulle si φ_1 et φ_2 représentent des fonctions associées minimisantes pour l'intégrale de Poincaré et si χ_1 et χ_2 sont des fonctions assujetties uniquement à satisfaire aux conditions aux limites du problème.

Pour le voir, il suffit de se rappeler que nous avons obtenu précédemment les deux relations

$$\iint_{(\mathfrak{D})}\left\{-h_1\left[\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial x}\frac{\partial\zeta_{1,m}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{1,m}}{\partial y}\frac{\partial\zeta_{1,m}}{\partial y}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\eta\frac{\partial(\zeta_{1,m},\varphi_{2,m})}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{1,m}\zeta_{1,m}+f_1\zeta_{1,m}\right]\right\}dx\,dy=0,$$

$$\iint_{(\mathfrak{D})}\left\{-h_1\left[\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial x}\frac{\partial\zeta_{2,m}}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_{2,m}}{\partial y}\frac{\partial\zeta_{2,m}}{\partial y}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\eta\frac{\partial(\varphi_{1,m},\zeta_{2,m})}{\partial(x,y)}-\frac{\lambda^2}{gk^2}\varphi_{2,m}\zeta_{2,m}+f_2\zeta_{2,m}\right]\right\}dx\,dy=0,$$

où $\varphi_{1,m}$, $\varphi_{2,m}$ sont des fonctions minimisantes pour l'intégrale de Poincaré et $\zeta_{1,m}$, $\zeta_{2,m}$ des fonctions assujetties uniquement à satisfaire aux conditions aux limites du problème, et pouvant représenter une fonction quelconque pour m croissant indéfiniment. Donc, à la limite, en désignant respectivement par φ_1 et φ_2 les limites, pour m infini, de $\varphi_{1,m}$ et $\varphi_{2,m}$, aux points où elles existent, et en désignant par χ_1, χ_2 des fonctions quelconques satisfaisant aux conditions aux limites du problème, l'intégrale (37) sera nulle. Pour abréger, nous l'écrirons

$$J(\varphi_1,\varphi_2;\chi_1,\chi_2)=0.$$

Pour d'autres fonctions χ_1^*, χ_2^*, assujetties aux mêmes conditions aux limites, nous aurions également

$$J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1^*, \chi_2^*) = 0.$$

Donc

$$J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1, \chi_2) = J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1^*, \chi_2^*).$$

Ceci posé, considérons deux cercles C′ et C″ intérieurs au domaine $\mathfrak{D}$ et contenant tous deux le point (ξ, η). J'appellerai, en séparant les parties réelles et imaginaires : $G(x, y, \xi, \eta)$, la fonction fondamentale assujettie à vérifier sur la frontière de $\mathfrak{D}$ les conditions aux limites du problème;

$$G'(x, y; \xi, \eta) = G_1' + iG_2'; \qquad G''(x, y; \xi, \eta) = G_1'' + iG_2''$$

deux autres fonctions fondamentales, définies respectivement à l'intérieur des cercles C′ et C″ et assujetties d'ailleurs à des conditions aux limites quelconques.

Les fonctions $\chi_1, \chi_2, \chi_1^*, \chi_2^*$ étant assujetties à la seule condition de satisfaire aux conditions aux limites du problème le long du contour C du domaine $\mathfrak{D}$, nous pouvons les définir de la façon suivante :

$\chi_1 = G_1' - G_1$	à l'intérieur de	C′;	$\chi_1 = -G_1$	dans le domaine	$\mathfrak{D} - C'$;
$\chi_2 = G_2' - G_2$	»	C′;	$\chi_2 = -G_2$	»	$\mathfrak{D} - C'$;
$\chi_1^* = G_1'' - G_1$	»	C″;	$\chi_1^* = -G_1$	»	$\mathfrak{D} - C''$;
$\chi_2^* = G_2'' - G_2$	»	C″;	$\chi_2^* = -G_2$	»	$\mathfrak{D} - C''$.

Les quatre fonctions ainsi définies n'ont plus aucun point singulier à l'intérieur de $\mathfrak{D}$. En effet, le seul point singulier des trois fonctions G, G′, G″ est le point logarithmique $(x, y) = (\xi, \eta)$.

Comme nous avons supposé ce point (ξ, η) intérieur à la fois au cercle C′ et au cercle C″, les différences $G_1' - G_1$, $G_2' - G_2$, ... n'auront plus aucune singularité en ce point et les fonctions G_1 et G_2 seront régulières en tout point extérieur à C′ et C″.

De plus les fonctions G, G′, G″ sont par hypothèse des solutions particulières de nos équations générales sans second membre, sauf au point $(x, y) = (\xi, \eta)$: il en sera de même des fonctions $\chi_1, \chi_2, \chi_1^*, \chi_2^*$, mais le point (ξ, η) ne jouera plus ici aucun rôle.

Ces remarques faites, revenons à notre égalité

$$J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1, \chi_2) = J(\varphi_1, \varphi_2; \chi_1^*, \chi_2^*)$$

et intégrons par parties de manière à mettre en facteur, dans chaque membre, les fonctions φ_1 et φ_2. En appelant comme précédemment $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les premiers membres de nos équations générales, et en remplaçant les χ par les valeurs que nous venons de définir, le premier membre de notre égalité deviendra

$$\begin{aligned}
&\iint_{C'} [\varphi_1 \mathcal{F}_1(G'_1 - G_1) + \varphi_2 \mathcal{F}_2(G'_2 - G_2) - f_1(G'_1 - G_1) - f_2(G'_2 - G_2)]\, dx\, dy \\
&+ \int_{(A)-C'} [\varphi_1 \mathcal{F}_1(-G_1) + \varphi_2 \mathcal{F}_2(-G_2) - f_1 G_1 - f_2 G_2]\, dx\, dy \\
&+ \int_{C'} \left\{ \varphi_1 \left[h_1 \frac{\partial(G'_1 - G_1)}{\partial n} ds - \eta\, d(G'_2 - G_2) \right] + \varphi_2 \left[h_1 \frac{\partial(G'_2 - G_2)}{\partial n} ds + \eta\, d(G'_1 - G_1) \right] \right\} \\
&- \int_{C'} \left\{ \varphi_1 \left[h_1 \frac{\partial(-G_1)}{\partial n} ds - \eta\, d(-G_2) \right] + \varphi_2 \left[h_1 \frac{\partial(-G_2)}{\partial n} ds + \eta\, d(-G_1) \right] \right\} \\
&+ \int_{C} \left\{ \varphi_1 \left[h_1 \frac{\partial(-G_1)}{\partial n} ds - \eta\, d(-G_2) \right] + \varphi_2 \left[h_1 \frac{\partial(-G_2)}{\partial n} ds + \eta\, d(-G_1) \right] \right\}
\end{aligned}$$

et le second membre s'obtiendra en y changeant G′ en G″, C′ en C″.

On aperçoit immédiatement les simplifications :

1° Il ne reste dans les intégrales doubles que les termes indépendants de φ_1 et φ_2, puisque G, G′, G″ sont solutions de nos équations sans second membre;

2° La deuxième intégrale de ligne se retranche de la première;

3° Les termes indépendants de G′, G″, C′ et C″ se détruisent dans les deux membres.

Pour que nos intégrales de ligne aient un sens, il faut évidemment supposer que les deux circonférences considérées C′ et C″ ne font pas partie de l'ensemble de points en lesquels nos fonctions φ_1 et φ_2 n'ont pas été définies.

Avec cette restriction, nous arrivons finalement à la relation suivante :

$$-\iint_{C'}(f_1 G'_1 + f_2 G'_2)\,dx\,dy - \int_{C'}\left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G'_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G'_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G'_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G'_1}{\partial s}\right)\right] ds$$

$$= \iint_{C''}(f_1 G''_1 + f_2 G''_2)\,dx\,dy - \int_{C''}\left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G''_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G''_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G''_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G''_1}{\partial s}\right)\right] ds.$$

Donc l'expression

$$-\iint_{C'}(f_1 G'_1 + f_2 G'_2)\,dx\,dy - \int_{C'}\left[\varphi_1\left(h_1\frac{\partial G'_1}{\partial n} - \eta\frac{\partial G'_2}{\partial s}\right) + \varphi_2\left(h_1\frac{\partial G'_2}{\partial n} + \eta\frac{\partial G'_1}{\partial s}\right)\right] ds$$

est indépendante du cercle C' et ne dépend que de la position du point ξ, η par rapport à C'.

Si (ξ, η) est intérieur à C' et ne fait pas partie d'un certain ensemble, de mesure superficielle nulle, précédemment défini, l'expression précédente tend vers la valeur de

$$2\pi[h_1(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

au point (ξ, η) comme on le voit immédiatement en entourant le point (ξ, η) d'un petit cercle dont on fait tendre le rayon vers zéro, suivant la méthode déjà employée.

Donc nos fonctions minimisantes satisfont en général à la même relation que la solution même du problème : il ne peut y avoir exception que le long de circonférences formant au plus un ensemble de mesure superficielle nulle.

Conclusion. — Après ce très bref exposé de la théorie, qui suffit à faire entrevoir la complexité du problème que nous nous sommes posé, on est en droit de se demander si le calcul peut aboutir à des résultats pratiques intéressants. En d'autres termes, les méthodes que nous avons employées permettront-elles de retrouver des cas particuliers déjà connus? La méthode de Fredholm semble devoir conduire à des calculs presque inextricables; et la méthode de Ritz, dans le cas général, présente de grosses difficultés pratiques, si l'on veut rester rigoureux, mais pourrait se simplifier notablement dans bien des cas particuliers.

Enfin, on dira peut-être que toutes ces théories excluent le seul cas pratique intéressant : le cas de résonance. Cette objection n'est pas valable, car, dans la nature, le frottement n'est jamais nul; et s'il y a frottement, l'oscillation propre sera nécessairement amortie : sa période λ comprendra donc une partie réelle qui ne pourra jamais devenir égale à la période essentiellement imaginaire de la force perturbatrice considérée.