

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

J.-A. DE SÉGUIER

**Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique  
dans un champ de Galois**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 7<sup>e</sup> série*, tome 2 (1916), p. 281-366.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1916\\_7\\_2\\_281\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1916_7_2_281_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique  
dans un champ de Galois ;*

PAR J.-A. DE SÉGUIER.

La théorie des groupes linéaires à invariant quadratique dans un champ galoisien est notablement simplifiée quand on prend cet invariant sous la forme d'une somme de rectangles augmentée d'une forme quadratique à une ou deux variables. Il en est de même de la théorie du groupe linéaire à invariant hermitien quand on prend cet invariant sous une forme analytique qui sera précisée plus loin. De plus, les deux théories et celle du groupe linéaire à invariant bilinéaire gauche se présentent alors avec un parallélisme qui est un nouvel élément de simplification et qui facilite l'étude des relations entre les trois groupes.

C'est l'exposition de cette triple théorie ainsi simplifiée que je reprends ici, en y ajoutant des résultats nouveaux. Une partie de ces résultats a été indiquée dans trois Notes présentées à l'Académie des Sciences (1). Je me borne ici au développement de la première.

L'idée de prendre l'invariant quadratique sous la forme indiquée, quel que soit le module, appartient à M. Jordan, qui a déjà employé cette forme dans ses dernières recherches sur les groupes résolubles (2), en particulier pour déterminer l'ordre du groupe et ses générateurs dans le cas d'un champ d'ordre premier. Je n'aurai donc, sur ces deux

---

(1) *Comptes rendus*, t. 157, 1<sup>er</sup> septembre 1913, p. 430; t. 161, 8 novembre 1915, p. 553; t. 161, 29 novembre 1915, p. 670.

(2) *Memorie della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei*, t. XXVI (1908) et Cours professé au Collège de France en 1903.

points, qu'à suivre son exposé. Je prendrai toutefois l'invariant sous une forme un peu plus générale, afin d'avoir toujours les mêmes générateurs quelle que soit la parité du module et du nombre des variables.

Il est à peine utile de rappeler que le sujet qui m'occupe a été étudié d'abord par M. Jordan, dans son *Traité des substitutions*, puis par M. Dickson, dans ses *Linear groups* (1901). Pour des renvois plus précis, je me suis borné à certains points particuliers que le lecteur aurait eu quelque peine à retrouver.

### I. — Généralités.

1. Soient  $\mathfrak{E}$  un champ fini d'ordre  $\pi = p^k$  ( $p$  premier);  $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}(\nu)$  le champ d'ordre  $\pi^2$  défini par la racine  $\nu$  d'une équation quadratique irréductible dans  $\mathfrak{E}$  <sup>(1)</sup>;  $a = (a_{ik})$  une matrice invertible d'ordre  $n$  de  $\mathfrak{E}$  ou de  $\mathfrak{E}'$ . Je désignerai en général par  $\dot{x}$  la matrice (d'ordre  $\geq 1$ ) conjuguée de  $x$  relativement à  $\mathfrak{E}$ ,  $\nu$ ,  $\nu^\pi (= \dot{\nu})$ , et j'appellerai *réelles* les matrices dont les éléments sont dans  $\mathfrak{E}$ .

Considérons le groupe des matrices  $\alpha = (\alpha_{ik})$  de  $\mathfrak{E}$  d'ordre  $n$  telles que  $\alpha a \bar{\alpha} = fa$ ,  $f$  désignant un facteur indéterminé ( $\bar{\alpha}$  est la transposée de  $\alpha$ ), et celui des matrices  $\alpha$  de  $\mathfrak{E}'$  telles que  $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$ . On peut assimiler  $a$  à une forme linéaire  $\sum a_{ik} x_i y_k$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ) [qui sera dite *forme des deux points*  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(y_1, \dots, y_n)$ ] et  $\alpha$  à une substitution. La condition  $\alpha a \bar{\alpha} = fa$  donne, en regardant les  $y$  comme cogrédients aux  $x$ ,

$$(1) \quad \sum_{ijk} a_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} x_j y_l = f \sum_{jl} a_{jl} x_j y_l \quad \text{ou} \quad \sum_{ik} a_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kl} = f a_{jl},$$

et la condition  $\dot{\alpha} a \bar{\alpha} = fa$ , en regardant les  $y$  comme subissant la substitution  $\dot{\alpha}$  quand les  $x$  subissent la substitution  $\alpha$  (on peut alors

---

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, mes *Éléments de la Théorie des groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1904), n° 27. Je me servirai, dans ce qui suit, des termes et notations adoptés dans ces *Éléments* et dans mes *Éléments de la Théorie des groupes de substitutions* (Gauthier-Villars, 1912), où l'on trouve une Table de ces termes et notations. Je renverrai au premier Ouvrage par la lettre *E* et au second par la lettre *S*.

identifier  $y_k$  à  $x_k$ ),

$$(2) \quad \sum a_{ik} a_{ij} \bar{a}_{kl} = f a_{jl}.$$

En assimilant chaque colonne de  $\alpha$  à un point, on peut dire que la forme  $a$  de deux colonnes quelconques (distinctes ou non) de  $\alpha$  doit être égale à ce qu'elle devient quand on remplace  $\alpha$  par une similitude arbitraire.

Je me bornerai, si  $\alpha \bar{\alpha} = f a$ , au cas où  $\bar{a} = \pm a$ ,  $a$  étant dans  $\mathfrak{O}$ , et si  $\alpha \bar{\alpha} = f a$ , au cas où  $\bar{a} = \pm \dot{a}$ ; alors  $f$  est réel, car en comparant les transposées et les conjuguées des deux membres de  $\alpha \bar{\alpha} = f a$ , on obtient  $f \bar{a} = f \dot{a}$ .  $a$  est dite *symétrique* si  $\bar{a} = a$ , *alternée* ou *gauche* si  $\bar{a} = -a$ , les  $a_{ii}$  étant nuls (<sup>1</sup>), *hermitienne* si  $\bar{a} = \dot{a}$ . Si  $\bar{a} = -\dot{a}$ ,  $(\nu - \dot{\nu})a$  est évidemment hermitienne.

Si  $\alpha \bar{\alpha} = a$  et  $\bar{a} = a$ , on peut encore assimiler  $a$  à une forme quadratique pour  $p \neq 2$ . Pour  $p = 2$ , on ne le peut pas; mais il existe toujours un groupe de substitutions multipliant par  $f$  une forme quadratique  $\sum a_{ik} x_i x_k$  ( $i \leq k$ ) que j'appellerai encore  $a$ .

Considérons, pour  $p \geq 2$ , la forme quadratique  $a = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k$  ( $i \leq k$ ). Les conditions imposées aux coefficients  $a_{ik}$  de la substitution  $\alpha$  qui multiplie  $a$  par  $f$  prennent la forme, un peu différente,

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{ik} a_{ik} (\alpha_{ij} \alpha_{kl} + \alpha_{il} \alpha_{kj}) = f a_{jl} & (i \leq l; j \neq l), \\ \sum_{ik} a_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kj} = f a_{jj} & (i \leq k). \end{cases}$$

En disant que  $a$  est la forme  $a = a(x_1, \dots, x_n)$  du point  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $a' = a'(x_1, \dots, x_n; x'_1, \dots, x'_n) = \sum_{ik} a_{ik} (x_i x'_k + x_k x'_i)$  ( $i \leq k$ ) la *polaire de  $a$  relativement aux deux points*  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $(x'_1, \dots, x'_n)$  et en assimilant toujours chaque colonne de  $\alpha$  à un point, (3) exprime que la forme  $a$  d'une colonne quelconque de  $\alpha$  et la polaire de  $a$  relative à deux colonnes de  $\alpha$  sont égales à ce qu'elles deviennent quand  $\alpha$  est remplacée par une similitude.

Les groupes considérés peuvent se réunir sous la notion de *groupe total de  $a$* , en réservant le nom de *groupe de  $a$*  au groupe des  $\alpha$  pour lesquelles  $f = 1$ . Le groupe de  $a$  sera désigné par  $A(n, \pi, a) = A(n, \pi)$ ,

(<sup>1</sup>) Cette seconde condition ne résulte pas de la première si  $p = 2$ .

le groupe total de  $a$  par  $A'(n, \pi, a) = A'(n, \pi)$  <sup>(1)</sup>, et le diviseur de  $A$  formé des substitutions de déterminant 1 par

$$A^0(n, \pi, a) = A^0(n, \pi) (\subseteq A),$$

sauf, à partir du n° 34, pour  $p = 2$ .  $A$  et  $A^0$  sont évidemment normaux dans  $A'$ .

Les groupes déduits de  $A^0$ ,  $A$  et  $A'$  en y regardant les variables comme homogènes seront désignés respectivement par  $\mathfrak{A}^0(n, \pi, a) = \mathfrak{A}^0(n, \pi)$ ,  $\mathfrak{A}(n, \pi, a) = \mathfrak{A}(n, \pi)$  et  $\mathfrak{A}'(n, \pi, a) = \mathfrak{A}'(n, \pi)$ .  $\mathfrak{A}^0$  et  $\mathfrak{A}$  sont encore normaux dans  $\mathfrak{A}'$ .  $\mathfrak{A}$  sera dit *groupe homogène de  $a$* , et  $\mathfrak{A}'$  *groupe homogène total de  $a$* . Les conditions que vérifient les coefficients de la matrice générale de  $\mathfrak{A}$  ou  $\mathfrak{A}'$  se déduisent des conditions analogues pour  $A$  et  $A'$  en multipliant les seconds membres par  $\varphi^2$ ,  $\varphi$  étant indéterminé dans  $\mathfrak{A}$  (mais  $\neq 0$ ) si  $\alpha a \bar{\alpha} = fa$ , et par  $\varphi$  si  $\alpha a \bar{\alpha} = fa$  : mais on ne considérera pas comme distinctes les matrices dont les coefficients sont proportionnels. Lorsque aucune confusion ne sera à craindre, je me servirai des mêmes lettres pour désigner les substitutions de  $A'$  et leurs actions sur les mêmes variables regardées comme homogènes.

Je désignerai par  $[\mu]_a = [\mu]$ , ou simplement par  $\mu$  quand aucune confusion ne sera à craindre, la similitude de multiplicateur  $\mu$  opérant sur les variables  $x_1, \dots, x_n$  de  $a$ , par  $\iota$  et  $\iota'$  des éléments primitifs de  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{A}'$  respectivement, et je poserai  $[-1]_a = d(n) = d$ ,  $|d(n)| = D(n) = D$ ,  $[\iota]_a = I$ ,  $[\iota']_a = I'$ ,  $[\iota'^{\pi-1}]_a = J$ , d'où  $IJ = [\iota'^2]_a$ ;  $I^0$  sera le diviseur de  $I$  dont l'ordre est le p. g. c. d.  $\pi_0$  de  $n, \pi - 1$ ;  $J^0$  celui de  $J$  dont l'ordre est le p. g. c. d.  $\pi_1$  de  $n, \pi + 1$  <sup>(2)</sup>.

Il sera commode de conserver les notations générales précédentes

(1) Si l'on a à considérer d'autres variables que celles de  $a$ , il peut y avoir d'autres substitutions que celles de  $A'$  conservant  $a$  à un facteur près, par exemple celles qui agissent sur les seules variables étrangères à  $a$ . Mais il restera entendu que, par définition,  $A$  et  $A'$  laissent inaltérées les variables qui ne figurent pas dans  $a$ .

(2) Soient  $2^{n'}$  et  $2^{\pi'}$  les plus hautes puissances de 2 divisant  $n$  et  $\pi^2 - 1$  respectivement. Le p. g. c. d. de  $n, \pi^2 - 1$  est égal à  $2\pi_1$  si  $0 < n' < \pi'$ , à  $\pi_1$  dans tous les autres cas.

concurrément avec les notations particulières qui vont être introduites pour des variables spéciales de  $a$ .

II. — Groupe hermitien.

2. Soit d'abord  $\bar{a} = \pm \dot{a}$  et  $\dot{a}a\bar{x} = fa$ ; alors  $|\alpha\dot{\alpha}| = |\alpha|^{\pi+1} = f^n$ , et  $A$  et  $A'$  contiennent la conjuguée de chacune de leurs substitutions. Supposons  $a$  ou  $(\nu - \dot{\nu})a$  réduite à l'une des deux formes cano- niques (1)

$$h = \sum_1^{\nu} (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) + \omega \eta x_0 \dot{x}_0 \quad (\omega = \nu - \dot{\nu}; \eta = 0 \text{ ou } 1). \quad \varepsilon = \sum_1^{\nu} z_i \dot{z}_i.$$

En posant  $x_j = \xi_j + \nu \xi'_j, y_j = \eta_j - \nu \eta'_j$  ( $j = 0, \dots, \nu$ ),  $\xi_j, \xi'_j, \eta_j, \eta'_j$  étant réels, et  $\nu + \dot{\nu} = -b, \nu \dot{\nu} = c$ , on a

$$h = \sum_1^{\nu} (\xi_i \eta'_i + \xi'_i \eta_i) + \omega \eta (\xi_0^2 - b \xi_0 \xi'_0 + c \xi_0'^2).$$

Donc le type de  $a$  considérée comme forme quadratique des parties réelles et imaginaires de ses variables est complètement déterminé par  $n$  ( $E.$ , 44, 45) (2).

(1) On opère cette réduction comme celle des matrices symétriques ou alter- nées ( $E.$ , 192, 195, 201, 202;  $S.$ , p. 7 et 225), au moyen d'additions, de multi- plications, d'échanges de colonnes dans  $a$  (ou  $\omega a$ ), chaque opération étant suivie de l'opération conjuguée (ou conjuguée avec changement de signe) sur les lignes.

Pour qu'un changement de variables  $x = \alpha x', y = \alpha' x' + \beta' y'$  ramène  $\omega(x\dot{y} - y\dot{x})$  à  $a x' \dot{x}' + b y' \dot{y}'$  ( $a, b$ , réels), il faut et suffit que l'on ait

$$\alpha = \alpha q, \quad \beta' = \beta \dot{q}, \quad \omega \alpha \dot{\alpha} = -a(q - \dot{q})^{-1}, \quad \omega \beta \dot{\beta} = b(q - \dot{q})^{-1},$$

$q$  étant dans  $\mathcal{D}'$  hors de  $\mathcal{D}$  [le déterminant du changement de variables est  $\alpha \beta (\dot{q} - q)$ ]. Le choix de  $q$  peut se faire de  $\pi^2 - \pi$  manières, et chacun des coefficients  $\alpha, \beta$  a alors  $\pi + 1$  déterminations ( $p \geq 2$ ) ( $E.$ , 44, 45).

(2) On peut aussi le voir en partant de  $\varepsilon$ . Soit  $z_i = \zeta_i + \nu \zeta'_i, \zeta_i$  et  $\zeta'_i$  étant réels. Si  $p > 2$ , le discriminant de  $\varepsilon = \sum (\zeta_i^2 - b \zeta_i \zeta'_i + c \zeta_i'^2)$  est  $(4c - b^2)^n$  dont le caractère quadratique est déterminé par  $n$  ( $b^2 - 4c$  est non carré). Si  $p = 2$ , en remplaçant  $\zeta_i$  par  $\zeta_i + \zeta_k$  et  $\zeta'_k$  par  $\zeta'_k + \zeta'_i$ , on fait disparaître les termes  $\zeta_i^2$  et  $c \zeta_i'^2$ ; en prenant alors  $\zeta_i - b \zeta'_i$  pour  $\zeta'_i$  et  $-b \zeta_k + c \zeta'_k$  pour  $\zeta'_k$ , on fait dispa- raitre  $\zeta_i^2$  et  $c \zeta_k'^2$ . De là, pour  $p \geq 2$ , le même résultat qu'au texte ( $E.$ , 44, 45).

Pour  $a = h$  ou  $a = \epsilon$ ,  $A$  sera dit *groupe hermitien  $n$ -aire de  $\mathcal{E}$* , et  $\mathcal{A}$  *groupe hermitien homogène ou fractionnaire  $n$ -aire de  $\mathcal{E}$* . Je préciserai les formes correspondantes de  $A, \mathcal{A}, A^0, \mathcal{A}^0, A', \mathcal{A}'$  en remplaçant partout les lettres  $A, \mathcal{A}$  par  $H, \mathcal{H}$  si  $a = h$ , par  $E, \mathcal{E}$  si  $a = \epsilon$ .

Il est clair que, si  $\beta$  est primitif dans  $\mathcal{E}'$  donc  $\beta^{\pi+1}$  dans  $\mathcal{E}$ ,  $A' = \sum_0^{\pi-2} A \beta^k = AI'$ ; le complexe  $A \beta^k$  est formé des substitutions qui multiplie  $a$  par  $\beta^{k(\pi+1)}$ . De même, si  $\gamma$  est la substitution de  $H'$  qui multiplie chaque  $x_i$ , où  $i \neq 0$  par  $\beta^{\pi+1}$  et  $x_0 = x$  par  $\beta$  sans altérer les  $y_i$ ,  $H' = \sum_0^{\pi-2} H \gamma^k$ .

Posons

$$m_{i\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \rho^{-1} y_i \end{vmatrix} \quad (i \neq 0), \quad m_{0\gamma} = |x, \chi^x|, \quad m_\gamma = |z_n, \chi^{z_n}|,$$

les variables non écrites étant inaltérées. Si  $\gamma$  ou  $\rho \rho^{-1}$  est d'ordre  $\pi + 1$  (alors  $\rho$  est de la forme  $\iota^\sigma$ ,  $\sigma$  étant premier à  $\pi + 1$ )<sup>(1)</sup>, on aura encore,  $m_{i\rho}^{\pi+1}$  étant évidemment dans  $H^0$ ,

$$H = \sum_0^\pi H^0 m_{i\rho}^k = \sum_0^\pi H^0 m_{0\gamma}^k, \quad E = \sum_0^\pi E^0 m_\gamma^k,$$

et, en désignant par  $s$  une des substitutions  $m_{i\rho}, m_{0\gamma}, m_\gamma$  suivant le cas, chaque complexe  $A^0 s^k = s^k A^0$  est formé des substitutions de  $A = \{s\} A^0$  dont le déterminant est  $(\rho \rho^{-1})^k$  ou  $\gamma^k$ .

Il est clair que, pour  $n = 1$ ,  $H^0 = E^0 = 1$ .

Par définition  $\mathcal{A}' = A' | I'$ , et  $\mathcal{A} = AI' | I' = A' I'$ . Donc  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \equiv A | J$ . De même  $\mathcal{A}^0 = A^0 I' | I' \equiv A^0 | J^0 \equiv A^0 J | J$ . Donc  $\mathcal{A} | \mathcal{A}^0 \equiv A' | A^0 I' \equiv A | A^0 J$ , et  $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^0) = \pi_1$ .

Soit  $\zeta$  une substitution de  $A$  hors de  $A^0$  et  $\zeta_0$  une substitution de  $A^0$ . Si  $\zeta^y$  est dans  $A^0 I'$ ,  $(\zeta \zeta_0)^y$  y sera aussi, et réciproquement. Prenons donc  $\zeta = s$ , et soit  $s^y = \alpha \iota^{z^y}$ ,  $\alpha$  étant dans  $A^0$ . Il faut évidemment pour cela que l'on ait, en supposant  $a = \epsilon$ ,  $s = m_\gamma$ ,

$$\alpha_{11} = \dots = \alpha_{n-1, n-1}, \quad \alpha_{11} \iota^{z^2} = 1, \quad \alpha_{nn} \iota^{z^2} = \gamma^y, \quad \text{donc} \quad \alpha_{nn} = \alpha_{11} \gamma^y.$$

D'ailleurs,  $\alpha$  conservant  $\epsilon$  et étant dans  $A^0$ , on a aussi

$$\alpha_{ii} \dot{\alpha}_{ii} = 1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad \alpha_{11}^{n-1} \alpha_{nn} = 1,$$

(1)  $\beta \gamma^{-1} = \prod_1^y m_{i, \beta^{-\pi}}$ .

et ces conditions suffisent. Ainsi  $\alpha_{i_1}$  est de la forme  $t^{\rho(\pi-1)}$ ,  $\alpha_{nn}$  de la forme  $t^{\sigma(\pi-1)}$ , et  $(n-1)\rho + \sigma \equiv 0 \pmod{\pi+1}$ . D'ailleurs  $\chi$  a la forme  $t^{\tau(\pi-1)}$  ( $\tau$  premier à  $\pi+1$ ), et  $\sigma - \rho - \tau\gamma \equiv 0 \pmod{\pi+1}$ . Donc, en éliminant  $\sigma$ ,

$$\rho n + \tau\gamma \equiv 0 \pmod{\pi+1}.$$

Mais  $\tau$  est premier à  $\pi+1$ . Donc  $\gamma$  doit être divisible par  $\pi_1$ , et cela suffit. Donc  $A' = \sum_0^{\pi_1-1} A^0 I' s^k$ , et, en regardant les variables comme homogènes,  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} = \sum_0^{\pi_1-1} \mathfrak{A}^0 s^k$ .

3. Soit

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_i & \sum_k (\alpha_{ik} x_k + \alpha'_{ik} y_k) = X_i \\ y_i & \sum_k (\beta_{ik} x_k + \beta'_{ik} y_k) = Y_i \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, \nu, 0)$$

une substitution de  $H'$ , en convenant de supprimer ou de remplacer par 0 toutes les quantités relatives à  $y_0$  et de même, si  $\eta = 0$ , celles relatives à  $x_0$  [ainsi  $(1-\eta)\alpha_{i0} = (1-\eta)\beta_{i0} = 0, \alpha'_{i0} = \beta'_{i0} = 0 (i \geq 0)$ ].

La considération des coefficients de  $x_j \dot{x}_k, y_j \dot{y}_k, x_j \dot{y}_k$  dans la transformée de  $a$  par  $\alpha$  donne, pour le développement de la condition  $\dot{a} a \bar{a} = f a$  (cf. 1),

$$(4) \quad \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ij} \dot{\beta}_{ik} - \beta_{ij} \dot{\alpha}_{ik}) + \omega \eta \alpha_{0j} \dot{\alpha}_{0k} = \begin{cases} 0 & \text{sauf si } j = k = 0 \\ f \omega \eta & \text{si } j = k = 0 \end{cases} \quad (j, k \geq 0),$$

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha'_{ij} \dot{\beta}'_{ik} - \beta_{ij} \dot{\alpha}'_{ik}) + \omega \eta \alpha'_{0j} \dot{\alpha}'_{0k} = 0 \quad (j, k \neq 0),$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ij} \dot{\beta}'_{ik} - \beta_{ij} \dot{\alpha}'_{ik}) + \omega \eta \alpha_{0j} \dot{\alpha}'_{0k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ f & \text{si } j = k \end{cases} \quad (j \geq 0, k \neq 0)$$

[le coefficient de  $\dot{x}_j y_k$  conduit à la conjuguée de (6)].

L'équation  $\dot{a} a \bar{a} = f a$  donne  $f \dot{a}^{-1} = \bar{a} \dot{a} a^{-1}$ . Or

$$a^{-1} = \sum_1^{\nu} (y_i \dot{x}_i - x_i \dot{y}_i) + \frac{\eta}{\omega} x_0 \dot{x}_0 \quad (1).$$

---

(1) On voit que si  $\eta = 0$  ou si  $\omega^2 = -1, a^{-1} = -a$ . Alors l'équation précédente donne  $\bar{a} \dot{a} \dot{a} = f a$ , et  $H$  et  $H'$  contiennent la transposée de chacune de leurs substitutions. Si l'on prend  $a = \varepsilon$ , la condition  $\dot{a} a \bar{a} = f a$  s'écrit  $\dot{a} \bar{a} = f \varepsilon$ ;  $E$  et  $E'$  contiennent donc toujours la transposée de chacune de leurs substitutions.



Donc, en posant

$$\alpha^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \sum_k (A_{ik} x_k + A'_{ik} y_k) = X'_i \\ y_i & \sum_k (B_{ik} x_k + B'_{ik} y_k) = Y'_i \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, \nu, 0),$$

$$(1 - \eta) A_{i0} = (1 - \eta) B_{i0} = A'_{i0} = B'_{i0} = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, \nu, 0,$$

on a

$$7) \left\{ \begin{array}{llll} f A_{ik} = \dot{\beta}'_{ki}, & f A'_{ik} = -\dot{\alpha}'_{ki}, & f B_{ik} = -\dot{\beta}_{ki}, & f B'_{ik} = \dot{\alpha}_{ki} \quad (i, k \neq 0); \\ f A_{i0} = \omega \eta \dot{\alpha}'_{0i}, & f B_{i0} = -\omega \eta \dot{\alpha}_{0i}, & f A_{0k} = \frac{\eta}{\omega} \dot{\beta}_{k0}, & f A'_{0k} = -\frac{\eta}{\omega} \dot{\alpha}_{k0} \quad (i, k \neq 0); \\ & & f A_{00} = \eta \alpha_{00}. & \end{array} \right.$$

L'équation (4) écrite pour  $\alpha^{-1}$  donne donc ( $\alpha^{-1}$  multiplie  $\alpha$  par  $f^{-1}$ )

$$(8) \left\{ \begin{array}{ll} \omega \sum_{i=1}^{\nu} (\beta_{ki} \dot{\beta}'_{ji} - \dot{\beta}_{ji} \beta'_{ki}) + \eta \beta_{k0} \dot{\beta}_{j0} = 0 & (j, k \neq 0), \\ \omega \eta \sum_{i=1}^{\nu} (\dot{\alpha}'_{0i} \beta_{ki} - \dot{\alpha}_{0i} \beta'_{ki}) + \eta \alpha_{00} \beta_{k0} = 0 & (k \neq 0) \quad (1), \\ \omega \eta \sum_{i=1}^{\nu} (\dot{\alpha}_{0i} \alpha'_{0i} - \dot{\alpha}'_{0i} \alpha_{0i}) + \eta \alpha_{00} \dot{\alpha}_{00} = fc. & \end{array} \right.$$

L'équation (5) donne de même (2)

$$(9) \quad \omega \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ki} \dot{\alpha}'_{ji} - \dot{\alpha}_{ji} \alpha'_{ki}) + \eta \alpha_{k0} \dot{\alpha}_{j0} = 0 \quad (j, k \neq 0),$$

et l'équation (6)

$$(10) \left\{ \begin{array}{ll} \omega \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ki} \dot{\beta}'_{ji} - \dot{\beta}_{ji} \alpha'_{ki}) + \eta \alpha_{k0} \dot{\beta}_{j0} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ f & \text{si } j = k \end{cases} & (j, k \neq 0), \\ \omega \eta \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ki} \dot{\alpha}'_{0i} - \dot{\alpha}_{0i} \alpha'_{ki}) + \eta \alpha_{k0} \dot{\alpha}_{00} = 0 & (k \neq 0). \end{array} \right.$$

Les conditions (8), (9), (10) sont *a priori* équivalentes à (4), (5), (6) (3).

Si l'on prend  $\alpha = \varepsilon = (\varepsilon_{ik})$ , la condition  $\dot{\alpha} \bar{\alpha} = f \varepsilon$  donne  $\sum_i \alpha_{ik} \dot{\alpha}_{il} = f \varepsilon_{kl}$  qui remplace (4), (5), (6). En formant ce système d'équations

(1) En faisant dans (4)  $k=0$ , on obtient la conjuguée de cette seconde formule (8).

(2) On suppose dans cette réduction  $j$  et  $k$  non nuls. Aussi, bien que (5) subsiste pour  $j$  ou  $k$  nul, il n'en est pas de même de (9).

(3) On remarquera que (8), (9), (10) sont formées avec les lignes de  $\alpha$  comme (4), (5), (6) avec ses colonnes.

pour  $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$ , on obtient le système équivalent  $\Sigma_i \dot{\alpha}_{ki} \alpha_{li} = f \varepsilon_{kl}$  qui remplace (8), (9), (10).

4. Désignons maintenant par  $(4)_l, (5)_l, (6)_l, (8)_l, (9)_l, (10)_l$  ce que deviennent (4), (5), (6), (8), (9), (10) pour  $j = k = l$ .

H contient une substitution  $\alpha$  dont les colonnes répondant à  $x_l, y_l$  (en négligeant  $y_l$  si  $l = 0$ ) forment une solution de  $(4)_l, (5)_l, (6)_l$  pour  $f = 1$ . Car soit  $\tau$  une substitution  $n - a$  aire ayant pour colonnes répondant à  $x_l, y_l$  les colonnes données, et  $\tau \alpha \bar{\tau} = \alpha'$ . En désignant par  $F(x_l, y_l)$  une forme égale à  $x_l \dot{y}_l - y_l \dot{x}_l$  si  $l \neq 0$  (on peut alors faire  $l = 1$ ) et à  $\omega \eta x \dot{x}$  si  $l = 0$ , on peut écrire  $\alpha' = F(x_l + u, y_l + v) + a_l$ ,  $u, v, a_l$  ne contenant plus  $x_l$  ni  $y_l$  <sup>(1)</sup>. Si donc  $\tau_1$  est la substitution qui remplace  $x_l$  par  $x_l - u$  et  $y_l$  par  $y_l - v$ , donc  $\alpha'$  par  $F(x_l, y_l) + a_l$ , et  $\tau_2$  une substitution des  $x_i, y_i$  où  $i \neq l$  réduisant  $a_l$  à  $a - F(x_l, y_l)$ ,  $\tau_2 \tau_1 \tau$  répond à la question. On voit directement [en cherchant une substitution  $\sigma$  de H telle que  $\sigma \alpha$  ait les mêmes colonnes répondant à  $x_l, y_l$  (ou la même colonne répondant à  $x_0$  si  $l = 0$ )] que les substitutions de cette sorte forment le complexe  $H_l \alpha_0, \alpha_0$  étant l'une d'elles, et  $H_l$  le diviseur de H formé des substitutions qui remplacent les  $x_i, y_i$  où  $i \neq l$  par des fonctions de ces seules variables et  $x_l, y_l$  par  $x_l + X, y_l + Y, X$  et  $Y$  ne dépendant pas de  $x_l, y_l$  (en négligeant toujours  $y_l$  si  $l = 0$ ). Or les conditions (4), (5), (6) où l'on fait un des seconds indices égal à  $l$  montrent que  $X = Y = 0$ , et que  $H_l$  est le groupe des substitutions de  $a - F(x_l, y_l)$ .  $H_l$  est donc semblable à  $H(n - 2, \pi)$  si  $l \neq 0$ , et à  $H(n - 1, \pi)$  si  $l = 0$ .

De même les substitutions de H dont les lignes répondant à  $x_l$

(1) D'après la construction de  $\tau, \alpha'$  a, pour  $l \neq 0$ , la forme

$$F(x_l, y_l) + x_l \dot{X} - X \dot{x}_l + y_l \dot{Y} - Y \dot{y}_l + Z$$

et, pour  $l = 0$ , la forme

$$\omega x \dot{x} + \omega(x \dot{X} + X \dot{x}) + Z,$$

$X, Y$  et  $Z = (-\dot{Z})$  ne dépendant pas de  $x_l, y_l$ . D'où, par des changements de notation, la forme du texte.

et  $y_l$  (en négligeant  $y_l$  si  $l = 0$ ) constituent une solution donnée de  $(8)_l, (9)_l, (10)_l$  pour  $f = 1$  forment le complexe  $\alpha_0 H_l, \alpha_0$  étant l'une d'elles qui existe toujours.

Or pour  $n > 1$  et  $l = 1$ , l'équation  $(4)$ , (que l'on peut considérer comme liant les parties réelles et imaginaires des coefficients) a, d'après le type de  $h, [\pi^n - (-1)^n] [\pi^{n-1} - (-1)^{n-1}]$  solutions autres que  $0, 0, \dots, 0$  (*E.*, 44, 45). Il s'agit de calculer le nombre  $m_\Sigma$  des solutions de  $(5)_1, (6)_1$  répondant à une solution autre que  $0, 0, \dots, 0$  de  $(4)_1$ , [à la solution  $0, 0, \dots, 0$  de  $(4)_1$  ne répond aucune solution de  $(5)_1, (6)_1$ ].  $m_\Sigma$  ne change évidemment pas quand on transforme linéairement les coordonnées des points  $\Sigma, \Sigma'$ . Or si l'on fait subir à ces coordonnées une même substitution  $s$  de  $H$ ,  $(4)_1, (5)_1, (6)_1$  restent inaltérées (elles deviennent les mêmes conditions relatives à la substitution  $\alpha s$  de  $H$ ). D'ailleurs  $H$  contient une substitution transformant  $\Sigma_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$  en  $\Sigma$  (par exemple  $\alpha$ ). Donc, pour calculer  $m_\Sigma$ , on peut remplacer  $\Sigma$  par  $\Sigma_0$  <sup>(1)</sup>. Alors  $\beta'_{11} = 1$ , et  $(5)_1$  permet de prendre arbitrairement les  $\alpha'_{i1}, \beta'_{i1}$  où  $i \neq 1$ ; la partie imaginaire de  $\alpha'_{i1}$  est alors déterminée. Donc  $m_\Sigma = \pi^{2n-3}$ . L'ordre de  $H$  pour  $n = 1$  est d'ailleurs  $\pi + 1$ , et pour  $n = 2$ , d'après ce qu'on vient de voir,  $\pi(\pi + 1)(\pi^2 - 1)$ . Donc l'ordre de  $H(n, \pi)$  est  $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_1^n [\pi^i - (-1)^i]$ .

On voit de même que les substitutions  $\alpha$  de  $E$  dont la  $n^{\text{ième}}$  colonne (ligne) est une solution donnée autre que  $0, 0, \dots, 0$  de  $\Sigma_i \alpha_{ii} \alpha_{ii} = 1$  ( $\Sigma_i \alpha_{ii} \alpha_{ii} = 1$ ) forment le complexe  $E_l \alpha_0 (\alpha_0 E_l)$ ,  $E_l \equiv E(n-1, \pi)$  étant le groupe de  $\varepsilon - x_i x_i$ , et  $\alpha_0$  étant l'une d'elles qui existe toujours. On en déduit plus simplement l'ordre de  $E$ ; mais la démonstration précédente est utile pour la suite.

La même méthode fournirait des résultats généraux analogues pour

(1) On peut donner au raisonnement précédent une forme un peu différente. Les diverses déterminations  $s_1, s_2, \dots$  de  $\alpha_0$  formant un système de restes de  $H \pmod{H_1, 1}$ , il en sera de même de  $s_1 \sigma, s_2 \sigma, \dots, \sigma$  étant quelconque dans  $H (= H \sigma)$ . De plus, si  $s_i$  et  $s_k$  ont une même première colonne, il en sera de même de  $s_i \sigma, s_k \sigma$ , et réciproquement. En faisant  $\sigma = s_i^{-1}$ , on voit que le nombre des  $s_i$  ayant une même première colonne est égal à celui des  $s_i$  dont la première colonne est  $1, 0, 0, \dots, 0$ , c'est-à-dire que  $m_\Sigma$  est indépendant de  $\Sigma$ .

le complexe ( $\geq 1$ ) des substitutions de H dont les colonnes (lignes) répondant à  $x_i, y_i; x_i, y_i, \dots$  sont données, vérifiant (4), (5), (6), et pour le complexe ( $\geq 1$ ) des substitutions de E dont plusieurs colonnes (lignes) sont données, vérifiant les conditions correspondantes.

§. Soit  $n = 2$ . Posons  $|\alpha| = \delta$ . L'équation  $\alpha_{i1}\beta'_{11} - \beta_{i1}\alpha'_{11} = \delta$  jointe à (4) donne, d'après (6),  $f\alpha_{i1} = \alpha'_{i1}\delta, f\beta_{i1} = \beta'_{i1}\delta$ ; jointe à (5), elle donne de même  $f\alpha'_{i1} = \alpha_{i1}\delta, f\beta'_{i1} = \beta_{i1}\delta$ . Or  $\delta^{\pi+1} = 1$  (2). Donc on peut trouver  $\rho$  tel que  $\rho^{\pi-1} = \delta$ . Donc, pour  $f = 1$ , les coefficients de  $\alpha$  multipliés par  $\rho$  deviennent réels. Donc le groupe des matrices de  $\mathfrak{H}(2, \pi)$  divise celui des matrices de  $\mathfrak{L}(2, \pi)$  (S., 77) [les deux groupes n'ont pas le même champ (cf. 15)]. Donc, d'après leurs ordres,  $\mathfrak{H}(2, \pi) \equiv \mathfrak{L}(2, \pi)$ , et  $\mathfrak{H}^0(2, \pi) \equiv \mathfrak{O}(2, \pi)$  (cf. S., 79). Pour  $\delta = 1$ , les coefficients eux-mêmes sont réels. Donc  $\mathfrak{H}^0(2, \pi) \equiv \mathfrak{U}(2, \pi)$ , les matrices des deux groupes étant les mêmes [mais non leurs champs (cf. 12)]. Il est clair que  $\mathfrak{H}(2, \pi) \equiv \mathfrak{U}(2\pi), m_{11}$ .

6.  $\mathfrak{H}^0(n, \pi)$  contient évidemment les substitutions

$$\tau_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix}, \quad u_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda y_i \end{vmatrix}, \quad V_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho x_k \\ y_k & y_k - \rho y_i \end{vmatrix},$$

$$V_{0k\rho} = \begin{vmatrix} x & x + \rho x_k \\ y_k & y_k + \omega \rho x + \rho \dot{\rho} x_k \end{vmatrix} \text{ si } \eta = 1 \quad (1); \quad V_{0k\rho} = 1 \text{ si } \eta = 0$$

( $i, k \neq 0$ ;  $\lambda$  réel; les variables non écrites sont inaltérées)

et leurs combinaisons

$$v_{i\lambda} = \tau_i^{-1} u_{i,-\lambda} \tau_i = \tau_i u_{i,-\lambda} \tau_i^{-1} = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \lambda x_i \end{vmatrix},$$

$$m_{i\lambda} = v_{i\lambda} u_{i,-\lambda} v_{i\lambda} \tau_i = \tau_i^{-1} u_{i\lambda} v_{i,-\lambda} u_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1} y_i \end{vmatrix} \quad (2),$$

$$U_{ik\rho} = U_{ki\dot{\rho}} = \tau_k^{-1} V_{ik,-\rho} \tau_k = \tau_k V_{ik\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho y_k \\ x_k & x_k + \dot{\rho} y_i \end{vmatrix},$$

(1) Pour qu'une substitution remplaçant  $x$  par  $x + \rho x_k$  et conservant  $x_k$  laisse  $x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k + \omega x \dot{x}$  inaltérée, il faut et suffit, on le vérifie directement, qu'elle remplace  $y_k$  par  $y_k + \omega \rho x + (\lambda + \rho \dot{\rho}) x_k$ ,  $\lambda$  étant indéterminé dans  $\mathcal{E}$ . Je prends ici  $\lambda = 0$ .

(2) Comme  $m_{i,-1} = \tau_i^2$ , cette équation donne  $\tau_i = v_{i,-1} u_{i1} v_{i,-1} = u_{i1} v_{i,-1} u_{i1}$ . Donc les  $m$  et les  $\tau$  s'expriment par les  $u$  et les  $v$  (cf. S., 83, 3; E., 192, 202).

$$U_{0k\rho} = U_{k0\rho} = \tau_k^{-1} V_{0k,-\rho} \tau_k = \tau_k V_{0k\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x & x + \rho y_k \\ x_k & x_k - \omega \dot{\rho} x - \rho \dot{\rho} y_k \end{vmatrix},$$

$$W_{ik\rho} = W_{ki\rho} = \tau_i^{-1} V_{ik,-\rho} \tau_i = \tau_i V_{ik\rho} \tau_i^{-1} = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \rho x_k \\ y_k & y_k + \dot{\rho} x_i \end{vmatrix},$$

$$R_{ik\rho} = V_{ik\rho} V_{ki,-\rho^{-1}} V_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_k \\ y_i & \dot{\rho}^{-1} y_k \\ x_k & -\rho^{-1} x_i \\ y_k & -\dot{\rho} y_i \end{vmatrix},$$

$$S_{ik\rho} = \tau_k^{-1} R_{ik\rho} \tau_k = \tau_k R_{ik\rho} \tau_k^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & -\rho y_k \\ y_i & \dot{\rho}^{-1} x_k \\ x_k & -\dot{\rho} y_i \\ y_k & \rho^{-1} x_i \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} T_{ik} &= m_{i,-\lambda} m_{k\lambda}^{-1} R_{ik\lambda} = R_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda} = \tau_i \tau_k m_{i\lambda} m_{k\lambda} S_{ik\lambda} \\ &= S_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k\lambda}^{-1} \tau_i \tau_k = \begin{vmatrix} x_k & x_k \\ y_i & y_k \\ x_k & x_i \\ y_k & y_i \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Il sera souvent commode de négliger le dernier indice dans les  $u_{i\lambda}$ ,  $v_{i\lambda}$ ,  $m_{i\lambda}$ ,  $V_{ik\rho}$ ,  $U_{ik\rho}$ ,  $W_{ik\rho}$  et dans la substitution  $m_{i\rho}$  du n° 2.

7. Il est utile de réunir ici certaines relations entre ces substitutions et les substitutions  $m_{i\rho}$  ( $\rho$  dans  $\mathfrak{O}'$ ; cf. 2),  $m_{0b}$  ( $\theta^{\pi+1} = 1$ ) de H (1) :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \tau_i^2 = u_{i\lambda}^p = V_{ik\rho}^p = 1, \quad \tau_i^2 = m_{i,-1} \quad (\text{si } p = 2, \tau_i^2 = 1), \\ \tau_i^{-2} V_{ik\rho} \tau_i^2 = V_{ik,-\rho}, \quad \tau_k^{-2} V_{jk\rho} \tau_k^2 = V_{jk,-\rho} \quad (j \geq 0); \\ V_{0k\rho}^m = V_{0k,m\rho} v_{k, \frac{m(m-1)}{2} \eta b \rho \dot{\rho}}, \quad b = -\rho - \dot{\rho}. \\ \text{d'où} \\ V_{0k\rho}^{-1} = V_{0k,-\rho} v_{k, \eta b \rho \dot{\rho}}, \quad V_{0k\rho}^p = \begin{cases} 1 & \text{pour } p > 2, \\ v_{k, \eta b \rho \dot{\rho}} & \text{pour } p = 2, \end{cases} \\ U_{0k\rho}^{-1} = U_{0k,-\rho} u_{k, -\eta b \rho \dot{\rho}}, \quad U_{0k\rho}^p = \begin{cases} 1 & \text{pour } p > 2, \\ u_{k, -\eta b \rho \dot{\rho}} & \text{pour } p = 2, \end{cases} \end{array} \right.$$

(1) Les formules (13), (16), (18), (20), se tirent des formules (12), (15), (17), (19) respectivement en transformant ces dernières par des  $\tau$ .

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} V_{ik\rho} u_{i\lambda} = u_{i\lambda} V_{ik\rho}, \quad V_{jk\rho} v_{k\lambda} = v_{k\lambda} V_{jk\rho} \quad (j \geq 0), \\ u_{k\lambda}^{-1} V_{ik\rho} u_{k\lambda} = V_{ik\rho} U_{ik, -\lambda\rho} u_{i, -\lambda\rho}, \quad v_{i\lambda}^{-1} V_{ik\rho} v_{i\lambda} = V_{ik\rho} W_{ik, \lambda\rho} v_{k, \lambda\rho}, \end{array} \right.$$

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} U_{jk\rho} u_{k\lambda} = u_{k\lambda} U_{jk\rho} \quad (j \geq 0), \quad v_{k\lambda}^{-1} U_{ik\rho} v_{k\lambda} = U_{ik\rho} V_{ik, -\lambda\rho} u_{i, -\lambda\rho}, \\ W_{ik\rho} v_{i\lambda} = v_{i\lambda} W_{ik\rho}, \quad u_{k\lambda}^{-1} W_{ik\rho} u_{k\lambda} = W_{ik\rho} V_{ki, \lambda\rho} v_{i, \lambda\rho}, \end{array} \right.$$

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} V_{ok\rho} V_{ok\sigma} = V_{ok, \rho+\sigma} v_{k, -\eta(\rho\sigma\dot{+}\dot{\rho}\sigma\upsilon)} = V_{ok\sigma} V_{ok\rho} v_{k, \omega\eta(\rho\sigma-\dot{\sigma}\rho)}, \\ U_{ok\rho} U_{ok\sigma} = U_{ok, \rho+\sigma} u_{k, \eta(\rho\sigma\dot{+}\dot{\rho}\sigma\upsilon)} = U_{ok\sigma} U_{ok\rho} u_{k, \omega\eta(\rho\sigma-\dot{\sigma}\rho)} \quad (1'), \end{array} \right.$$

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} V_{ik\rho} V_{il\sigma} = V_{il\sigma} V_{ik\rho} \quad (k \neq l \text{ ou } k=l) \\ V_{ik\rho} V_{ik\sigma} = V_{ik\sigma} V_{ik\rho} \quad (i \neq l \text{ ou } i=l) \\ V_{k\lambda\sigma}^{-1} V_{ik\rho} V_{k\lambda\sigma} = V_{ik\rho} V_{i\lambda, -\rho\sigma} \\ V_{i\lambda\sigma}^{-1} U_{ik\rho} V_{i\lambda\sigma} = U_{ik\rho} u_{i, \rho\sigma+\dot{\rho}\sigma} \end{array} \right\} \quad (i, k, l \neq 0),$$

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} U_{ik\rho} V_{il\sigma} = V_{il\sigma} U_{ik\rho} \quad (k \neq l) \\ U_{ik\rho} U_{il\sigma} = U_{il\sigma} U_{ik\rho} \quad (k \neq l \text{ ou } k=l) \\ W_{ik\rho} W_{il\sigma} = W_{il\sigma} W_{ik\rho} \quad (k \neq l \text{ ou } k=l) \\ W_{ik\rho} V_{ik\sigma} = V_{ik\sigma} W_{ik\rho} \quad (i \neq l), \\ U_{k\lambda\sigma}^{-1} V_{ik\rho} U_{k\lambda\sigma} = V_{ik\rho} U_{i\lambda, -\rho\sigma} \\ W_{k\lambda\sigma}^{-1} U_{ik\rho} W_{k\lambda\sigma} = U_{ik\rho} V_{i\lambda, -\rho\sigma} \\ V_{k\lambda\sigma}^{-1} W_{ik\rho} V_{k\lambda\sigma} = W_{ik\rho} W_{i\lambda, -\rho\sigma} \\ W_{i\lambda\sigma}^{-1} V_{k\lambda\sigma} W_{i\lambda\sigma} = V_{k\lambda\sigma} v_{i, -\rho\sigma-\dot{\rho}\sigma} \end{array} \right\} \quad (i, k, l \neq 0),$$

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} V_{ok\rho} V_{ik\sigma} = V_{ik\sigma} V_{ok\rho} \\ V_{oi\sigma}^{-1} U_{ok\rho} V_{oi\sigma} = U_{ok\rho} V_{ki, \eta\omega\rho\sigma} \\ U_{oi\sigma}^{-1} U_{ok\rho} U_{oi\sigma} = U_{ok\rho} U_{ki, \eta\omega\rho\sigma} \\ U_{i\lambda\sigma}^{-1} V_{ok\rho} U_{i\lambda\sigma} = V_{ik, \eta\rho\sigma\upsilon} U_{oi, -\rho\sigma} V_{ok\rho} \end{array} \right\} \quad (i, k \neq 0),$$

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} U_{ok\rho} U_{ik\sigma} = U_{ik\sigma} U_{ok\rho} \\ U_{ok\rho} V_{k\lambda\sigma} = V_{k\lambda\sigma} U_{ok\rho} \\ V_{ok\rho} W_{ik\sigma} = W_{ik\sigma} V_{ok\rho} \\ V_{i\lambda\sigma}^{-1} U_{ok\rho} V_{i\lambda\sigma} = U_{ik, -\eta\rho\sigma\upsilon} U_{oi, \rho\sigma} U_{ok\rho} \\ W_{i\lambda\sigma}^{-1} U_{ok\rho} W_{i\lambda\sigma} = V_{ki, -\eta\rho\sigma\upsilon} V_{oi, -\rho\sigma} U_{ok\rho} \\ V_{k\lambda\sigma}^{-1} V_{ok\rho} V_{k\lambda\sigma} = W_{ki, \eta\rho\sigma\upsilon} V_{oi, -\rho\sigma} V_{ok\rho} \end{array} \right\} \quad (i, k \neq 0),$$

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} \tau_i^{-1} m_{i\rho} \tau_i = m_{i, \rho^{-1}}, \quad m_{i\rho}^{-1} u_{i\lambda} m_{i\rho} = u_{i, \lambda\rho}, \\ m_{i\sigma}^{-1} V_{ik\rho} m_{i\sigma} = V_{ik, \rho\sigma}, \quad m_{k\sigma}^{-1} V_{jk\rho} m_{k\sigma} = V_{jk, \rho\sigma^{-1}} \quad (j \geq 0), \\ m_{0\theta}^{-1} V_{ok\rho} m_{0\theta} = V_{ok, \theta\rho} \quad (\theta^{\pi+1} = 1), \\ (i, k \neq 0; \rho, \sigma \text{ dans } \mathfrak{C}'), \end{array} \right.$$

(1) D'après (11) et (14) on peut omettre les générateurs  $u$  si  $n$  est impair.

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} m_{i\rho}^{-1} v_{i\lambda} m_{i\rho} = v_{i,\lambda(\rho\rho)^{-1}}, \\ m_{i\sigma}^{-1} U_{ij\rho} m_{i\sigma} = U_{ij,-\rho\sigma} \quad (j \geq 0), \quad m_{k\sigma}^{-1} W_{ik\rho} m_{k\sigma} = W_{ik,\rho\sigma}, \\ m_{00}^{-1} U_{0k\rho} m_{00} = U_{0k,\theta\rho} \quad (\theta^{\pi+1} = 1), \\ \quad \quad \quad (i, k \neq 0; \rho, \sigma \text{ dans } \mathfrak{D}'), \end{array} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} R_{ik\rho} S_{ik\sigma} = S_{ik\sigma} R_{ik\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \dot{\rho}\sigma y_i \\ y_i & -(\dot{\rho}\sigma)^{-1} x_i \\ x_k & -\dot{\sigma}\dot{\rho}^{-1} y_k \\ y_k & \rho\sigma^{-1} x_k \end{vmatrix} = \tau_i \tau_k^{-1} m_{i,\dot{\rho}\sigma} m_{k,\dot{\sigma}\dot{\rho}^{-1}}, \\ V_{0i,\rho_0\dot{\rho}^{-1}} U_{0i,-1} u_{i,-\rho_0\dot{\rho}^{-1}} V_{0i,-\rho_0\dot{\rho}^{-1}} = \tau_i^{-1} u_{i,\rho_0\dot{\rho}_i(\rho\dot{\rho})^{-1}} m_{i\rho} m_{0,\dot{\rho}\rho^{-1}} m_{i,\dot{\rho}_i}^{-1} v_{i,-\rho_0\dot{\rho}_i(\rho\dot{\rho})^{-1}} \\ \quad \quad \quad (\rho = \rho_0 + \nu\rho_1). \end{array} \right.$$

La première formule (21) donne, pour  $\sigma = \rho$ , l'expression de  $m_{i\lambda}$  ( $\lambda$  réel) par les  $V$  et les  $\tau$ , et, pour  $\rho = 1$ , celle de  $m_{i\rho} m_{k\rho}^{-1}$  par les générateurs de  $H_0$ ; la seconde donne l'expression de  $m_{i\rho} m_{0,\dot{\rho}\rho^{-1}}$  par les mêmes générateurs.

**8.**  $H^0(n, \pi)$  dérive des  $\tau$ , des  $u$  et des  $V[H_0 1, \pi] = 1$ ,  $H_0(2, \pi)$  (2, 3, 4)], et, si  $n$  est impair, on peut [d'après (14)] omettre les  $u$ .

Il suffit de montrer que,  $\alpha$  étant dans  $H^0$ , on peut, en la multipliant à droite par des  $\tau$ ,  $u$ ,  $V$ , la réduire à une substitution de  $H_1(3)$ , et l'on peut supposer  $n > 2$  (4). Les  $\alpha_{ii}$ ,  $\beta_{ii}$  où  $i \neq 0$  n'étant pas tous nuls [si  $\eta = 1$ , cela résulte de (4)], on peut, en multipliant au besoin à droite par une  $V$  ou une  $U$ , rendre non nul  $\alpha_{21}$  si  $n > 3$ , ou  $\alpha_{01}$  si  $n = 3$ . Si  $n$  est  $> 3$ , en multipliant encore à droite par une  $V_{12}$ , on rendra  $\alpha_{11}$  égal à 1. Si  $n = 3$  et  $\beta_{11} = 0$  ou  $\alpha_{11}$  réel  $\neq 0$ , on arrive au même résultat en multipliant à droite par une  $U_{01}$  ou une  $m_{i\lambda}$ . Si  $n = 3$  avec  $\alpha_{11} = r_0 + \omega r_1$ ,  $\beta_{11} = s_0 + \omega s_1$  (les  $r, s$  étant réels, et  $r_1 \neq 0$ ), on peut réduire  $s_1$  à 0 en multipliant à droite par une  $\nu$ , puis, si  $\beta_{11}$  est alors  $\neq 0$ , rendre  $\alpha_{11}$  réel  $\neq 0$  en multipliant à droite par  $\tau_1$ : on est ainsi ramené au cas précédent. Soit donc  $\alpha_{11} = 1$ . En multipliant à droite par des  $V$  ou des  $W$ , on pourra maintenant annuler les  $\alpha_{ii}$ ,  $\beta_{ii}$  où  $i \neq 1$  (y compris  $\alpha_{01}$ ). Alors, d'après (4),  $\beta_{11}$  est réel, et l'on peut l'annuler par une  $\nu$ , ce qui entraîne, d'après (6),  $\beta'_{11} = 1$ . On pourra donc, par les  $V$  et les  $U$ ,

annuler les  $\beta'_{ii}, \alpha'_{ii}$  où  $i \neq 1$ . Alors, d'après (5),  $\alpha'_{ii}$  est réel, et l'on pourra l'annuler par une  $u$ . Or, d'après (4), (5), (6) où l'on fait un des seconds indices égal à 1, la substitution obtenue est alors dans  $H_1$  (cf. 3).

9. Il est utile pour la suite d'indiquer ici les modifications produites par le changement de variables qui consiste à remplacer  $y_i$  par  $-\frac{1}{2}\omega y_i$  pour  $i = 1, \dots, \nu$ , et  $x$  par  $\lambda x$  (je supposerai  $\lambda \dot{x} = c$ ), en conservant  $x_1, \dots, x_\nu$ . Je considérerai ce changement de variables comme une substitution, et je désignerai par les mêmes lettres surmontées d'un trait ce que deviennent les objets précédemment considérés (' ). On a alors

$$\bar{h} = \omega \left( \sum_1^\nu \frac{x_i \dot{y}_i + y_i \dot{x}_i}{2} + \eta c x \dot{x} \right).$$

Les équations ( $\bar{4}$ ), ( $\bar{5}$ ), ( $\bar{6}$ ) qui remplacent respectivement (4), (5), (6) s'en déduisent en  $y$  remplaçant partout : 1° le signe  $-$  par  $+$ ; 2°  $\omega$  par  $2c$ . On a

$$\bar{m}_{i\rho} = m_{i\rho}, \quad \bar{m}_{00} = m_{00}, \quad \bar{V}_{ik\rho} = V_{ik\rho} \quad (i, k \neq 0);$$

$$\bar{\tau}_i = \begin{vmatrix} x_i & -\frac{\omega}{2} y_i \\ y_i & \frac{2}{\omega} x_i \end{vmatrix} = t_i m_{i, -\frac{\omega}{2}}, \quad t_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix};$$

$$\bar{u}_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & x_i - \frac{\lambda\omega}{2} y_i \end{vmatrix}, \quad \bar{v}_{i\lambda} = \begin{vmatrix} y_i & y_i - \frac{2\lambda}{\omega} x_i \end{vmatrix}.$$

Je poserai aussi

$$V'_{ik\rho} = V_{ik\rho} \quad (i, k \neq 0),$$

$$V_{0k, \frac{\rho}{2}} = \bar{V}_{0k\rho} \bar{v}_{k, \frac{\rho}{2}} = \begin{vmatrix} x & x + \frac{\rho}{x} x_k \\ y_k & y_k - 2x\dot{\rho}x - \rho\dot{x}x_k \end{vmatrix},$$

$$U'_{ik\rho} = t_k V'_{ik\rho} t_k = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \rho y_k \\ x_k & x_k - \rho y_i \end{vmatrix} = m_{k, \frac{\omega}{2}}^{-1} \bar{U}_{ik\rho} m_{k, \frac{\omega}{2}},$$

$$W'_{ik\rho} = t_i V'_{ik\rho} t_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \rho x_k \\ y_k & y_k - \rho x_i \end{vmatrix} = m_{i, \frac{\omega}{2}}^{-1} \bar{W}_{ik\rho} m_{i, \frac{\omega}{2}},$$

---

(1) On ne confondra pas les  $\bar{m}_i, \bar{\tau}_i, \bar{u}_i, \dots$  avec les transposées de  $m_i, \tau_i, u_i, \dots$



$$R'_{ik\rho} = \bar{R}_{ik\rho} = R_{ik\rho}, \quad S'_{ik\rho} = \ell_k R_{ik\rho} \ell_k = \begin{vmatrix} x_i & \rho & y_k \\ y_i & \rho^{-1} x_k \\ x_k & -\rho & y_i \\ y_k & -\rho^{-1} x_i \end{vmatrix} = m_{k, \frac{\omega}{2}}^{-1} \bar{S}_{ik\rho} m_{k, \frac{\omega}{2}}.$$

**10.** Désignons par  $H^0_{ik}(n, \pi) = H^0_{ik} = H^0_{ki}$  ce que devient  $H^0(4, \pi)$  quand on y remplace  $x_1, y_1, x_2, y_2$  par  $x_i, y_i, x_k, y_k$  respectivement, et par  $H^0_{0i}(n, \pi) = H^0_{i0} = H^0_{0i}$  ce que devient  $H^0(3, \pi)$  quand on remplace  $x_1, y_1$  par  $x_i, y_i$ . D'après le n° 6,  $H^0(n, \pi)$  est le p. p. c. m. des  $H^0_{ij}$  où  $i, j = 1, \dots, \nu$  si  $n = 2\nu$  et  $i, j = 0, \dots, \nu$  si  $n = 2\nu + 1$ . On peut simplifier ce résultat en remarquant que  $\{H^0_{il}, H^0_{kl}\}$  contient toujours  $H^0_{ik}$  ( $i, k, l$  distincts  $\geq 0$ ). En effet  $\{H^0_{ik}, H^0_{kl}\}$  contient  $\tau_i, \tau_k$  les  $u_i$  et les  $u_k$ , et, d'après (15), (18) et (17), on sait exprimer  $V_{ik, -\rho\sigma}$  ( $i \geq 0$ ) par des éléments de  $H^0_{il}, H^0_{kl}$  et  $V_{kl, \rho\sigma}$  par des éléments de  $H^0_{i0}, H^0_{k0}$ . Donc

$$\begin{aligned} H^0(2\nu, \pi) &= \{H^0_{12}, H^0_{23}, \dots, H^0_{\nu-1, \nu}\} = \{H^0_{12}, H^0_{13}, \dots, H^0_{1\nu}\}, \\ H^0(2\nu + 1, \pi) &= \{H^0_{01}, H^0_{12}, \dots, H^0_{\nu-1, \nu}\} = \{H^0_{01}, H^0_{02}, \dots, H^0_{0\nu}\} \\ &= \{H^0_{01}, H^0(2\nu, \pi)\}. \end{aligned}$$

**11.** Les cas  $n = 3, 4$  s'imposent donc à l'attention.

Soit d'abord  $n = 4$  (<sup>1</sup>), et  $\nu$  le p. p. c. m. des  $V_{12}, V_{21}, \omega = \tau_1^{-1} \nu \tau_1$  celui des  $U_{12}, W_{12}$ . D'après le n° 6  $H^0 = \{\nu, \omega\}$ . Désignons, en général, par  $L_{xy} = \Sigma s_{xy}, U_{xy}$  les groupes semblables à  $L(2, \pi^2), U(2, \pi^2)$  opérant sur les variables  $x, y$  (S., 74), et considérons les substitutions  $s_{x_1, x_2}, \bar{s}_{y_1, y_2}^{-1}$ .  $\nu$  est formé des  $s$  où  $s_{x_1, x_2}$  parcourt  $U_{x_1, x_2}$  (S., 83). Donc  $\nu$  est isomorphe à  $U_{x_1, x_2}, V_{ik\rho}$  de  $\nu$  correspondant à  $|x_i, x_i + \rho x_k|$  de  $U_{x_1, x_2}$ . D'ailleurs  $m_{1\rho}$  est permutable à  $\nu$  et transforme les substitutions de  $\nu$  comme  $|x_1, \rho x_1|$  transforme les substitutions correspondantes de  $U_{x_1, x_2}$ . Donc  $\{\nu, m_{1\rho}\} = V$  est isomorphe à  $L_{x_1, x_2}$  et formé de toutes les  $s$  de  $H$ . Le p. g. c. d. de  $V, H^0$ , formé des  $\nu m_{1\rho}^k$  de déterminant 1, est  $\{\nu, m_{1\rho}\} = V^0$ , isomorphe au diviseur de  $L_{x_1, x_2}$  formé des substitutions de déterminant réel.

Comme  $U(2, \pi^2)$  est, dans  $L(2, \pi^2)$ , le seul diviseur normal de son

(<sup>1</sup>) Cf. DICKSON, *Linear groups*, 134-136.

ordre contenant le central de  $L(2, \pi^2)$  (S., 83), le normalisant  $\bar{V}$  de  $V$  dans  $H$  et celui  $\bar{V}^0$  de  $V^0$  dans  $H^0$  divisent respectivement les normalisants  $\bar{v}$  et  $\bar{v}^0$  de  $v$  dans  $H$  et  $H^0$ .

Déterminons d'abord  $\bar{v}^0$ . On a (avec les notations du n° 3)

$$V_{12\rho}\alpha = \begin{vmatrix} x_1 & X_1 - \dot{\rho}\alpha'_{12}y_1 + \rho\alpha_{11}x_2 \\ y_1 & Y_1 - \dot{\rho}\beta'_{12}y_1 + \rho\beta_{11}x_2 \\ x_2 & X_2 - \dot{\rho}\alpha'_{22}y_1 + \rho\alpha_{21}x_2 \\ y_2 & Y_2 - \dot{\rho}\beta'_{22}y_1 + \rho\beta_{21}x_2 \end{vmatrix},$$

et  $\alpha^{-1}V_{12\rho}\alpha$  se réduit de  $V_{12\rho}\alpha$  en remplaçant, dans les fonctions substituées aux variables,  $X_i, Y_i$  par  $x_i, y_i$ , et  $x_i, y_i$  par  $X'_i, Y'_i$ . Identifions maintenant  $\alpha^{-1}V_{12\rho}\alpha$  avec une  $s$  de  $v$ . J'appellerai dans ce qui suit *coefficients significatifs* les 8 coefficients qui jouent le rôle des  $\alpha_{ik}, \beta'_{ik}$  dans une substitution quelconque de  $H$ . Les coefficients non significatifs d'une  $s$  étant toujours nuls, les 8 équations d'identification relatives à ces derniers sont linéaires homogènes en  $\rho$  et  $\dot{\rho}$ . Comme  $\rho$  est arbitraire, ces 8 équations en fournissent 16 qui se réduisent à

$$(22) \quad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha'_{12} = \alpha_{11}\alpha'_{22} = \alpha_{21}\alpha'_{12} = \alpha_{21}\alpha'_{22} = 0, \\ \beta_{11}\beta'_{12} = \beta_{11}\beta'_{22} = \beta_{21}\beta'_{12} = \beta_{21}\beta'_{22} = 0. \end{cases}$$

Les 8 équations relatives aux coefficients significatifs donnent, en éliminant ces coefficients (conjugués deux à deux au signe près lorsqu'il s'agit d'une  $s$  de  $v$ ), 4 équations linéaires homogènes en  $\rho$  et  $\dot{\rho}$ , d'où, comme tout à l'heure, 8 équations qui se réduisent à

$$(23) \quad \alpha_{11}\dot{\beta}'_{12} + \alpha_{21}\dot{\beta}'_{22} = 0, \quad \alpha'_{12}\dot{\beta}_{11} + \alpha'_{22}\dot{\beta}_{21} = 0.$$

En remplaçant  $V_{12\rho}$  par  $V_{21\rho}$ , on obtient, au lieu de (22), (23), les équations suivantes, qui s'en déduisent par permutation des indices 1 et 2,

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha_{22}\alpha'_{21} = \alpha_{22}\alpha'_{11} = \alpha_{12}\alpha'_{21} = \alpha_{12}\alpha'_{11} = 0, \\ \beta_{22}\beta'_{21} = \beta_{22}\beta'_{11} = \beta_{12}\beta'_{21} = \beta_{12}\beta'_{11} = 0. \end{cases}$$

$$(25) \quad \alpha_{22}\dot{\beta}'_{21} + \alpha_{12}\dot{\beta}'_{11} = 0, \quad \alpha'_{21}\dot{\beta}_{22} + \alpha'_{11}\dot{\beta}_{12} = 0.$$

Je dis que, si un seul des coefficients significatifs de  $\alpha$  est  $\neq 0$ ,  $\alpha$  est dans  $V^0$ . En effet, *soit d'abord*  $\alpha_{11} \neq 0$ . Alors, d'après (22),  $\alpha'_{12} = \alpha'_{22} = 0$ . De plus  $\beta_{11} = \beta_{21} = 0$ , sans quoi, d'après (22),  $\beta'_{12}$  et  $\beta'_{22}$  seraient nuls et la quatrième colonne de  $\alpha$  serait nulle. Donc  $\beta_{12} = \beta_{22} = 0$ , sans quoi, d'après (24),  $\beta'_{21}$  et  $\beta'_{11}$  seraient nuls, et la forme  $h$  des deux premières colonnes de  $\alpha$  (1) serait nulle. Enfin  $\alpha'_{11} = \alpha'_{21} = 0$ , sans quoi, d'après (24),  $\alpha_{12}$  et  $\alpha_{22}$  seraient nuls, et la forme  $h$  des deux dernières colonnes serait nulle. De plus, les relations (6) [dont (23) et (25) font partie] donnent, en posant

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} &= \delta, & \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21} &= \delta', \\ \alpha_{11}\delta' &= \beta'_{22}, & \alpha_{12}\delta' &= -\beta'_{21}, & \alpha_{21}\delta' &= -\beta'_{12}, & \alpha_{22}\delta' &= \beta'_{11}, \end{aligned}$$

d'où  $\delta\delta' = 1$ . Or  $\delta\delta'$ , déterminant de  $\alpha$ , est égal à 1. Donc  $\delta$  et  $\delta'$  sont réels, et les relations précédentes montrent que  $\alpha$  est une  $s$  de  $H^0$  donc de  $V^0$ .

Si  $\alpha_{12}$  est  $\neq 0$ , on voit de même que  $R_{12}, \alpha$  ( $R_{12}$  fait partie de  $\nu$ ) est dans  $V^0$ , donc  $\alpha$  dans  $R_{12}^{-1}V^0 = V^0$ .

Si  $\beta'_{11}$  ou  $\beta'_{12}$  est  $\neq 0$ , on voit de même que  $(\tau_1, \tau_2)^{-1}\alpha\tau_1\tau_2$  ( $\tau_1, \tau_2$ , qui transforme  $V_{12\rho}$  en  $V_{21\rho}^{-1}$  et  $V_{21\rho}$  en  $V_{12\rho}^{-1}$  est permutable à  $\nu$ ) est dans  $V^0$ , donc  $\alpha$  dans  $\tau_1\tau_2 V^0 (\tau_1\tau_2)^{-1} = V^0$  ( $\tau_1\tau_2$  est permutable à  $\{m_{11}\}$  donc à  $\{m_{11}\}$ ).

Si donc  $\alpha_{22}, \alpha_{21}, \beta'_{22}$  ou  $\beta'_{21}$  est  $\neq 0$ ,  $\alpha$  est aussi dans  $V^0$ , puisque les équations (22)-(25) ne changent pas quand on y échange les indices 1 et 2.

Supposons donc nuls tous les coefficients significatifs de  $\alpha$ . Alors  $\tau_1\tau_2\alpha$ , dont les coefficients significatifs ne sont pas tous nuls, est dans  $V^0$ , donc  $\alpha$  dans  $(\tau_1\tau_2)^{-1}V^0$ . Donc  $\bar{\nu}^0 = \{V^0, \tau_1\tau_2\}$ , et,  $\tau_1\tau_2$  étant permutable à  $\{m_{11}\}$ ,  $\bar{\nu}^0 = \bar{V}^0$ .

Comme  $m_{11}$  est permutable à  $\nu$ , à  $V^0$  et à  $V$ , et que  $H = \{H^0, m_{11}\}$ , il est clair que  $\bar{\nu} = \{V, \tau_1\tau_2\} = \bar{V}$ . Donc  $(H, \bar{V}) = (H^0, V^0)$ , et  $\nu$  ou  $V^0$  a les mêmes conjugués dans  $H$  et  $H^0$ .

Toute similitude  $\sigma$  de  $V$  étant dans un complexe  $\nu m_{11}^k, \sigma m_{11}^k$  est dans  $\nu$  et est par suite une substitution  $s$  où  $s_{x_1x_2}$  est dans  $U_{x_1x_2}$ , d'où  $\rho^2 = 1, \rho^k = 1$ . Donc  $\sigma$  est dans  $\nu$  et dans  $D$ , et, comme  $\nu$  contient  $d = R_{12}^2$ , le p. g. c. d. de  $\nu, J$  est  $D$ . D'ailleurs  $(\tau_1\tau_2)^2 = d$ . Donc,

en remplaçant partout les lettres  $\nu, V$  par  $\nu, \psi$  pour indiquer qu'on regarde les variables comme homogènes, les normalisants respectifs de  $\nu$  ou  $\psi^0$  dans  $\mathfrak{K}$  et  $\mathfrak{K}_0$  sont  $\bar{\psi}$  et  $\bar{\psi}^0$ , et  $(\mathfrak{K}, \bar{\psi}) = (\mathfrak{K}^0, \bar{\psi}^0) = (H, \bar{V})$ .

**12.** Soit  $n = 3$  et  $\nu$  le p. p. c. m. des  $V_{0i}$ ,  $u = \tau_1^{-1} \nu \tau_1$  celui des  $U_{0i}$ .  $\nu$  est un  $g_{\pi^3}$  sylowien de  $H^0$  dont le central est le  $g_{\pi}$  p. p. c. m. des  $u_i$  (7). Cherchons ici le normalisant  $\bar{u}$  de  $u$  dans  $H$ .  $u$  est permutable à  $m_{0i} \nu^{\pi-1}$  (on verra dans un Mémoire ultérieur, que  $\{u, m_{0i} \nu^{\pi-1}\}$  est le diviseur fixant le point 100 dans  $H$ ) et à  $m_{1i}$ . Donc  $\bar{u}$  contient  $\{u, m_{0i} \nu^{\pi-1}, m_{1i}\}$ .

Pour que  $\alpha^{-1} U_{0i} \alpha$  soit de la forme  $U_{0i\sigma} u_{i\lambda}$ , on trouve, comme pour  $n = 4$  (l'élimination des coefficients non nuls de  $U_{0i\sigma} u_{i\lambda}$  est ici inutile),  $\alpha_{0i} = \beta_{1i} = \alpha_{1i}, \beta_{10} = 0$ , et comme (6) donne  $\alpha_{1i} \beta'_{11} = 1$ , il faut que  $\beta_{10} = 0$ . Les autres conditions (4)-(6) deviennent alors

$$\alpha'_{11} \beta'_{11} - \beta'_{11} \alpha'_{11} + \omega \alpha'_{01} \alpha'_{01} = 0, \quad \alpha_{00} \alpha_{00} = 1, \quad \alpha_{10} \beta'_{11} + \omega \alpha_{00} \alpha'_{11} = 0.$$

Comme  $\alpha_{00} \alpha_{00} = \alpha_{11} \beta'_{11} = 1$ , on peut, en multipliant  $\alpha$  par des puissances de  $m_{0i} \nu^{\pi-1}$  et de  $m_{1i}$ , réduire  $\alpha_{11}, \beta'_{11}$  et  $\alpha_{00}$  à 1. Les conditions précédentes expriment alors que  $\alpha$  est dans  $u$ . Donc  $\bar{u} = \{u, m_{0i} \nu^{\pi-1}, m_{1i}\}$ , et  $(H, \bar{u}) = \pi^3 + 1$ . Le p. g. c. d. de  $\bar{u}, H^0$  est évidemment  $\{u, m_{0i} \nu^{\pi-1}, m_{1i}\} = \bar{u}^0$ , et  $(H^0, \bar{u}^0) = \pi^3 + 1$  (d'ailleurs,  $\nu$  étant un  $g_{\pi^3}$  sylowien, on savait *a priori* qu'il avait les mêmes conjugués dans  $H$  et  $H_0$ ).

Remplaçons les lettres  $\nu, u$  par  $\nu, u$  pour indiquer qu'on regarde les variables comme homogènes. Le  $g_{\pi^3} u$ , toujours ici premier au  $g_{\pi^3+1} J$ , est isomorphe à  $u$ . Mais  $\bar{u}$  contient  $J$  (*a priori*), et  $\bar{u}^0$  contient  $J^0$ . Donc  $(\mathfrak{K}, \bar{u}) = (\mathfrak{K}^0, \bar{u}^0) = \pi^3 + 1 = (H, \bar{V})$ .

**13.** Supposons  $n \geq 4$ , et soit  $\Gamma$  un diviseur normal de  $H$  non contenu dans  $J$ . Si  $\alpha$  est dans  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  contient aussi (les notations étant celles du n° 3)

$$u_{i\lambda}^{-1} \alpha u_{i\lambda} = \begin{pmatrix} x_i & X_i + \lambda Y_i - \lambda \alpha_{ii} y_i - \lambda^2 \beta_{ii} y_i \\ y_i & Y_i - \lambda \beta_{ii} y_i \\ x_j & X_j - \lambda \alpha_{ji} y_i & (j \neq i) \\ y_j & Y_j - \lambda \beta_{ji} y_i \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 V_{ik\rho}^{-1} \alpha V_{ik\rho} &= \begin{array}{l} x_i \quad X_i + \rho X_k - \rho \alpha_{ii} x_k + \dot{\rho} \alpha'_{ik} y_i - \rho^2 \alpha_{ki} x_k + \rho \dot{\rho} \alpha'_{kk} y_i \\ y_i \quad Y_i - \rho \beta_{ii} x_k + \dot{\rho} \beta'_{ik} y_i \\ x_k \quad X_k - \rho \alpha_{ki} x_k + \dot{\rho} \alpha'_{kk} y_i \\ y_k \quad Y_k - \dot{\rho} Y_i - \rho \beta_{ki} x_k + \dot{\rho} \beta'_{kk} y_i + \rho \dot{\rho} \beta'_{ii} x_k - \rho^2 \beta'_{ik} y_i \\ x_j \quad X_j - \rho \alpha_{ji} x_k + \dot{\rho} \alpha'_{jk} y_i \quad (j \neq i, k) \\ y_j \quad Y_j - \rho \beta_{ji} x_k + \dot{\rho} \beta'_{jk} y_i \end{array}, \\
 U_{ik\rho}^{-1} \alpha U_{ik\rho} &= \begin{array}{l} x_i \quad X_i + \rho Y_k - \rho \alpha_{ii} y_k - \dot{\rho} \alpha_{ik} y_i - \rho^2 \beta_{ki} y_k - \rho \dot{\rho} \beta_{kk} y_i \\ y_i \quad Y_i - \rho \beta_{ii} y_k - \dot{\rho} \beta'_{ik} y_i \\ x_k \quad X_k + \dot{\rho} Y_i - \rho \alpha_{ki} y_k - \dot{\rho} \alpha_{kk} y_i - \rho \dot{\rho} \beta_{ii} y_k - \rho^2 \beta_{ik} y_i \\ y_k \quad Y_k - \rho \beta_{ki} y_k - \dot{\rho} \beta_{kk} y_i \\ x_j \quad X_j - \rho \alpha_{ji} y_k - \dot{\rho} \alpha_{jk} y_i \quad (j \neq i, k) \\ y_j \quad Y_j - \rho \beta_{ji} y_k - \dot{\rho} \beta_{jk} y_i \end{array}, \\
 W_{ik\rho}^{-1} \alpha W_{ik\rho} &= \begin{array}{l} x_i \quad X_i + \rho \alpha'_{ii} x_k + \dot{\rho} \alpha'_{ik} x_i \\ y_i \quad Y_i + \rho X_k + \rho \beta'_{ii} x_k + \dot{\rho} \beta'_{ki} x_i + \rho^2 \alpha'_{ki} x_k + \rho \dot{\rho} \alpha'_{kk} x_i \\ x_k \quad X_k + \rho \alpha'_{ki} x_k + \dot{\rho} \alpha'_{kk} x_i \\ y_k \quad Y_k + \dot{\rho} X_i + \rho \beta'_{ki} x_k + \dot{\rho} \beta'_{kk} x_i + \rho \dot{\rho} \alpha'_{ii} x_k + \rho^2 \alpha'_{ik} x_i \\ x_j \quad X_j + \rho \alpha'_{ji} x_k + \dot{\rho} \alpha'_{jk} x_i \quad (j \neq i, k) \\ y_j \quad Y_j + \rho \beta'_{ji} x_k + \dot{\rho} \beta'_{jk} x_i \end{array},
 \end{aligned}$$

ainsi que les substitutions  $\alpha^{-1} u_{i\lambda}^{-1} \alpha u_{i\lambda}$ ,  $\alpha^{-1} V_{ik\rho}^{-1} \alpha V_{ik\rho}$ ,  $\alpha^{-1} U_{ik\rho}^{-1} \alpha U_{ik\rho}$ ,  $\alpha^{-1} W_{ik\rho}^{-1} \alpha W_{ik\rho}$ , qui se déduisent des précédentes en y remplaçant, dans les fonctions substituées aux variables,  $X_i, Y_i$  par  $x_i, y_i$  et  $x_i, y_i$  par  $X_i, Y_i$  (3).

Tout d'abord  $\Gamma$  contient des  $\alpha$  qui ne sont pas des multiplications, car les conditions que  $\alpha, u_{i\lambda}^{-1} \alpha u_{i\lambda}, V_{ik\rho}^{-1} \alpha V_{ik\rho}$  ( $i \geq 0$ ) soient des multiplications donnent respectivement  $\alpha_{ii} \beta'_{ii} = 1$ ,  $\alpha_{ii} = \beta'_{ii}$ ,  $\alpha_{kk} = \alpha_{ii}$ ,  $\alpha_{00} = \alpha_{ii}$  (si  $\eta = 1$ ), donc  $\alpha = 1$  ou  $d$ .

Soit donc  $\alpha$  une substitution de  $\Gamma$  autre qu'une multiplication. Si  $\eta = 1$  et si tous les coefficients non diagonaux autres que les  $\alpha_{i0}, \beta_{i0}$  sont nuls, les équations (4) et (6) (pour  $j = 0, k = 1, \dots, \nu$ ) montrent que ces derniers sont aussi nuls. Donc un des autres coefficients non diagonaux est  $\neq 0$ . Donc, en transformant au besoin  $\alpha$  par une  $T'_{ik} \tau_i^s$

( $r, s = 0, 1$ ), on peut supposer qu'un des  $\alpha_{j_1}, \beta_{j_1}$  autres que  $\alpha_{1_1}$  est  $\neq 0$ .

Je dis maintenant que  $\Gamma$  contient, hors de  $J$ , une  $\alpha$  où les  $\alpha_{j_1}, \beta_{j_1}$  autres que  $\alpha_{1_1}, \beta_{1_1}$  sont tous nuls,  $\beta_{1_1}$  étant  $\neq 0$ . Prenons en effet dans  $\Gamma$ , hors de  $J$ , une  $\alpha$  où ces  $\alpha_{j_1}, \beta_{j_1}$  ( $j \neq 1$ ) ne soient pas tous nuls. Si  $\alpha_{0_1}$  est le seul d'entre eux  $\neq 0$ ,  $\alpha_{1_1}$  et  $\beta_{1_1}$  sont, d'après (4), tous deux  $\neq 0$ ; une transformée (1) de  $\alpha$  par  $U_{0_1\rho}$  [où  $\beta_{1_1}, \alpha_{j_1}, \beta_{j_1}$  ( $i > 1$ ) sont conservés tandis que  $\alpha_{0_1}$  est remplacé par  $\alpha_{0_1} + \rho\beta_{1_1}$ ] aura donc la forme voulue (elle ne sera pas dans  $J$  puisque  $\beta_{1_1} \neq 0$ ). Si un des  $\alpha_{j_1}, \beta_{j_1}$  où  $j \neq 0$  est  $\neq 0$ , on peut, en transformant au besoin par une  $\tau_j$ , supposer que c'est un  $\beta_{j_1}$ . Soit donc (en transformant au besoin par une  $T_{2j}$ )  $\beta_{2_1} \neq 0$ . Si maintenant  $\beta_{1_1} = 0$ , on le rendra  $\neq 0$  en transformant par une  $V_{2_1\rho}$  telle que  $\rho\dot{\rho}\beta_{2_2}$  soit  $\neq \rho\beta_{1_2} + \dot{\rho}\beta_{2_1}$ , ou bien par les trois opérations suivantes: 1° une transformation par  $U_{1_2\rho}$  qui rendra  $\alpha_{1_1}$  arbitraire; 2° le remplacement de  $\alpha$  par  $\alpha^{-1}u_{i\lambda}^{-1}\alpha u_{i\lambda}$  qui substitue  $\lambda(1 - \alpha_{1_1}\dot{\alpha}_{1_1})$  à  $\dot{\alpha}'_{1_1}$ ; 3° une transformation par  $\tau_1$ . En transformant alors par des  $V_{1j}, U_{1j}$  où  $j \neq 1$ , on annulera les  $\beta_{j_1}, \alpha_{j_1}$  où  $j \neq 1$  sans altérer  $\beta_{1_1}$ .

Dès lors  $Y'_1$  se réduit à  $-\beta_{1_1}x_1 + \dot{\alpha}_{1_1}y_1$  et  $\alpha^{-1}u_{i\lambda}^{-1}\alpha u_{i\lambda}$  à

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & (1 + \lambda\alpha_{1_1}\dot{\beta}_{1_1} + \lambda^2\beta_{1_1}\dot{\beta}_{1_1})x_1 + \lambda(1 - \alpha_{1_1}\dot{\alpha}_{1_1} - \lambda\dot{\alpha}_{1_1}\beta_{1_1})y_1 \\ y_1 & \lambda\beta_{1_1}\dot{\beta}_{1_1}x_1 + \lambda(1 - \lambda\dot{\alpha}_{1_1}\beta_{1_1})y_1 \end{vmatrix},$$

les variables non écrites étant inaltérées, et  $\beta_{1_1} \neq 0$ . D'après (4),  $\alpha_{1_1}\dot{\beta}_{1_1} = \beta_{1_1}\dot{\alpha}_{1_1}$ , en sorte que les coefficients de  $\beta$  sont réels comme il le faut (5). Donc, en prenant au besoin  $\beta$  pour  $\alpha$ , on peut supposer  $\alpha_{1_1}$  et  $\beta_{1_1}$  réels  $\neq 0$ .

Soit alors  $U^i \equiv U(2, \pi)$  (5) le groupe des substitutions de  $H^0(n, \pi)$  qui laissent inaltérées les variables autres que  $x_i, y_i$  ( $i \neq 0$ ),  $D^i = \{m_{i-1}\}$  son  $g_2$  normal et  $J'$  le p. g. c. d. de  $\Gamma, J$ . Comme  $\beta$  est dans  $U^i$ , hors de  $D^iJ'$  (en supposant  $\lambda \neq 0$ ), le p. g. c. d. de  $\Gamma, U^iJ'$ , normal dans  $U^iJ'$ , est  $> D^iJ'$ . Donc le p. g. c. d. de  $\Gamma|J', U^iJ'|J'$ , normal

---

(1) Cette transformation de  $\alpha$  et celles qui vont suivre produisent sur les  $\alpha_{j_1}, \beta_{j_1}$  où  $j \neq 1$  les mêmes changements que la simple multiplication à droite de  $\alpha$  par la transformante.

dans  $U^i J' | J'$ , est  $> D^i J' | J'$ . Or, si  $\pi$  est  $> 3$ ,  $U^i J' | J'$  est simple. Donc, si  $\pi > 3$ ,  $\Gamma$  contient  $U^i$  et de même  $U^2, \dots, U^v$ .

Soit d'abord  $\pi > 3$ .  $\Gamma$ , contenant les  $m_i$  et les  $v_i$  (qui sont dans les  $U^i$ ), contient  $m_{i\lambda}^{-1} V_{ik\rho} m_{ik} V_{ik\rho}^{-1} = V_{ik,\rho(\lambda-1)}$  [cf. (19)] et

$$m_{i\lambda} V_{0i\rho} m_{i\lambda}^{-1} V_{0i\rho}^{-1} = V_{0i,\rho\lambda} V_{0i\rho}^{-1} = V_{0i,\rho(\lambda-1)} v_{1,b(1-\lambda)\rho\rho} \quad [\text{cf. (19), (11), (14)}],$$

et par suite tous les  $V_{jk}$  ( $j \geq 0$ ). Étant normal, il contient encore les  $u_i$ . Il contient donc tous les générateurs de  $H^0$  (6, 8). Donc, pour  $\pi > 3$ , tout diviseur normal de  $H$  non contenu dans  $J$  est  $\geq H^0$ . On voit de même, en remplaçant dans ce qui précède  $H$  par  $H^0$  et  $J$  par  $J^0$ , que, pour  $\pi > 3$ , tout diviseur normal de  $H^0$  non contenu dans  $J^0$  coïncide avec  $H^0$ .

Soit  $\pi \leq 3$ . On sait seulement alors que  $\Gamma$ , diviseur normal de  $H$  non  $\leq J$  (ou diviseur normal de  $H^0$  non  $\leq J^0$ ), contient  $\beta$  où l'on peut supposer  $\alpha_{11}$  et  $\beta_{11}$  réels  $\neq 0$ . Donc  $\alpha_{11}$ ,  $\beta_{11}$  et  $\lambda$  (supposé aussi  $\neq 0$ ) sont égaux à  $\pm 1$ , et, en posant  $\alpha_{11} \beta_{11} = \delta$ ,

$$\beta = \begin{vmatrix} x_1 & (\lambda\delta - 1)x_1 - \delta y_1 \\ y_1 & \lambda x_1 + (1 - \lambda\delta)y_1 \end{vmatrix} \quad (\lambda = \pm 1, \delta = \pm 1).$$

Soit  $\pi = 3$ . En prenant  $\lambda = \delta$  et  $\lambda = -\delta$  on a deux substitutions qui engendrent le  $g_8 Q^i$  normal dans  $U^i$  (S., 83). Donc  $\Gamma$  contient  $Q_i$  et de même le  $g_8 Q^i$  normal dans  $U^i$ . Donc  $\Gamma$  contient les  $\tau_i$ , les  $m_i$ , et par suite, comme pour  $\pi > 3$  (en supposant, ce qui est permis,  $b = 0$ ), tous les  $V_{jk}$  ( $j \geq 0$ ). Étant normal, il contient encore les  $U_{jk}$ ,  $W_{jk}$  et, d'après (12), les  $u_i$ ,  $v_i$ . Il contient donc tous les générateurs de  $H_0$  (6, 8).

Soit  $\pi = 2$ . Alors  $\beta = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix} = \tau_i u_{11}$ , et  $\Gamma$  contient  $\tau_i u_{11} = v_{11} \tau_i$ , donc, si  $n \geq 4$ ,

$$(\tau_i u_{11})^{-1} V_{ik\rho}^{-1} \tau_i u_{11} V_{ik\rho} = W_{ik\rho} v_{ki} = v_{ki} W_{ik\rho},$$

donc

$$W_{ik\rho} v_{k1} v_{k1} W_{ik\sigma} = W_{ik,\rho+\sigma} \quad (i, k \neq 0),$$

dans toutes les  $W_{ik}$ ,  $V_{ik}$ ,  $U_{ik}$ , donc aussi les  $V_{0k\rho} V_{ki\sigma} V_{0k\rho}^{-1}$ , donc, d'après (18), les  $V_{0i}$  et aussi, d'après (13), les  $u_i$ ,  $v_i$ , donc les  $\tau_i$ . Donc, pour  $n \geq 4$ ,  $\Gamma = H^0$ .

Ainsi, en exceptant le cas où  $\pi = 2$  avec  $n \leq 3$ , tout diviseur normal de  $H(n, \pi)$  ou de  $H^0(n, \pi)$  non contenu dans  $J$  est  $\geq H^0$ . Alors  $\mathfrak{K}^0(n, \pi) \equiv H^0 | J^0$  est simple, et  $J$  est le central de  $H$ ,  $J^0$  celui de  $H^0$ .  $H^0(2, 2) \equiv U(2, 2)$  est isomorphe au  $\mathfrak{g}_6$  symétrique (S., 83), et l'on va voir que le  $\mathfrak{g}_{216} H^0(3, 2)$  est résoluble (1).

On vérifie d'ailleurs directement, en développant les conditions  $\alpha V_{ik\lambda} = V_{ik\lambda} \alpha$ ,  $\alpha U_{ik\lambda} = U_{ik\lambda} \alpha$  ( $i, k \geq 0$ ), ou en se servant (pour  $i, k \neq 0$ ) des expressions données de  $V_{ik\lambda}^{-1} \alpha V_{ik\lambda}$ ,  $U_{ik\lambda}^{-1} \alpha U_{ik\lambda}$ , que toute substitution  $\alpha$  permutable à chaque substitution de  $H$  est une similitude. Donc le central de  $H'$  est  $I'$ .

14. Soit donc  $\pi = 2, n = 3$ . Alors  $\nu^2 + \nu + 1 = 0, \omega = 1$ .  $\Gamma$  contient

$$\beta^{-1} V_{01\rho}^{-1} \beta V_{01\rho} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + \nu y_1 + \rho x \\ y_1 & \nu x_1 + y_1 + \nu \rho x \\ x & \rho x_1 + \nu \rho y_1 \end{vmatrix}.$$

Prenons les variables  $y = \nu x_1 + y_1, z = x_1 + \nu y_1$  ( $x_1 = y + \nu z, y_1 = \nu y + z$ ) qui ramènent  $h$  à la forme  $\varepsilon = xx + yy + zz$  (cf. 2), et convenons de désigner par les mêmes lettres les substitutions de  $H^0$  et leurs expressions respectives par les variables de  $E^0$ . On a alors (l'ordre des variables étant  $x, y, z$ ) :

$$\beta = |x, \nu y, \nu z|, \quad \beta^{-1} V_{01\rho}^{-1} \beta V_{01\rho} = |\rho z, \rho x, y|, \\ (\beta^{-1} V_{01\rho}^{-1} \beta V_{01\rho})^2 = \theta = |y, z, x|.$$

$\Gamma$ , contenant  $\theta$  et  $\beta = \beta_1$  ( $\theta^3 = \beta^3 = 1$ ), contient aussi  $\theta\beta\theta^{-1} = |\nu x, y, \nu z| = \beta_2, \theta^{-1}\beta\theta = |\nu x, \nu y, z| = \beta_3$  et  $\beta_1\beta_2^2 = |\nu x, \nu y, \nu z| = \delta$  qui engendre  $J^0$ . Il est clair que  $\{\delta, \beta\}$  est un  $\mathfrak{g}_6$  abélien principal, normal dans le  $\mathfrak{g}_{27}$  ;  $\{\delta, \beta, \theta\} = \{\beta, \theta\} = P$  défini par les équations de  $\{\delta, \beta\}$  jointes à  $\theta^3 = 1, \theta^{-1}\beta\theta = \beta\delta, \theta\delta = \delta\theta$ . Je dis que  $P$  est normal dans  $A^0$ . Comme  $u_{11} = \tau, \beta$ , il suffit de montrer que  $P$  est permutable à  $\tau$ , et à  $V_{01\rho}$ . Or, en posant  $\tau_1 = \zeta_1 = \zeta = |x, z, y|, \theta\zeta\theta^{-1} = \zeta_2 = |z, y, x|,$

(1) D'ailleurs  $216 = 2^3 \cdot 3^3$ , et tout groupe dont l'ordre n'a que deux facteurs premiers distincts est résoluble, d'après un théorème dû à M. Burnside [*P. L. M. S.*, 2<sup>e</sup> série, t. I, 1904, p. 389].



$\theta^{-1}\zeta\theta = \zeta_3 = |y, x, z|$  ( $\zeta_1 \zeta_2 = \zeta_3 \zeta_4 = \theta$ ) et

$$V_{\theta_1\rho} = V_\rho = |x + \rho y + \rho^2 z, \rho x + \rho^2 y + z, \rho^2 x + \rho y + \rho z|,$$

on a

$$\begin{aligned} \zeta_i \theta \zeta_i &= \theta^2, & \zeta_i \beta_i \zeta_i &= \beta_i^2, & \zeta_i \beta_k \zeta_i &= \beta_k^2 & (i, k, l \text{ distincts}), \\ V_1^{-1} \beta V_1 &= \theta^2 \beta \delta^2, & V_1^{-1} \theta V_1 &= \theta^2 \beta^2 \delta, & V_3^{-1} \beta V_3 &= \theta^2 \beta^2, & V_3^{-1} \theta V_3 &= \theta \beta^2 \delta, \\ V_3^2 &= V_{1+\nu} = V_1 V_\nu \nu_{11} = V_1 V_3^3 = V_1 V_3^{-1} = V_\nu V_1. \end{aligned}$$

Ainsi  $P$  est normal dans  $A^0$ . De plus  $\{V_1, V_\nu\} = Q$  est un  $g_8$  des quaternions défini par  $V_1^2 = V_\nu^2 = 1$ ,  $V_3^2 = V_1^2 (= \beta\zeta = \nu_{11})$ ,  $V_3^{-1} V_1 V_3 = V_1^3$ , et  $A^0 = PQ$ . Les équations de  $A^0$  résultent évidemment de ce qui précède.

Tout diviseur normal  $X$  de  $A^0$  non contenu dans  $J^0$  contient le  $g_{27}$  sylowien normal  $P$ . En effet, l'ordre du p. g. c. d. de  $\Gamma, P$  est  $> 1$ , car les équations précédentes montrent qu'aucun diviseur de  $Q$  n'est normal dans  $A^0$ . Donc  $\Gamma$  contient  $J^0$  (*E.*, 152). Or on vérifie de suite sur les équations précédentes que tout diviseur normal  $> 1$  de  $A^0 | J^0$  contient  $P | J^0$  <sup>(1)</sup>.

On remarquera que le  $g_{54} | P, \zeta$  contient  $u_{11} = \zeta\beta = |x, \nu z, \rho y|$ ,  $\nu_{11} = \beta\zeta = |x, \rho z, \nu y|$  et  $V_\rho^2 = \nu_{11}$  [*cf.* (41)].

Désignons par  $xyz$  le point de coordonnées homogènes  $x, y, z$ , et écrivons respectivement  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, \nu$  pour 001,  $\nu^2 01$ , 101,  $\nu^2 \nu^2 1$ ,  $\nu 11$ ,  $\nu 01$ ,  $0\nu^2 1$ ,  $\nu\nu 1$ ,  $\nu\nu^2 1$ ,  $0\nu 1$ ,  $\nu 11$ ,  $\nu^2 \nu 1$ ,  $111$ ,  $\nu^2 11$ ,  $011$ ,  $\nu^2 10$ ,  $\nu 10$ ,  $110$ ,  $010$ ,  $100$  (ce sont les symboles de  $A^0$ ). On a alors, en désignant encore, d'une manière générale, par la même lettre une substitution de  $A^0$  et son action sur les symboles  $a, b, \dots, \nu$ :

$$\begin{aligned} \zeta &= br.ct.fs.gk.q.au.de.hm.in.l.o.p.\nu, \\ \zeta_3 &= bg.cg.fk.rs.t.el.in.pm.uv.a.d.h.o, \\ \beta &= bcf.gkq.rst.del.hpm.ino.a.u.v, \\ \theta &= bks.cqt.grf.auv.del.hmp.i.n.o = \zeta_3 \zeta, \\ V_1 &= bqtk.cfsr.g.aeul.hnpo.dv.im, \\ V_\nu &= brtf.cqsk.g.ahup.eoln.di.mv \quad (2). \end{aligned}$$

(1) On peut se servir aussi de la représentation de  $A^0 | J^0$  en  $g^9$  qui a déjà été rencontrée (*S.*, 73, p. 101;  $A^0 | J^0$  est isomorphe au  $g_{72}$ , non métacyclique ayant un  $g_3$  non cyclique normal) et qu'on va retrouver dans un instant.

(2) *Cf.* *S.*, 79 et 109 où les notations  $\nu, \zeta, \zeta_3, \beta$  sont remplacées respectivement par  $i, \zeta, \rho, a_0$ .

Ce sont les générateurs du  $g_{72} \mathfrak{A}^0 \equiv A^0 \mid J^0$ . D'après ce qui précède, tout diviseur normal de  $\mathfrak{A}^0$  contient le  $g_6 \mid \beta, \theta \mid$ .

$\mathfrak{A}^0$  a deux systèmes d'intransitivité, l'un  $\mathfrak{q}_0$  de degré 9 formé de  $b, c, f, g, k, q, r, s, t$ , l'autre  $\mathfrak{q}_1$  de degré 12 formé de  $a, d, e, h, i, l, m, n, o, p, u, v$ . Le diviseur  $\mathfrak{x}^0$  fixant  $g$  est le  $g_3 \mid V_1, V_2 \mid$ . Le diviseur  $\mathfrak{x}_1^0$  fixant  $v$  est le  $g_6 \mid \beta, \zeta \mid$ . On réduit  $\mathfrak{A}$  de  $\mathfrak{A}^0$  en adjoignant à  $\mathfrak{A}^0$  la substitution

$$s_v = |x, y, vz| = bfc.gkq.r.s.t.dho.epi.lmn.a.u.v.$$

$\mathfrak{A}$  a les mêmes systèmes d'intransitivité que  $\mathfrak{A}^0$ . Mais les diviseurs  $\mathfrak{x}$  et  $\mathfrak{x}_1$  de  $\mathfrak{A}$  qui fixent respectivement  $g$  et  $v$  n'ont pas les mêmes systèmes d'intransitivité que  $\mathfrak{x}^0$  et  $\mathfrak{x}_1^0$ . Le constituant de  $\mathfrak{A}$  (ou *a fortiori* de  $\mathfrak{A}^0$ ) qui a pour champ  $\mathfrak{q}_1$  a les quatre systèmes d'imprimitivité *auv, del, hmp, ino*. Le constituant de  $\mathfrak{A}^0$  dont le champ est  $\mathfrak{q}_0$  est évidemment primitif <sup>(1)</sup>.

**15.** Soit  $P_{A(n,\pi)} = P = P_0$  le p. p. c. m. des  $V_{1,k}, U_{1,k} (k = 2, \dots, \nu)$ ,  $U_{1,0}, u_1$ . En désignant par  $\{u_1\}$  le  $g_\pi$  abélien principal dérivé des  $u_1$  (normaux dans  $P$ ),  $P \mid \{u_1\}$  est un  $g_{\pi^{m-1}}$  abélien principal (cf. E., 142-145 pour  $\pi = p$ ). Les équations de  $P$  sont formées des équations de  $\{u_1\}$  jointes à celles des relations du n° 7 où figurent les seuls générateurs de  $P$ ; car ces équations définissent un groupe d'ordre  $\leq (P, 1)$  (E., 18, 19) et sont vérifiées par  $P$ .

Soit  $P_i$  le groupe déduit de  $H_i$  (4) comme  $P$  de  $H$ , et formons de même successivement les groupes  $P_2, \dots$ . Toute substitution de  $P_i$  est permutable à  $P_{i-1}$  (7), en sorte que  $PP_1 \dots P_{\nu-1} = P_{A(n,\pi)} = P$  est un  $g_{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}$  sylowien de  $H$ .

Écrivons un instant  $U_{i\lambda}$  pour  $u_{i\lambda}$  et  $U_{i,\nu+1,p}$  pour  $U_{i,0p}$ , désignons par  $\nu_i$  la plus haute valeur du second indice de  $U_{ik}$  dans  $P$  (donc  $\nu_i$  est  $\geq \nu$ , et  $\nu + \nu_i = n$ ), et formons le tableau triangulaire

$$\begin{matrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & \dots & U_{1\nu_1} & V_{1\nu} & V_{1,\nu-1} & \dots & V_{13} & V_{12} \\ & U_{22} & U_{23} & \dots & U_{2\nu_1} & V_{2\nu} & V_{2,\nu-1} & \dots & V_{23} & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & U_{i1} & \dots & U_{i\nu_1} & V_{i\nu} & V_{i,\nu-1} & \dots & V_{i,i+1}, \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \end{matrix}$$

<sup>(1)</sup> On trouvera des généralisations de ces propriétés dans un article déjà cité (*Comptes rendus*, t. 161, p. 553) et dans un Mémoire ultérieur.

la dernière ligne se réduisant à  $U_{\nu}$ , si  $\nu_1 = \nu$ , et aux deux termes  $U_{\nu\nu}$ ,  $U_{\nu, \nu+2}$  si  $\nu_1 = \nu + 1$ , et les  $V$  disparaissent si  $\nu = 1$ . Appelons  $s^{\text{ième}}$  transversale la rangée de termes (parallèle au côté droit du triangle) formée du  $s^{\text{ième}}$  terme de la première ligne, du  $(s - 2)^{\text{ième}}$  de la seconde, ... du  $[s - 2(i - 1)]^{\text{ième}}$  de la  $i^{\text{ième}}$ , ... Pour  $n \leq 3$ ,  $\mathbf{P}$  est abélien. Pour  $n > 3$ , le  $s^{\text{ième}}$  central (*E.*, 94)  $C_s$  de  $\mathbf{P}$  est le p. p. c. m. des  $U_{ik}$ ,  $V_{ik}$  des  $s$  premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des  $U_{ik}$  où  $i + k \leq s + 1$  et des  $V_{ik}$  où  $k - i \geq n - s$  : l'ordre de  $C_s$  est alors  $\pi^{\frac{s(s+1)}{2}}$ . Montrons que si le théorème est vrai pour  $C_s$  ( $C_0 = 1$ ), il l'est pour  $C_{s+1}$ . Soit  $\xi$  un élément de  $C_{s+1}$  hors de  $C_s$ , exprimé par les générateurs de  $\mathbf{P}$  en faisant passer ceux de  $P_i$  avant ceux de  $P_{i+1}$ . Si  $\xi$  contient (dans l'expression considérée) un  $V_{kl}$  hors de  $C_s$ ,  $l - k$  est  $\leq n - s - 1$ . Or, pour  $k > 1$ ,  $V_{k-1, k}$  transforme  $V_{kl}$  en  $V_{k-1, l} V_{kl}$ . Pour que  $C_s \xi$  soit permutable à  $V_{k-1, k}$ , il faut donc que  $V_{k-1, l}$  soit dans  $C_s$ , d'où  $l - k \geq n - s - 1$ . Donc  $l - k = n - s - 1$ . Pour  $k = 1$  et  $l = \nu$ , la permutabilité avec  $V_{l, l+1}$  conduit de même à  $l - k = n - s - 1$ . Pour  $k = 1$  et  $l = \nu$ , la permutabilité avec  $U_{\nu\nu}$  exige que  $C_s$  contienne  $U_{1\nu}$ , d'où  $1 + \nu \leq s + 1$ , et de même  $l - k = n - s - 1$ . Si  $\xi$  contient un  $U_{kl}$  ( $k \leq l$  si  $l \leq \nu$ ;  $k < l$  si  $l > \nu$ ) hors de  $C_s$ ,  $k + l$  est  $\geq s + 2$ . Or, pour  $k > 1$ ,  $V_{k-1, k}$  transforme  $U_{kl}$  en  $U_{k-1, l} U_{kl}$  si  $l \leq \nu$  et  $k < l$ , et en  $U_{k-1, k} U_{k-1, l} U_{kl}$  si  $l > \nu$  ou si  $k = l$ . Donc  $k - 1 + l$  est  $\leq s + 1$ , et  $k + l = s + 2$ . Pour  $k = 1$  et  $1 < l \leq \nu$ ,  $V_{l-1, l}$  transforme  $U_{kl}$  en  $U_{1, l-1} U_{kl}$ , d'où  $l \leq s + 1$ , et de même  $k + l = s + 2$ . Pour  $k = l = 1$ , la condition  $k + l \geq s + 2$  donne  $s = 0$ , d'où encore  $k + l = s + 2$ . Pour  $k = 1$ ,  $l = \nu + 1$  et  $\nu > 1$ ,  $U_{\nu l}$  transforme  $U_{kl}$  en  $U_{1\nu} U_{kl}$ , d'où  $1 + \nu \leq s + 1$ , et encore  $k + l = s + 2$ . Pour  $k = \nu = 1$  et  $l = 2$ ,  $\mathbf{P}$  est abélien. Donc, pour  $n > 3$ ,  $\xi$  ne doit contenir que les générateurs de l'énoncé, et cela suffit, car alors tout générateur de  $\mathbf{P}$  transforme tout générateur de  $\xi$  en un élément de  $C_s \xi$ . L'ordre de  $C_s$  se calcule en comptant les éléments à prendre dans chaque ligne du tableau rectangulaire.

Les substitutions de **P** ont la forme générale

$$\alpha_{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha'_{11} & \alpha_{12} & \alpha'_{12} & \alpha_{13} & \alpha'_{13} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & \alpha'_{21} & 1 & \alpha'_{22} & \alpha_{23} & \alpha'_{23} & \dots \\ 0 & \beta'_{21} & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & \alpha'_{31} & 0 & \alpha'_{32} & 1 & \alpha'_{33} & \dots \\ 0 & \beta'_{31} & 0 & \beta'_{32} & 0 & 1 & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

les coefficients situés au-dessus de la diagonale (ou ceux situés au-dessous) étant arbitraires, et les autres étant déterminés par ceux-là d'après les relations (4)-(6) [ou (8)-(10)].

Toute substitution  $\lambda$  de **H** permutable à **P** vérifie  $\alpha_{\mathbf{P}}\lambda = \lambda\gamma_{\mathbf{P}}$ ,  $\gamma_{\mathbf{P}}$  étant dans **P**. Supposons que  $\lambda$  se déduise de la substitution  $\alpha$  du n° 5 en remplaçant  $\alpha_{ik}$ ,  $\alpha'_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\beta'_{ik}$  par  $\lambda_{ik}$ ,  $\lambda'_{ik}$ ,  $\mu_{ik}$ ,  $\mu'_{ik}$  respectivement. La comparaison des coefficients de  $y_i$  et de  $x_2$  dans les fonctions que  $\alpha_{\mathbf{P}}\lambda$  et  $\lambda\gamma_{\mathbf{P}}$  substituent à  $y_i$  donne

$$\mu_{11}\alpha'_{11} + \mu_{12}\alpha'_{21} + \mu'_{12}\beta'_{21} + \mu_{13}\alpha'_{31} + \mu'_{13}\beta'_{31} + \dots = 0, \quad \mu_{11}\alpha_{12} = 0.$$

Or on peut supposer  $\alpha_{12}$  arbitraire. Donc  $\mu_{11} = 0$ . En prenant alors pour  $\alpha_{\mathbf{P}}$  une substitution où  $\alpha'_{21}$ ,  $\beta'_{21}$  soient arbitraires, on voit que  $\mu_{ij}$ ,  $\mu'_{ij}$  sont nuls pour  $j \neq 1$ . Alors, d'après (8) et (10) les  $\lambda_{j1}$ ,  $\mu_{j1}$  où  $j \neq 1$  sont nuls, et  $\lambda_{11}$ ,  $\mu'_{11} = 1$ . En multipliant  $\lambda$  à droite par une substitution de **P** on peut annuler les  $\lambda'_{j1}$ ,  $\mu'_{j1}$  où  $j \neq 1$ . Alors, d'après (5) et (6), tous les coefficients des deux premières lignes et colonnes sont nuls sauf  $\lambda_{11}$  et  $\mu'_{11}$ , qu'on réduira à 1 en multipliant à droite par une  $m_1$ . La substitution obtenue est alors dans **H**<sub>1</sub>. En continuant ainsi on voit que  $\lambda$  est dans **MP**, **M** étant le p. p. c. m. (abélien) des  $m_j$  ( $j \geq 0$ ). Donc **MP** est le normalisant de **P** dans **H**. L'ordre de **M** est évidemment  $(\pi^2 - 1)^\nu$  si  $n = 2\nu$ , et  $(\pi^2 - 1)^\nu(\pi + 1)$  si  $n = 2\nu + 1 > 1$ .

(1) En rangeant les variables dans l'ordre  $y_1, \dots, y_\nu, x, x_\nu, \dots, x_1$ , les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont tous nuls.

Son p. g. c. d.  $\mathbf{M}^0$  avec  $\mathbf{H}^0$  est d'indice  $\pi + 1$  dans  $\mathbf{M} = \Sigma_0^\pi \mathbf{M}^0 s$ , s ayant le même sens qu'au n° 2. Le normalisant de  $\mathbf{P}$  dans  $\mathbf{H}^0$  est  $\mathbf{M}^0 \mathbf{P}$ .  $\mathbf{M}$  est évidemment  $> \mathbf{J}$ , et  $\mathbf{M}^0 > \mathbf{J}^0$ .

$\mathbf{M}$  est son propre normalisant dans  $\mathbf{MP}$ . Car une relation de la forme  $(\mu \alpha_{\mathbf{P}})^{-1} \mu_0 \mu \alpha_{\mathbf{P}} = \mu_1$ ,  $\mu$ ,  $\mu_0$ ,  $\mu_1$  étant dans  $\mathbf{M}$ , entraînerait, puisque  $\mathbf{M}$  est abélien,  $\mu_0 \alpha_{\mathbf{P}} = \alpha_{\mathbf{P}} \mu_1$ ; d'où, comme on le voit directement,  $\mu_0 = \mu_1$ , et,  $\mu_0$  parcourant  $\mathbf{M}$ ,  $\alpha_{\mathbf{P}} = 1$ .

### III. — Groupe gauche.

16. Soit maintenant  $\bar{a} = -a$  et  $\alpha \alpha \bar{a} = fa$  (d'où  $|\alpha|^2 = f^n$ ). Supposons  $a$  réduite à la forme canonique  $\Sigma_i^n (x_i y_i' - y_i x_i')$  ( $n = 2\nu$ ) (*E.*, 195, 201, 202; *cf. S.*, p. 225), les variables de la première série étant  $x_1, y_1, \dots, x_\nu, y_\nu$ , et les variables correspondantes de la seconde  $x_1', y_1', \dots, x_\nu', y_\nu'$  (cogrédientes à  $x_1, y_1, \dots, x_\nu, y_\nu$ ). Le groupe  $\mathbf{A}$  sera dit alors *groupe gauche n-aire de  $\mathfrak{C}$* , et le groupe  $\mathfrak{A}$  *groupe gauche homogène ou fractionnaire n-aire de  $\mathfrak{C}$* . Je préciserai ces formes de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathfrak{A}$  en remplaçant partout les lettres  $\mathbf{A}$ ,  $\mathfrak{A}$  par  $\mathbf{G}$ ,  $\mathfrak{G}$ .

Posons

$$\gamma = \begin{vmatrix} x_i & i x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}, \quad \mu_p = \begin{vmatrix} x_i & p x_i \\ y_i & p^{-1} y_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, \dots, \nu).$$

Il est clair que  $\mathbf{G}' = \Sigma_0^{\pi-2} \mathbf{G} \gamma^k$ , et que  $\mathbf{G} \gamma^k$  est formé des substitutions de  $\mathbf{G}'$  qui multiplient  $a$  par  $\iota^k$ .  $\{\gamma^k\}$  est premier à  $\mathbf{G}$ , tandis que le p. g. c. d. de  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{I}$  est  $\mathbf{D}$ . Si donc  $p$  est  $> 2$ ,  $\gamma$  est hors de  $\mathbf{GI}$ ; mais  $\gamma^2 = \mu_1[\iota]$  est dans  $\mathbf{GI}$ , et  $\mathbf{G}' = \mathbf{GI} + \mathbf{GI} \gamma$ . Si  $p = 2$ ,  $\mathbf{G}' = \mathbf{GI}$ . Pour  $p \geq 2$ ,  $\mathbf{GI} = \mathbf{G}''$  est le groupe des substitutions qui multiplient  $a$  par un carré.

Ici  $\mathfrak{G}' = \mathbf{G}' | \mathbf{I}$ ,  $\mathfrak{G} = \mathbf{GI} | \mathbf{I} \equiv \mathbf{G} | \mathbf{D}$ . Donc, si  $p > 2$ ,  $\mathfrak{G}' | \mathfrak{G} \equiv \mathbf{G}' | \mathbf{GI}$  est d'ordre 2, et  $(\mathfrak{G}' \mathbf{I}) = (\mathbf{G}, \mathbf{I})$ . Si  $p = 2$ ,  $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G} \equiv \mathbf{G}$ .

17. Pour qu'une substitution

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_i & \sum_k (\alpha_{ik} x_k + \alpha'_{ik} y_k) = X_i \\ y_i & \sum_k (\beta_{ik} x_k + \beta'_{ik} y_k) = Y_i \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, \nu)$$

multiplie  $a$  par  $f$ , il faut et suffit que l'on ait

$$(1) \quad \sum_i (\alpha_{ij} \beta'_{ik} - \beta_{ij} \alpha'_{ik}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ f & \text{si } j = k \end{cases} \quad (i, j, k = 1, \dots, \nu).$$

$$(2) \quad \sum_i (\alpha_{ij} \beta_{ik} - \beta_{ij} \alpha_{ik}) = \sum_i (\alpha'_{ij} \beta'_{ik} - \beta'_{ij} \alpha'_{ik}) = 0$$

Comme ici  $a^2 = -\epsilon$ ,  $\epsilon$  étant la matrice unité d'ordre  $n$ , l'équation  $\alpha \bar{\alpha} \alpha = f a$  donne  $f \alpha^{-1} = -\bar{\alpha} \alpha$ , d'où

$$f \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} x_i & \sum_k (\beta'_{ki} x_k - \alpha'_{ki} y_k) = X_i \\ y_i & \sum_k (-\beta_{ki} x_k + \alpha_{ki} y_k) = Y_i \end{pmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, \nu),$$

et  $\bar{\alpha} \alpha \alpha = f a$  qui montre que  $G'$  (et de même  $G$ ) contient la transposée de chacune de ses substitutions.

Les conditions analogues à (1), (2) écrites pour  $\bar{\alpha}$  ou pour  $\alpha^{-1}$ , a priori équivalentes à (1), (2) sont ( $\alpha^{-1}$  multiplie  $a$  par  $f^{-1}$ )

$$(3) \quad \sum_i (\alpha_{ji} \beta'_{ki} - \beta_{ki} \alpha'_{ji}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases} \quad (i, j, k = 1, \dots, \nu).$$

$$(4) \quad \sum_i (\alpha_{ji} \alpha'_{ki} - \alpha'_{ji} \alpha_{ki}) = \sum_i (\beta_{ji} \beta'_{ki} - \beta'_{ji} \beta_{ki}) = 0$$

Ces formules ne sont d'ailleurs qu'un cas particulier de celles du n° 3, celui où  $n = 2\nu$  et où  $\alpha$  est dans  $\mathfrak{C}$ .

**18.** Désignons par (1)<sub>l</sub>, (2)<sub>l</sub>, (3)<sub>l</sub>, (4)<sub>l</sub> ce que deviennent (1), (2), (3), (4) pour  $j = k = l$ .

$G$  contient une  $\alpha$  dont les deux premières colonnes sont formées d'une solution arbitraire de (1)<sub>l</sub>, pour  $f = 1$ . Car soit  $\tau$  une substitution  $n$ -aire ayant les deux premières colonnes voulues. Elle transforme  $a$  en  $(x_l + u)(y_l + v') - (y_l + v)(x_l + u') + a_l$ ,  $u, v, a_l$  ( $= -\bar{a}_l$ ) ne contenant ni  $x_l$  ni  $y_l$ , et  $u', v'$  se déduisant de  $u, v$  par l'accentuation des variables. Si donc  $\tau_l$  est une substitution qui remplace  $x_l, y_l$  par  $x_l - u, y_l - v$  et dont l'action sur  $x_2, y_2, \dots$  canonise  $a_l$ ,  $\tau_l \tau$  répond à la question. Les substitutions de cette sorte forment le complexe  $G_l \alpha_0$ ,  $\alpha_0$  étant l'une d'elles, et  $G_l$  le diviseur de  $G$  formé des substitutions qui remplacent les  $x_i, y_i$  où  $i > 1$  par des fonctions de ces seules variables et  $x_l, y_l$  par  $x_l + X, y_l + Y$ ,  $X$  et  $Y$  ne dépendant pas de  $x_l, y_l$  (cf. 4). Or les conditions (1), (2) où l'on

fait un des seconds indices égal à 1 montrent que  $X = Y = 0$ , et que  $G$ , est le groupe des substitutions de  $a - (x, y' - y, x')$ , et est par suite semblable à  $G(n - 2, \pi)$ .

De même les substitutions de  $G$  dont les deux premières lignes forment une solution donnée de (3), forment le complexe  $\alpha_0 G$ ,  $\alpha_0$  étant l'une d'elles, qui existe toujours.

Comme (1), a  $\pi^{n-1}(\pi^n - 1)$  solutions (E., 44, 45; on le voit d'ailleurs ici immédiatement), il résulte de là que l'ordre de  $G(n, \pi)$  est  $\pi^{n^2} \Pi_1'(\pi^{2i} - 1)$ .

**19.**  $G$  contient évidemment toutes celles des substitutions de  $H^0(2\nu, \pi)$  indiquées au n° 6 pour lesquelles  $\rho$  est dans  $\mathcal{E}$ , et ces substitutions vérifient les relations du n° 7 où ne figure pas l'indice 0.

$G$  dérive des  $\tau_i$ , des  $u_{ik}$  et des  $V_{ik}$  ( $\lambda$  réel). Admettons-le en effet pour les valeurs de  $n$  inférieures à celle considérée. Il suffit de montrer que,  $\alpha$  étant dans  $G$ , on peut, en la multipliant à droite par des  $\tau_i$ ,  $u_i$ ,  $V_{ik}$ , la réduire à une substitution de  $G_1$ . Or les  $\alpha_{ii}$ ,  $\beta_{ii}$  n'étant pas tous nuls, on peut en multipliant  $\alpha$  à droite par une  $V$ , une  $U$ , une  $u$  ou une  $m$ , rendre  $\alpha_{11}$  égal à 1, puis, de même, par les  $V$ , annuler tous les  $\alpha_{ii}$  où  $i \neq 1$ . On annulera  $\beta_{11}$  par une  $v$ , et les  $\beta_{ii}$  où  $i \neq 1$  par les  $W$ . Alors, d'après (1),  $\beta'_{11} = 1$ . On pourra donc, par les  $V$ , annuler les  $\beta'_{ii}$  où  $i \neq 1$ . On annulera ensuite  $\alpha'_{ii}$  par une  $u$ , et les  $\alpha'_{ii}$  où  $i \neq 1$  par les  $U$ .

Donc toute substitution de  $G$  a un déterminant égal à 1 (comme les  $\tau$ ,  $u$ ,  $V$ ), et toute substitution de  $G'$  qui multiplie  $a$  par  $\iota^k$  a un déterminant égal à  $\iota^{kn}$ . Donc  $G(2, \pi) = U(2, \pi)$  (S., 74).

**20** (1). Cherchons les p. g. c. d. respectifs  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  de  $G(n, \pi^2)$  et  $G'(n, \pi^2)$  avec  $H(n, \pi)$ . Toute substitution  $\alpha$  de  $\Gamma'$  devra vérifier, en même temps que les équations (4)-(6) du n° 5 (avec  $f = 1$ ,  $\eta = 0$ ), les équations (1)-(4) du n° 17. En particulier les deux systèmes linéaires formés, l'un des systèmes (5) et (6) du n° 5 où l'on regarde  $k$  comme fixe (et  $f = 1$ ,  $\eta = 0$ ), l'autre du système (1) et du second système (2) du n° 17 où l'on regarde aussi  $k$  comme fixe, déterminent

(1) Comparer DICKSON, *Linear groups*, 131.

l'un  $\beta'_{ik}, \alpha'_{ik}$ , l'autre  $f^{-1}\beta'_{ik}, f^{-1}\alpha'_{ik}$  par les mêmes équations. Donc,  $\alpha'_{ik} = f\alpha'_{ik}, \beta'_{ik} = f\beta'_{ik}$ , et de même  $\alpha_{ik} = f\alpha_{ik}, \beta_{ik} = f\beta_{ik}$ . Donc d'abord  $\Gamma$ , qui correspond à  $f = 1$ , est dans  $\mathcal{E}$ , et ses matrices coïncident avec celles de  $G(n, \pi)$  [les variables de  $G(n, \pi)$  différant de celles de  $G(n, \pi^2)$ ,  $G(n, \pi)$  n'est qu'un constituant de  $\Gamma$  isomorphe à  $\Gamma$ ; mais aucune confusion n'étant à craindre, j'identifierai ici  $\Gamma$  avec  $G(n, \pi)$ . Ensuite,  $e$  désignant un élément  $\neq 0$  de  $\alpha$ ,  $f = ee^{-1} = e^{1-\pi}$  est une puissance de  $\iota^{\pi-1}$ . Or  $\mu_{\nu}$  multiplie précisément  $a$  par  $\iota^{1-\pi}$ . Donc, en posant  $\{\mu_{\nu}\} = M$ ,  $\Gamma' = \Gamma M$ , et  $(\Gamma', \Gamma) = \pi + 1$ . Il est clair que  $\Gamma'$  contient  $J$ , dont chaque substitution multiplie  $a$  par une puissance de  $\iota^{2(\pi-1)}$ .

Le normalisant  $\overline{G}(n, \pi)$  de  $G(n, \pi)$  dans  $H(n, \pi)$  coïncide avec  $\Gamma'$ . En effet, soit  $s$  une substitution de  $H$  permutable à  $G$ , et  $\alpha s = \alpha'$ ,  $\alpha$  et  $\alpha'$  étant dans  $G$ . Alors  $\alpha s \bar{\alpha} s \bar{\alpha}$  coïncide avec  $\alpha' \bar{\alpha}' s \bar{\alpha}' s \bar{\alpha}' = \alpha' \bar{\alpha}'$ . Donc  $s \bar{\alpha} s = \alpha' (= -\bar{\alpha}')$  est invariante par toute substitution de  $G$ . Or, soit

$$a' = \sum_{ik} [x_i (a_{ik} x'_k + a'_{ik} y'_k) + y_i (b_{ik} x'_k + b'_{ik} y'_k)].$$

On voit directement que, pour que  $a'$  soit invariante par  $m_i$ , quel que soit  $i$ , il faut que  $a'$  ait la forme  $\sum_i f_i (x_i y'_i - y_i x'_i)$  et que, pour que  $a'$  soit encore invariante par les  $V_{ik}$ , il faut que les  $f_i$  soient égaux. Donc  $s$  est dans  $\Gamma'$ .

Soit  $\overline{g} \equiv \overline{G} | J$  le groupe déduit de  $G$  en y regardant les variables comme homogènes. Le normalisant de  $\overline{g} \equiv GJ | J \equiv G | D$  dans  $\mathcal{X} \equiv H | J$  est  $\overline{g}$ . Si  $p > 2$ ,  $(\overline{g}', 1) = 2(\overline{g}, 1)$ . Si  $p = 2$ ,  $(\overline{g}, 1) = (\overline{g}, 1)$ .

Le normalisant  $\overline{G}^0$  de  $G$  dans  $H^0$  est le p. g. c. d. de  $\overline{G}$ ,  $H^0$ . Or  $G$  divise  $H^0$ , et pour que le déterminant  $\iota^{k\nu(1-\pi)}$  de  $\mu_{\nu}^k$  soit égal à 1, il faut que  $k$  soit multiple de  $\frac{\pi+1}{\pi_1}$ ,  $\pi_1$  étant le p. g. c. d. de  $\pi+1$ ,  $\nu$ . Donc, si  $M^0$  est le diviseur d'ordre  $\pi_1$  de  $M$  (c'est-à-dire le p. g. c. d. de  $M$ ,  $H^0$ ),  $\overline{G}^0 = GM^0$ , et  $(\overline{G}^0, 1) = \pi'(G, 1)$ .

Soit  $\overline{g}^0 \equiv \overline{G}^0 | J^0$  le groupe déduit de  $\overline{G}^0$  en y regardant les variables comme homogènes. Le normalisant de  $\overline{g}^0 \equiv GJ^0 | J^0 \equiv G | D$  dans  $\mathcal{X}^0 \equiv H^0 | J^0$  est  $\overline{g}^0$ . Si  $p > 2$ , et si  $\pi_1 = \pi_1$ ,  $(\overline{g}^0, 1) = 2(\overline{g}, 1)$ . Si  $p = 2$  ou si  $2\pi_1 = \pi_1$ ,  $(\overline{g}^0, 1) = (\overline{g}, 1)$ .



**21.** On a vu que  $G(2, \pi) = U(2, \pi)$  (19). Pour  $n > 2, \pi > 2$ , on voit comme au n° 10 (1) que  $G|D$  est simple. Pour  $n > 2, \pi = 2$ , on voit de même que tout diviseur normal  $\Gamma$  de  $G$  non contenu dans  $D$  contient les  $W_{ik_1 \rho_{k_1}} = \rho_{k_1} W_{ik_1}$  donc, si  $n \geq 6$ , les  $W_{ik_1 \rho_{k_1} \cdot \rho_{k_1}} W_{kl_1} = V_{il_1}^{-1} W_{ik_1} V_{il_1}$  (7), donc les  $W_{ik}$  et par suite, encore de même, les  $V_{ik}, U_{ik}, u_i, \tau_i$ , donc  $G$ .

Ainsi, en exceptant  $G(2, 2) = U(2, 2), G(2, 3) = U(2, 3)$  et  $G(4, 2)$  qui va être étudié, tout diviseur normal de  $G(n, \pi)$  non contenu dans  $D$  coïncide avec  $G$ ; alors  $G(n, \pi) \equiv G|D$  est simple, et  $D$  est le central de  $G$  (donc, si  $p > 2, G' \neq G$ ).

On vérifie d'ailleurs comme au n° 10 que toute substitution  $\alpha$  permutable à chaque substitution de  $G$  est une similitude. Donc le central de  $G'$  est  $I$ .

**22.**  $G(4, 2)$  est isomorphe au  $g^6$  symétrique (2). — En effet,  $G(4, 2)$  est un  $g_{720}^{15}$  divisant le  $g^{15}L(4, 2)$ . Or, en désignant par  $s_k$  et  $\mathfrak{A}_k$  le symétrique et l'alterné de champ  $1, \dots, k, L(4, 2) \equiv \mathfrak{A}_8(S., 70)$ . Donc  $G$  est isomorphe à un  $g_{720}^8$  pair  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  était transitif, il serait primitif, 720 ne divisant ni  $4! 2^4$  ni  $2(4!)^2$  ( $S., 32$ ); mais alors le  $g_{720}^7$  fixant un symbole serait de degré effectif 7 et contiendrait des  $s_5$  et des  $s_3^6$  [s'il contenait des  $s_3^3$ ,  $\Gamma$  devrait être semblable à  $\mathfrak{A}_8(S., 42)$ ]; il serait donc transitif tandis que 7 ne divise pas 60. Donc  $\Gamma$  est intransitif, et si les degrés de ses constituants transitifs sont  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  ( $\alpha_i \geq \alpha_{i+1} \geq 1; \Sigma \alpha_i = 8$ ), 720 divise  $\Pi(\alpha_i!)$ , d'où  $\alpha_1 = 6$ . On peut donc supposer que  $\Gamma$  divise  $\{s_6, 78\}$ , et comme  $\Gamma$  est un  $g_{720}^8$  pair, il ne peut être que le diviseur pair maximum  $s'_6 \equiv s_6$  de  $\{s_6, 78\}$ . On voit par là que tous les  $g_{720}^8$  de  $\mathfrak{A}_8$  sont conjugués dans  $s_8$  et par suite dans  $\mathfrak{A}_8$  (car le normalisant de  $\Gamma$  par exemple dans  $s_8$ , contenant  $12, \Gamma$  a le même nombre de conjugués dans  $s_8$  et  $\mathfrak{A}_8$ ).

Voici une autre démonstration qui fournit une correspondance de

(1) Le second procédé employé au n° 10 pour rendre  $\beta_{11} \neq 0$  est seul applicable ici.

(2) M. Jordan a établi ce théorème (*Traité*, n° 333) à l'aide des groupes de Steiner. On en trouvera encore une preuve indirecte dans une Note déjà citée du 8 novembre 1915 (*Comptes rendus*, t. 161, p. 553).

générateurs.  $s_6$  est défini (S., 69) par

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} s_h^2 = (s_i s_{i+1})^3 = (s_j s_{j+k})^2 = 1 \\ (h = 1, \dots, 5; i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2; k = 2, \dots, 4 - j). \end{array} \right.$$

Or les substitutions  $\tau_1, u_1, u_2, \tau_2, \tau_1 \nu_2 V_{21} U_{12} \nu_2$ , prises respectivement pour  $s_1, \dots, s_5$ , les vérifient. Donc leur p. p. c. m., qui est d'ordre  $> 2$ , est isomorphe à  $s_6$  (S., 66) (1).

On arrive au même résultat en prenant pour  $s_1, \dots, s_5$  respectivement les substitutions  $\nu_1 \nu_2 U_{12} \nu_1 \nu_2, \tau_2 \nu_1 u_2 u_1 T_{12}, W_{12} V_{12} \nu_2, \nu_1 W_{12} V_{21}, u_2 V_{21} U_{12}$ .

Il est utile de montrer comment on arrive à ces deux correspondances de générateurs, et comment la seconde conduit à une correspondance *simultanée* des générateurs de  $L(4, 2), G(4, 2)$  avec ceux de  $\mathcal{A}_8, s'_6$  [donc de nouveau à l'isomorphisme de  $L(4, 2)$  avec  $\mathcal{A}_8$ ].

Les  $s_2$  impaires de  $s_6$  se divisent en deux classes, l'une  $C_1$  formée des  $s_2^2$ , l'autre  $C_2$  des  $s_2^6$ . A une  $s_2$  quelconque  $s_{\rho_1}$  de  $C_\rho$  on peut en joindre quatre autres  $s_{\rho_2}, \dots, s_{\rho_5}$  (de  $C_\rho$ ) telles que  $s_{\rho_1}, \dots, s_{\rho_5}$  prises pour  $s_1, \dots, s_5$  vérifient (5). Car on peut toujours écrire  $s_{11} = 12, s_{13} = 34, s_{14} = 56$ ; alors  $s_{12}$ , déplaçant un des symboles déplacés par  $s_{11}$  et un des symboles déplacés par  $s_{13}$ , mais ne déplaçant aucun de ceux déplacés par  $s_{15}$ , peut s'écrire 23;  $s_{14}$  peut s'écrire 45; et ces substitutions vérifient (5). De même on peut toujours écrire  $s_{21} = 12.34.56, s_{23} = 12.35.46$  ( $s_{23}$  a un cycle commun avec  $s_{21}$ ). Alors  $s_{25} = 12.36.45$ ;  $s_{22}$ , ayant un cycle commun avec  $s_{25}$ , mais n'ayant aucun avec  $s_{21}$  ou  $s_{23}$ , peut s'écrire (en transformant au besoin tout par  $s_{21}, s_{23}$  ou  $s_{25}$ ) 15.24.36; alors  $s_{24}$  a l'une des deux formes 34.26.15, 56.13.24, et (en transformant au besoin tout par  $s_{25}$ ) on peut supposer que  $s_{24} = 13.24.56$ . Les  $s_{2l}$  vérifiant (5) comme les  $s_{1l}, s_6$  a un automorphisme où  $s_{11}, \dots, s_{15}$  répondent à  $s_{21}, \dots, s_{25}$  respectivement.

En posant

$$\begin{array}{l} \alpha = 12 = s_{11}, \quad \beta = 13 = \alpha s_{12} \alpha, \quad \gamma = 14 = \beta s_{13} \beta, \\ \delta = 15 = \gamma s_{14} \gamma, \quad \varepsilon = 16 = \delta s_{15} \delta, \end{array}$$

(1) DICKSON, *Linear groups*, 118.

(aux générateurs  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$  de  $s_6$  répondent respectivement, dans l'automorphisme considéré,

$$\begin{aligned}\alpha' &= 12.34.56 = s_{21}, & \beta' &= 13.26.45 = \alpha' s_{22} \alpha', \\ \gamma' &= 14.25.36 = \beta' s_{23} \beta', & \delta' &= 15.23.46 = \gamma' s_{24} \gamma', \\ \varepsilon' &= 16.24.35 = \delta' s_{25} \delta',\end{aligned}$$

on a

$$(6) \quad \begin{cases} s_{21} = \alpha s_{13} s_{15}, & s_{22} = \alpha \gamma \alpha \cdot \delta \cdot \beta \varepsilon \beta, & s_{23} = \beta \delta \beta \cdot \gamma \varepsilon \gamma \cdot \alpha, \\ s_{24} = \alpha \gamma \alpha \cdot s_{15} \beta, & s_{25} = s_{14} \cdot \beta \varepsilon \beta \cdot \alpha, \end{cases}$$

et les  $s_{1l}$  s'expriment par les  $s_{2l}$  comme les  $s_{2l}$  par les  $s_{1l}$ . *L'automorphisme est donc d'ordre 2.*

Considérons maintenant les  $s_2$  de  $\mathcal{A}_8$ . Elles forment deux classes, l'une de  $s_2^+$ , l'autre de  $s_2^-$ . Tout  $g_{720}^{\#}$  pair de  $\mathcal{A}_8$ , pouvant être identifié avec  $s_6'$ , a aussi deux classes de  $s_2$ , l'une  $C_1$  représentée par 12.78, l'autre  $C_2$  par 12.34.56.78. Au point de vue abstrait ces deux classes ont ceci de commun qu'à une  $s_2$  quelconque  $s_{\rho l}$  de  $C_\rho$  on peut en adjoindre quatre,  $s_{\rho 2}, \dots, s_{\rho 5}$  vérifiant (5) et ceci de distinct que, si  $\rho = 1$ , il existe une  $s_3 s_{\rho 0}$  vérifiant

$$(7) \quad s_{\rho 0}^2 = (s_{\rho 0} s_{\rho 1})^3 = (s_{\rho 0} s_{\rho l})^2 = 1 \quad (l = 2, \dots, 5),$$

tandis que, si  $\rho = 2$ , il n'y en a pas. En effet, si  $s_{\rho 0}$  existe, elle doit, d'après (7), déplacer 7 et 8 (sans quoi  $s_{\rho 0} s_{\rho 1}$  aurait un cycle d'ordre  $\neq 3$  contenant 7 et 8), et par suite fixer un au moins des symboles 2, 3, 4, 5, 6. Mais  $s_{\rho 0}$  doit être transformée en  $s_{\rho 0}^{-1}$  par  $s_{\rho 2}, \dots, s_{\rho 5}$  dont le p. p. c. m. permute transitivement 2, 3, 4, 5, 6. Donc  $s_{\rho 0}$  les fixe tous. Donc  $s_{\rho 0} = (178)^{\pm 1}$ , et  $\rho = 1$ .  $\mathcal{A}_8$  dérive de  $s_{10}, s_{14}, \dots, s_{15}$  et est défini par (5) et (7) (S., 69).

Admettons maintenant qu'il y ait, entre  $L(4, 2)$ ,  $G(4, 2)$  d'une part, et  $\mathcal{A}_8, s_6'$  d'autre part, une correspondance isomorphique simultanée, et cherchons à la réaliser. Je désignerai les objets correspondant à  $s_{\rho l}, C_\rho$  dans  $L$  par les mêmes lettres que dans  $\mathcal{A}_8$ . On aperçoit de suite dans  $G$  quatre substitutions semblables pouvant jouer le rôle de  $s_{\rho 1}, s_{\rho 2}, s_{\rho 4}, s_{\rho 5}$  relativement aux équations (5) (on verra plus loin que ces substitutions sont conjuguées, et que  $\rho = 2$ ). Ce sont, en désignant (cf. S., 69) respectivement les points 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111 par  $b$ ,

$c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q,$

$$\begin{aligned} s_{\rho_1} &= \tau_1 = bc.gi.hk.op.d.e.f.l.m.n.q, \\ s_{\rho_2} &= u_1 = cf.im.kn.pq.b.d.e.g.h.l.o, \\ s_{\rho_4} &= u_2 = el.ho.kp.nq.b.c.d.f.g.i.m, \\ s_{\rho_5} &= \tau_2 = de.gh.ik.mn.b.c.f.l.o.p.q. \end{aligned}$$

$s_{\rho_3}$  doit leur être semblable et engendrer avec  $s_{\rho_1}, s_{\rho_5}$  un  $\mathfrak{g}_8^{15}$  abélien  $Y$  de classe 8 (S., 82). Donc  $s_{\rho_3}$  échange entre eux les systèmes d'intransitivité  $f, l, q, bc, de, mn, op, ghik$  de  $\{s_{\rho_1}, s_{\rho_5}\}$ . Si  $s_{\rho_3}$  déplace un symbole du seul système de degré 4,  $Y$  a un constituant régulier (S., 57) de champ  $ghik$ , et  $s_{\rho_3} = gh.hi\dots$ . Mais alors  $s_{\rho_2}s_{\rho_3} = (ngk)(him)\dots$ , et  $s_{\rho_3}$  fixe  $m$  et  $n$ . De même  $s_{\rho_3}s_{\rho_4} = (hio)(kqp)\dots$ , et  $s_{\rho_3}$  fixe  $o$  et  $p$ . Donc  $s_{\rho_3}$ , qui permute entre eux  $f, l, q$  (systèmes de degré 1) et qui ne peut fixer  $q$  ( $s_{\rho_2}s_{\rho_3}$  aurait le cycle  $pq$ ) a l'un des cycles  $fq, lq$ ; dans le premier cas  $s_{\rho_2}s_{\rho_3}$  aurait le cycle  $cqpf\dots$  d'ordre  $> 3$ , et dans le second cas  $s_{\rho_3}s_{\rho_4}$  aurait le cycle  $lnqe\dots$ . Donc  $s_{\rho_3}$  fixe  $g, h, i, k$ . Si  $s_{\rho_3} = fl\dots, s_{\rho_2}s_{\rho_3} = (clf)\dots, s_{\rho_4}s_{\rho_3} = (efl)\dots$ , et  $s_{\rho_3}$  fixe  $c$  et  $e$ , donc  $b$  et  $d$ , tandis que la classe de  $G$  est 8. Si  $s_{\rho_3} = lq\dots$  ou  $fq\dots, s_{\rho_2}s_{\rho_3} = (plq)\dots$  ou  $(pfq)\dots$ , et  $s_{\rho_3}$  fixe  $p$ , donc  $o$ , d'où  $s_{\rho_4}s_{\rho_3} = (ho)\dots$ . Donc  $s_{\rho_3}$  fixe  $g, h, i, k, f, l, q$  et déplace les huit autres symboles. Si  $s_{\rho_3} = bc\dots, s_{\rho_3}s_{\rho_4} = (bc)\dots$ ; si  $s_{\rho_3} = bd\dots, s_{\rho_2}s_{\rho_3} = (bd)\dots$ ; si  $s_{\rho_3} = be\dots, s_{\rho_2}s_{\rho_3} = (be)\dots$ ; si  $s_{\rho_3} = bm\dots, s_{\rho_3}s_{\rho_4} = (bm)\dots$ ; si  $s_{\rho_3} = bn\dots, s_{\rho_3}s_{\rho_4} = (bn.cm)\dots, s_{\rho_3}s_{\rho_4} = (cm)$ ; si  $s_{\rho_3} = bo\dots, s_{\rho_2}s_{\rho_3} = (bo)\dots$ ; donc  $s_{\rho_3} = bp.co\dots$ . Si  $s_{\rho_3} = de\dots, s_{\rho_2}s_{\rho_3} = (de)\dots$ . Donc

$$s_{\rho_3} = bp.co.dn.em.f.g.h.i.k.l.q = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ y_1 & x_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + y_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + x_2 \end{vmatrix} = \tau_1 \nu_2 V_{21} U_{12} \nu_2.$$

Donc  $G(4, 2) \cong s_6$ . Donc  $G$  n'a que deux classes de  $s_2$ . Donc,  $G$  contenant, on va le voir, des  $s_2^{12}, s_{\rho_1}, \dots, s_{\rho_5}$  sont conjugués.

Pour déterminer  $\rho$ , cherchons une  $s_3 s_{\rho_0}$  vérifiant (7).  $s_{\rho_0}$ , devant être transformée par  $s_{\rho_2}, \dots, s_{\rho_5}$  en  $s_{\rho_0}^{-1}$ , ne peut avoir de cycle de la forme  $b\xi\eta$ , car toutes les déterminations possibles de  $\xi$  conduisent à des impossibilités. Donc  $s_{\rho_0}$  fixe  $b$ , et par suite aussi les 10 symboles

$b, d, e, i, k, l, m, n, p, q$  qui forment un système d'intransitivité de  $\{s_{\rho_2}, \dots, s_{\rho_5}\}$ . Les 5 symboles restants formant un second système d'intransitivité du même groupe,  $s_{\rho_0}$ , qui en fixe nécessairement deux, les fixe tous. *Donc  $s_{\rho_0}$  n'existe pas, et  $\rho = 2$ .*

On a alors, d'après (6),

$$\begin{aligned}
 s_{11} = bo.cp.dm.en.gk.hi.f.l.q &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + x_2 + y_2 \\ y_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + y_2 \end{vmatrix} = \nu_1 \nu_2 U_{12} \nu_1 \nu_2, \\
 s_{12} = be.cl.df.gn.iq.ko.h.m.p &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 + y_2 \\ y_1 & x_2 \\ x_2 & y_1 \\ y_2 & x_1 + y_1 \end{vmatrix} = \tau_2 \nu_1 u_1 u_2 T_{12}, \\
 s_{13} = bh.ck.dm.gp.io.lq.e.f.n &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + x_2 \\ y_1 & y_1 + x_2 \\ x_2 & x_2 \\ y_2 & x_1 + y_1 + y_2 \end{vmatrix} = W_{12} V_{12} \nu_2, \\
 s_{14} = bo.di.ek.fq.gn.hm.c.l.p &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 + x_2 + y_2 \\ x_2 & x_1 + x_2 \\ y_2 & x_1 + y_2 \end{vmatrix} = \nu_1 W_{12} V_{21}, \\
 s_{15} = bg.ci.en.hp.ko.lq.d.f.m &= \begin{vmatrix} x_1 & x_1 + y_2 \\ y_1 & y_1 + y_2 \\ x_2 & x_1 + y_1 + x_2 \\ y_2 & y_2 \end{vmatrix} = u_2 V_{21} U_{12}.
 \end{aligned}$$

$\{s_{12}, \dots, s_{15}\}$  étant transitif,  $s_{10}$  est une  $s_3^{15}$ , et les divers essais possibles montrent que le cycle contenant  $f$  est  $flq$  ou  $fqh$ , et que tous les autres cycles de  $s_{10}$  sont déterminés par celui-là. En échangeant au besoin  $s_{10}$  et  $s_{10}^2$ , on a

$$s_{10} = beh.cdi.flq.gpn.kom = \begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ y_1 & x_2 \\ x_2 & y_1 + x_1 \\ y_2 & x_1 + y_1 \end{vmatrix}.$$

$s_{11}, \dots, s_{15}$  et  $s_{10}$  vérifiant (5) et (7), la double correspondance isomorphe annoncée est établie.

Comme  $s_{21}, \dots, s_{25}$  répondent à des transpositions de  $s_6$ , le  $g_{360}$  simple  $G^0$  de  $G$  est formé de toutes les substitutions qui sont des produits d'un nombre pair de  $s_{2i}$ . En particulier  $G^0$  contient la  $s_3 u, \tau_1$ , mais ne contient pas

$$V_{12} = s_{21} s_{25} s_{22} s_{21} s_{23} \cdot s_{25} s_{24} s_{23} s_{22} s_{21} \cdot s_{23}.$$

$G(4, 2)$  est semblable au  $g_{720}^{15}$  primitif formé des substitutions opérées par  $s_6$  sur les 15 combinaisons des 6 symboles 2 à 2 (S., 48) (1). En effet, si l'on fait correspondre  $s_{21}, \dots, s_{25}$  à 12, 23, 34, 45, 56 respectivement, et si l'on cherche à identifier chaque combinaison avec un des symboles  $b, \dots, q$ , de manière que  $s_{21}, \dots, s_{25}$  fixent les mêmes combinaisons que 12, 23, 34, 45, 56, on voit aisément que l'identification est possible mais d'une seule manière : il faut identifier 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56 avec  $f, c, e, h, g, b, p, k, i, q, n, m, d, e, l$  respectivement.

Les substitutions  $s_{21}, s_{22}, s_{23}, s_{25}$  correspondant à 12, 23, 34, 56 de  $s_6$ , leur p. p. c. m. X correspond au  $g_{48} \{s_4, 56\}$ . Donc X est le  $g_{48}$  fixant  $l$  dans  $G(4, 2)$ . X a les deux systèmes d'intransitivité  $bcfopq$ ,  $deghikmn$  et un  $g_8$  normal correspondant à  $\{12.34, 13.42, 56\}$ .

(1) Plus généralement, toutes les représentations du symétrique  $S$  ou de l'alterné  $\mathcal{A}$  de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6 en  $g^{15}$  transitif sont semblables. En effet, on a vu que  $S$  a un automorphisme qui fait correspondre à ses générateurs 12, 13, 14, 15, 16 respectivement les générateurs 12.34.56, 13.26.45, 14.25.36, 15.23.46, 16.24.35 (on le vérifie d'ailleurs directement sur les équations de  $S$ ); donc au  $g_{48} \{12, 13, 14, 56\} = T$ , le  $g_{48} \{12.34.56, 13.26.45, 14.25.36, 15.23.46\} = T'$  (56 est la transformée de 16 par 15).  $T$  et  $T'$  ne sont pas conjugués, car  $T$  a le  $g_3 \{123\}$ , et  $T'$  le  $g_3 \{164.235\}$ . Le p. g. c. d. de  $T, \mathcal{A}$  est  $B = \{12.56, 13.56, 14.56\}$ , et celui de  $T', \mathcal{A}$  est  $B' = \{35.46, 16.23, 15.24\}$ . D'ailleurs  $T$  est le seul  $g_{48}$  de  $S$  contenant  $B$ , car un tel  $g_{48}$ , ayant les constituants symétriques  $\{56\}, \{12, 13, 14\}$ , est leur produit direct. Par suite  $T'$  est le seul  $g_{48}$  de  $S$  contenant  $B'$ . Donc,  $T$  et  $T'$  n'étant pas conjugués dans  $S$ ,  $B$  et  $B'$  ne le sont pas non plus. Or  $\mathcal{A}$  n'a que deux systèmes de  $g_{24}$  conjugués (voir, par exemple, DICKSON, *Linear groups*, 260) représentés par  $B$  et  $B'$ . Donc  $S$  n'a que deux systèmes de  $g_{48}$  conjugués représentés par  $T$  et  $T'$ , car si  $T''$  en représentait un troisième, le p. g. c. d.  $B''$  de  $T''$ ,  $\mathcal{A}$  devrait être conjugué de  $B$  ou de  $B'$ , et  $T''$ , déterminé par  $B''$ , serait conjugué de  $T$  ou de  $T'$ . De là résulte le théorème (S., 54).

D'après ce qui a été dit de  $\mathfrak{A}_8$ , tout  $\mathfrak{g}_{720}^{\mathfrak{A}_8} G'$  de  $L$  y est conjugué de  $G$ . Donc  $G'$  a un invariant bilinéaire  $\alpha'$  et se transforme en  $G$  quand on prend des variables ramenant  $\alpha'$  à la forme canonique  $\alpha$ .  $G'$  étant donné, on peut déterminer  $\alpha'$  par la méthode des coefficients indéterminés, et l'on sait effectuer un changement de variables ramenant  $\alpha'$  à  $\alpha$  (E., 195).

**23.** Soit  $P_{\Lambda(n,\pi)} = P = P_0$  le p. p. c. m. des  $V_{1,k}, U_{1,k}$  ( $k = 2, \dots, \nu$ ),  $u_1$ . En désignant par  $\{u_1\}$  le  $\mathfrak{g}_\pi$  abélien principal dérivé des  $u_1$  (tous normaux dans  $P$ ),  $P\{\{u_1\}\}$  est un  $\mathfrak{g}_{\pi^{n-1}}$  abélien principal (si  $p = 2$ ,  $P$  est un  $\mathfrak{g}_{\pi^{n-1}}$  abélien principal). Les équations de  $P$  se lisent sur celles indiquées au n° 15.

Soit  $P_1$  le  $\mathfrak{g}_{\pi^{n-1}}$  analogue à  $P$  dans  $G_1$ , et formons de même successivement les groupes  $P_2, \dots$ . Toute substitution de  $P_i$  est permutable à  $P_{i-1}$ , en sorte que  $PP_1 \dots P_{\nu-1} = P_{\Lambda(n,\pi)} = P$  est un  $\mathfrak{g}_{\pi^\nu}$  sylowien de  $G$ .

Si  $n = 2$ ,  $P = \{u_1\}$  est abélien. Si  $n > 2$ , en adoptant les mêmes notations qu'au n° 15, on démontre de même que, pour  $p > 2$ , le  $s^{\text{ième}}$  central  $C_s$  de  $P$  est le p. p. c. m. des  $U_{ik}, V_{ik}$  figurant dans les  $s$  premières transversales du même tableau triangulaire (ici  $\nu_1 = \nu$ ), c'est-à-dire le p. p. c. m. des  $U_{ik}$  où  $i + k \leq s + 1$  et des  $V_{ik}$  où  $k - i \geq n - s$ . L'ordre de  $C_{2r-1}$  est  $\pi^{r^2}$ , et celui de  $C_{2r}$  est  $\pi^{r(r+1)}$ , c'est-à-dire que l'ordre de  $C_s$  est  $\pi^\sigma$ ,  $\sigma$  étant le plus grand entier  $\leq \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$ .

Pour  $p = 2$ , le  $s^{\text{ième}}$  central  $C_s$  de  $P$  est le p. p. c. m. des  $U_{ik}, V_{ik}$  figurant dans les  $s + 1$  premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des  $U_{ik}$  où  $i + k \leq s + 2$  et des  $V_{ik}$  où  $k - i \geq n - s - 1$ . L'ordre de  $C_s$  est donc  $\pi^{\sigma+1}$ . La différence provient de ce que les  $U_{ik}$  admissibles dans  $C_s$  sont ici les  $U_{11}$  et les  $U_{12}$ ,  $U_{12}$  étant permutable à  $V_{12}$ .

Les substitutions de  $P$  ont la forme générale indiquée au n° 15, et toute substitution de  $G$  ayant cette forme est dans  $P$  (cf. 15). On voit de même ici que le normalisant de  $P$  est  $MP$ ,  $M$  étant le  $\mathfrak{g}_{(\pi-1)^\nu}$  p. p. c. m. des  $m_i$ , et que  $M(> D)$  est son propre normalisant dans  $MP$ .

IV. — Groupes quadratiques.

24. Supposons que  $a$  soit la forme quadratique à  $n$  variables (*E.*, 44, 45)

$$(1) \quad a = \varphi + \psi, \quad \varphi = \sum_1^n x_i y_i, \quad \psi = \psi(x, y) = bxy + cx^2 + c'y^2,$$

$b, c, c'$  étant dans  $\mathfrak{C}$ , et  $b^2 - 4cc' = \delta$  étant  $\neq 0$  à moins que  $b = cc' = 0$ . Je poserai  $x = x_0, y = y_0$  et, si  $n$  est pair,  $n = 2v'$ . Je désignerai par  $A''(n, \pi, a)$  le groupe des substitutions qui multiplient  $a$  par un carré ( $A'' = A'$  si  $p = 2$ ), et par  $N$  un non carré quelconque de  $\mathfrak{C}$ .

Si  $n = 2v'$ , et si  $\psi$  est irréductible dans  $\mathfrak{C}$  (je dirai alors que  $a$  est de la *seconde classe* ou du *second type*), je prendrai pour  $v$  une racine de  $\psi(v, 1)$ . Soit alors  $x = x_0 + vx_1$  ( $x_0$  et  $x_1$  étant dans  $\mathfrak{C}$ ) une solution quelconque de  $x\dot{x} = c$ , c'est-à-dire de  $\psi(x_0, -x_1) = c$  (*cf.* *E.*, 44, 45), et posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_v = x(x - vy), \quad y_v = \dot{x}(x - vy) = \dot{x}_v \quad (v' = v + 1), \\ \text{d'où} \\ c\omega x = -\dot{x}x_v + xv y_v, \quad c\omega y = -x x_v + x y_v \quad (\omega = v - v'). \end{array} \right.$$

On aura

$$(3) \quad \psi = x_v y_v, \quad a = \sum_1^{v'} x_i y_i,$$

et la substitution réelle  $\gamma$  qui multiplie  $x_1, \dots, x_v$  par  $\iota$  et  $x_{v'}$  par une racine  $\xi$  de  $\xi^{\pi+1} = \iota$  (donc  $y_{v'} = \dot{x}_{v'}$  par  $\xi^\pi$ ) sans altérer les autres variables multiplie  $a$  par  $\iota$ . La substitution réelle  $\mu$  qui multiplie  $x_1, \dots, x_v$  par  $\iota, y_1, \dots, y_v$  par  $\iota^{-1}$  et  $x_{v'}$  par  $\xi^{1-\pi}$  (donc  $y_{v'}$  par  $\xi^{\pi-1}$ ) est évidemment dans  $A$ , et  $\gamma^2 = \mu[\iota]$ . Donc  $\gamma^2$  est dans  $A'' = AI$ , et, si  $p > 2$ ,  $A' = A'' + A''\gamma$  (*cf.* 16).

Si  $n = 2v'$ , et si  $\psi$  est réductible dans  $\mathfrak{C}$  (je dirai alors que  $a$  est de la *première classe* ou du *premier type*), on pourra supposer, ou bien que  $v' = v$  et que  $\psi = 0$ , ou bien que  $v' = v + 1$  et que  $\psi$  est  $\neq 0$ . Dans la seconde hypothèse on peut réduire  $\psi$  à  $xy$ ; mais on peut aussi, en désignant par  $k, k'$  deux éléments de  $\mathfrak{C}$  vérifiant  $kk' = c$  et par  $u, u'$  les racines réelles de  $\psi(u, 1)$ , écrire les équations déduites de (2), (3) par



la substitution de  $k, k', u, u'$  à  $x, \dot{x}, v, \dot{v}$  respectivement (en omettant  $y_v = \dot{x}_v$ ); car  $x, \dot{x}, v, \dot{v}$  n'interviennent dans le calcul que comme vérifiant les relations  $v + \dot{v} = -\frac{b}{c}$ ,  $v\dot{v} = \frac{c'}{c}$ ,  $x\dot{x} = c$  vérifiées ici par  $k, k', u, u'$ . Alors la substitution  $\gamma$  qui multiplie  $x_1, \dots, x_v$ , par  $\iota$  sans altérer les  $y$  multiplie  $a$  par  $\iota$ . La substitution  $\mu$  qui multiplie  $x_1, \dots, x_v$  par  $\iota$  et  $y_1, \dots, y_v$  par  $\iota^{-1}$  est dans  $A$ , et  $\gamma^2 = \mu[\iota]$ . Donc  $\gamma^2$  est encore dans  $A'' = A'$ , et, si  $p > 2$ ,  $A' = A'' + A''\gamma$ .

Ainsi, pour  $n$  pair,  $A' = \Sigma_0^{\pi-2} A \gamma^h$ ,  $A \gamma^h$  étant le complexe des substitutions qui multiplient  $a$  par  $\iota^h$ .

Si  $n = 2v + 1$ , on peut supposer que  $\psi = cx^2$  ( $a$  sera dite de la première classe ou du premier type si  $c$  est carré, de la seconde classe ou du second type si  $c$  est non carré). Écrivons  $a_c = \varphi + cx^2$ . Si  $p \neq 2$ ,  $a_c$  est équivalente à  $a_1$  ou à  $a_n$  qui ne sont pas équivalentes (*E.*, 44). Mais le changement de variables  $y_i = N y'_i$  ( $i = 1, \dots, v$ ) transforme évidemment le groupe propre et le groupe total de  $a_1$  en ceux de  $a_n$ . On peut donc laisser  $c$  indéterminé. Pour  $p \neq 2$ , aucune substitution  $\alpha$  ne peut multiplier  $a$  par  $\iota^h$  si  $h$  est impair, car  $|\alpha a \bar{\alpha}| = |a| |\alpha|^2$  (*cf.* 1) devrait être égal à  $|a| \iota^{nh}$ . Mais la substitution  $\gamma$  qui multiplie chaque variable par  $\iota$  multiplie  $a$  par  $\iota^2$ .

Ainsi, pour  $n$  impair, si  $p \neq 2$ ,  $A' = A'' = AI = \Sigma_0^{\frac{\pi-3}{2}} A \gamma^h$ ; si  $p = 2$ ,  $A' = A'' = AI = \Sigma_0^{\pi-2} A \gamma^h$ ; dans les deux cas  $A \gamma^h$  est formé des substitutions qui multiplient  $a$  par  $\iota^{2h}$ .

Par définition  $\mathfrak{A}' = A' | I$ , et  $\mathfrak{A} = AI | I = A'' | I = A | D$ . Donc  $\mathfrak{A}' | \mathfrak{A} \equiv A' | AI$ . Si donc  $p > 2$  et  $n = 2v'$ ,  $(\mathfrak{A}', \mathfrak{A}) = 2$ . Si  $p > 2$  et  $n = 2v + 1$ ,  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ . Si  $p = 2$ ,  $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} = A$ .

L'étude de  $A^0$  et de  $\mathfrak{A}^0$  sera faite plus loin (32).

Pour préciser, lorsque cela sera utile, le groupe de la forme  $a = \varphi + \psi$ ,  $\psi$  étant irréductible ou nulle pour  $n$  pair, je remplacerai les lettres  $A, \mathfrak{A}$  par  $Q, \mathfrak{Q}$ , et j'ajouterai au besoin à  $Q$  ou  $\mathfrak{Q}$  l'indice inférieur 0, 1 ou 2 selon que  $\psi$  dépendra de 0, 1 ou 2 variables; le groupe de  $\psi$  sera désigné par  $\Psi$  ( $\Psi = 1$  si  $\psi = 0$ ), et le p. g. c. d. de  $\Psi, A^0$  par  $\Psi^0$ . Enfin, dans le cas où  $\psi$  est irréductible, je remplacerai les lettres  $A, \mathfrak{A}, Q, \mathfrak{Q}, \Psi$  par  $\bar{A}, \bar{\mathfrak{A}}, \bar{Q}, \bar{\mathfrak{Q}}, \bar{\Psi}$  lorsqu'il sera utile de préciser que les variables choisies sont  $x_1, y_1, \dots, x_v, y_v$ . Mais quand aucune confu-

sion n'est à craindre, j'identifierai les groupes et les substitutions des variables  $x_1, y_1, \dots, x_\nu, y_\nu, x, y$  avec leur action sur  $x_1, y_1, \dots, x_\nu, y_\nu$ , cette action étant dite leur *forme imaginaire*, et leur action sur  $x_1, y_1, \dots, x_\nu, y_\nu, x, y$  leur *forme réelle*.

**25.** Si  $n = 1$  et si  $a = x^2$ ,  $A = Q = Q_1$ , se réduit évidemment à D.

Si  $n = 2$ , on peut supposer que  $a = x_1 y_1$  (en faisant  $\nu = 1$ ) ou que  $a = \psi$ ,  $\psi$  étant irréductible (alors  $\nu = 0$ ).

Si  $a = x_1 y_1$  (avec  $\nu = \nu' = 1$ ), on voit directement que  $A = Q = Q_0$  dérive des substitutions  $m_{11} = |x_1, \iota^{-1} y_1|, t_1 = |y_1, x_1|$  (l'ordre des variables étant  $x_1, y_1$ ) et est diédral d'ordre  $2(\pi - 1)$ . A' est défini par les équations de A jointes à  $\gamma^{\pi-1} = 1, \gamma m_{11} = m_{11} \gamma, \gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{11}$ , ou par les équations du produit direct  $\{m_{11}\} \{ \gamma \}$  jointes à  $t_1^2 = 1, t_1 m_{11} t_1 = m_{11}^{-1}, t_1 \gamma t_1 = \gamma m_{11}^{-1}$ .

Si  $a = \psi$ ,  $\psi$  étant irréductible (donc  $\nu = 0, \nu' = 1$ ), en posant de même  $m_{1\rho} = |\rho x^{-1}, \rho^{-1} y_1|$  ( $m_{1\rho}$  n'a donc plus, pour  $\rho$  imaginaire, le même sens qu'au n° 2),  $t_1 = |y_1, x_1|$ , le groupe A  $(2, \pi^2)$  de  $\psi = x_1 y_1$  dans  $\mathfrak{E}'$  est donc  $\{m_{1\rho}, t_1\}$ . Pour qu'une substitution  $m_{1\rho} t_1^b$  soit dans  $\overline{A}(2, \pi)$ , il faut et suffit que  $\rho^{-1} = \dot{\rho}$ , donc que  $\rho^{\pi-2} = 1$ . Donc  $\overline{A}(2, \pi) = \overline{Q}(2, \pi) = \overline{Q}_2(2, \pi) = \{m_{1\sigma}, t_1\}$ ,  $\sigma$  étant d'ordre  $\pi + 1$ .  $\overline{A}(2, \pi)$  est diédral d'ordre  $2(\pi + 1)$ . A' est défini par les équations de A jointes à  $\gamma^{\pi-1} = m_{1,\xi^{\pi-1}}, \gamma m_{1\sigma} = m_{1\sigma} \gamma, \gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1,\xi^{1-\pi}}$ ,  $\xi$  ayant le même sens qu'au n° 24, ou, en prenant  $\xi$  tel que  $\xi^{\pi-1} = \sigma$  (en même temps que  $\xi^{\pi+1} = \iota$ ) par  $\gamma^{\pi-1} = t_1^2 = 1, t_1 \gamma t_1 = \gamma^\pi$ .

Passons aux variables  $x, y$ , et soit  $s = s_0 + \nu s_1$  ( $s_0$  et  $s_1$  étant réels) une puissance de  $\sigma$ . La condition nécessaire  $s^{\pi+1} = 1$  ou  $ss = 1$  équivaut à  $\psi(s_0, -s_1) = 1$ , et  $s$  vérifie l'équation  $s^2 + b's + 1$ , en posant  $b' = \frac{b}{c} s_1 - 2s_0$ .

Supposons d'abord  $s$  non réel et  $p > 2$ . Si l'ordre de  $s$  divise  $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ ,  $s$  est le carré d'une racine  $\rho$  de  $\rho^{\pi+1} = 1$ , et  $2 - b' = (\rho + \rho^\pi)^2$  est carré dans  $\mathfrak{E}$ . Si inversement  $2 - b'$  est un carré  $\beta^2$  de  $\mathfrak{E}'$ , et si l'on pose  $s = \rho^2$ , on a  $\rho^2 \pm \beta\rho + 1 = 0$ ; donc  $\rho$  est dans  $\mathfrak{E}'$  hors de  $\mathfrak{E}$  (sans quoi  $s$  serait réel), et  $\rho^{\pi+1} = 1$ .

Si  $s$  est réel,  $s = \pm 1$  ( $s^{\pi+1} = s^{\pi-1} = 1$ ; alors  $b' = \pm 2$ ), et, si  $s = -1$  avec  $p > 2$ , son ordre 2 ne divise  $\frac{1}{2}(\pi + 1)$  que pour  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ .

L'action de  $m_{1s}$  sur  $x, y$  est

$$m_{1s} = m_{0s_0s_1} = \begin{vmatrix} x & s_0x + \frac{c'}{c}s_1y & = X \\ y & -s_1x + \left(s_0 - \frac{b}{c}s_1\right)y & = Y \end{vmatrix}.$$

$m_{0s_0s_1}$  n'est une multiplication que si  $s_1 = 0$ , donc  $s_0^2 = 1$ ; alors  $m_{0s_0s_1} = |s_0x, s_0y|$ , et j'écrirai aussi  $m_{0s_0}$  pour  $m_{0s_0,0}$ . Pour que, en dehors de ce cas, X ou Y soit monome, il faut, dans les deux hypothèses, que  $c's_1^2 = c$ , c'est-à-dire que  $cc'$  soit carré. Pour que X et Y soient monomes sans que  $m_{0s_0s_1}$  soit une multiplication, il faut et il suffit que  $s_0 = b = 0$ ; mais alors,  $cc'$  étant carré,  $\psi$  n'est irréductible que si  $-1$  est non carré.

En posant  $\chi\chi^{-1} = q$  ( $q\bar{q} = 1$ ), l'action de  $t_1m_{1q}$  sur  $x, y$  est

$$t_0 = t_1m_{1q} = \begin{vmatrix} x & x + \frac{b}{c}y \\ y & -y \end{vmatrix} \quad (t_0^2 = 1).$$

Les générateurs  $m_{0s_0s_1}, t_0$  de  $A = Q = Q_2$  sont, comme il convient, indépendants de  $x$ , ce qui n'a pas lieu pour  $t_1 = m_{1q}t_0$ .

Tout  $e_2$  de  $A$  hors de  $\{m_{1\sigma}\}$  a la forme

$$t_0m_{0s_0s_1} = \begin{vmatrix} x & s_0x + \frac{bs_0 - c's_1}{c}y & = X \\ y - s_1x & -s_0y & = Y \end{vmatrix} \quad (E., 20),$$

qui ne peut se réduire à une multiplication que si  $s_1 = 0$ , donc  $s_0^2 = 1$  et  $b = 0$  (mais alors  $\psi$  n'est irréductible que si  $-cc'$  est non carré). Pour que, en dehors de ce cas, X et Y soient monomes, il faut et il suffit que  $s_0 = 0$ , donc que  $cc'$  soit carré. Si donc  $cc'$  est carré, on peut remplacer le générateur  $t_0$  par  $t_0m_{1,-yq} = |g^{-1}y, gx|$  ( $g^2 = \frac{c}{c'}$ ). Pour que, en dehors de ces cas, X ou Y soit monome, il faut et il suffit que

$bs_0 = c's_1$ , d'où  $s_0^2 = 1$ . La substitution

$$u_0 = t_0 m_{0,-1,-\frac{b}{c'}} = \begin{vmatrix} x & -x \\ y & y + \frac{b}{c'}x \end{vmatrix} \quad (u_0^2 = 1)$$

est analogue à  $t_0$ , et  $t_0 m_{0,1,\frac{b}{c'}} = u_0 m_{0,-1}$ .

L'action de  $\gamma$  sur  $x, y$  est, en posant  $\xi + \xi_0 + \nu \xi_1$  ( $\xi_0, \xi_1$  réels),

$$\gamma = \begin{vmatrix} x & \xi_0 x + \frac{c'}{c} \xi_1 y \\ y & -\xi_1 x + \left(\xi_0 - \frac{b}{c} \xi_1\right) y \end{vmatrix}.$$

En prenant au besoin pour  $a$  une forme équivalente, on peut toujours supposer que  $c' = c$  (*E.*, 45), d'où  $\nu^{\pi+1} = 1$ , et remplacer alors  $t_0$  par  $t'_0 = t_0 m_{1,-\nu} = t_1 m_{1,-\nu q} = |y, x|$ . De même, en changeant au besoin de variables, on peut supposer que  $\xi = \nu$ , donc  $c' = \nu c$ , et remplacer alors  $\gamma$  par  $\gamma' = m_{0,-1} t_0 \gamma = |\nu y, x|$ .

REMARQUE. — Supposons que  $a = \psi = bxy + cx^2 + c'y^2$ ,  $\psi$  étant réductible dans  $\mathfrak{C}$  avec  $c \neq 0$ , et définissons  $k, k', u, u', x_1, y_1$  comme au n° 24, puis  $s_0$  et  $s_1$  par  $s = s_0 + us_1$ ,  $s^{-1} = s_0 + u's_1$ , en regardant  $s$  comme donné. On pourra conserver les définitions précédentes de  $m_{s_0 s_1} = m_{1s}$ ,  $t_1, t_0, t'_0, u_0$  et les formules de changements de variables (même celles qui donnent  $c' = c$ ) en remplaçant partout  $x, \dot{x}, \nu, \dot{\nu}, \dot{q}$  par  $k, k', u, u', q' = k'k^{-1}$ , car  $s, s_0, s_1$  et  $\dot{q}$  n'ont été employés que comme vérifiant  $s = s_0 + \nu s_1$ ,  $s^{-1} = s_0 + \dot{\nu} s_1$ ,  $\dot{q} = \dot{x}x^{-1}$ .

Le cas où  $a = \psi = xy$  coïncide, à un changement de notation près, avec celui où  $a = x_1 y_1$ . A dérive alors de  $m_{0,1} = |\nu x, \nu^{-1} y|$ ,  $t_0 = |y, x|$ .

26. Soit  $n > 2$ , et

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_i & \sum_k (\alpha_{ik} x_k + \alpha'_{ik} y_k) = X_i \\ y_i & \sum_k (\beta_{ik} x_k + \beta'_{ik} y_k) = Y_i \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, \nu, 0)$$

une substitution de  $A'$ , en convenant de supprimer toutes les quantités

relatives à  $x$  ou à  $y$  si  $x$  ou  $y$  ne figure pas dans  $a$ . La considération des coefficients de  $x_j y_k$ ,  $x_j x_k$ ,  $y_j y_k$ ,  $x_j^2$ ,  $y_j^2$  donne, en désignant par  $b_{jk}$ ,  $c_j$ ,  $c'_j$  les coefficients respectifs de  $x_j y_k$ ,  $x_j^2$ ,  $y_j^2$  ( $j, k \geq 0$ ;  $c_0 = c$ ,  $b_0 = b$ ,  $c'_0 = c'$ ) dans  $a$  les relations (cf. 1)

$$(4) \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ij} \beta'_{ik} + \beta_{ij} \alpha'_{ik}) + \alpha_{0j} (b \beta'_{0k} + 2c \alpha'_{0k}) + \beta_{0j} (b \alpha'_{0k} + 2c' \beta'_{0k}) = f b_{jk},$$

$$(5) \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ij} \beta_{ik} + \beta_{ij} \alpha_{ik}) + \alpha_{0j} (b \beta_{0k} + 2c \alpha_{0k}) + \beta_{0j} (b \alpha_{0k} + 2c' \beta_{0k}) = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(6) \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha'_{ij} \beta'_{ik} + \beta'_{ij} \alpha'_{ik}) + \alpha'_{0j} (b \beta'_{0k} + 2c \alpha'_{0k}) + \beta'_{0j} (b \alpha'_{0k} + 2c' \beta'_{0k}) = 0 \quad (j = k),$$

$$(7) \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ij} \beta_{ij} + \psi(\alpha_{0j}, \beta_{0j}) = f c_j,$$

$$(8) \sum_{i=1}^{\nu} \alpha'_{ij} \beta'_{ij} + \psi(\alpha'_{0j}, \beta'_{0j}) = f c'_j,$$

où  $j, k = 1, \dots, \nu, 0$ .

Pour  $p = 2$  et  $b = 1$ , les équations (4), (5), (6) coïncident (à un changement près des indices) avec les équations (1), (2) du n° 17. Donc, pour  $p = 2$ ,  $Q_0(2\nu, \pi)$  et  $Q_2(2\nu + 2, \pi)$  sont respectivement semblables à des diviseurs de  $G(2\nu, \pi)$  et  $G(2\nu + 2, \pi)$ . Je dirai que  $Q_0(2\nu, \pi)$  et  $Q_2(2\nu, \pi)$  sont respectivement, pour  $p = 2$ , le premier groupe lévoquadratique et le second groupe lévoquadratique à  $2\nu$  variables.

Soit

$$\alpha^{-1} = \begin{vmatrix} x_i & \sum_k (A_{ik} x_k + A'_{ik} y_k) = X_i \\ y_i & \sum_k (B_{ik} x_k + B'_{ik} y_k) = Y_i \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, \dots, \nu, 0),$$

en convenant toujours de supprimer les quantités relatives à  $x$  ou à  $y$  si  $x$  ou  $y$  ne figure pas dans  $a$ .

Pour  $p \neq 2$ , on a  $\alpha \bar{\alpha} \alpha = f a$ , d'où  $f \alpha^{-1} = \bar{\alpha} \alpha^{-1} = 2 a \cdot \bar{\alpha} \cdot (2 a)^{-1}$ , c'est-à-dire

$$(9) \quad f A_{ik} = \beta'_{ki}, \quad f A'_{ik} = \alpha'_{ki}, \quad f B_{ik} = \beta_{ki}, \quad f B'_{ik} = \alpha_{ki} \quad (i, k \neq 0).$$

Si  $\psi = 0$ ,  $\alpha^{-1}$  est explicitement déterminée par (9).

Si  $\psi = c x^2$ , on a en outre

$$(10) \quad f A_{i0} = 2 \alpha'_{0i} c, \quad f B_{i0} = 2 \alpha_{0i} c \quad (i = 1, \dots, \nu),$$

$$(11) \quad 2 c f A_{0k} = \beta_{k0}, \quad 2 c f A'_{0k} = \alpha_{k0} \quad (k = 1, \dots, \nu), \quad f A_{00} = \alpha_{00}.$$

Si  $\delta \neq 0$ , on a, avec (9).

$$\left. \begin{aligned}
 fA_{i0} &= \beta'_{0i} b + 2\alpha'_{0i} c, & fA'_{i0} &= \alpha'_{0i} b + 2\beta'_{0i} c' \\
 fB_{i0} &= \beta_{0i} b + 2\alpha_{0i} c, & fB'_{i0} &= \alpha_{0i} b + 2\beta_{0i} c' \\
 \partial fA_{0k} &= \beta'_{k0} b - 2\beta_{k0} c', & \partial fA'_{0k} &= \alpha'_{k0} b - 2\alpha_{k0} c' \\
 \partial fB_{0k} &= \beta_{k0} b - 2\beta'_{k0} c, & \partial fB'_{0k} &= \alpha_{k0} b - 2\alpha'_{k0} c
 \end{aligned} \right\} (i, k \neq 0),$$

$$\left. \begin{aligned}
 \partial fA_{00} &= \beta'_{00} b^2 + 2\alpha'_{00} bc - 2\beta_{00} bc' - 4\alpha_{00} cc', & \partial fA'_{00} &= \alpha'_{00} b^2 - 2(\alpha_{00} - \beta'_{00}) bc' - 4\beta_{00} c'^2, \\
 \partial fB_{00} &= \beta_{00} b^2 + 2(\beta'_{00} - \alpha_{00}) bc - 4\alpha'_{00} c^2, & \partial fB'_{00} &= \alpha_{00} b^2 - 2\alpha'_{00} bc + 2\beta_{00} bc' - 4\beta'_{00} cc'.
 \end{aligned} \right\}$$

Soit  $p = 2$ . — Comme les valeurs (9), (10), (12) des  $A_{ik}$ ,  $A'_{ik}$ ,  $B_{ik}$ ,  $B'_{ik}$  vérifient  $\alpha\alpha^{-1} = 1$  dans tout champ où ces valeurs ont un sens, et que chaque ligne de coefficients de  $\alpha^{-1}$  est fournie par un système d'équations de déterminant  $|\alpha|$  (système qui forme une partie de  $\alpha\alpha^{-1} = 1$ ), elles conviennent encore au cas  $p = 2$ , et il reste seulement, si  $\psi = cx^2$ , à résoudre le système

$$(13) \quad \begin{cases} \sum_k A_{0k} \alpha_{ki} + A'_{0k} \beta_{ki} + A_{00} \alpha_{0i} = c_i, \\ \sum_k A_{0k} \alpha'_{ki} + A'_{0k} \beta_{ki} + A_{00} \alpha'_{0i} = 0 \end{cases}$$

relativement aux  $A_{0k}$ ,  $A'_{0k}$ . Or remarquons que, pour  $p = 2$ ,  $\psi = cx^2$ , (7) et (8) déterminent les  $\alpha_{0k}$ ,  $\alpha'_{0k}$  où  $k \neq 0$  et  $\alpha_{00}$  par les autres coefficients, parmi lesquels les  $\alpha_{i0}$ ,  $\beta_{i0}$  ne figurent que dans celles des équations (4), (5) où  $j = 0$  [(5) est ici symétrique en  $j$  et  $k$ ; (4) disparaît pour  $k = 0$ , et (6) pour  $k = 0$  ou  $j = 0$ ].

On peut donc supposer que les  $\alpha_{ik}$ ,  $\alpha'_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\beta'_{ik}$ , où  $i$  et  $k$  sont  $\neq 0$ , ne sont assujettis qu'à celles des équations (4), (5), (6) où  $j$  et  $k$  sont  $\neq 0$ , c'est-à-dire que leur matrice  $M$  est une matrice de  $G(2\nu, \pi)$ , et  $\alpha_{i0}$ ,  $\beta_{i0}$  ( $i \neq 0$ ) qu'à celles des équations (4), (5) où  $j = 0$ ; et comme la matrice de ces dernières équations est  $M$  de déterminant 1,  $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 0$  [d'ailleurs  $A_{i0}$  et  $B_{i0}$  ( $i \neq 0$ ) étant nuls d'après (10), il en est de même *a priori* de  $\alpha_{i0}$ ,  $\beta_{i0}$  ( $i \neq 0$ )]. Donc, d'après (7),  $\alpha_{00} = 1$ . Donc, la première équation (13) donne, pour  $i = 0$ ,  $A_{00} = 1$  (cela résulte aussi *a priori* de  $\alpha_{00} = 1$ ). Omettons, dans (13), les équations relatives à  $i = 0$ , remplaçons  $A_{00}$  par 1, multiplions la première et la seconde équation une première fois par  $\beta'_{ii}$  et  $\beta_{ii}$  respectivement, une seconde fois par  $\alpha'_{ii}$  et  $\alpha_{ii}$ , et sommons chaque fois en  $i$ . On aura, d'après les équations (3) et (4) du n° 17,

$$(14) \quad fA_{0k} = \sum_i (\alpha_{0i} \beta'_{ki} + \beta_{ki} \alpha'_{0i}), \quad fA'_{0k} = \sum_i (\alpha_{0i} \alpha'_{ki} + \alpha_{ki} \alpha'_{0i}).$$

Mais comme  $\alpha_{i0} = \beta_{i0} = 0$  ( $i \neq 0$ ) et que  $\alpha_{0k}, \alpha'_{0k}$  sont déterminés par  $M$ , on voit que, pour  $p = 2$ ,  $Q(2\nu + 1, \pi)$  est isomorphe à son action sur  $x_1, y_1, \dots, x_\nu, y_\nu$  qui est  $G(2\nu, \pi)$ . On peut donc omettre les groupes  $A(2\nu + 1, \pi)$  pour  $p = 2$ .

Représentons par  $Bxy + Cx^2 + C'y^2 = \Psi(x, y)$  (1) la forme 0 si  $\psi = 0$  ( $p \geq 2$ ), la forme  $\frac{x^2}{4c}$  si  $\psi = cx^2$  ( $p > 2$ ), la forme  $-\delta^{-1}\psi(y, -x)$  si  $\delta \neq 0$  ( $p \geq 2$ ), et par  $B_{jk}, C_j, C'_j$  les coefficients de  $x_j y_k, x_j^2, y_j^2$  dans  $\varphi + \Psi$ . Les conditions (4)-(8), écrites pour  $\alpha^{-1}$  (qui multiplie  $\alpha$  par  $f^{-1}$ ), donnent alors (2), en supposant  $p \neq 2$  si  $\psi = cx^2$ , les relations, a priori équivalentes,

$$(15) \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ki} \beta'_{ji} + \beta_{ji} \alpha'_{ki}) + \alpha_{k0} (B \beta'_{j0} + 2C \beta_{j0}) + (B \beta_{j0} + 2C' \beta'_{j0}) \alpha'_{k0} = f B_{kj},$$

$$(16) \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ki} \alpha'_{ji} + \alpha_{ji} \alpha'_{ki}) + \alpha_{k0} (B \alpha'_{j0} + 2C \alpha_{j0}) + (B \alpha_{j0} + 2C' \alpha'_{j0}) \alpha'_{k0} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(17) \sum_{i=1}^{\nu} (\beta_{ki} \beta'_{ji} + \beta_{ji} \beta'_{ki}) + \beta_{k0} (B \beta'_{j0} + 2C \beta_{j0}) + (B \beta_{j0} + 2C' \beta'_{j0}) \beta'_{k0} = 0 \quad (j \neq k),$$

$$(18) \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ji} \alpha'_{ji} + \Psi(\alpha_{j0}, \alpha'_{j0}) = f C_j,$$

$$(19) \sum_{i=1}^{\nu} \beta_{ji} \beta'_{ji} + \Psi(\beta_{j0}, \beta'_{j0}) = f C'_j.$$

En comparant (15)-(19) à (4)-(8), on voit que, si  $\Psi = \psi$ ,  $A$  et  $A'$  contiennent la transposée de chacune de leurs substitutions. La condition  $\Psi = \psi$  est toujours remplie si  $\psi = 0$  ou si  $\pi = 2$ . Si  $\delta \neq 0$ , elle équivaut à  $\delta = 1, c' = -c$ , et pour  $p = 2$ , on peut toujours la supposer remplie (*E.*, 45).

(1) On ne confondra pas la forme  $\Psi$  avec le groupe  $\Psi$  de  $\psi$ .

(2) En désignant les premiers membres de (15), (16), (17), (18), (19) respectivement par  $w_{kj}, u_{kj}(=u_{jk}), v_{kj}(=v_{jk}), u_j, v_j$ , on obtient d'abord directement

$$\begin{aligned} w_{kj} &= u_{kj} = v_{kj} = 0 & (j, k \neq 0), \\ \begin{cases} b w_{0k} + 2c' v_{k0} = 0 \\ 2c w_{0k} + b v_{k0} = 0 \end{cases} & (k \neq 0), & \begin{cases} b w_{k0} + 2c u_{k0} = 0 \\ 2c' w_{k0} + b u_{k0} = 0 \end{cases} & (k \neq 0), \\ \begin{cases} (4cc' + b^2)w_{00} + 4bcu_0 + 4bc'v_0 = b, \\ 2bcw_{00} + 4c^2u_0 + b^2v_0 = c, \\ 2bc'w_{00} + b^2u_0 + 4c'^2v_0 = c', \end{cases} \end{aligned}$$

d'où  $w_{0k} = w_{k0} = u_{k0} = v_{k0} = 0$  ( $k \neq 0$ ),  $w_{00} = B, u_0 = C, v_0 = C'$  (le déterminant du dernier système est  $-\delta^3$ ).

**27.** Désignons par  $(4)_l, (7)_l, (8)_l, (15)_l, (18)_l, (19)_l$  ce que deviennent les équations  $(4), (7), (8), (15), (18), (19)$  respectivement quand on y fait  $j = k = l$ .

*A* contient une substitution  $\alpha$  dont les colonnes répondant à  $x_l, y_l$  forment une solution donnée de  $(7)_l, (4)_l, (8)_l$  pour  $f = 1$ .

On démontre ce théorème comme le théorème analogue du n° 4,  $F(x_l, y_l)$  étant ici la forme  $x_l y_l$ , si  $l \neq 0$ , et la forme  $\psi$  si  $l = 0$  <sup>(1)</sup> :  $\alpha_l$  est encore équivalent à  $\alpha - F(x_l, y_l)$ , car sans cela les deux équations  $\alpha = 0$  et  $F(x_l, y_l) + \alpha = 0$ , dont les premiers membres sont équivalents, n'auraient pas, pour chaque système de valeurs de  $x_l, y_l$  le même nombre de solutions dans les autres variables.

Comme au n° 4, les substitutions  $\alpha$  de cette sorte forment le complexe  $A_l \alpha_0$ ,  $\alpha_0$  étant l'une d'elles, et  $A_l$  le groupe de  $\alpha - F(x_l, y_l)$ .

De même les substitutions de *A* dont les lignes répondant à  $x_l, y_l$  constituent une solution donnée de  $(18)_l, (15)_l, (19)_l$  pour  $f = 1$  forment le complexe  $\alpha_0 A_l$ ,  $\alpha_0$ , étant l'une d'elles, qui existe toujours.

Or pour  $n > 1$  et  $l = 1$ , le nombre des solutions autres que 0, 0, ..., 0, de  $(7)_1$  est  $\pi^{2\nu} - 1$  pour  $n = 2\nu + 1$  ( $\psi = cx^2, p \neq 2$ ) et  $(\pi^{\nu'} - \theta)(\pi^{\nu'-1} + \theta)$  pour  $n = 2\nu'$  ( $\theta = 1$  si  $\psi = 0$  ou si  $\psi$  est réductible;  $\theta = -1$  si  $\psi$  est irréductible; si donc  $p$  est  $\neq 2$ ,  $\theta$  est le caractère quadratique de  $\delta$ ) (*E.*, 44, 45). Il s'agit alors de calculer le nombre  $m_\Sigma$  des solutions de  $(4)_1, (8)_1$  répondant à une solution autre que 0, 0, ..., 0 de  $(7)_1$ , [à la solution 0, 0, ..., 0 de  $(7)_1$  ne répond aucune

(1) Si  $l = 0$  et  $\delta \neq 0$ ,  $\alpha' = \tau \alpha \bar{\tau}$  a, d'après la construction de  $\tau$ , la forme

$$\psi + xX + yY + Z,$$

$X, Y$  et  $Z$  ne dépendant pas de  $x, y$ . On identifie cette forme avec

$$\psi(x + u, y + v) + \alpha_l$$

en déterminant  $u, v$  par  $2cu + bv = X, bu + 2c'v = Y$ .



solution de (4)<sub>1</sub>, (8)<sub>1</sub>]. Or, on voit comme au n° 4 que  $m_\Sigma$  est indépendant de  $\Sigma$ . En prenant pour  $\Sigma$  la solution 1, 0, ..., 0, (4)<sub>1</sub> donne  $\beta'_{11} = 1$ ; on peut alors prendre arbitrairement les  $\alpha'_{i1}$ ,  $\beta'_{i1}$  où  $i$  est  $\neq 1$ ,  $\alpha'_{i1}$  étant alors déterminé par (8)<sub>1</sub>. Donc  $m_\Sigma = \pi^{n-2}$ . Donc l'ordre de  $A(n, \pi)$ , qui est 2 pour  $n = 1$ , et  $2(\pi - \theta)$  pour  $n = 2$  (25), est  $2\pi^\nu \Pi_1^\nu (\pi^{2i} - 1)$  pour  $n = 2\nu + 1$  ( $p > 2$ ), et  $2\pi^{\nu(\nu-1)} (\pi^\nu - \theta) \Pi_1^{\nu-1} (\pi^{2i} - 1)$  pour  $n = 2\nu > 2$  ( $p \geq 2$ ).

Si  $p > 2$ , on peut réduire  $a = (a_{ik})$  à  $\Sigma_1^{n-1} x_i^2 + cx^2$  ( $c = 1$  ou  $N$ ). Pour que  $\alpha = (\alpha_{ik})$  soit dans  $A'$ , il faut et suffit que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ij} \alpha_{ik} + c \alpha_{nj} \alpha_{nk} = fa_{jk}.$$

La condition analogue relative à  $\alpha^{-1}$  est, en posant  $\alpha^{-1} = (a'_{ik})$ ,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ji} \alpha_{ki} + c^{-1} \alpha_{jn} \alpha_{kn} = fa'_{jk}.$$

On voit de même que les substitutions de  $A$  dont la première colonne (ligne) est une solution donnée de

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i1}^2 + c \alpha_{n1}^2 = 1 \quad (\sum_{i=1}^{n-1} \alpha'_{i1}^2 + c^{-1} \alpha'_{n1}^2 = 1)$$

forment le complexe  $A, \alpha_0 (\alpha_0 A_1)$ ,  $\alpha_0$  étant l'une d'elles, qui existe toujours, et  $A$ , le groupe de  $a - x_i^2$ . On déduit plus simplement de là l'ordre de  $A$ .

**28.**  $A(n, \pi)$  contient évidemment, outre les générateurs réels déjà indiqués (25) de  $\Psi$  ( $t_0$  désignera  $|x, -x|$ , si  $\psi = cx^2$ , et  $|y, -y|$ , si  $\psi = c'y^2$ ) les substitutions

$$t_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix}, \quad m_{i\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_i \\ y_i & \lambda^{-1} y_i \end{vmatrix}, \quad V_{ik\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda y_i \end{vmatrix},$$

$$V_{0k\lambda} = \begin{cases} \begin{vmatrix} x & x + \lambda x_k \\ y_k & y_k - b\lambda y - 2c\lambda x - c\lambda^2 x_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } x, \\ 1 & \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } x, \end{cases}$$

$$V_{k0\lambda} = \begin{cases} \begin{vmatrix} y & y - \lambda y_k \\ x_k & x_k + b\lambda x + 2c'\lambda y - c'\lambda^2 y_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend de } y, \\ 1 & \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } y \end{cases}$$

( $i, k \neq 0$ ;  $\alpha$  réel; les variables non écrites sont inaltérées) et leurs combinaisons

$$t_{jj'} = t_{j'j} = t_j t_{j'} \quad (j \neq j'; j, j' = 0, \dots, \nu), \quad d_{ik} = m_{i,-1} m_{k,-1},$$

$$U_{ik\lambda} = U_{ki,-\lambda} = t_k V_{ik\lambda} t_k = \begin{vmatrix} x_i & x_i + \lambda y_k \\ x_k & x_k - \lambda y_i \end{vmatrix},$$

$$W_{ik\lambda} = W_{ki,-\lambda} = t_i V_{ik\lambda} t_i = \begin{vmatrix} y_i & y_i + \lambda x_k \\ y_k & y_k - \lambda x_i \end{vmatrix} \quad (1),$$

$$U_{0k\lambda} = U_{k0,-\lambda} = t_k V_{0k\lambda} t_k = \begin{cases} \begin{vmatrix} x & x + \lambda y_k \\ x_k & x_k - b\lambda y - 2c\lambda x - c\lambda^2 y_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend} \\ 1 & \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } x, \end{cases} \text{ de } x,$$

$$W_{0k\lambda} = W_{k0,-\lambda} = t_k V_{0k\lambda} t_k = \begin{cases} \begin{vmatrix} y & y + \lambda x_k \\ y_k & y_k - b\lambda x - 2c'\lambda y - c'\lambda^2 x_k \end{vmatrix} & \text{si } \psi \text{ dépend} \\ 1 & \text{si } \psi \text{ ne dépend pas de } y, \end{cases} \text{ de } y,$$

$$R_{ik\lambda} = R_{ki,-\lambda^{-1}} = R_{ik,-\lambda} d_{ik} = V_{ik\lambda} V_{ki,-\lambda^{-1}} V_{ik\lambda} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda x_k \\ y_i & \lambda^{-1} y_k \\ x_k & -\lambda^{-1} x_i \\ y_k & -\lambda y_i \end{vmatrix} \quad (i, k \neq 0),$$

$$S_{ik\lambda} = S_{ki,-\lambda} = t_k R_{ik\lambda} t_k = t_i R_{ik,\lambda^{-1}} t_i \\ = U_{ik\lambda} W_{ik,\lambda^{-1}} U_{ik\lambda} = W_{ik,\lambda^{-1}} U_{ik\lambda} W_{ik,\lambda^{-1}} = \begin{vmatrix} x_i & \lambda y_k \\ y_i & \lambda^{-1} x_k \\ x_k & -\lambda y_i \\ y_k & -\lambda^{-1} x_i \end{vmatrix} \quad (i, k \neq 0),$$

$$T_{ik} = m_{k\lambda}^{-1} m_{i,-\lambda} R_{ik\lambda} = R_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda} \\ = t_{ik} m_{k\lambda} m_{i,-\lambda} S_{ik\lambda} = S_{ik\lambda} m_{i\lambda}^{-1} m_{k,-\lambda}^{-1} t_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \\ x_k & x_i \\ y_k & y_i \end{vmatrix} \quad (i, k \neq 0).$$

(1) Les définitions précédentes, celles qui vont suivre et leurs conséquences gardent évidemment leur valeur si  $\lambda$  est hors de  $\mathcal{O}$ . Elles sont alors relatives à un groupe  $A(n, \pi^i)$  où  $i$  est  $> 1$ . On voit que, si  $\rho$  dans  $\mathcal{O}$ ,  $m_{i\rho}$ ,  $V_{ik\rho}$ ,  $U_{ik\rho}$ ,  $W_{ik\rho}$  coïncident respectivement avec les substitutions  $\bar{m}_{i\rho}$ ,  $V'_{ik\rho}$ ,  $U'_{ik\rho}$ ,  $W'_{ik\rho}$  du n° 9. Cela n'a plus lieu si  $\rho$  est hors de  $\mathcal{O}$ .

Il sera parfois commode de négliger le dernier indice dans les substitutions  $m, V, U, W$ , et les deux derniers dans  $m_{0s_0s_1}$ .

Il résulte des formules précédentes que  $t_{ik}$ , pour  $i$  et  $k \neq 0$ , transforme  $V_{ik\lambda}$  en  $V_{ki-\lambda}$ , et  $U_{ik\lambda}$  en  $W_{ik\lambda}$ . De même, en posant  $\tau = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}$ , et en écrivant  $t_0^{(c)}, u_0^{(c)}, V_{0k\lambda}^{(c)}, V_{k0\lambda}^{(c)}, U_{0k\lambda}^{(c)}, W_{0k\lambda}^{(c)}$  pour  $t_0, u_0, V_{0k\lambda}, V_{k0\lambda}, U_{0k\lambda}, W_{0k\lambda}$  afin de mettre en évidence le paramètre  $c$  ou  $c'$  dont dépendent les substitutions, la  $s_2$   $\tau t_k$  (qui transforme  $\psi$  en  $\psi' = bxy + c'x^2 + cy^2$ , donc  $\Psi$  en  $\Psi'$ ,  $\Psi'$  étant le groupe de  $\psi'$ ) transforme  $t_0^{(c)}$  en  $u_0^{(c')}$ ,  $V_{0k\lambda}^{(c)}$  en  $V_{k0,-\lambda}^{(c')}$  et  $U_{0k\lambda}^{(c)}$  en  $W_{0k\lambda}^{(c')}$ . Cette remarque permet de déduire de chaque relation entre les  $V, U, W$  une nouvelle relation analogue.

29. Les substitutions ainsi définies vérifient, outre les équations de  $\Psi$  (25), les relations suivantes (1) :

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} t_j^2 = V_{jj\lambda}^2 = 1, \quad V_{jj\lambda}^{-1} = V_{jj,-\lambda} \quad (j, j' = 0, \dots, \nu), \\ R_{ik\lambda}^2 = S_{ik\lambda}^2 = d_{ik}, \quad R_{ik\lambda}^4 = S_{ik\lambda}^4 = 1 \quad (i, k = 1, \dots, \nu); \end{array} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} t_i m_{i\lambda} t_i = m_{i\lambda}^{-1}, \quad t_0 m_{0s_0s_1} t_0 = m_{0s_0s_1}^{-1} \\ t_{ik} V_{ik\lambda} t_{ik} = V_{ki,-\lambda}, \quad t_{ik} U_{ik\lambda} t_{ik} = W_{ik\lambda} \end{array} \right\} \quad (i, k \neq 0); \\ \left. \begin{array}{l} m_{i\mu}^{-1} V_{ij\lambda} m_{i\mu} = W_{ij,\lambda\mu}, \quad m_{i\mu}^{-1} V_{jk\lambda} m_{i\mu} = V_{jk,\lambda\mu} \\ m_{i\mu}^{-1} W_{ij\lambda} m_{i\mu} = W_{ij,\lambda\mu}, \quad m_{i\mu}^{-1} U_{jk\lambda} m_{i\mu} = U_{jk,\lambda\mu} \end{array} \right\} \quad (j \leq 0); \\ \text{si } \psi = cx^2, \quad t_0 V_{0k\lambda} t_0 = V_{0k,-\lambda}; \quad \text{si } \psi = c'y^2, \quad t_0 V_{k0\lambda} t_0 = V_{k0,-\lambda}; \\ \text{si } \delta \neq 0, \quad t_0 V_{0k\lambda} t_0 = V_{0k\lambda}, \quad t_0 V_{k0\lambda} t_0 = V_{k0\lambda} U_{k0, -\frac{b\lambda}{c}} \\ \left. \begin{array}{l} m_{0s_0s_1}^{-1} V_{0k\lambda} m_{0s_0s_1} = V_{0k,\lambda s_0} W_{0k,-\lambda s_1} \\ m_{0s_0s_1}^{-1} V_{k0\lambda} m_{0s_0s_1} = V_{k0, (s_0 - \frac{b}{c}s_1)\lambda} U_{k0, \frac{c'}{c}s_1\lambda} \end{array} \right\} \quad [\psi(s_0, -s_1) = c]; \\ (\text{si } c' = c, \quad t_0' V_{0k\lambda} t_0' = W_{0k\lambda}, \quad t_0' V_{k0\lambda} t_0' = U_{k0\lambda}); \end{array} \right.$$

(1) Les formules (23), (25), (27) se tirent respectivement des formules (22), (24), (26) en transformant ces dernières par des  $t$ ; (28) résulte de (22) et (23); la seconde et la quatrième des relations (24) sont les transformées de la première et de la troisième par  $\tau t_{ik}$ ; la dernière des relations (26) est la transformée de la précédente par  $\tau t_k$ .

$$\begin{aligned}
 (22) \quad & \left. \begin{aligned}
 & V_{ik\lambda} V_{ll\mu} = V_{ll\mu} V_{ik\lambda} \quad (k \neq l \text{ ou } k = l) \\
 & V_{kl\lambda}^{-1} V_{ik\mu} V_{k\lambda} = V_{ik\mu} V_{ll, -\lambda\mu} \\
 & V_{ik\lambda}^{-1} V_{ki\mu} V_{ik\lambda} = V_{ki, \frac{\varphi}{\lambda^2\mu}}^{-1} m_{k, -\lambda^2\mu} m_{i, \lambda^2\mu}^{-1} T_{ik} V_{ki, \frac{\varphi'}{\lambda^2\mu}}^{-1} \quad (1) \\
 & (\varphi = 1 + \lambda\mu, \varphi' = 1 - \lambda\mu)
 \end{aligned} \right\} (i, k, l \neq 0); \\
 (23) \quad & \left. \begin{aligned}
 & V_{k\lambda} V_{ll\mu} = V_{ll\mu} V_{k\lambda}, \\
 & V_{ik\lambda} U_{ll\mu} = U_{ll\mu} V_{ik\lambda}, \quad V_{k\lambda} W_{ll\mu} = W_{ll\mu} V_{k\lambda} \\
 & U_{ik\lambda} U_{ll\mu} = U_{ll\mu} U_{ik\lambda}, \quad W_{ik\lambda} W_{ll\mu} = W_{ll\mu} W_{ik\lambda} \\
 & \text{(dans ces cinq formules, } k \text{ peut être égal à } l) \\
 & U_{kl\lambda}^{-1} V_{ik\mu} U_{k\lambda} = V_{ik\mu} U_{ll, -\lambda\mu} \\
 & W_{kl\lambda}^{-1} U_{ik\mu} W_{k\lambda} = U_{ik\mu} V_{ll, -\lambda\mu} \\
 & V_{kl\lambda}^{-1} W_{ik\mu} V_{k\lambda} = W_{ik\mu} W_{ll, -\lambda\mu}
 \end{aligned} \right\} (i, k, l \neq 0); \\
 (24) \quad & \left. \begin{aligned}
 & V_{ok\lambda} V_{ik\mu} = V_{ik\mu} V_{ok\lambda}, \quad V_{k\lambda} V_{ki\mu} = V_{ki\mu} V_{k\lambda} \\
 & V_{kl\lambda}^{-1} V_{ok\lambda} V_{ki\mu} = W_{ik, c\lambda^2\mu} V_{oi, -\lambda\mu} V_{ok\lambda} \\
 & V_{kl\lambda}^{-1} V_{k\lambda} V_{ki\mu} = U_{ik, c\lambda^2\mu} V_{io, \lambda\mu} V_{k\lambda}
 \end{aligned} \right\} (i, k \neq 0); \\
 (25) \quad & \left. \begin{aligned}
 & U_{ok\lambda} U_{ik\mu} = U_{ik\mu} U_{ok\lambda}, \quad W_{k\lambda} W_{ki\mu} = W_{ki\mu} W_{k\lambda} \\
 & U_{ok\lambda} V_{ki\mu} = V_{ki\mu} U_{ok\lambda}, \quad W_{k\lambda} V_{ik\mu} = V_{ik\mu} W_{k\lambda} \\
 & V_{ok\lambda} W_{ik\mu} = W_{ik\mu} V_{ok\lambda}, \quad V_{k\lambda} U_{ki\mu} = U_{ki\mu} V_{k\lambda} \\
 & W_{kl\lambda}^{-1} U_{ok\lambda} W_{ki\mu} = V_{ki, -c\lambda^2\mu} V_{oi, -\lambda\mu} U_{ok\lambda} \\
 & V_{kl\lambda}^{-1} U_{ok\lambda} V_{ki\mu} = U_{ik, -c\lambda^2\mu} U_{oi, \lambda\mu} U_{ok\lambda} \\
 & U_{kl\lambda}^{-1} V_{ok\lambda} U_{ki\mu} = V_{ik, -c\lambda^2\mu} U_{oi, \lambda\mu} V_{ok\lambda} \\
 & U_{kl\lambda}^{-1} W_{k\lambda} U_{ik\mu} = V_{ik, -c\lambda^2\mu} V_{io, \lambda\mu} W_{k\lambda} \\
 & V_{kl\lambda}^{-1} W_{k\lambda} V_{ki\mu} = W_{ik, c\lambda^2\mu} W_{oi, \lambda\mu} W_{k\lambda} \\
 & W_{kl\lambda}^{-1} V_{k\lambda} W_{ki\mu} = V_{ki, c\lambda^2\mu} W_{io, \lambda\mu} V_{k\lambda}
 \end{aligned} \right\} (i, k \neq 0);
 \end{aligned}$$

(1) En remplaçant  $m_{k, -\lambda^2\mu} m_{i, \lambda^2\mu}^{-1} T_{ik}$  par  $R_{ki, \lambda^{-2}\mu^{-1}}$ , on réduit le second membre à  $V_{ki, \lambda^{-1}}^{-1} V_{ik, -\lambda^2\mu} V_{ki, \lambda^{-1}}$ , c'est-à-dire que  $V_{ik\lambda}^{-1} V_{ki\mu} V_{ik\lambda}$  ne change pas quand on remplace respectivement  $i, k, \lambda, \mu$  par  $k, i, \lambda^{-1}, -\lambda^2\mu$ , ce qui échange  $\varphi$  et  $\varphi'$ .

Si  $\varphi \neq 0$ , on a encore la formule

$$V_{ik\lambda}^{-1} V_{ki\mu} V_{ik\lambda} = V_{ik, -\frac{\lambda^2\mu}{\varphi}} V_{ki, \mu\varphi} m_{k\varphi}^{-1} m_{i\varphi}$$

d'où, par les changements précédents, si  $\varphi' \neq 0$ ,

$$V_{ik\lambda}^{-1} V_{ki\mu} V_{ik\lambda} = V_{ki, \frac{\mu}{\varphi}} V_{ik, -\lambda^2\mu\varphi} m_{i\varphi}^{-1} m_{k\varphi}$$

$$\begin{aligned}
 & V_{k\sigma\lambda} U_{k\sigma\mu} = U_{k\sigma\mu} V_{k\sigma\lambda}, \\
 & V_{0\lambda\mu}^{-1} V_{k\sigma\lambda} V_{0\lambda\mu} = V_{k\lambda, -b\lambda\mu} V_{k\sigma\lambda}, \quad V_{\lambda\sigma\mu}^{-1} V_{k\sigma\lambda} V_{\lambda\sigma\mu} = U_{k\lambda, 2c'\lambda\mu} V_{k\sigma\lambda}, \\
 & V_{0\lambda\mu}^{-1} U_{0k\lambda} V_{0\lambda\mu} = V_{k\lambda, 2c'\lambda\mu} U_{0k\lambda}, \\
 & V_{0k\lambda}^{-1} V_{k\sigma\mu} V_{0k\lambda} = m_{0s_0s_1} m_{k\varphi} U_{0k, -c\lambda\mu} V_{k\sigma, \frac{\mu(1-b\lambda\mu)}{\varphi^2}} W_{k\sigma, \frac{c\lambda^2\mu}{\varphi}} V_{0k, \frac{\lambda\mu^2(c\lambda'\lambda\mu-b)}{\varphi}}, \\
 & s_0 = \frac{1 - cc'\lambda^2\mu^2}{\varphi}, \quad s_1 = \frac{c\lambda\mu(2 - b\lambda\mu)}{\varphi} \quad [\psi(s_0, -s_1) = c], \\
 & \varphi = 1 - b\lambda\mu + cc'\lambda^2\mu^2 \quad (\partial \neq 0); \\
 & V_{0k\lambda}^{-1} U_{0k\mu} V_{0k\lambda} = \begin{cases} U_{0k, \frac{\mu}{\varphi}} V_{0k, c\lambda^2\mu\varphi} m_{k\varphi} & \text{si } \varphi = 1 + c\lambda\mu \text{ est } \neq 0 \text{ } ^{(1)}, \\ U_{0k, \frac{2}{c'\lambda}} m_{k, -c\lambda^2} m_{0, -1}^{\varepsilon} t_{0k} & \text{si } \varphi = 0 \end{cases} \\
 & \quad (\varepsilon = 1 \text{ si } \psi \text{ dépend de } y; \varepsilon = 0 \text{ si } \psi = cx^2); \\
 & V_{k\sigma\lambda} W_{0k\mu} V_{k\sigma\lambda}^{-1} = \begin{cases} W_{0k, \frac{\mu}{\varphi}} V_{k\sigma, -c\lambda^2\mu\varphi} m_{k\varphi}^{-1} & \text{si } \varphi' = 1 + c'\lambda\mu \text{ est } \neq 0, \\ W_{0k, \frac{2}{c'\lambda}} m_{k, -c'\lambda^2} m_{0, -1}^{\varepsilon} u_{0k} & \text{si } \varphi' = 0 \end{cases} \\
 & \quad (\varepsilon = 1 \text{ si } \psi \text{ dépend de } x; \varepsilon = 0 \text{ si } \psi = c'y^2);
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
 & V_{0k\lambda} W_{0k\mu} = W_{0k\mu} V_{0k\lambda}, \\
 & V_{0\lambda\mu}^{-1} W_{k\sigma\lambda} V_{0\lambda\mu} = W_{k\lambda, b\lambda\mu} W_{k\sigma\lambda}, \quad V_{0\lambda\mu}^{-1} V_{0k\lambda} V_{0\lambda\mu} = W_{k\lambda, 2c'\lambda\mu} V_{0k\lambda}, \\
 & U_{0\lambda\mu}^{-1} V_{k\sigma\lambda} U_{0\lambda\mu} = U_{k\lambda, b\lambda\mu} V_{k\sigma\lambda}, \quad U_{0\lambda\mu}^{-1} U_{0k\lambda} U_{0\lambda\mu} = U_{k\lambda, 2c'\lambda\mu} U_{0k\lambda}, \\
 & V_{\lambda\sigma\mu}^{-1} W_{k\sigma\lambda} V_{\lambda\sigma\mu} = V_{k\lambda, -2c'\lambda\mu} W_{k\sigma\lambda}, \quad W_{\lambda\sigma\mu}^{-1} V_{k\sigma\lambda} W_{\lambda\sigma\mu} = V_{k\lambda, 2c'\lambda\mu} V_{k\sigma\lambda}, \\
 & U_{0\lambda\mu}^{-1} W_{k\sigma\lambda} U_{0\lambda\mu} = V_{k\lambda, b\lambda\mu} W_{k\sigma\lambda}, \quad W_{\lambda\sigma\mu}^{-1} W_{k\sigma\lambda} W_{\lambda\sigma\mu} = W_{k\lambda, 2c'\lambda\mu} W_{k\sigma\lambda};
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
 & R_{ik\lambda} S_{ik\mu} = S_{ik\mu} R_{ik\lambda} \\
 & = (V_{ik\lambda} U_{ik\mu}) \left( V_{k\lambda, \frac{-1}{\lambda}} W_{ik, \frac{1}{\mu}} \right) (V_{ik\lambda} U_{ik\mu}) = \begin{vmatrix} x_i & -\lambda\mu y_i \\ y_i & -\frac{1}{\lambda\mu} x_i \\ x_k & -\frac{\mu}{\lambda} y_k \\ y_k & -\frac{\lambda}{\mu} x_k \end{vmatrix};
 \end{aligned}
 \tag{28}$$

(1) En changeant  $\lambda$  en  $-\lambda$ , et en posant  $\mu(1 - c\lambda\mu) = \mu'$ ,  $\frac{\lambda}{1 - c\lambda\mu} = \lambda'$  (d'où  $\lambda'\mu' = \lambda\mu$ ), on peut écrire cette équation sous la forme

$$V_{0k\lambda} U_{0k\mu} = m_{k, \left(\frac{\mu'}{\lambda'}\right)^2} U_{0k\mu'} V_{0k\lambda'}.$$

$$\begin{cases}
 (R_{ik\lambda} S_{ik\mu})^2 = 1, & R_{ik\lambda} S_{ik\mu} = t_{ik} m_{i,-\lambda, \mu} m_{k, -\frac{\mu}{\lambda}}, \\
 t_{ik} = R_{ik1} S_{ik,-1} = R_{ik,-1} S_{ik1}, & m_{ik^2} = t_{ik} R_{ik\lambda} S_{ik,-\lambda}, \\
 m_{i\lambda} m_{k\lambda}^{-1} = R_{ik,-1} R_{ik\lambda}, & m_{i\lambda} m_{k\lambda} = S_{ik,-1} S_{ik\lambda}, \\
 m_{i, \frac{\mu}{\lambda}} m_{k, \frac{\lambda}{\mu}} = R_{ik,-\lambda} R_{ik\mu} = V_{ki\sigma} V_{ik\rho} V_{ki\sigma} V_{ik\rho}, \\
 1 + \rho\sigma = 1 + \rho'\sigma' = \frac{\mu}{\lambda}, & \rho' = -\frac{\rho\lambda}{\mu}, \quad \sigma' = -\frac{\sigma\mu}{\lambda}, \\
 \text{d'où, en transformant par } t_k, \\
 m_{i, \frac{\mu}{\lambda}} m_{k, \frac{\mu}{\lambda}} = S_{ik,-\lambda} S_{ik\mu} = W_{ki\sigma} U_{ik\rho} W_{ki\sigma} U_{ik\rho}.
 \end{cases}
 \tag{29}$$

**50.**  $A(n, \pi)$  dérive de  $\Psi$ , des  $t$ , des  $m$  et des  $V$  (cf. 8). En effet, soit  $\alpha$  une substitution de  $A$ , et reprenons les notations du n° 26. Les éléments de la première colonne de  $\alpha$  n'étant pas tous nuls, on peut, en multipliant à droite par une  $V$ , une  $U$  (1) ou une  $m_{i\lambda} t_i^0$  ( $\theta = 0$  ou  $1$ ), rendre  $\alpha_{11}$  égal à  $1$ , puis de même, par les  $V$  et les  $W$ , annuler les  $\alpha_{i1}$ ,  $\beta_{i1}$  où  $i \neq 1$ . Alors, d'après (7),  $\beta_{11} = 0$ , et, d'après (4),  $\beta'_{11} = 1$ . On pourra donc, par les  $V$  et les  $U$ , annuler les  $\beta'_{i1}$ ,  $\alpha'_{i1}$  où  $i \neq 1$ . Alors, d'après (8),  $\alpha'_{11} = 0$ , et l'on est ramené à une substitution de  $A_1$  (27).

Donc, toute substitution de  $A(n, \pi)$  a un déterminant égal à  $\pm 1$  (pour  $p \neq 2$ , cela résultait déjà de  $\alpha a \bar{\alpha} = a$ , d'où  $|\alpha|^2 = 1$ ). Donc, pour  $p \geq 2$ , le p. g. c. d. de  $A$ , est  $D$ , ce qui détermine l'ordre de  $\mathfrak{A}$ .

**51.** Pour obtenir de même un système de générateurs de  $\bar{Q}_2(n, \pi)$ , il suffit d'exprimer les générateurs de  $\Psi$  et les  $V_{0i}$ ,  $V_{i0}$  par les générateurs de  $Q_0(n, \pi^2)$ . Or, d'après le n° 25, en écrivant  $x_{\nu}$ ,  $y_{\nu}$ ,  $t_{\nu}$ ,  $m_{\nu\sigma}$  ( $\nu = \nu + 1$ ) pour  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $t_1$ ,  $m_{1\sigma}$ , on a d'abord

$$\begin{aligned}
 m_{0s_0 s_1} &= m_{\nu' s}, & s &= s_0 + \omega s_1, & \psi(s_0, -s_1) &= c & (s_0, s_1 \text{ réels}), \\
 t_0 &= t_{\nu'} m_{\nu' q}, & q &= x x^{-1}, & \text{d'où } & q \dot{q} &= 1 \\
 & & & & (\text{si } c' = c, \text{ donc } \omega \dot{\omega} = 1, & t'_0 &= t_{\nu'} m_{\nu', -q\omega}).
 \end{aligned}$$

(1) Si  $\delta \neq 0$ ,  $2c\alpha_{01} + b\beta_{01}$  et  $b\alpha_{01} + 2c'\beta_{01}$  ne peuvent s'annuler à la fois. Si donc, pour  $\delta \neq 0$ , les  $\alpha_{i1}$ ,  $\beta_{i1}$  où  $i \neq 0$  sont nuls, on pourra rendre  $\alpha_{11}$  égal à  $1$  en multipliant à droite par une  $U_{01}$  ou une  $V_{10}$ .

Déterminons maintenant  $\rho = \rho_0 + \nu\rho_1$  ( $\rho_0$  et  $\rho_1$  réels) par les conditions

$$x\rho\nu - \dot{x}\dot{\rho}\dot{\nu} = c\lambda(\nu - \dot{\nu}), \quad x\rho - \dot{x}\dot{\rho} = c\mu(\nu - \dot{\nu}),$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant arbitraires dans  $\mathfrak{C}$  (le déterminant de ces équations en  $\rho_0, \rho_1$  est  $\delta c^{-1}$ ), d'où

$$x\rho + \dot{x}\dot{\rho} = 2c\lambda + b\mu, \quad x\rho\nu + \dot{x}\dot{\rho}\dot{\nu} = -2c'\mu - b\lambda, \quad \dot{\rho}\dot{\rho} = \psi(\lambda, \mu).$$

On aura

$$(30) \quad P_{i\rho} = V_{i\nu\rho} U_{i\nu\dot{\rho}} = U_{i\nu\dot{\rho}} V_{i\nu\rho} = \begin{vmatrix} x_i & x_i - \rho\dot{\rho}y_i + \rho x_{\nu'} + \dot{\rho}y_{\nu'} \\ x_{\nu'} & x_{\nu'} - \dot{\rho}y_i \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} - \rho y_i \end{vmatrix} = U_{i0\lambda} V_{i0\mu},$$

d'où, en transformant par  $t_i$  et en changeant  $\lambda, \mu$  en  $-\lambda, -\mu$ ,

$$(31) \quad O_{i\rho} = t_i P_{i,-\rho} t_i = W_{\nu'i\rho} V_{\nu'i\dot{\rho}} = V_{\nu'i\dot{\rho}} W_{\nu'i\rho} = \begin{vmatrix} y_i & -\rho\dot{\rho}x_i + y_i - \rho x_{\nu'} - \dot{\rho}y_{\nu'} \\ x_{\nu'} & x_{\nu'} + \dot{\rho}x_i \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} + \rho x_i \end{vmatrix} = V_{0i\lambda} W_{0i\mu} \quad (1).$$

En faisant  $\lambda$  ou  $\mu$  nul, on obtient l'expression de  $V_{i0\mu}, V_{0i\lambda}, U_{i0\lambda}, W_{0i\mu}$  par les générateurs de  $Q_0(n, \pi^2)$ . Mais comme le p. p. c. m.  $\bar{P}_i$  des  $P_{i\rho}$  ( $P_{i\rho}$  contient deux paramètres réels) coïncide avec celui  $\bar{P}_i$  des  $V_{i0\mu}, U_{i0\lambda}$  (abélien principal d'ordre  $\pi^2$ ), on peut prendre pour générateurs de  $\bar{Q}_2(n, \pi)$  les  $P_{i\rho}$ , joints aux générateurs de  $Q_0(n-2, \pi)$  et de  $\Psi$ .

*Remarque.* — Supposons  $\psi$  réductible,  $\delta$  et  $c$  étant  $\neq 0$ . Définissons  $u, u', k, k', s$  comme aux nos 24 et 25, et posons  $r = r_0 + ur_1, r' = r_0 + u'r_1$ . Écrivons encore  $x_{\nu'}, y_{\nu'}, t_{\nu'}, m_{\nu'\sigma}$  ( $\nu' = \nu + 1$ ) pour  $x_i, y_i, t_i, m_{i\sigma}$ . On pourra conserver les formules précédentes en y remplaçant  $\nu, \dot{\nu}, x, \dot{x}, \rho, \dot{\rho}, \rho_0, \rho_1$  par  $u, u', k, k', r, r', r_0, r_1$  ( $r_0$  et  $r_1$  sont déterminés par  $r$  et  $r'$ , et inversement). Mais ici  $V_{i\nu\rho}, V_{\nu'i\rho}, U_{i\nu\rho}, W_{\nu'i\rho}$  qui conservent  $\sum_1^{\nu'} x_i y_i$  s'expriment *a priori* par les  $x_i, y_i$ ,

---

(1) On voit directement que  $V_{i\nu\rho} U_{i\nu\dot{\rho}}$  n'est dans  $\mathfrak{C}$  que si  $\sigma = \dot{\rho}$ .

$x, y$  en substitutions de  $A$ , et pour préciser,

$$V_{i' r'} = U_{i_0, \lambda_1 u} V_{i_0 \lambda_1}, \quad \lambda_1 = \frac{kr}{c(u-u')};$$

$$V_{v' i' r'} = V_{0i, \lambda_1' u'} W_{i_0 \lambda_1'}, \quad \lambda_1' = \frac{k' r'}{c(u' - u)}.$$

**52.** *Supposons  $\psi$  irréductible. Des formules (28)-(31), en posant  $-\rho\dot{\rho} = \chi, -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = s(s\dot{s} = 1)$ , il résulte que  $t_{i'v} m_{i'v} m_{v's} = P_{i_0} t_i P_{i, -\frac{\rho}{\gamma}} t_i P_i$  est réelle.*

*Si  $s = 1$ , le système des équations en  $\rho$  équivaut à  $\rho^2 = \chi, \rho\dot{\rho} = -\chi$  et est compatible toujours et seulement si  $\chi\delta^{(1)}$  est carré dans  $\mathfrak{e}$ .*

*Si  $s = -1$ , la condition de compatibilité est que  $-\chi$  soit carré dans  $\mathfrak{e}$ .*

*Si  $s$  est  $\neq \pm 1$  (donc  $\neq \dot{s}$ ) et vérifie  $s^2 + b's + 1 = 0$ , l'équation  $-\frac{\dot{\rho}}{\rho} = s$  revient, en posant  $\rho = \rho'_0 + s\rho'_1$  ( $\rho'_0, \rho'_1$  réels) et  $\rho_2 = \frac{\rho'_0}{b'+1}$ , à  $\rho = \rho_2(1 - \dot{s})$ , et l'équation  $-\rho\dot{\rho} = \chi$  à  $\rho_2^2 = \frac{\chi(2-b')}{b'^2-4}$ . La condition de compatibilité équivaut donc à celle que  $\chi\delta(2-b')$  ou  $\chi\delta(s+s^{-1}+2)$  soit carré dans  $\mathfrak{e}$ . En particulier : 1° si  $p > 2$ , et si  $\chi\delta$  est carré, la condition revient à celle que l'ordre de  $s$  divise  $\frac{\pi+1}{2}$ , c'est-à-dire que  $s$  soit le carré d'une racine d'équation quadratique réciproque (irréductible puisque  $s \neq \dot{s}$ ) (cf. 25); 2° si  $s = q$ , la condition est que  $\chi\delta c$  soit carré, et cela même si  $q = \pm 1$  (car si  $q = 1$ ,  $c$  est carré dans  $\mathfrak{e}$ , et si  $q = -1$ ,  $-c = x^2$  est non carré dans  $\mathfrak{e}$ ); 3° si  $s = -v$ , la condition est que  $\chi\delta c(b+2c)$  soit carré dans  $\mathfrak{e}$ .*

On a donc, d'après ce qui précède,  $M\delta$  désignant un carré de  $\mathfrak{e}$ , l'expression par les  $V_{0i}, V_{i0}, U_{0i}, W_{0i}$  :

(1)  $\delta$  est introduit ici en vue du cas où  $\psi$  est réductible, qui sera étudié tout à l'heure.



1° De  $m_{y's} = (m_{iM}^{-1} t_{i'}) (t_{i'} m_{iM} m_{y's})$  si l'ordre de  $s$  divise  $\frac{\pi+1}{2}$ , ou si  $s = -1$  et  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$  (cf. 39) (1);

2° De  $t_{0i} m_{i,cM} = t_{i'} m_{i,cM} m_{y'q}$ ;

3° Si  $c' = c$ , de  $t_i t_0' m_{i,b-2c'} = \left( t_{i'} m_{i,c} m_{y'q} \right) \left( m_{i,\frac{M}{c^2}} t_{i'} \right) t_{i'} m_{i,c(b-2c')} m_{y'q}$ .

*Remarque I.* — Supposons  $\psi$  réductible,  $\delta$  et  $c$  étant  $\neq 0$  (2). Les résultats précédents subsistent en y remplaçant, comme au n° 31,  $u, \dot{u}, z, \dot{z}, \rho, \dot{\rho}, \rho_0, \rho_1$  par  $u, u', k, k', r, r', r_0, r_1$  et  $\dot{s}$  par  $s' = s^{-1}$  (réel). On le voit par des raisonnements tout semblables.

*Remarque II.* — Soit  $\psi = cx^2$ . Alors  $t_0 = |x, -x|$ , et l'on a

$$t_{0k} m_{k,-c\lambda^2} = m_{k,-\frac{1}{c\lambda^2}} t_{0i} = U_{0k\lambda} V_{0k, \frac{1}{c\lambda}} U'_{0k\lambda}.$$

En transformant par  $\tau t_k$  (cf. 28, 29), on a une formule analogue pour  $t_{0k} m_{k,-c\lambda^2}$  si  $\psi = c'y^2$ .

35. Il est clair que  $Q_0(n, \pi)$  et  $Q_1(n, \pi)$  ( $n$  ayant la parité de l'indice de  $Q$ ) divisent  $\bar{H}(n, \pi)$  (9). Cherchons les p. g. c. d. respectifs  $\Gamma_\eta(n, \pi^2)$ ,  $\Gamma'_\eta(n, \pi^2)$  de  $Q_\eta(n, \pi^2)$ ,  $Q'_\eta(n, \pi^2)$  ( $\eta = 0, 1$ ) avec  $\bar{H}(n, \pi)$  (cf. 20). Une substitution  $\alpha$  de  $\Gamma'_\eta$  devra vérifier, en même temps que les équations (4)-(6) du n° 9 (avec  $f = 1$ ), les équations (4)-(8)

(1) Dans la quatrième des formules (26), pour que l'ordre de  $s = s_0 + \nu s_1$  divise  $\frac{\pi+1}{2}$  (alors  $s_1$  est  $\neq 0$ , donc  $2 - b\lambda\mu \neq 0$ ), il faut et suffit que la quantité  $h = 2 + 2s_0 - \frac{b}{c} s_1$  soit un carré  $k^2$ . Mais comme  $\varphi h = (2 - b\lambda\mu)^2 (\neq 0)$ ,  $\varphi$  est en même temps un carré, et la formule considérée fournit, d'après (29), une expression de  $m_{0s_0s_1}$  par les  $V, U, W$ . Pour que  $s = -1$ , il faut et suffit que  $b\lambda\mu = 2$ , et que  $\varphi = cc'\lambda^2\mu^2 - 1$ , d'où  $b^2\varphi = -\delta$ . Donc  $\varphi$  n'est alors carré que si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ : dans ce cas, on a de même, d'après (29), une expression de  $m_{0s_0s_1}$  par les  $V, U, W$  (cf. 39).

(2) On ramène immédiatement le cas où  $c = 0$ ,  $c' \neq 0$  au cas  $c \neq 0$ , et le cas  $c = c' = 0$  au cas  $\psi = 0$ . Il est toujours entendu d'ailleurs que le cas où  $\psi$  est réductible ne diffère lui-même que par un changement de variables du cas  $\psi = 0$ .

du n° 26. En particulier les deux systèmes linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ij} \dot{\beta}_{ik} + \beta_{ij} \dot{\alpha}_{ik}) + 2\eta c \alpha_{0j} \dot{\alpha}_{0k} = 2\eta \frac{c_j c_k}{c} \\ (j = 0, \dots, \nu), \\ \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha'_{ij} \dot{\beta}'_{ik} + \beta'_{ij} \dot{\alpha}'_{ik}) + 2\eta c \alpha'_{0j} \dot{\alpha}'_{0k} = b_{jk} \\ (j = 1, \dots, \nu), \\ \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha_{ij} \beta_{ik} + \beta_{ij} \alpha_{ik}) + 2\eta c \alpha_{0j} \alpha_{0k} = 2\eta f \frac{c_j c_k}{c} \\ (j = 0, \dots, \nu), \\ \sum_{i=1}^{\nu} (\alpha'_{ij} \beta'_{ik} + \beta'_{ij} \alpha'_{ik}) + 2\eta c \alpha'_{0j} \alpha'_{0k} = f b_{jk} \\ (j = 1, \dots, \nu) \end{array} \right.$$

où  $k$  est supposé fixe, donnent  $\dot{\beta}_{ik} = f^{-1} \beta_{ik}$ ,  $\dot{\alpha}_{jk} = f^{-1} \alpha_{jk}$  ( $i = 1, \dots, \nu$ ;  $j = 0, \dots, \nu$ ). De même  $\dot{\beta}'_{ik} = f^{-1} \beta'_{ik}$ ,  $\dot{\alpha}'_{jk} = f^{-1} \alpha'_{jk}$  ( $i = 1, \dots, \nu$ ;  $j = 0, \dots, \nu$ ).

Donc d'abord  $\Gamma_n$ , qui correspond à  $f = 1$ , coïncide avec  $Q_n(n, \pi^2)$ . Ensuite  $f$  est une puissance de  $\iota^{\pi-1}$ , et même, pour  $n$  impair, de  $\iota^{2(\pi-1)}$  [car alors  $\alpha \alpha \bar{\alpha} = f a$  ( $p > 2$ ), d'où  $|z|^2 = f^n$ , et  $|\alpha|^{\pi+1} = 1$  (2), donc  $f^{n \frac{\pi+1}{2}} = 1$ ].

Soit d'abord  $n = 2\nu$ , donc  $\eta = 0$ . Posons  $\bar{m}_{i\rho} = \begin{vmatrix} x_i & \rho x_i \\ y_i & \rho^{-1} y_i \end{vmatrix}$  (9),  $\mu_\rho = \Pi_1 \bar{m}_{i\rho}$ ,  $|\mu_\iota| = M$ . Comme  $\mu_\iota$  multiplie  $\alpha$  par  $\iota^{1-\pi}$ , on a  $\Gamma'_0 = M \Gamma_0$ ,  $M$  étant premier à  $\Gamma_0$ ;  $(\Gamma'_0, \Gamma_0) = \pi + 1$ , et  $\Gamma'_0$  contient  $J$ , dont chaque substitution  $\alpha$  par  $\iota^{2(\pi-1)}$ .

Soit  $n = 2\nu + 1$ , donc  $\eta = 1$  et  $p \neq 2$ . Le produit  $\mu$  de  $|x, \iota^{\pi-1} x|$  par  $\Pi_1 \bar{m}_{i\rho}$  multiplie  $\alpha$  par  $\iota^{2(\pi-1)}$ . Donc  $\Gamma'_1 = |\mu| \Gamma_1$ ,  $|\mu|$  étant premier à  $\Gamma_1$ , et  $(\Gamma'_1, \Gamma_1) = \frac{1}{2}(\pi + 1)$ . On a évidemment aussi  $\Gamma'_1 = J \Gamma_1$ ; mais le p. g. c. d. de  $J, \Gamma'_1$  est  $D$ , d'ordre 2.

Considérons maintenant  $\bar{Q}_2(n, \pi)$  ( $n = 2\nu'$ ,  $\nu' = \nu + 1$ ). Soit  $\alpha$  une de ses substitutions, et reprenons les notations du n° 26. D'après la forme de  $\alpha$  avec les variables de  $\bar{Q}_2$ , les coefficients de  $\alpha$  satisfont aux mêmes conditions que si  $\alpha$  était dans  $Q'_0(n, \pi^2)$ . Dans les p. g. c. d. respectifs  $\bar{\Gamma}_2(n, \pi)$  et  $\bar{\Gamma}'_2(n, \pi)$  de  $\bar{Q}_2(n, \pi)$  et  $\bar{Q}'_2(n, \pi)$  avec  $\bar{H}(n, \pi)$

divisant respectivement  $\Gamma_0(n, \pi^2)$  et  $\Gamma'_0(n, \pi^2)$ . Mais de plus :  
 1° les  $\alpha_{ik}, \alpha'_{ik}, \beta_{ik}, \beta'_{ik}$  où  $i$  et  $k$  sont  $\leq \nu$  sont réels; 2°  $X_i$  et  $Y_i$  étant réels pour  $i \leq \nu$ , et  $x_{\nu'}$  conjugué de  $y_{\nu'}$ ,  $\alpha_{i\nu'}$  est conjugué de  $\alpha'_{i\nu'}$ , et  $\beta_{i\nu'}$  de  $\beta'_{i\nu'}$ ; 3°  $X_{\nu'}$  étant conjugué de  $Y_{\nu'}$ ,  $\alpha_{\nu'i}$  est conjugué de  $\beta_{\nu'i}$  ( $i \leq \nu$ ),  $\alpha'_{\nu'i}$  de  $\beta'_{\nu'i}$  ( $i \leq \nu$ ),  $\alpha_{\nu'\nu'}$  de  $\beta_{\nu'\nu'}$ , et  $\alpha'_{\nu'\nu'}$  de  $\beta_{\nu'\nu'}$ .

Or on a, en désignant par  $e$  un élément quelconque de  $\alpha$ ,  $e = f\dot{e}$ . La relation  $\dot{\alpha}_{i\nu'} = \alpha'_{i\nu'} (i \leq \nu)$ , jointe à  $\alpha_{i\nu'} = f\dot{\alpha}_{i\nu'}$ ,  $\alpha'_{i\nu'} = f\dot{\alpha}'_{i\nu'}$ , donne  $\alpha_{i\nu'} = f^2\alpha'_{i\nu'}$ . De même  $\beta_{i\nu'} = f^2\beta'_{i\nu'}$ ,  $\alpha_{\nu'i} = f^2\alpha'_{\nu'i}$ ,  $\beta_{\nu'i} = f^2\beta'_{\nu'i}$ . Donc  $f^2 = 1$ . Si  $f = -1$ , l'équation  $\dot{e} = fe$  montre que  $e$  a la forme  $(\nu - \dot{\nu})e_0$ ,  $e_0$  étant réel. La comparaison des relations (4) et (5) pour  $k = \nu'$  donne d'ailleurs  $(\alpha_{\nu'\nu'} - \beta_{\nu'\nu'})^2 = 1$ , ou, en posant  $\alpha_{\nu'\nu'} = (\nu - \dot{\nu})r$ ,  $\beta_{\nu'\nu'} = (\nu - \dot{\nu})s$ , ( $r$  et  $s$  réels),  $(r - s)^2 = \delta$ , ce qui est absurde. Donc  $f = 1$  ( $p \geq 2$ ), d'où  $\bar{\Gamma}'_2 = \bar{\Gamma}_2 \leq Q_0(n, \pi)$ , et de plus, pour  $i \leq \nu$ ,  $\alpha_{i\nu'} = \alpha'_{i\nu'}$ ,  $\beta_{i\nu'} = \beta'_{i\nu'}$ ,  $\alpha_{\nu'i} = \beta_{\nu'i}$ ,  $\alpha'_{\nu'i} = \beta'_{\nu'i}$ ,  $\alpha_{\nu'\nu'} = \beta_{\nu'\nu'}$ ,  $\alpha'_{\nu'\nu'} = \beta_{\nu'\nu'}$ , avec  $(\alpha_{\nu'\nu'} - \beta_{\nu'\nu'})^2 = 1$ . Il est clair que  $\bar{\Gamma}_2$  contient toutes les substitutions de  $Q_0(n, \pi)$  qui vérifient ces conditions, en particulier les  $P_{i\lambda}$  où  $\lambda$  est réel et les  $m_{\nu's}, m_{\nu's}t_{\nu'}$  où  $s$  est réel, donc égal à  $\pm 1$  [car  $s^{\pi+1} = 1$  (25)].

Or, en multipliant au besoin  $\alpha$  à droite par une  $P_{i\lambda}$  ou une  $O_{i\lambda}$ , on peut annuler  $\alpha_{\nu'\nu'}$  ou  $\beta_{\nu'\nu'}$  [si tous les  $\alpha_{i\nu'}$ ,  $\beta_{i\nu'}$  où  $i \leq \nu$  sont nuls,  $\alpha_{\nu'\nu'}\beta_{\nu'\nu'} = 0$  d'après (7)]. En multipliant ensuite au besoin à droite par  $t_{\nu'}$  et  $m_{\nu'-1}$ , on peut réduire  $\alpha_{\nu'\nu'} = \beta'_{\nu'\nu'}$  à 1, et  $\alpha'_{\nu'\nu'} = \beta_{\nu'\nu'}$  à 0. Si alors les  $\alpha_{i\nu'}$ ,  $\beta_{i\nu'}$  où  $i \leq \nu$  ne sont pas tous nuls, on les annulera de même tous sauf un à l'aide des  $V, U, W$ , puis le dernier à l'aide d'une  $P$ . Or, leur nullité entraîne [d'après (5), (6) pour  $k = \nu'$ ] celle des  $\alpha_{\nu'i} = \beta_{\nu'i}$ ,  $\alpha'_{\nu'i} = \beta'_{\nu'i}$ . Donc  $\bar{\Gamma}_2$  dérive de  $Q_0(2\nu, \pi)$ , des  $P_{i\lambda}$  et de  $\{m_{\nu'-1}, t_{\nu'}\}$ .

Pour préciser davantage, soit d'abord  $p \neq 2$ . Remplaçons les variables  $x_{\nu'}$ ,  $y_{\nu'}$  par  $x = \frac{1}{2}(x_{\nu'} + y_{\nu'})$ ,  $y = \frac{1}{2}(x_{\nu'} - y_{\nu'})$ , d'où  $\psi = x^2 - y^2$ . Convenons en outre de négliger la nature des variables  $x, y$ , qui sont imaginaires, et d'identifier les substitutions avec leurs matrices. Alors  $P_{i\lambda}$ ,  $O_{i\lambda}$  et  $t_{\nu'}m_{\nu'-1}$  deviennent respectivement  $U_{i0\lambda}$ ,  $V_{0i\lambda}$ ,  $t_0$  du groupe de  $\Sigma_1^{\nu} x_i y_i + x^2$ . Donc le p. p. c. m.  $\bar{\Gamma}_2^0$  de  $Q_0(2\nu, \pi)$ , des  $P_{i\lambda}$ , des  $O_{i\lambda}$  et de  $t_{\nu'}m_{\nu'-1}$  est semblable à  $Q_1(2\nu + 1, \pi)$ . Chaque substitution de  $\bar{\Gamma}_2^0$  est permutable à

$t_\nu = |y, -y|$ , et l'on verra au n° 54 que  $\bar{\Gamma}_2$  est le produit direct de  $\bar{\Gamma}_2$  par  $\{t_\nu\}$ . L'indice de  $\bar{\Gamma}_2$  dans  $Q_0(n, \pi)$  est  $\frac{1}{2}(\pi^{2\nu+1} - \pi^\nu)$  (cf. 27).

Soit  $p = 2$  (donc  $m_{\nu,-} = 1$ ). Posons  $x = x_\nu + y_\nu$ ,  $y = y_\nu$ , d'où  $\psi = xy + y^2$ . Alors, avec les mêmes conventions,  $P_{i\lambda}$  et  $O_{i\lambda}$  deviennent respectivement  $V_{i0\lambda}$ , et  $W_{0i\lambda}$  du groupe de  $\sum_1^\nu x_i y_i + y^2$ . Donc le p. p. c. m. de  $\bar{\Gamma}_2^0$  de  $Q_0(2\nu, \pi)$ , des  $P_{i\lambda}$  et des  $O_{i\lambda}$  est semblable à  $Q_1(2\nu + 1, \pi) [\cong G(2\nu, \pi)$  (26)]. Chaque substitution de  $\bar{\Gamma}_2^0$  est permutable à  $t_\nu = |x, x + y|$ , et l'on verra au n° 54 que  $\bar{\Gamma}_2$  est encore le produit direct de  $\bar{\Gamma}_2^0$  par  $\{t_\nu\}$ . L'indice de  $\bar{\Gamma}_2$  dans  $Q_0(n, \pi)$  est ici  $\pi^{2\nu+1} - \pi^\nu$ .

On voit d'ailleurs comme au n° 20 que, dans  $\bar{H}(n, \pi)$ , le normalisant de  $\bar{\Gamma}_\eta$  est  $\bar{\Gamma}'_\eta(\eta = 0, 1)$ , et celui de  $\bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}'_2 = \bar{\Gamma}_2$ .

54. Soit, pour  $p > 2$ , comme précédemment,  $A^0(n, \pi)$  le diviseur de  $A$  formé des substitutions de déterminant 1, donc normal dans  $A'$ : il est clair que  $(A, A^0) = 2$ . On peut encore définir  $A^0$  comme le p. p. c. m. des substitutions  $t_{jj}, V_{jj}, U_{jk}, W_{jk}, m_j(j, j' \geq 0; k > 0)$ , car ce p. p. c. m.  $A'_0$  est évidemment  $\leq A^0$  et permutable à  $t_j$ , en sorte que  $A'_0 + t_j A'_0$  est un groupe contenant tous les générateurs de  $A$ . Si d'ailleurs  $\psi$  est irréductible, la forme imaginaire  $\bar{A}^0(n, \pi) = \bar{Q}_2^0(n, \pi)$  de  $A^0$  est évidemment le p. g. c. d. de  $\bar{Q}$  et de  $Q_0^0(n, \pi^2)$ .

Pour  $p = 2$  ( $n$  pair), la seconde définition que j'adopterai désormais, a un sens; mais elle ne permet pas d'affirmer de suite que  $(A, A^0) = 2$ , ni, si  $A^0 < A$ , que  $A^0$  soit normal dans  $A'$ .

Je dis que, même si  $p = 2$ ,  $(A, A^0) = 2$  (et l'on verra au n° 59 que  $A^0$  est encore normal dans  $A'$ ). Pour le démontrer, supposons d'abord  $\psi = 0$ , et considérons la quadrique  $\Phi$  définie par  $\sum_1^\nu x_i y_i = 0$ , les  $2\nu$  coordonnées étant homogènes et variant dans  $\mathfrak{e}$ . Soit  $L$  la variété définie par un système  $s$ , de  $\nu$  équations linéaires indépendantes entre les  $x_i, y_i$ . Soit  $\rho$  le rang du déterminant des coefficients des  $x_i$  dans  $s$ . Supposons que le déterminant des coefficients de  $x_1, \dots, x_\rho$  dans les  $\rho$  premières équations de  $s$ , soit  $\neq 0$ , résolvons-les en  $x_1, \dots, x_\rho$ , et portons les valeurs de  $x_1, \dots, x_\rho$  dans les  $\nu - \rho$  dernières équations

tions : d'après l'hypothèse faite sur le rang,  $x_{\rho+1}, \dots, x_\nu$  disparaîtront de ces  $\nu - \rho$  équations. Résolvons le système  $s_{\nu-\rho}$  de ces  $\nu - \rho$  équations (qui sont indépendantes) par rapport à  $\nu - \rho$  des  $y_i$  choisis de telle manière que le nombre  $\alpha$  des  $y_i$  d'indice  $\leq \rho$  soit minimum. On peut évidemment choisir l'ordre des  $x$  (qui détermine celui des  $y$  d'après l'équation de  $\Phi$ ) de manière que ces  $\nu - \rho$   $y_i$  soient  $y_1, \dots, y_\alpha$  ( $\alpha \leq \rho$ ),  $y_{\rho+1}, \dots, y_{\rho+\beta}$  ( $\alpha + \beta = \nu - \rho$ ). Comme on vient de le voir, ces  $\nu - \rho$   $y_i$  ne dépendent d'aucun  $x$ . De plus, si  $\alpha \geq 1$ ,  $y_1, \dots, y_\alpha$  ne dépendent pas des  $y_i$  où  $i$  est  $> \rho + \beta$ , car si  $y_i$ , par exemple, dépendait de  $y_{\rho+\beta+1}$ , on pourrait résoudre  $s_{\nu-\rho}$  en  $y_2, \dots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \dots, y_{\rho+\beta+1}$  contre l'hypothèse faite sur  $\alpha$ . Je supposerai qu'on a porté dans  $x_1, \dots, x_\rho$  les expressions de  $y_1, \dots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \dots, y_{\rho+\beta}$  par les autres  $y$ .

Cherchons maintenant les conditions pour que  $L$  soit sur  $\Phi$  (je dirai qu'alors  $L$  est une *génératrice* de  $\Phi$ ). Portons pour cela dans  $\Sigma_1^v x_i y_i = 0$  les expressions obtenues de  $x_1, \dots, x_\rho, y_1, \dots, y_\alpha, y_{\rho+1}, \dots, y_{\rho+\beta}$ . Les termes  $\Sigma_1^{\rho+\beta} x_i y_i$  ne fournissent aucun terme  $x_k y_k$  où  $k$  soit  $> \rho + \beta$ ; car  $\Sigma_1^{\rho+\beta} x_i y_i$  ne fournit aucun terme où  $y$  ait un indice  $> \rho + \beta$ , et il en est de même de  $\Sigma_{\alpha+1}^{\rho} x_i y_i$  et  $\Sigma_{\rho+1}^{\rho+\beta} x_i y_i$ , puisque  $y_{\alpha+1}, \dots, y_\rho$  et  $x_{\rho+1}, \dots, x_{\rho+\beta}$  sont des variables indépendantes. Donc  $\rho + \beta = \nu$ ,  $\alpha = 0$ , et l'on peut supposer que les équations de  $L$  ont la forme

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_{11} y_1 + \dots + b_{1\rho} y_\rho + b_{1,\rho+1} x_{\rho+1} + \dots + b_{1\nu} y_\nu, \\ \dots \dots \dots \\ x_\rho = b_{\rho 1} y_1 + \dots + b_{\rho\rho} y_\rho + b_{\rho,\rho+1} x_{\rho+1} + \dots + b_{\rho\nu} y_\nu, \\ y_{\rho+1} = b_{\rho+1,1} y_1 + \dots + b_{\rho+1,\rho} y_\rho, \\ \dots \dots \dots \\ y_\nu = b_{\nu 1} y_1 + \dots + b_{\nu\rho} y_\rho. \end{array} \right.$$

On voit alors directement que la condition nécessaire et suffisante pour que  $\Sigma_1^v x_i y_i = 0$  soit identiquement vérifiée par ces expressions est que la matrice  $(b_{ik})$  des coefficients de  $y_1, \dots, y_\rho, x_{\rho+1}, \dots, x_\nu$  dans (E) soit alternée. Je dirai que  $\rho$  est le *genre* de (E) ou de  $L$  [ $\rho$  n'est pas le rang de  $(b_{ik})$ ] et de toute variété qui se déduit de (E) par une permutation des indices des  $x$  et des  $y$ .

Une vérification simple montre que  $m_{ik}$  et  $V_{ik}$  ne changent pas le genre de (E) (on distinguera les quatre cas :  $i, k \leq \rho$ ;  $i \leq \rho$ ;  $k > \rho$ ;  $i > \rho$ ,

$k \leq \rho; i, k > \rho$ ), tandis que  $t_i$  le fait varier d'une unité [si  $i > \rho$ ,  $t_i$  le fait croître de 1, et il en est de même pour  $i \leq \rho$  si un des  $\nu$  coefficients  $b_{i, \rho+1}, \dots, b_{i\nu}$  tel que  $b_{ik}$  est  $\neq 0$ , puisqu'on peut alors résoudre (E) par rapport à  $x_k, y_i$  et aux autres  $x, y$  des premiers membres; si  $b_{i, \rho+1}, \dots, b_{i\nu}$  sont tous nuls, le genre diminue de 1].

Donc les  $t_i V_{ik} t_i$  et les  $t_{ik}$  ne changent pas la parité du genre de (E). Donc  $A^0, p. p. c. m.$  de ces substitutions et des  $m_{ik}$ , ne change pas cette parité, tandis que  $t_i$  la change. Donc, si  $\psi = 0, (A, A^0) = 2$ .

Si  $n$  est pair et  $\psi \neq 0$ , l'expression des générateurs de A par ceux de  $Q_0(n, \pi)$  ou de  $Q_0(n, \pi^2)$  selon que  $\psi$  est réductible ou non (24, 31, 32) montre qu'il en est encore de même.

Si  $n$  est impair ( $p > 2$ ), on est ramené au cas de  $n$  pair, en considérant A comme un diviseur du groupe  $a + y^2$  (pour  $\psi = cx^2$ ).

**53.** Arrêtons-nous au cas de  $n$  pair, et disons que les génératrices de genre pair sont paires, et forment le premier système ou le système pair, et que les autres sont impaires, et forment le second système ou le système impair. Il résulte de ce qui précède que, pour  $p \geq 2$ , et  $n$  pair,  $A^0$  est le groupe des substitutions de A qui permutent exclusivement entre elles les génératrices de chaque système, tandis que  $t_i A^0$  échange les systèmes.

$A^0$  permute transitivement les génératrices de chaque système. Partons en effet d'une génératrice quelconque prise sous la forme (E), en y remplaçant  $\nu$  par  $\nu'$  ( $\psi$  peut ici être irréductible; on prendra alors  $\bar{A}^0$  au lieu de  $A^0$ ). On peut, par des  $V_{i, k}, P_{i, \nu' \sigma}$  (31) [en tenant compte de la dernière équation de (E) si  $\nu' > \nu$ ] annuler  $b_{i, \rho+1}, \dots, b_{i\nu'}$ , puis, par  $t_i$ , diminuer le genre. En répétant un nombre pair de fois un groupe d'opérations analogue (tout produit de générateurs de A où les  $t_j$  figurent un nombre pair de fois est dans  $A^0$ ), on arrivera à une génératrice de genre  $\leq 1$ . Si elle est de genre 0, elle est définie par  $y_1 = \dots = y_{\nu'} = 0$ . Si elle est de genre 1, elle est définie par  $x_i = 0, y_1 = \dots = y_{i-1} = 0, y_{i+1} = \dots = y_{\nu'} = 0$ , qui se ramène par  $t_i$  à  $x_1 = 0, y_2 = \dots = y_{\nu'} = 0$ .

On remarquera que l'échange de  $x_i, y_i$  dans (E) fournit une gène-

matrice dont l'intersection avec (E) s'obtient en adjoignant à (E) la seule équation  $x_i = y_i$ , c'est-à-dire dont l'intersection avec (E) a un nombre de dimensions de la parité de  $v' + 1$ . Au contraire soit (E') le système déduit de (E) par une  $m_{i\lambda}$ , une  $V_{i\lambda}$  ou une  $P_{i'\sigma}$ , en éliminant, s'il y a lieu,  $y_{v'}$  des  $v' - 1$  premières équations à l'aide de la  $v'$ ème. En retranchant de chaque équation de (E') l'équation correspondante de (E) multipliée par un facteur convenable, on peut faire disparaître celui des  $x_1, \dots, x_\rho, y_{\rho+1}, \dots, y_{v'}$  qui y figure.

Soit (E<sub>0</sub>) le système ainsi obtenu. L'intersection de (E), (E') est aussi celle de (E), (E<sub>0</sub>). Or, dans (E<sub>0</sub>), la matrice des coefficients de  $y_1, \dots, y_\rho, x_{\rho+1}, \dots, x_{v'}$  est alternée, donc de rang pair (E., 195). Donc le nombre des dimensions de l'intersection a la même parité que  $v'$  (<sup>1</sup>).

*Donc deux génératrices sont ou non du même système selon que le nombre des dimensions de leur intersection a ou non la parité de  $v'$ . Donc une substitution  $\alpha$  de A sera ou non dans  $\Lambda^0$  selon que l'intersection d'une génératrice quelconque et de sa transformée par  $\alpha$  aura ou non un nombre de dimensions de la parité de  $v'$ .*

**56.** Revenons maintenant à la définition de  $\Lambda^0$  comme p. p. c. m. des générateurs autres que les  $t_j (j \geq 0)$ . On voit, en recourant au besoin à la forme  $\bar{\Lambda}$  de A quand  $\psi$  est irréductible, que, pour  $p \geq 2$  ( $n$  étant pair si  $p = 2$ ), toute expression d'une substitution de  $\Lambda^0$  par les générateurs de A contient un nombre pair de  $t_j$ . Les substitutions de  $\Lambda^0$  sont dites *païres*, les autres substitutions de A *impaires*;  $\Lambda^0$  sera dit le *groupe pair* de a. La méthode du n° 50 permet de reconnaître effectivement si une substitution est paire ou impaire.

---

(<sup>1</sup>) On pourrait démontrer d'abord [cf. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, Spoerri, 1907), p. 129-135], comme dans le champ complexe ordinaire, que les génératrices forment deux systèmes, en rangeant dans le même système que l'une d'elles toutes celles qu'on en déduit par la variation des coefficients. La démonstration ne suppose pas que la variation soit continue, mais seulement que, pour  $v = 1$  et  $\psi = 0$ , il y a deux systèmes définis comme on vient de le voir, ce qui est clair.

57 ('). Pour  $p = 2$  ( $n = 2v'$ ), on peut encore définir  $\Lambda^0$  comme le groupe des substitutions  $\alpha$  de  $\Lambda$  qui vérifient

$$(3a) \quad \left\{ \begin{aligned} I_\alpha &= \sum_{ih} \alpha_{ih} \beta'_{ih} + b \sum_h \alpha_{0h} \beta'_{0h} \\ &+ B \sum_i \alpha_{i0} \beta'_{i0} + Bb \alpha_{00} \beta'_{00} + Cc (\alpha_{00}^2 + \beta_{00}^2 + \alpha'_{00}{}^2 + \beta'_{00}{}^2) = v' \\ &(i, h = 1, \dots, v). \end{aligned} \right.$$

En effet, soit  $\lambda$  la substitution qui se déduit de  $\alpha$  en y remplaçant partout  $\alpha$  par  $\lambda$ , et  $\beta$  par  $\mu$ . On trouve, à l'aide des formules (4)-(8), (15)-(19), que  $I_{\lambda\alpha} = I_\alpha + I_\lambda + v'$  (2).

Donc les substitutions de  $\Lambda$  qui vérifient (3a) forment un groupe  $\Gamma$ ,

(1) Comparer DICKSON, *Linear groups*, 205.

(2) On a d'abord

$$\begin{aligned} I_{\lambda\alpha} = & \sum_{ijkl} (\alpha_{ik} \beta_{il} \lambda_{kj} \lambda'_{ij} + \alpha_{ik} \beta'_{il} \lambda_{kj} \mu'_{ij} + \beta_{il} \alpha'_{ik} \mu_{kj} \lambda'_{ij} + \alpha'_{ik} \beta'_{il} \mu_{kj} \mu'_{ij}) \\ & + b \sum_{ijkl} (\alpha_{0k} \beta_{0l} \lambda_{kj} \lambda'_{ij} + \alpha_{0k} \beta'_{0l} \lambda_{kj} \mu'_{ij} + \beta_{0l} \alpha'_{0k} \mu_{kj} \lambda'_{ij} + \alpha'_{0k} \beta'_{0l} \mu_{kj} \mu'_{ij}) \\ & + B \sum_{ijkl} (\alpha_{ik} \beta_{il} \lambda_{k0} \lambda'_{i0} + \alpha_{ik} \beta'_{il} \lambda_{k0} \mu'_{i0} + \beta_{il} \alpha'_{ik} \mu_{k0} \lambda'_{i0} + \alpha'_{ik} \beta'_{il} \mu_{k0} \mu'_{i0}) \\ & + Bb \sum_{ijkl} (\alpha_{0k} \beta_{0l} \lambda_{k0} \lambda'_{i0} + \alpha_{0k} \beta'_{0l} \lambda_{k0} \mu'_{i0} + \beta_{0l} \alpha'_{0k} \mu_{k0} \lambda'_{i0} + \alpha'_{0k} \beta'_{0l} \mu_{k0} \mu'_{i0}) \\ & + Cc \sum_k (\alpha_{0k}^2 \lambda_{k0}^2 + \alpha'_{0k}{}^2 \mu_{k0}^2 + \beta_{0k}^2 \lambda'_{k0}{}^2 + \beta'_{0k}{}^2 \mu'_{k0}{}^2 + \alpha_{0k}^2 \lambda'_{k0}{}^2 + \alpha'_{0k}{}^2 \mu'_{k0}{}^2 + \beta_{0k}^2 \lambda_{k0}^2 + \alpha'_{0k}{}^2 \mu_{k0}^2) \\ & (i, j = 1, \dots, v; k, l = 0, \dots, v). \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, les parties soulignées sont celles qui sont soumises à une transformation. Les termes surmontés d'un trait seront réunis ultérieurement;  $\Sigma'$  indique des sommations où  $k \neq i$ ;  $\Sigma''$  des sommations où  $k < l$ .

Considérons  $\Sigma_{ijkl}$ . Dans cette somme, le second et le troisième terme donnent, en transformant  $\Sigma_i \alpha_{ik} \beta'_{il}$  d'après (4), et en faisant un échange des indices de C: pour  $k \neq l$ ,

$$\begin{aligned} & \Sigma_{ijkl} \beta_{il} \alpha'_{ik} (\lambda_{lj} \mu'_{kj} + \mu_{kj} \lambda'_{ij}) + b \Sigma_{jkl} (\alpha_{0l} \beta'_{0k} + \beta_{0l} \alpha'_{0k}) \lambda_{lj} \mu'_{kj} \\ & = B \Sigma'_{ikl} \beta_{il} \alpha'_{ik} (\lambda_{i0} \mu'_{k0} + \mu_{k0} \lambda'_{i0}) + b \Sigma'_{jkl} (\alpha_{0l} \beta'_{0k} + \beta_{0l} \alpha'_{0k}) \lambda_{lj} \mu'_{kj}; \end{aligned}$$

pour  $k = l$ ,

$$\begin{aligned} & \Sigma_{ijk} (\alpha_{ik} \beta'_{ik} \lambda_{kj} \mu'_{kj} + \beta_{ik} \alpha'_{ik} \mu_{kj} \lambda'_{kj}) \\ & = \Sigma_{ijk} \alpha_{ik} \beta'_{ik} (\lambda_{kj} \mu'_{kj} + \mu_{kj} \lambda'_{kj}) \\ & \quad + \Sigma_{jk} \mu_{kj} \lambda'_{kj} [b (\alpha_{0k} \beta'_{0k} + \beta_{0k} \alpha'_{0k}) + 1] + (b - 1) \Sigma_j \mu_{0j} \lambda'_{0j} \\ & = B \Sigma_{ik} \alpha_{ik} \beta'_{ik} (\lambda_{k0} \mu'_{k0} + \mu_{k0} \lambda'_{k0}) + b \Sigma_{jk} \mu_{kj} \lambda'_{kj} (\alpha_{0k} \beta'_{0k} + \beta_{0k} \alpha'_{0k}) \\ & \quad + \Sigma_{ik} \alpha_{ik} \beta'_{ik} + \Sigma_{jk} \mu_{kj} \lambda'_{kj} + (B - 1) \Sigma_i \alpha_{i0} \beta'_{i0} + (b - 1) \Sigma_j \mu_{0j} \lambda'_{0j}. \end{aligned}$$

Le premier et le quatrième terme de  $\Sigma_{ijkl}$  donnent :



et les  $l_j$ , qui ne vérifient pas (32), sont hors de  $\Gamma$ . Donc  $\Gamma$  est  $\leq A$ . D'ailleurs les générateurs de  $A^0$  vérifient (32). Donc  $\Gamma$  est  $\geq A^0$ . Mais  $(A, A_0)$  est  $\leq 2$ . Donc  $\Gamma = A^0$ , et  $(A, A^0) = 2$ .

pour  $k \neq l$ ,

$$\begin{aligned} & \Sigma_{ijkl}'' (\alpha_{ik} \beta_{il} \lambda_{kj} \lambda'_{lj} + \alpha_{il} \beta_{ik} \lambda_{lj} \lambda'_{kj} + \alpha'_{ik} \beta'_{il} \mu_{kj} \mu'_{lj} + \alpha'_{il} \beta'_{ik} \mu_{lj} \mu'_{kj}) \\ = & \Sigma_{ijkl}'' [\alpha_{ik} \beta_{il} (\lambda_{kj} \lambda'_{lj} + \lambda_{lj} \lambda'_{kj}) + \alpha'_{ik} \beta'_{il} (\mu_{kj} \mu'_{lj} + \mu_{lj} \mu'_{kj})] \\ & + b \Sigma_{jkl}'' [\lambda_{lj} \lambda'_{kj} (\alpha_{0k} \beta_{0l} + \alpha_{0l} \beta_{0k}) + \mu_{lj} \mu'_{kj} (\alpha'_{0k} \beta'_{0l} + \alpha'_{0l} \beta'_{0k})] \\ = & B \Sigma_{ijkl}'' [\alpha_{ik} \beta_{il} (\lambda_{k0} \lambda'_{l0} + \lambda_{l0} \lambda'_{k0}) + \alpha'_{ik} \beta'_{il} (\mu_{k0} \mu'_{l0} + \mu_{l0} \mu'_{k0})] \\ & + b \Sigma_{jkl}'' [\lambda_{lj} \lambda'_{kj} (\alpha_{0k} \beta_{0l} + \alpha_{0l} \beta_{0k}) + \mu_{lj} \mu'_{kj} (\alpha'_{0k} \beta'_{0l} + \alpha'_{0l} \beta'_{0k})]; \end{aligned}$$

pour  $k = l$ , en transformant  $\Sigma_j \lambda_{kj} \lambda'_{lj}$  et  $\Sigma_j \mu_{kj} \mu'_{lj}$ , puis  $\Sigma_i \alpha_{ik} \beta_{il}$ ,  $\Sigma_i \alpha'_{ik} \beta'_{il}$ ,

$$\begin{aligned} & \Sigma_k [\psi(\alpha_{0k}, \beta_{0k}) \Psi(\lambda_{k0}, \lambda'_{k0}) + \psi(\alpha'_{0k}, \beta'_{0k}) \Psi(\mu_{k0}, \mu'_{k0})] \\ & + c \Psi(\lambda_{00}, \lambda'_{00}) + c' \Psi(\mu_{00}, \mu'_{00}) + C [\psi(\alpha_{00}, \beta_{00}) + c] + C' [\psi(\alpha'_{00}, \beta'_{00}) + c']. \end{aligned}$$

Considérons, dans  $I_{\lambda\alpha}$ ,  $b \Sigma_{jkl}$ . Le premier terme de cette somme donne :

pour  $k \neq l$ ,

$$\begin{aligned} & b \Sigma_{jkl}'' (\alpha_{0k} \beta_{0l} \lambda_{kj} \lambda'_{lj} + \alpha_{0l} \beta_{0k} \lambda_{lj} \lambda'_{kj}) \\ = & b \Sigma_{jkl}'' (\alpha_{0k} \beta_{0l} + \alpha_{0l} \beta_{0k}) \lambda_{lj} \lambda'_{kj} + B b \Sigma_{jkl}'' \overline{\alpha_{0k} \beta_{0l} (\lambda_{k0} \lambda'_{l0} + \lambda_{l0} \lambda'_{k0})}; \end{aligned}$$

pour  $k = l$ , en transformant  $\Sigma_j \lambda_{kj} \lambda'_{lj}$ ,

$$b \Sigma_k \alpha_{0k} \beta_{0k} \Psi(\lambda_{k0}, \lambda'_{k0}) + b C \alpha_{00} \beta_{00}.$$

Le quatrième terme de  $b \Sigma_{jkl}$  donne de même :

pour  $k \neq l$ ,

$$\beta \Sigma_{jkl}'' (\alpha'_{0k} \beta'_{0l} + \alpha'_{0l} \beta'_{0k}) \mu_{lj} \mu'_{kj} + B b \Sigma_{jkl}'' \overline{\alpha'_{0k} \beta'_{0l} (\mu_{k0} \mu'_{l0} + \mu_{l0} \mu'_{k0})};$$

pour  $k = l$ ,

$$b \Sigma_k \alpha'_{0k} \beta'_{0k} \Psi(\mu_{k0}, \mu'_{k0}) + b C' \alpha'_{00} \beta'_{00}.$$

Le second et le troisième terme de  $b \Sigma_{jkl}$  donnent :

pour  $k \neq l$ , en échangeant  $k$  et  $l$  dans le premier des deux termes, et en transformant  $\Sigma_j \mu_{kj} \lambda'_{lj}$ ,

$$b \Sigma_{jkl}'' (\alpha_{0l} \beta'_{0k} + \beta_{0l} \alpha'_{0k}) \lambda_{lj} \mu'_{kj} + B b \Sigma_{jkl}'' \beta_{0l} \alpha'_{0k} (\lambda_{l0} \mu'_{k0} + \mu_{k0} \lambda'_{l0});$$

pour  $k = l$ , en transformant  $\Sigma_j \lambda_{kj} \mu'_{lj}$ ,

$$b \Sigma_{jk} (\alpha_{0k} \beta'_{0k} + \beta_{0k} \alpha'_{0k}) \mu_{kj} \lambda'_{lj} + b \Sigma_k \alpha_{0k} \beta'_{0k} [B (\lambda_{k0} \mu'_{k0} + \mu_{k0} \lambda'_{k0}) + 1] + b (B-1) \alpha_{00} \beta'_{00}.$$

Considérons, dans  $I_{\lambda\alpha}$ ,  $B \Sigma_{ikl}$ . Le premier terme donne de même :

58 (1). Tout changement de variables à coefficients dans  $\mathfrak{e}$  qui conserve *a priori* A et  $A^0$ , puisque sa matrice est celle d'une substitution de A. Il conserve donc la parité (34) de chaque substitution  $\alpha$  de A et celle de  $I_\alpha$ .

Toute substitution  $\alpha$  d'ordre impair de A est dans  $A^0$ , car  $\alpha^2$  est dans  $A^0$ , et  $\alpha$ , étant d'ordre impair, est une puissance de  $\alpha^2$ .

Dans la forme canonique d'une substitution  $\alpha$  de A, la parité du nombre des suites est celle de  $\alpha$ . En effet, prenons les variables canoniques de  $\alpha$  qui rendent les comultiplicateurs (S., 5) égaux aux multi-

pour  $k \neq l$ ,

$$B \sum_{ikl} \alpha_{ik} \beta_{il} (\lambda_{k0} \lambda'_{l0} + \lambda_{l0} \lambda'_{k0}) + B b \sum_{ikl} (\alpha_{0l} \beta_{0k} + \alpha_{0k} \beta_{0l}) \overline{\lambda_{l0} \lambda'_{k0}};$$

pour  $k = l$ ,

$$B \sum_k \lambda_{k0} \lambda'_{k0} \psi(\alpha_{0k}, \beta_{0k}) + B c \lambda_{00} \lambda'_{00}.$$

Le quatrième terme donne :

pour  $k \neq l$ ,

$$B \sum_{ikl} (\mu_{k0} \mu'_{l0} + \mu_{l0} \mu'_{k0}) \alpha'_{ik} \beta'_{il} + B b \sum_{ikl} (\alpha'_{0k} \beta'_{0l} + \alpha'_{0l} \beta'_{0k}) \overline{\mu_{l0} \mu'_{k0}};$$

pour  $k = l$ ,

$$B \sum_k \mu_{k0} \mu'_{k0} \psi(\alpha'_{0k}, \beta'_{0k}) + B c' \mu_{00} \mu'_{00}.$$

Le second et le troisième terme donnent :

pour  $k \neq l$ ,

$$B \sum_{ikl} \beta_{il} \alpha'_{ik} (\lambda_{l0} \mu'_{k0} + \mu_{k0} \lambda'_{l0}) + B b \sum_{ikl} (\alpha_{0l} \beta'_{0k} + \beta_{0l} \alpha'_{0k}) \lambda_{l0} \mu'_{k0};$$

pour  $k = l$ ,

$$B \sum_{ik} \alpha_{ik} \beta'_{ik} (\lambda_{k0} \mu'_{k0} + \mu_{k0} \lambda'_{k0}) + B \sum_k [b (\alpha_{0k} \beta'_{0k} + \beta_{0k} \alpha'_{0k}) + 1] \mu_{k0} \lambda'_{k0} + B (b-1) \mu_{00} \lambda'_{00}.$$

Après ces transformations, en supprimant les termes qui se détruisent, en réunissant les termes surmontés d'un trait, et en séparant les termes dont sont formées les  $\psi$  et les  $\Psi$ , on obtient aisément

$$\begin{aligned} I_\alpha = & \sum_{ih} \alpha_{ih} \beta'_{ih} + B \sum_i \alpha_{i0} \beta'_{i0} + b \sum_h \alpha_{0h} \beta'_{0h} + B b \alpha_{00} \beta'_{00} \\ & + \sum_{jh} \mu_{jh} \lambda'_{jh} + B \sum_h \mu_{h0} \lambda'_{h0} + b \sum_j \mu_{0j} \lambda'_{0j} + B b \mu_{00} \lambda'_{00} \\ & + C c (\alpha_{00}^2 + \beta_{00}^2 + \alpha'_{00}^2 + \beta'_{00}^2 + \lambda_{00}^2 + \mu_{00}^2 + \lambda'_{00}^2 + \mu'_{00}^2), \end{aligned}$$

d'où, en transformant  $\sum_h \mu_{hj} \lambda'_{hj}$  et  $\sum_j \mu_{0j} \lambda'_{0j}$ , la formule du texte.

(1) Cf. JORDAN, *Journal de Mathématiques*, 1905, p. 278.

plicateurs. Si tous les multiplicateurs sont égaux à 1, on peut (1) introduire de nouvelles variables ramenant  $\alpha$  à la forme canonique et  $\alpha$  à une forme où l'on vérifie directement que  $I_\alpha - v'$  a la parité du nombre des suites de  $\alpha$ . Si les multiplicateurs ne sont pas tous égaux à 1,  $\alpha$  est le produit de deux substitutions, évidemment échangeables, dont l'une  $\alpha'$  s'obtient en remplaçant chaque multiplicateur et chaque comultiplicateur par 1 ( $\alpha'$  a donc le même nombre de suites que  $\alpha$ ), et l'autre  $\alpha''$  en multipliant chaque variable par le multiplicateur de la suite où elle figure dans  $\alpha$ . Or  $\alpha'$  est d'ordre 2, et  $\alpha''$  d'ordre impair [comme l'exposant auquel appartient chaque multiplicateur  $\neq 1$  dans le champ canonique ( $S.$ , 5) de  $\alpha$ ]. Donc  $\alpha'$  et  $\alpha''$  sont des puissances de  $\alpha$  ( $E.$ , 10) et par suite conservent  $\alpha$ . Or quand on repasse aux variables qui réduisent  $\alpha$  à son type canonique,  $\alpha''$ , étant d'ordre impair, est paire, et l'on est ramené à considérer  $\alpha'$ .

*Remarque.* — On a donc, pour  $p = 2$ , quatre critères de parité d'une substitution  $\alpha$  de  $A$  : le premier fourni par l'expression de  $\alpha$  en produit de générateurs de  $A^0$ ; le second par les génératrices de la quadrique  $\alpha = 0$ ; le troisième par la parité de  $I_\alpha$ ; le quatrième par la parité des exposants des diviseurs élémentaires de  $\alpha - s\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant la matrice unité d'ordre  $n$ .

D'après les deux derniers critères, toutes les fois que  $A$  contient la transposée de chacune de ses substitutions, il en est de même de  $A^0$ . L'emploi de ces quatre critères n'exige que des opérations rationnelles; mais celui du premier et du troisième exige la réduction préalable de  $\alpha$  à son type canonique.

**59.** Je désignerai par  $B(n, \pi, \alpha) = B(n, \pi)$  et j'appellerai *groupe réduit de  $\alpha$*  : 1° pour  $n > 2$ , le p. p. c. m. des  $V_{ik}, U_{ik}, W_{ik}$  ( $i, k = 0, \dots, v$ ); 2° pour  $n = 2$ , le p. p. c. m. des  $m_{1r}, m_{1r}$  étant un générateur de  $A^0$  si  $\alpha$  est réductible dans  $\mathfrak{C}$ , de  $\overline{A^0}$  si  $\alpha$  est irréductible dans  $\mathfrak{C}$ ; 3° pour  $n = 1$ , le groupe  $1 = A^0$ . Le groupe déduit de  $B$ , en y supposant les variables homogènes, sera désigné par  $\mathfrak{B}(n, \pi, \alpha) = \mathfrak{B}(n, \pi)$ . Il sera commode aussi de remplacer la lettre  $B$  par  $R$  ou  $R_i$  quand  $A$

---

(1) Voir DE SÉGUIER, *Journal de Mathématiques*, 1909, p. 1-63.

est remplacé par Q ou  $Q_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), et alors  $\mathfrak{B}$  sera de même remplacé par  $\mathfrak{R}$  ou  $\mathfrak{R}_i$ . Enfin j'écrirai  $\overline{B}, \overline{R}, \overline{R}_i, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mathfrak{R}}, \overline{\mathfrak{R}}_i$  pour  $B, R, R_i, \mathfrak{B}, \mathfrak{R}, \mathfrak{R}_i$  respectivement, lorsqu'il sera utile de préciser que les variables sont celles de  $\overline{A}$  ou de  $\overline{\mathfrak{A}}$  : les générateurs  $V_{i0}, V_{0i}, U_{0i}, W_{0i}$  sont alors remplacés par les  $P_{ip}, O_{ip}$  (31).

D'après le n° 31, si  $\psi$  est irréductible,  $\overline{B}$  est le p. g. c. d. de  $\overline{A} = \overline{Q}$  et de  $R_0$  ( $n, \pi^2$ ).

*B est normal dans A'. On le vérifie directement en transformant les générateurs de B ou de  $\overline{B}$  par la substitution  $\gamma$  du n° 24.*

Si  $p = 2, B = A^0$ . Cela résulte des n°s 29 et 32 pour  $n > 2$ , et de la définition de B pour  $n = 2$ .

Soit  $p > 2$  et  $n > 1$ .  $A^0$ , conservant  $a$ , permute les points de la quadrique  $a = 1$ , c'est-à-dire les  $s_v$  solutions de  $a = 1$ . Si  $n = 2v'$ ,  $s_v = \pi^{2v'-1} - \theta\pi^{v'-1}$  [ $\theta = 1$  si  $\psi$  est réductible ou nulle;  $\theta = -1$  si  $\psi$  est irréductible (E., 44)]. Si  $\psi = cx^2, s_v = \pi^{2v} + \theta_c\pi^v$  ( $\theta_c$  désignant le caractère quadratique de  $\pi$ ). Le nombre des solutions où  $x_i = y_i = 0$  est  $s_{v-1}$ .

Soit maintenant  $n > 2, \psi$  étant quelconque, ou  $n = 2$  avec  $\psi = 0$ .  $m_{1,c}$  fixe les  $s_{v-1}$  points correspondant aux solutions où  $x_i = y_i = 0$  et permute les  $s_v - s_{v-1}$  autres par cycles de  $\pi - 1$ . Mais  $\frac{s_v - s_{v-1}}{\pi - 1}$  est impair. Donc l'action de  $m_{1,c}$  sur les points de  $a = 1$  est une substitution impaire, et celle de  $m_{1,r}$  a la parité de  $r$ . Les V, U, W étant d'ordre  $p$ , leur action est paire. Donc

$$A^0 = B + m_{1N}B = B + m_{iN}B \quad (i \neq 0).$$

Soit  $n \geq 2$  et  $\delta \neq 0$ . Une substitution  $m_{v,\sigma}$  d'ordre  $\pi = \theta$  fixe les  $s_{v0} = \pi^{2v-1} - \pi^{v-1}$  points de  $a = 1$  pour lesquels  $x = y = 0$  et permute les  $s_v - s_{v0}$  autres par cycles de  $\pi - \theta$ . Mais  $\frac{s_v - s_{v0}}{\pi - \theta}$  est impair. Donc l'action de  $m_{v,\sigma}$  sur les points de  $a = 1$  a la parité de  $r$ . Donc  $A^0 = B + m_{v,\sigma}B$ . En particulier  $m_{v,-1} = m_{0,-1}$  est dans B toujours et seulement si  $\pi = 0 \pmod{4}$ .

La substitution  $t_{ik} = R_{ik} S_{ik,-1}$  ( $i, k \neq 0$ ) est toujours dans B. Mais quand  $\psi \neq 0, t_{0i}$  n'y est pas toujours. Si  $\psi \neq 0$  avec  $\delta c \neq 0$  (cf. 32),  $t_{0i} m_{i,cM}$  ( $\delta M$  étant carré) est dans B (32). Donc  $t_{0i} y$  est toujours et

seulement si  $\delta c$  est carré [si  $c' = c$ ,  $t_i t'_0 m_{i,b-2c}$  étant dans B (32),  $t_i t'_0 y$  est toujours et seulement si  $b - 2c$  est carré]. Si  $\psi = cx^2$ ,  $t_{0i} m_{i,-c}$  est dans B (32). Donc  $t_{0i} y$  est toujours et seulement si  $-c$  est carré.

De même,  $m_{i,-1} T_{ik}$  étant dans B (28),  $T_{ik} y$  est toujours et seulement si  $-1$  est carré. On a trouvé précédemment (28, 29, 32) l'expression par les générateurs de B de  $m_{i\delta}$ ,  $m_{\nu\rho}$ ,  $m_{i\delta} m_{k\mu}$ ,  $m_{i\delta} m_{\nu\rho}$ ,  $T_{ik}$ ,  $t_{0i}$ ,  $u_0 t_i$ ,  $t'_0 t_i$  quand ces substitutions sont dans B. On trouvera encore au n° 40 une méthode générale pour exprimer toute substitution de B ( $4, \pi$ ) par les générateurs de ce groupe.

Considérons maintenant la similitude  $d$  de multiplicateur  $-1$  que A contient toujours. Si  $p = 2$ ,  $d = 1$ . Si  $p$  est  $> 2$  et  $n$  impair ( $\geq 1$ ),  $d$  est hors de  $A^0$ , et A est le produit direct de  $A^0$  par  $D = \{d\}$ .

Supposons donc  $p > 2$  et  $n$  pair.

Soit  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Si  $\psi = 0$ ,  $\nu$  est pair, et B contient  $d$ . Si  $\psi$  est irréductible,  $d$  est hors de B, car, si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , B ne contient pas  $m_{0,-1}$ , mais contient  $m_{i,-1}$ , quel que soit  $i$ ; et si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , B contient  $m_{0,-1}$ , mais ne contient pas  $\Pi'_i m_{i,-1}$ ,  $\nu$  étant ici impair. Si  $\psi$  est réductible et  $\delta c \neq 0$ , on voit de même que B contient  $d$ , ce qui est évident *a priori*, puisque B est alors semblable à  $R_0(n, \pi)$ .

Soit  $n \equiv 2 \pmod{4}$  ( $\geq 2$ ). Si  $\psi = 0$ ,  $\nu$  est impair; si alors  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , B contient  $d$ ; si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $d$  est hors de B. Si  $\psi$  est irréductible,  $\nu$  est pair; si alors  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $d$  est hors de B; si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , B contient  $d$  (il contient  $m_{0,-1}$  et  $\Pi'_i m_{i,-1}$ ). Si  $\psi$  est réductible et  $\delta c \neq 0$ , B contient  $d$  toujours et seulement si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , ce qui est encore évident *a priori*.

Il est clair que quand  $d$  est hors de B,  $A^0$  est le produit direct de B par D.

On voit que, pour  $p > 2$  et  $n$  pair ( $\geq 2$ ), B contient  $d$  quand  $a$  est équivalente à  $\Sigma_1^n z_i^2$  et ne le contient pas quand  $a$  est équivalente à  $\Sigma_1^{n-1} z_i^2 + N z_n^2$  (E., 41).

Toute substitution  $\alpha$  permutable à chaque substitution de B est une similitude. On le vérifie directement à l'aide des conditions  $\alpha V_{ik\lambda} = V_{ik\lambda} \alpha$ ,  $\alpha U_{ik\lambda} = U_{ik\lambda} \alpha$ ,  $\alpha W_{ik\lambda} = W_{ik\lambda} \alpha$  ( $i, k \geq 0$ ; on peut aussi employer les générateurs  $P_{ip}$ ,  $O_{ip}$  si  $\psi$  est irréductible) (cf. 45).

Donc le central de  $A'$  est  $I$ , celui de  $A$  est  $D$ , et ceux de  $A^\circ$ ,  $B$  sont leurs p. g. c. d. avec  $D$ .

**40** <sup>(1)</sup>. Désignons d'une manière générale par  $L_{x_1, \dots, x_m}(m, \pi)$   $U_{x_1, \dots, x_m}(m, \pi)$  les groupes  $L(m, \pi)$ ,  $U(m, \pi)$  de variables  $x_1, \dots, x_m$  (cf. **11**), par  $s_{x_1, \dots, x_m}, r_{x_1, \dots, x_m}$  des substitutions quelconques de  $U_{x_1, \dots, x_m}$ , par  $s_\zeta, r_\zeta$  les actions respectives de  $s_{\zeta\eta}, r_{\zeta\eta}$  sur  $\frac{\zeta}{\eta} = \zeta$ , et par  $\mathcal{O}_\zeta(2, \pi) = \Sigma s_\zeta = \Sigma r_\zeta$  le groupe  $\mathcal{O}(2, \pi)$  de variable  $\zeta$ .

Supposons  $v \geq 2$ , et soit  $\mathbf{V}_{ik}(\pi) = \mathbf{V}_{ki}(\pi) = \Sigma s(i, k \neq 0)$  le p. p. c. m. des  $V_{ik\lambda}, V_{k\lambda i}$ ; l'action de  $\mathbf{V}_{ik}$  sur  $x_i, x_k$  est  $U_{x_i x_k}(2, \pi)$  ( $S$ , 83); son action sur  $y_i, y_k$  est  $U_{y_i y_k}(2, \pi)$ , et  $s$  est de la forme  $s_{x_i x_k} \bar{s}_{y_i y_k}^{-1}$  (en désignant toujours par  $\bar{\sigma}$  la transposée de  $\sigma$ ). Soit de même  $\mathbf{W}_{ik}(\pi) = \mathbf{W}_{ki}(\pi) = \Sigma r(i, k \neq 0)$  le p. p. c. m. des  $U_{ik\lambda}, W_{ik\lambda}$ ; l'action de  $\mathbf{W}_{ik}$  sur  $x_i, y_k$  est  $U_{x_i y_k}(2, \pi)$ ; son action sur  $y_i, x_k$  est  $U_{y_i x_k}(2, \pi)$ , et  $r$  est de la forme  $r_{x_i y_k} \bar{r}_{y_i x_k}^{-1}$ .

Il résulte de ces définitions que  $\mathbf{V}_{ik} = t_i \mathbf{W}_{ik} t_i \equiv U(2, \pi)$ , et que le p. g. c. d. de  $\mathbf{V}_{ik}, \mathbf{W}_{ik}$  est  $D_{ik} = \{d_{ik}\}$  (**28**).

D'ailleurs  $sr = rs$  <sup>(2)</sup>. On voit donc, en posant  $\mathbf{V}_{ik} \mathbf{W}_{ik} = B_{ik}$  et  $\frac{x_i}{x_k} = u, \frac{y_i}{y_k} = z$ , que  $B_{ik} | D_{ik}$  est isomorphe au produit direct de  $\mathcal{O}_z = \Sigma s_z$  par  $\mathcal{O}_u = \Sigma r_u$ ,  $D_{ik} s$  répondant à  $s_z$  et  $D_{ik} r$  à  $r_u$ .

Ainsi pour  $n = 4$  et  $\psi = 0$ , en faisant dans ce qui précède  $i = 1$ , et en désignant par  $\varphi, \psi$  les actions respectives de  $\mathbf{V}_{12} = \mathbf{V}$  et de  $\mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}$  sur les rapports des variables,  $\mathfrak{A} = \varphi\psi \equiv \mathcal{O}_z \mathcal{O}_u$ ,  $V_{12\lambda}$  correspondant à  $(z + \lambda)$ ,  $V_{21\lambda}$  à  $\left(\frac{z}{\lambda z + 1}\right)$ ,  $U_{12\lambda}$  à  $(u + \lambda)$ ,  $W_{21\lambda}$  à  $\left(\frac{u}{\lambda u + 1}\right)$ . D'ailleurs, en faisant correspondre  $m_\lambda = \begin{vmatrix} z & \lambda z \\ u & \lambda^{-1} u \end{vmatrix}$  à  $m_{2\lambda}$ , et  $l = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$  à  $l_2$ , on voit que  $\mathfrak{A}^0 \equiv \{ \mathcal{O}_z \mathcal{O}_u, m_N \}$ , et que  $\mathfrak{A} \equiv \{ \mathcal{O}_z \mathcal{O}_u, m_N, l \}$ .

Si  $\pi > 3$ , tout diviseur normal  $X$  de  $A$  autre que  $D$  et  $> 1$  est  $\geq B$ . En effet, supposons d'abord  $X$  premier à  $B$ . Si le p. g. c. d.  $X^0$  de  $X$ ,  $A^\circ$  est  $> 1$  ( $p$  est donc ici  $> 2$ ),  $X^0$  est d'ordre 2, et  $A^\circ$  est le produit

<sup>(1)</sup> Comparer DICKSON, *Linear groups*, 196-198, 174-179.

<sup>(2)</sup> Si l'on prenait  $r_{x_i y_k}$  dans  $L_{x_i y_k}$  hors de  $U_{x_i y_k}$  ou  $s_{x_i x_k}$  dans  $L_{x_i x_k}$  hors de  $U_{x_i x_k}$ ,  $s$  ne serait plus permutable à  $r$ .

direct de  $B$  par  $X^0$ . Donc  $X^0 = D$  (59), et ici  $D$  divise  $B$ . Si  $X^0 = 1$ ,  $X$  est d'ordre 2, et  $A$  est le produit direct de  $A^0$  par  $X$ . Donc  $p$  est  $> 2$ , et  $X = D$ . Supposons  $X$  non premier à  $B$ . Soit  $\alpha$  son action sur les rapports des variables, et  $\mathfrak{F}$  le p. g. c. d. de  $\alpha$ ,  $\mathfrak{B}$ , normal dans  $\mathcal{A}$ . Si  $X$  est premier à  $D$ ,  $\mathfrak{F}$  est  $> 1$ . Si  $\mathfrak{F}$  est  $< \mathfrak{B}$ , il coïncide avec  $\varphi$  ou  $\psi$ , qui, pour  $\pi > 3$ , sont simples et non cycliques (*E.*, 72). Or ces groupes ne sont pas normaux dans  $\mathcal{A}$ . Donc  $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$ . Donc  $B$  serait le produit direct de  $D$  par  $X \equiv \mathfrak{B}$ . Mais cela est impossible, car  $B$  contient des substitutions dont le carré est  $d$ , par exemple la substitution  $sr$  où  $r = d$  et où  $s_{x_1, x_2} = |x_2, -x_1|$ . Donc  $X$  est  $> D$ . Donc, ici encore,  $\mathfrak{F}$  est  $> 1$ . Donc  $\mathfrak{F} = \mathfrak{B}$ , et  $X \geq B$ .

*De même, si  $\pi > 3$ , tout diviseur normal de  $\{B, r_1\}$  ou de  $\{B, t, m_{1N}\}$  non  $\leq D$  est  $\geq B$ .*

*Si  $\pi = 2$  ou 3,  $\mathfrak{B} = \varphi\psi$  a un diviseur normal sylowien  $\mathfrak{F}$  abélien principal d'ordre 9 ou 16 respectivement.  $\mathfrak{B}|\mathfrak{F}$  est un  $g_4$  carré ou un  $g_6$  non cyclique, et aucun diviseur de  $\mathfrak{F}$  ou de  $\mathfrak{B}|\mathfrak{F}$  autre que 1,  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{B}|\mathfrak{F}$  n'est normal dans  $\mathcal{A}$ . Si donc  $F$  est le diviseur  $> D$  répondant à  $\mathfrak{F}$  dans  $B$ , tout diviseur normal de  $A$  est  $\geq B$ , ou est l'un des groupes 1,  $D$ ,  $F$ .*

*Pour  $\pi \geq 2$ , tout diviseur normal  $X$  de  $B$  est normal dans  $A_0$  (cela est clair pour  $\pi = 2$ , car alors  $A^0 = B$ ). En effet  $m_i$  est permutable à  $\varphi$ , à  $\psi$  et à leurs diviseurs normaux, qui sont sylowiens, si  $\pi = 3$ , donc aussi à l'action  $\alpha$  de  $X$  sur les rapports des variables. Si donc  $X$  n'est pas normal dans  $A^0$ , il est conjugué d'un diviseur  $X'$  de  $XD$ . Si  $D$  divise  $X$ ,  $X' = X$ . Si  $X$  est premier à  $D$  et si  $X' \neq X$ ,  $X'$  contient une substitution  $\xi$  de  $Xd$ , donc aussi  $d$ , qui est une puissance de  $\xi$  (*S.*, 83). Donc  $X$ , comme  $X'$ , contient  $D$  contre l'hypothèse.*

$t_{12}$ , qui ne rentre ni dans la forme  $s$  ni dans la forme  $r$ , est hors de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{W}$  et transforme  $V_{12\lambda}$  en  $V_{21, -\lambda}$  et  $U_{12\lambda} = t_2 V_{12\lambda} t_2$  en  $W_{12\lambda} = t_2 V_{21, -\lambda} t_2$ . Donc  $\{\mathbf{V}, t_{12}\}$  et  $\{\mathbf{W}, t_{12}\}$  sont isomorphes d'ordre  $\frac{2\pi(\pi^2-1)}{\tau}$  ( $\tau = 2$  si  $p > 2$ ;  $\tau = 1$  si  $p = 2$ ).

De même  $m_{1\lambda}$  est hors de  $\mathbf{V}$  et de  $\mathbf{W}$ , et transforme  $V_{12\mu}$  en  $V_{12, \lambda\mu}$ ,  $V_{21, -\mu}$  en  $V_{21, -\lambda^{-1}\mu}$ ,  $U_{12\mu} = t_2 V_{12\mu} t_2$  en  $U_{12, \lambda\mu}$ ,  $W_{12\mu} = t_2 V_{21, -\mu} t_2$  en  $W_{12, -\lambda^{-1}\mu}$ . Donc  $\{\mathbf{V}, m_{1\lambda}\} = \mathbf{V}_\lambda$  et  $\{\mathbf{W}, m_{1\lambda}\} = \mathbf{W}_\lambda$  sont isomorphes d'ordre  $\frac{l\pi(\pi^2-1)}{\tau}$ ,  $l$  étant l'ordre de  $m_{1\lambda}$ .

On a vu (39) que  $t_{12}$  est toujours dans B, que  $m_{1\lambda}$  y est toujours et seulement si  $\lambda$  est carré, et  $T_{12}$  toujours et seulement si  $-1$  est carré [on a aussi trouvé (28, 29) l'expression de ces substitutions, lorsqu'elles sont dans B, par les générateurs de B]. Mais on peut ici obtenir directement ces résultats en développant les conditions  $sr = t_{12}$ ,  $sr = m_{1\lambda}$ ,  $sr = T_{12}$ .

Comme on sait exprimer toute substitution de  $U_{\xi\eta}$  par ses générateurs  $|\xi + \lambda\eta, \eta|$ ,  $|\xi, \eta + \lambda\xi|$  (S., 83; cf. 30), on saura aussi exprimer toute substitution de  $B = VW$  par les  $V_{12}, V_{21}, U_{12}, W_{12}$ .

Supposons de nouveau  $n$  quelconque  $\geq 4$  mais pair, et  $\psi$  irréductible. Soit, dans  $\bar{A}$ ,  $\dot{r}_s$  la substitution  $r$  de  $W_{i'}$  ( $\pi^2$ ) où la matrice de  $r_{x_i y_j}$  est conjuguée de celle de  $s_{x_i x_j}$  ( $\dot{r}_s$  est donc formée avec les  $U_{i'p}$ ,  $W_{i'p}$  comme  $s$  avec les  $V_{i'p}$ ,  $V_{i'p}$ ) et  $\dot{s}_r$  la substitution  $s$  de  $V_{i'}$  ( $\pi^2$ ) où la matrice de  $s_{x_i x_j}$  est conjuguée de celle de  $r_{x_i y_j}$ . Le groupe  $\Phi_{i'} = \Sigma \dot{s}_r = \Sigma r \dot{s}_r$  est homomorphe à  $V_{i'}$  ( $\pi^2$ ), l'unité de  $\Phi_{i'}$  répondant à  $D_{i'}$  (si  $\dot{s}_r = 1$ ,  $s$  et  $\dot{r}_s$  sont égaux tous deux à  $d_{i'}$  ou à 1), donc isomorphes à  $\mathfrak{v}(2, \pi^2)$ .

Avec les variables  $x_i, y_i, x, y, \dot{s}_r$  est une substitution réelle  $\sigma$ , et le groupe  $B_{0i}(\pi) = B_{i0}(\pi) = \Sigma \sigma \equiv \mathfrak{v}(2, \pi^2)$  dont  $\Phi_{i'} = \bar{B}_{0i}(\pi) = \bar{B}_{i0}(\pi)$  est la forme imaginaire conserve  $x_i y_i + \psi$ . En prenant d'ailleurs pour  $s$  une  $V_{i'}$  ou une  $V_{i'}$  convenable de  $V_{i'}$  ( $\pi^2$ ) on obtient pour  $\sigma$  une quelconque des  $V_{0i}, V_{i0}, U_{0i}, W_{0i}$  (51). Donc  $B_{0i} \equiv R_2(4, \pi)$ .

Ainsi, pour  $n = 4$ ,  $\psi$  irréductible dans  $\mathfrak{e}$  et  $p \geq 2$ , en faisant  $i = 1$ ,  $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^0 \equiv B \equiv \mathfrak{v}(2, \pi^2)$  [ici  $A^0 = BD$  (39)]. Aux substitutions  $P_{1p}, O_{1p}$  de  $\bar{B}$  répondent respectivement dans  $\mathfrak{v}_z(2, \pi^2)$ , par la correspondance indiquée,  $z + \varrho$  et  $\frac{z}{1 - \varrho z}$ . Or la  $s_2(z^\pi)(-z^{-1})$  transforme ces deux dernières substitutions l'une dans l'autre. Donc  $\mathfrak{B} \equiv \{B, t_1\}$  est isomorphe à  $\{ \mathfrak{v}_z(2, \pi^2), z^\pi \}$ ,  $t_1$  répondant à  $(z^\pi)(-z^{-1})$ , et la correspondance des éléments de B,  $\mathfrak{v}_z$  restant la même.

Tout diviseur normal X de A ou de  $A^0$  non  $\leq D$  est  $\geq B$ . En effet, si X ne contient pas B, il est premier à B qui est simple. Si X est premier à  $\{B, t_1\} = B'$ , X est d'ordre 2, et A produit direct de B', X, d'où  $X = D$  (39). Si le p. g. c. d. Y de X, B' est  $> 1$ , Y est d'ordre 2, et B' produit direct de B, Y, d'où  $Y = D$  (39); mais alors d serait dans B', donc dans  $Bt_1$ , tandis que  $A = BD + BDt_1$ .



On sait déjà (39) que  $m_{1,\lambda}$  est dans  $B$  toujours et seulement si  $\lambda$  est carré dans  $\mathfrak{O}$ , que  $m_{2,p}$  est dans  $\bar{B}$  toujours et seulement si  $\rho^{\frac{\pi+1}{2}} = 1$ , que  $t_{0,1}$  est dans  $B$  toujours et seulement si  $c$  est non carré (ou  $p = 2$ ), que si  $c' = c$ ,  $t_1 t'_0$  y est toujours et seulement si  $b - 2c$  est carré [on a, d'après (26), (29) et le n° 32, l'expression de ces substitutions, lorsqu'elles sont dans  $B$ , par les générateurs de  $B$ ]; et de là résulte que  $t_{1,2} = m_{2,q} t_{0,1}$  n'est jamais dans  $B$ . Ici encore on obtient directement ces résultats en développant les conditions  $sr'_s = m_{1,\lambda}, m_{2,p}, t_{0,1}, t_1 t'_0, t_{1,2}$ . Comme précédemment aussi, l'expression de chaque substitution de  $U_{\xi,\eta}(2, \pi^2)$  par ses générateurs  $|\xi + \lambda\eta, \eta|, |\xi, \eta + \lambda\xi|$  fournit l'expression de la substitution correspondante de  $\bar{B}$  par les  $V_{1,2}, V_{2,1}, U_{1,2}, W_{1,2}$ .

Dans le cas où  $n$  est quelconque  $\geq 3$  mais impair, et  $\psi = cx^2$  ( $p > 2$ ), je désignerai par  $B_{0i}(\pi) = B_{i0}(\pi)$  le p. p. c. m. des  $V_{0i}$  et des  $U_{0i}$ . Pour  $i = 1$ ,  $B_{0i} = B(3, \pi)$ .

Supposons de suite  $n = 3$ .  $A$  conserve la conique  $x_1 y_1 + cx^2 = 0$ , et  $t_1$  échange les deux points  $x_1 = x = 0, y_1 = x = 0$  où elle est coupée par  $x = 0$ . Les deux droites  $x_1 = zx, y_1 = -\frac{cx}{z}$ , qui passent chacune par un de ces points, se coupent en un point de la conique caractérisé par  $z$ . Les actions respectives de  $Dt_0, Dt_1, Dm_{1,\lambda}, DV_{01,2}, DU_{01,2}$  sur  $z$  sont les substitutions  $-z, -\frac{c}{z}, \lambda z, \frac{z}{1-\lambda z}, z + c\lambda$  (si les actions sur  $z$  de deux substitutions  $\alpha, \alpha'$  de  $A$  sont  $\sigma, \sigma'$  celle de  $\alpha\alpha'$  est  $\sigma\sigma'$ ) dont le p. p. c. m.  $\mathfrak{L}(2, \pi)$  ( $S., 80$ ) est isomorphe à  $A|D \equiv A^0$  [ $A = A^0 D$  (39)]. L'action de  $dt_1 m_{1,\lambda}^{-1} = U_{01,c^{-1}} V_{01,1} U_{01,c^{-1}}$  sur  $z$  est  $-z^{-1}$ . Donc  $B \equiv \{z + 1, -z^{-1}\} = \mathfrak{O}(2, \pi)$  ( $S., 79$ ).

Si  $\pi > 3$ , tout diviseur normal  $X$  de  $A$  ou de  $A^0$  non  $\leq D$  est  $\geq B$ . En effet, si  $X$  ne contient pas  $B$ , il est premier à  $B$  qui est simple. Si  $X$  est premier à  $A^0$ ,  $A$  est produit direct de  $A^0, X$ , et  $X = D$ . Si le p. g. c. d.  $Y$  de  $X, A^0$  est  $> 1$ ,  $A^0$  est produit direct de  $B, Y$ , et  $Y = D$ , tandis que  $d$  est hors de  $A^0$  (39).

Si  $\pi = 3$ , les seuls diviseurs normaux de  $A$  non  $\leq D$  et non  $\geq B$  sont le  $g_4$  carré sylowien  $F$  de  $B$  et  $FD$  (dont le p. g. c. d. avec  $A^0$  est  $F$ ). On le voit de suite en observant que  $A$  peut ici se représenter dans les symboles 1, 2, 3, 4, 5, 6 comme le produit direct du  $g_2 \{56\}$  par le

symétrique de champ 1, 2, 3, 4, A<sup>0</sup> correspondant à ce symétrique, et B à l'alterné de même champ.

41. D'après ce qui précède B est le p. p. c. m. des B<sub>i</sub> (i = 1, ..., ν; j = 0, ..., ν) en convenant que, si ψ = 0, B<sub>i0</sub> = B<sub>0i</sub> = 1. On peut simplifier ce résultat. Remarquons d'abord que {B<sub>il</sub>, B<sub>kl</sub>} (i, k, l ≠ 0; p ≥ 2), contenant, d'après (22) et (23), les V<sub>ik</sub>, V<sub>ki</sub>, U<sub>ik</sub>, W<sub>ik</sub>, contient B<sub>ik</sub>. De même, d'après (25), (26), (27), {B<sub>0l</sub>, B<sub>kl</sub>} (k ≠ 0; p ≥ 2) contient B<sub>0k</sub>, et, si ψ ≠ 0, {B<sub>0k</sub>, B<sub>0l</sub>} contient B<sub>kl</sub> (p ≥ 2). On peut donc écrire

$$\{B_{k_1 k_2}, B_{k_1 k_3}, \dots, B_{k_1 k_m}\} = \{B_{k_1 k_2}, B_{k_2 k_3}, \dots, B_{k_{m-1} k_m}\} = B_{k_1 \dots k_m}$$

les k<sub>i</sub> étant distincts, et l'ordre des indices de B<sub>k<sub>1</sub>...k<sub>m</sub></sub> étant indifférent, en convenant que, si l'un d'eux est nul pour p > 2 et ψ = 0, B<sub>k<sub>1</sub>...k<sub>m</sub></sub> = 1. Pour m = ν', B<sub>k<sub>1</sub>...k<sub>m</sub></sub> = B.

Soit ν ≥ 3. D'après les relations t<sub>13</sub> V<sub>12λ</sub> t<sub>13</sub> = W<sub>12λ</sub>, t<sub>13</sub> V<sub>21λ</sub> t<sub>13</sub> = U<sub>21λ</sub>, on a B = {V<sub>12</sub>, B<sub>13</sub>, ..., B<sub>1ν</sub>, B<sub>10</sub>}, et, en continuant ainsi,

$$B = \{V_{12}, V_{13}, \dots, V_{1, \nu-1}, B_{1\nu}, B_{10}\}.$$

De même t<sub>23</sub> V<sub>12λ</sub> t<sub>23</sub> = U<sub>12λ</sub>, et t<sub>23</sub> V<sub>21λ</sub> t<sub>23</sub> = W<sub>21λ</sub>, d'où B = {V<sub>12</sub>, B<sub>23</sub>, ..., B<sub>ν-1, ν</sub>, B<sub>ν0</sub>}, et, en continuant ainsi,

$$B = \{V_{11}, V_{23}, \dots, V_{\nu-2, \nu-1}, B_{\nu-1, \nu}, B_{\nu0}\} = \{B_{01}, B_{12}, V_{23}, V_{34}, \dots, V_{\nu-1, \nu}\}.$$

Si B<sub>01</sub> est ≠ 1, c'est-à-dire si ψ ≠ 0, B<sub>01</sub> contient une t<sub>01</sub> m<sub>1</sub> (39) qui transforme V<sub>1k</sub> en W<sub>1k</sub>. Donc si ψ ≠ 0, B = {B<sub>01</sub>, V<sub>12</sub>, V<sub>13</sub>, ..., V<sub>1, ν</sub>}.

Comme, d'après (23), {V<sub>ik</sub>, V<sub>il</sub>} contient V<sub>kl</sub>, l'action de {V<sub>k<sub>1</sub> k<sub>2</sub></sub>, V<sub>k<sub>1</sub> k<sub>3</sub></sub>, ..., V<sub>k<sub>1</sub> k<sub>m</sub></sub>} = V<sub>k<sub>1</sub>...k<sub>m</sub></sub> (l'ordre des indices de V<sub>k<sub>1</sub>...k<sub>m</sub></sub> étant indifférent) sur x<sub>k<sub>1</sub></sub>, ..., x<sub>k<sub>m</sub></sub> (k<sub>1</sub>, ..., k<sub>m</sub> ≠ 0) est U<sub>x<sub>k<sub>1</sub></sub>...x<sub>k<sub>m</sub></sub></sub>(m, π) (S.. 83), et si s<sub>x<sub>k<sub>1</sub></sub>...x<sub>k<sub>m</sub></sub></sub> est l'action d'une substitution s de V<sub>k<sub>1</sub>...k<sub>m</sub></sub> sur x<sub>k<sub>1</sub></sub>, ..., x<sub>k<sub>m</sub></sub>, son action sur y<sub>k<sub>1</sub></sub>, ..., y<sub>k<sub>m</sub></sub> est s̄<sub>y<sub>k<sub>1</sub></sub>...y<sub>k<sub>m</sub></sub></sub><sup>-1</sup> (cf. 40). Donc V<sub>k<sub>1</sub>...k<sub>m</sub></sub> ≡ U(m, π), et B = {B<sub>01</sub>, V<sub>1...ν</sub>}.

Soit i un indice fixe ≠ 0. V<sub>1...ν</sub> est le p. p. c. m. des V<sub>ik</sub> où k ≠ 0, i, et t<sub>i</sub> V<sub>1...ν</sub> t<sub>i</sub> = W<sup>(i)</sup> celui des W<sub>ik</sub> où k ≠ 0, i. W<sup>(i)</sup> est aussi isomorphe à U(ν, π), et son p. g. c. d. avec V<sub>1...ν</sub> contient tous les t<sub>i</sub> V<sub>kl</sub> t<sub>i</sub> = V<sub>kl</sub> où k, l ≠ i, donc V<sub>1...i-1, i+1, ...ν</sub>.

On remarquera que  $V_{1\dots\nu}$  est le p. p. c. m. de deux groupes abéliens dérivés l'un des  $V_{12}, V_{13}, \dots, V_{1\nu}$ , l'autre des  $V_{21}, V_{31}, \dots, V_{\nu 1}$ .

42. Soit, en supposant  $n > 2$ ,  $P_{B(n,\pi)} = P = P_0$  le  $g_{\pi^{n-2}}$  abélien principal dérivé des  $V_{1k}, U_{1k}$  où  $k = 2, \dots, \nu, 0$ ;  $P_1$  le  $g_{\pi^{n-4}}$  analogue à  $P$  dans  $A_1$ ; et formons de même successivement les groupes  $P_2, \dots$ . Toute substitution de  $P_i$  est permutable à  $P_{i-1}$ , en sorte que,  $\nu'$  étant le plus grand entier  $\leq \frac{1}{2}(n-1)$ ,  $PP_1\dots P_{\nu'-1} = P_{B(n,\pi)} = P$  est un  $g_{\pi^s}$  [ $s = \nu'(\nu'-1)$  si  $n = 2\nu'$ ;  $s = \nu'^2$  si  $n = 2\nu'+1$ ;  $s$  est donc le plus grand entier  $\leq \nu'^2$ ] sylozien de  $B$ .

Écrivons un instant  $U_{i,\nu+1,\lambda}$  pour  $U_{i0\lambda}$ ,  $V_{i,\nu+1,\lambda}$  pour  $V_{i0\lambda}$ , et  $\nu_1, \nu_2$  respectivement pour les plus hautes valeurs du second indice dans les générateurs  $U_{ik}, V_{ik}$  de  $P$  ( $\nu_1 + \nu_2 = n$ ), en supposant que  $\psi$  n'ait jamais la forme  $c'y^2$  ( $\nu_1$  est donc  $\geq \nu_2$ ), désignons par  $\{U_{ik}\}$  le p. p. c. m. des  $U_{ik}$  si  $k < \nu_1$  ou si  $k = \nu_1$  avec  $\nu_1 = \nu_2 + 1$ , et le p. p. c. m. des  $U_{i\nu_1}, V_{i\nu_1}$  si  $k = \nu_1$  avec  $\nu_1 = \nu_2$ , par  $\{V_{ik}\}$  le p. p. c. m. des  $V_{ik}$ , et considérons le Tableau triangulaire

$$\begin{array}{cccccccc} \{U_{12}\} & \{U_{13}\} & \dots & \{U_{1,\nu_1-1}\} & \{U_{1\nu_1}\} & \{V_{1,\nu_1-1}\} & \dots & \{V_{13}\} & \{V_{12}\} \\ & \{U_{23}\} & \dots & \{U_{2,\nu_1-1}\} & \{U_{2\nu_1}\} & \{V_{2,\nu_1-1}\} & \dots & \{V_{23}\} & \\ & & \dots & & & & & & \\ & & & \{U_{i,i+1}\} & \dots & \{U_{i\nu_1}\} & \dots & \{V_{i,i+1}\} & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \{U_{\nu_1-1,\nu_1}\} \end{array}$$

Appelons  $s^{\text{ième}}$  transversale la rangée formée du  $s^{\text{ième}}$  terme de la première ligne; du  $(s-2)^{\text{ième}}$  de la seconde, ..., du  $|s-2(i-1)|^{\text{ième}}$  de la  $i^{\text{ième}}$ . Le  $s^{\text{ième}}$  central  $C_s$  de  $P$  est le p. p. c. m. des groupes des  $s$  premières transversales, c'est-à-dire le p. p. c. m. des  $U_{ik}$  où  $i+k \leq s+2$  et des  $V_{ik}$  où  $k-i \geq 2\nu_1 - s - 2$ . Si  $s < \nu_1$ , ou si  $\nu_1 > \nu_2$ , l'ordre de  $C_s$  est  $\pi^\sigma$ ,  $\sigma$  étant le plus grand entier  $\leq \left(\frac{s+1}{2}\right)^2$ . Si  $s = \nu_1 + r$  ( $r \geq 0$ ) et  $\nu_2 = \nu_1$ , l'ordre de  $C_s$  est  $\pi^{\sigma+r+2}$ . Montrons que si le théorème est vrai pour  $C_s$  ( $C_0 = 1$ ), il est vrai pour  $C_{s+1}$ . Soit  $\xi$  un élément de  $C_{s+1}$  hors de  $C_s$ , exprimé par les générateurs de  $P$  en faisant passer ceux de  $P_{i-1}$  avant ceux de  $P_i$ . Si  $\xi$  contient (dans l'expression considérée) un  $V_{kl}$  hors de  $C_s$ ,  $l-k$  est  $\leq 2\nu_1 - s - 3$ . Or, pour  $k > 1$ ,  $V_{k-1,k}$  transforme  $V_{kl}$  en

$V_{k-1,l} V_{kl}$  si  $l \leq \nu$ , et en  $U_{k-1,k} V_{k-1,l} V_{kl}$  si  $l = \nu + 1$ . Pour que  $C_s \xi$  soit permutable à  $V_{k-1,k}$ , il faut donc que  $V_{k-1,l}$  soit dans  $C_s$ , d'où  $l - k \geq 2\nu_1 - s - 3$ . Donc  $l - k = 2\nu_1 - s - 3$ . Pour  $k = 1$  et  $l < \nu_2$ , la permutabilité de  $C_s \xi$  avec  $V_{l,l+1}$  exige que  $V_{l,l+1}$  soit dans  $C_s$ , d'où encore  $l - k = 2\nu_1 - s - 3$ . Pour  $k = 1$  et  $l = \nu_2$ , la permutabilité de  $C_s \xi$  avec  $U_{i,\nu_2}$  exige que  $U_{i,i}$  soit dans  $C_s$ , d'où  $i + 1 \leq s + 2$ , et de même (en faisant  $i = \nu_1$  si  $\nu_2 = \nu_1 - 1$  et  $i = \nu_1 - 1$  si  $\nu_2 = \nu_1$ )  $l - k = 2\nu_1 - s - 3$ . Si  $\xi$  contient une  $U_{kl}$  ( $k < l$ ) hors de  $C_s$ ,  $k + l$  est  $\geq s + 3$ , et la permutabilité de  $C_s \xi$  avec  $V_{l-1,l}$  ou  $U_{l-1,l}$  exige que  $k + l = s + 3$ . Donc  $\xi$  ne doit contenir que les générateurs de l'énoncé, et cela suffit, car alors tout générateur de  $\mathbf{P}$  transforme tout générateur  $\gamma$  de  $\xi$  en un élément de  $C_s \xi$  (si  $\gamma = V_{k,\nu+1}$ , un  $U_{k-1,k}$  peut apparaître; mais alors  $\nu_1 = \nu + 1$ ,  $k \leq \nu$ , et  $\nu + 1 - k = 2\nu_1 - s - 3$ , d'où  $2k - 1 \leq s + 1$ ). L'ordre de  $C_s$  se calcule en comptant les éléments à prendre dans chaque ligne du Tableau, et en observant que, si  $\nu_2 = \nu_1$  et  $s = \nu_1 + 1$ ,  $C_s$  contient les  $V_{1,\nu_1}, V_{2,\nu_1}, \dots, V_{\nu+2,\nu_1}$ .

Les substitutions de  $\mathbf{P}$  ont la forme  $\alpha_{\mathbf{P}}$  indiquée au n° 13, avec une ligne et une colonne relatives à  $\gamma$  si  $\delta \neq 0$  (1) et toute substitution

(1) Si l'on range les variables dans l'ordre  $\gamma_1, \dots, \gamma_\nu, \gamma, x, x_\nu, \dots, x_1$  (en supprimant celles des variables  $x, \gamma$  qui ne figurent pas dans  $\psi$ ) les coefficients situés au-dessus de la diagonale principale sont tous nuls. Ceux de cette diagonale sont égaux à 1. Les  $n - 1$  coefficients de la rangée parallèle à cette diagonale et située immédiatement au-dessous sont, dans l'ordre des lignes où ils se trouvent :

si  $n = 2\nu$ ,

$$\beta'_{2,1}, \dots, \beta'_{i,i-1}, \dots, \beta'_{\nu,\nu-1}, \alpha'_{\nu\nu}, \alpha'_{\nu-1,\nu}, \dots, \alpha_{i-1,i}, \dots, \alpha_{12};$$

si  $n = 2\nu + 2$ ,

$$\beta'_{2,1}, \dots, \beta'_{i,i-1}, \dots, \beta'_{\nu,\nu-1}, \beta'_{\nu\nu}, \alpha'_{00}, \alpha_{\nu 0}, \alpha_{\nu-1,\nu}, \dots, \alpha_{i-1,i}, \dots, \alpha_{12};$$

si  $n = 2\nu + 1$ ,

$$\beta'_{2,1}, \dots, \beta'_{i,i-1}, \dots, \beta'_{\nu,\nu-1}, \alpha'_{0\nu}, \alpha_{\nu 0}, \alpha_{\nu-1,\nu}, \dots, \alpha_{i-1,i}, \dots, \alpha_{12}.$$

On a dans les trois cas  $\alpha_{i-1,i} = -\beta'_{i,i-1}$  pour  $i = 2, \dots, \nu$  (26). De plus :

si  $n = 2\nu$ ,  $\alpha'_{\nu\nu} = 0$ ; si  $n = 2\nu + 2$ ,  $\alpha_{\nu 0} = -\beta'_{\nu\nu}$  et  $\alpha'_{00} = 0$ ; si  $n = 2\nu + 1$ ,  $\alpha_{\nu 0} = -2c\alpha'_{0\nu}$ .

Dans le cas  $n = 2\nu + 1$ ,  $p$  impair, on peut supposer  $c = \frac{1}{2}$ .

de  $B$  ayant cette forme est dans  $P$  (cf. 15). On voit encore comme au n° 15 que le normalisant de  $P$  dans  $A^0$  est  $M^0P$ ,  $M^0$  désignant le p. p. c. m. (abélien) des  $m_j$  ( $j \geq 0$  si  $\delta \neq 0$ ;  $j \geq 1$  si  $\psi = 0$  ou si  $\psi = cx^2$ ). L'ordre de  $M^0$  est  $(\pi - 1)^\nu(\pi - 0)$  si  $n = 2\nu$  ( $0$  ayant le même sens qu'au n° 27), et  $(\pi - 1)^\nu$  si  $n = 2\nu + 1$ .  $M^0$  est son propre normalisant dans  $M^0P$ . Si  $p > 2$ , le p. g. c. d.  $M_{11}$  de  $M^0$ ,  $B$  est d'indice 2 dans  $M^0 = M_{11} + m_{1N}M_B$ . Le normalisant de  $P$  dans  $B$  est  $M_{11}P$ .

Posons  $M = \{M^0, t_0\}$  si  $\psi \neq 0$ , et  $M = \{M^0, t_\nu\}$  si  $\psi = 0$ . Le normalisant de  $P$  dans  $A$  est  $MP$  (cf. 29). Mais si  $p = 2$ ,  $P$  n'est pas sylowien dans  $A$  : soit alors  $P' = \{P, t_0\}$  si  $\delta \neq 0$ , et  $P' = \{P, t_\nu\}$  si  $\psi = 0$ ;  $P'$  est un groupe sylowien de  $A$  contenant  $P$ , et le normalisant de  $P'$  dans  $A$  est encore  $MP = M^0P'$  (le p. g. c. d. de ce normalisant avec  $A^0 = B$  est évidemment le normalisant de  $P$  dans  $A^0$ ).

45 (1). Pour  $p > 2$ ,  $B(5, \pi)$  est isomorphe au groupe simple (21)  $\mathcal{G}(4, \pi)$  [pour  $p = 2$ ,  $\mathcal{G}(4, \pi) \equiv G(4, \pi) \equiv A(5, \pi)$  (26)]. Soient, en effet,  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$  les variables de  $G(4, \pi)$ , et  $\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2$  des variables cogrédientes. Adjoignons aux variables de  $B$  la variable auxiliaire inaltérée  $\gamma$ . Posons  $x + \gamma = -y_3$ ,  $x - \gamma = -x_3$ , et identifions les variables  $-x_3, \frac{x_2}{\gamma}, -\frac{x_1}{\gamma}, y_1, y_2, y_3, \gamma$  étant une indéterminée  $\neq 0$ , avec les déterminants (cf. S., 76)  $Z_{12} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \eta_1 & \eta'_1 \end{vmatrix}$ ,  $Z_{13} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 \end{vmatrix}$ ,  $Z_{14} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$ ,  $Z_{23} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \xi_2 & \xi'_2 \end{vmatrix}$ ,  $Z_{24} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta'_1 \\ \eta_2 & \eta'_2 \end{vmatrix}$ ,

(1) Comparer DICKSON, *Linear groups*, 189. Ce théorème coïncide au fond avec cet autre théorème connu que les coordonnées homogènes des droites de l'espace  $S_3$  à trois dimensions peuvent être regardées comme les coordonnées homogènes des points d'une quadrique  $q_4$  dans l'espace à cinq dimensions [voir BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, 1907), p. 32-39, 135-140]. En effet, l'action de  $\mathcal{G}$  sur les points de  $S_5$  est un groupe conservant  $q_4$  et un plan correspondant à l'invariant de  $\mathcal{G}$  dans  $S_5$ , donc aussi leur intersection, qui est une quadrique  $q_3$  à cinq variables homogènes. Donc, d'après son ordre,  $\mathcal{G}$  est isomorphe à  $\mathfrak{B}(5, \pi) \equiv B(5, \pi)$ . Avec les notations du texte,  $q_3$ , intersection de  $\sum_1^3 x_i y_i = 0$  et de  $y = 0$ , a pour équation  $\sum_1^3 x_i y_i + x^2 = 0$ .

$Z_{3,4} = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_2' \\ \eta_2 & \eta_2' \end{vmatrix}$ . Les générateurs  $\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \eta_1 & -\xi_1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & -\xi_2 \end{vmatrix}$ ,  $|\xi_1, \xi_1 + \lambda\eta_1|$ ,  $|\xi_2, \xi_2 + \lambda\eta_2|$ ,  $\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_2 + \lambda\xi_1 \\ \eta_1 & \eta_1 - \lambda\eta_2 \end{vmatrix}$  de  $G$  opèrent sur  $x_1, y_1, x_2, y_2$ ,  $x = -\frac{1}{2}(x_3 + y_3)$ ,  $y = \frac{1}{2}(x_3 - y_3)$  les substitutions respectives  $t_{1,2} m_{1,\gamma} m_{2,-\gamma} T_{1,2} = S_{1,2,-\gamma}$ ,  $T_{1,2} m_{2,-1} = R_{1,2,1}$ ,  $U_{1,2,-\lambda\gamma}$ ,  $V_{2,1,-\lambda}$ ,  $V_{0,1,\lambda\gamma^{-1}}$ . Or  $S_{1,2,-\gamma} R_{1,2,1} = t_{1,2} m_{1,\gamma} m_{2,\gamma}$  transforme  $U_{1,2,\lambda}$  en  $W_{1,2,\lambda\gamma^{-2}}$ ,  $V_{2,1,\lambda}$  en  $V_{1,2,-\lambda}$ , et  $V_{0,1,\lambda}$  en  $U_{0,1,\lambda\gamma}$  (pour  $n$  impair,  $V_{1,0,\lambda} = W_{0,1,\lambda} = 1$ ). Donc, pour  $\lambda = c$ , le second combiné (S., 75)  $G_2(4, \pi)$  de  $G(4, \pi)$  est isomorphe à  $B(5, \pi)$  (43) qui a le même ordre. Or  $G_2 \cong G|D \cong \mathcal{G}(4)$ . Pour  $\gamma = c = 1$  (cf. 24),  $G_2$  conserve  $\Sigma_1^3 x_i y_i$  (S., 76), et de même  $B$ , puisque  $B$ , laissant  $y$  inaltéré, conserve  $a - y^2 = \Sigma_1^3 x_i y_i$ .

44. Si  $p > 2$ , et  $n = 2\nu + 1 > 5$ ,  $B(n, \pi)$  et  $\mathcal{G}(2\nu, \pi)$ , qui ont le même ordre, ne sont pas isomorphes, car les normalisants de leurs  $\mathfrak{g}_{\pi^2}$  sylowiens n'ont pas le même ordre (23, 42).

45 (2). Pour  $p \geq 2$ ,  $R_0(6, \pi)$  est isomorphe au second combiné (S., 75)  $U_2(4, \pi)$  de  $U(4, \pi)$ . En effet,  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$  étant les variables de  $R_0$ , désignons par  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$  les variables de  $U$ , et identifions, comme au n° 45 (en faisant  $\gamma = 1$ ),  $-x_3, x_2, -x_1, y_1, y_2, y_3$  respectivement avec  $Z_{1,2}, Z_{1,3}, Z_{1,4}, Z_{2,3}, Z_{2,4}, Z_{3,4}$ . Les générateurs  $|\eta_1, \eta_1 + \lambda\eta_2|$ ,  $|\eta_2, \eta_2 + \lambda\eta_1|$ ,  $|\xi_2, \xi_2 - \lambda\eta_1|$ ,  $|\eta_1, \eta_1 - \lambda\xi_2|$  de  $U$  opèrent sur les  $x_i, y_i$  les substitutions respectives  $V_{3,1,\lambda}$ ,  $V_{1,3,\lambda}$ ,  $V_{2,3,\lambda}$ ,  $V_{3,2,\lambda}$ , que  $t_{1,2} m_{1,\gamma} m_{2,\gamma}$  (cf. 43) ou, ce qui revient au même,  $t_{1,2}$  transforme

(1) Voici, d'après les nos 6, 19, 28, un Tableau un peu plus complet de la correspondance définie au texte entre les éléments de  $B(5, \pi)$ ,  $\mathcal{G}(4, \pi)$ , pour  $\gamma = c$ :

$\mathcal{G}(4, \pi)$	$\tau_1 = u_{11} v_{1,-1} u_{11}$	$\tau_2 = u_{21} v_{2,-1} u_{21}$	$u_{1\lambda}$	$u_{2\lambda}$	$V_{2,1,\lambda}$	$V_{1,2,\lambda}$	$U_{1,2,\lambda}$
$B(5, \pi)$	$S_{2,1,c} = T_{1,2} t_{1,2} m_{1,-c} m_{2,c}$	$R_{1,2,1} = T_{1,2} m_{2,-1}$	$U_{1,2,-\lambda c}$	$V_{2,1,-\lambda}$	$V_{0,1,\frac{\lambda}{c}}$	$U_{1,0,\lambda}$	$U_{2,0,\lambda}$
$\mathcal{G}(4, \pi)$	$W_{1,2,\lambda}$	$v_{1,\lambda}$	$v_{2,\lambda}$	$m_{11}$	$m_{21}$	$\tau_1 \tau_2$	$\tau_1 \tau_2 m_{1,\frac{1}{c}} m_{2,\frac{1}{2}}$
$B(5, \pi)$	$V_{0,2,\frac{\lambda}{c}}$	$W_{3,1,\frac{\lambda}{c}}$	$V_{1,2,-\lambda}$	$m_{11} m_{21}$	$m_{11}^{-1} m_{21}$	$t_{1,2} m_{1,c} m_{2,c}$	$t_{1,2} m_{1,\frac{c}{3}} m_{2,\frac{c}{12}}$

(2) Comparer, aux nos 45, 46, DICKSON, *Linear groups*, 187-188, 206-207.

respectivement en  $U_{31\lambda}, W_{13\lambda}, W_{23\lambda}, U_{32\lambda}$ . Donc, d'après les résultats déjà obtenus au n° 45,  $R_0 \equiv U_2$ .

La structure de  $R_0(6, \pi)$  est alors déterminée par la relation  $\mathfrak{V}(4, \pi) \equiv U_2 | D_2 \equiv U | D_1, D_1$  et  $D_2$  étant des groupes cycliques de similitudes (divisant respectivement  $U$  et  $U_2$ ) des ordres suivants :

$$\text{Si } \pi \equiv 1 \pmod{4}, (D_1, 1) = 4, (D_2, 1) = 2;$$

$$\text{Si } \pi \equiv 3 \pmod{4}, (D_1, 1) = 2, D_2 = 1;$$

$$\text{Si } p = 2, D_1 = D_2 = 1.$$

De là résulte (39) que  $\mathfrak{R}_0(6, \pi) \equiv \mathfrak{V}(4, \pi)$  (1).

Ainsi  $R_0(6, 2) \equiv L(4, 2)$  est isomorphe au  $g^8$  alterné (cf. S., 70, 79). Pour établir une correspondance des générateurs, désignons par  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q$  les points respectifs 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111 du champ de  $L(4, 2)$ , et soit  $\mathfrak{A}_8$  le  $g^8$  alterné de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (2). Si l'on fait correspondre  $c = 132$ ,  $s_1 = 12.34$ ,  $s_2 = 12.45$ ,  $s_3 = 12.56$ ,  $s_4 = 12.67$ ,  $s_5 = 12.78$  de  $\mathfrak{A}_8$  aux substitutions respectives

$$c' = bol.cmg.dqn.epi.fkh, \quad s'_1 = be.cn.dp.gi.lq.mo,$$

$$s'_2 = bl.cb.dq.ep.gf.km, \quad s'_3 = cn.dg.fk.ip.lo.mq,$$

$$s'_4 = bl.cg.dp.eq.fh.in, \quad s'_5 = be.dq.fk.gm.io.lp$$

de  $L(4, 2)$ , on a une correspondance isomorphe de  $\mathfrak{A}_8$  à  $L$ . Posons maintenant

$$\begin{aligned} x &= 1243567 = s_4 s_3 s_1 s_2 \cdot s_1 c s_1, & x_1 &= 1234567 = s_4 s_3 s_2 s_1 \cdot c^2 \quad (3), \\ y &= 23.56 = c s_3 c^2, & z &= 18.23 = (x_1 s_1 s_2)^{-1} \cdot s_5 \cdot x s_1 s_2, & \tau &= 145.267 = y x^2, \\ \xi &= 14.35 = x y x^{-1}, & \eta &= 13.45 = \tau^{-1} \xi \tau, & \zeta &= 27.68 = x^2 z x^{-2}, & \theta &= 26.78 = \tau^{-1} \zeta \tau, \\ \mu &= 1852.3647 = z x^4, & \gamma &= 12345 = s_2 s_1 c^2, & \delta &= 14.56 = s_1 c s_1 \cdot s_3 \cdot (s_1 c s_1)^{-1}. \end{aligned}$$

(1) Cet isomorphisme résulte d'ailleurs immédiatement du théorème cité dans la première note du n° 43. Car, en regardant les coordonnées comme homogènes, les points  $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$  sont tous sur une quadrique conservée par  $\mathfrak{V}_2(4, \pi) \equiv \mathfrak{V}(4, \pi)$ , qui est donc isomorphe à  $\mathfrak{R}_0(6, \pi)$ , d'après son ordre.

(2) Ces notations et celles qui vont suivre sont celles déjà employées (S., 70).

(3) La substitution correspondante de  $L$  est  $x'_1 = bcoikph.dmfngul.g$ . Celle qui se trouve indiquée à l'endroit cité (S., 70, p. 92) est fautive et correspond à  $s_4 s_3 s_2 s_1 \cdot c$ .

En écrivant sur une même ligne les substitutions qui se correspondent dans les isomorphismes indiquées de  $R_0(6, 2)$ ,  $L(4, 2)$ ,  $\mathcal{A}_8$ , on a le Tableau suivant :

$R_0(6, 2)$	$L(4, 2)$	$\mathcal{A}_8$
$V_{21}$	$ \xi_2, \xi_2 + \eta_2  = el.ho.kp.nq.b.c.d.f.g.i.m$	$17.24.38.56 = \delta . \eta \theta \tau^{-1} \mu^3 \tau . \delta$
$U_{12}$	$ \xi_1, \xi_1 + \eta_1  = cf.im.kn.pq.b.d.e.g.h.l.o$	$12.38.47.56 = \eta \theta \tau^{-1} \mu^3 \tau$
$V_{13}$	$ \eta_2, \eta_2 + \eta_1  = ck.fn.ip.mq.b.d.e.g.h.l.o$	$15.26.34.78 = \xi \eta \theta$
$V_{31}$	$ \eta_1, \eta_1 + \eta_2  = ek.hn.lp.oq.b.c.d.f.g.i.m$	$15.32.48.67 = x_1^{-1} . \eta \theta \tau^{-1} \mu^3 \tau . x_1$
$V_{23}$	$ \xi_2, \xi_2 + \eta_1  = ci.fm.kp.nq.b.d.e.g.h.l.o$	$14.27.35.68 = \xi \zeta$
$V_{32}$	$ \eta_1, \eta_1 + \xi_2  = di.gm.lp.oq.b.c.e.f.h.k.n$	$18.27.36.45 = \gamma^{-3} . \eta \theta \tau^{-1} \mu^3 \tau . \gamma^3$
$t_{12} T_{12}$	$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \eta_1 & \xi_1 \end{vmatrix} = bc.gi.hk.op.d.e.f.l.m.n.q$	$17.25.38.46 = \xi \zeta \tau \mu \tau^{-1}$
$T_1$	$\begin{vmatrix} \xi_2 & \eta_2 \\ \eta_2 & \xi_2 \end{vmatrix} = de.gh.ik.mn.b.c.f.l.o.p.q$	$12.38.46.57 = x^3 \xi \theta x^{-3}$

Pour trouver inversement les substitutions de  $R_0(6, 2)$  qui correspondent aux générateurs  $c, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  de  $\mathcal{A}_8$ , on remarquera que les substitutions de  $\mathcal{A}_8$  répondant aux substitutions  $t_{12} T_{12} . T_{12} = t_{12}$ ,  $t_{12} V_{12} W_{12} = a$ ,  $U_{23} a U_{23} = b$ ,  $V_{32} a V_{32} = c$ ,  $W_{23} a W_{23} = d$ ,  $T_{12} V_{23} a V_{23} T_{12} = e$ ,  $V_{32} V_{13} a V_{13} V_{32} = f$ ,  $e b e^{-1} = g$ ,  $g^{-1} a g = h$ ,  $h t_{12} h^{-1} = i$  de  $R_0(6, 2)$  sont respectivement 15.27, 145, 184, 485, 354, 286, 468, 124, 215, 12.57. Aux substitutions  $c i c^{-1} = k$ ,  $f k f^{-1} = l$ ,  $l i l = m$ ,  $f m f^{-1} = n$ ,  $d^{-1} n d = o$ ,  $o^{-1} g o$  de  $R_0(6, 2)$  répondent donc respectivement  $s_5, s_4, s_3, s_2, s_1, c$  de  $\mathcal{A}_8$ .

La substitution  $t_1$  de  $Q_0(6, 2)$  est permutable à  $a, b, c, d, t_{12}$ . Or, la seule substitution du  $g^8$  symétrique  $s_8$  de champ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 qui soit permutable aux substitutions correspondantes de  $\mathcal{A}_8$  est 27. D'ailleurs 27 et  $t_1$  transforment de la même manière les générateurs correspondants de  $\mathcal{A}_8$  et de  $R_0(6, 2)$ . On a donc une correspondance isomorphique de  $Q_0(6, 2)$  et  $s_8^{(1)}$ .

Mais  $s_8$  n'a aucune représentation en  $g^{15}$  où  $\mathcal{A}_8$  soit représenté par  $L(4, 2)$ . Car,  $t_1$  étant permutable à  $V_{23}, V_{32}, U_{23}, W_{23}, a$ , il devrait y avoir dans le champ de  $L(4, 2)$  une  $s_2$  permutable aux sub-

(1) L'isomorphisme de  $Q_0(6, 2)$  à  $s_8$  résulte d'ailleurs, d'après ce qui précède, de la théorie générale des automorphismes.



stitutions correspondantes: or, en essayant de la former, on arrive de suite à une impossibilité (1).

**46.** Pour  $p \geq 2$ ,  $R_2(6, \pi)$  est isomorphe au second combiné (S., 75)  $H_2^0(4, \pi)$  de  $H^0(4, \pi)$ . En effet, désignons par  $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$  les variables de  $H^0$ , et faisons les mêmes identifications qu'au n° 43, les  $x_i, y_i$  étant ici les variables de  $\bar{R}_2(6, \pi)$  [ $H_2^0$  a donc, comme  $\bar{R}_2$ , l'invariant  $\Sigma_1^3 x_i y_i$  (S., 75)]. Comme  $H^0$  contient  $G(4, \pi)$ ,  $H_2^0$  contient toutes les  $V_{12\lambda}, V_{21\lambda}, U_{12\lambda}, W_{12\lambda}$  (43), donc aussi, d'après (29),  $t_{12}$ . De plus l'action du générateur  $\begin{vmatrix} \xi_1 \xi_1 - \beta \xi_2 \\ \eta_2 \eta_2 + \rho \eta_1 \end{vmatrix}$  de  $H^0$  sur les  $x_i, y_i$  est  $V_{13\rho} U_{13\rho}$ , dont la transformée par  $t_{12}$  est  $V_{31\rho} W_{31\rho}$ . Donc  $H_2^0$  contient toutes les  $V_{01\lambda}, V_{10\lambda}, U_{01\lambda}, W_{01\lambda}$  (51).

La structure de  $R_2(6, \pi)$  est alors déterminée (2, 15; S., 75) par la relation  $\mathcal{R}^0(4, \pi) \equiv H^0 | D^0 \equiv H_2^0 | D_2^0$ ,  $D^0$  et  $D_2^0$  étant des groupes cycliques de similitudes (divisant respectivement  $H^0$  et  $H_2^0$ ) des ordres suivants :

Si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $(D^0, 1) = 2$ ,  $(D_2^0, 1) = 1$ ;

Si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $(D^0, 1) = 4$ ,  $(D_2^0, 1) = 2$ ;

Si  $p = 2$ ,  $(D^0, 1) = (D_2^0, 1) = 3$ .

De là résulte que  $\mathcal{R}_2(6, \pi) \equiv \mathcal{R}^0(4, \pi)$ .

Comme  $R_2(6, 2)$  est isomorphe à  $\mathcal{R}_0(5, 3)$  (2), donc à  $\mathcal{G}(4, 3)$  (45), on voit que  $\mathcal{G}(4, 3) \equiv \mathcal{R}^0(4, 2)$ .

**47.** Supposons  $n \geq 5$ , et soit  $\Gamma$  un diviseur normal de  $B$ ,  $A^0 A$  ou  $A'$  non  $\leq I$ .

Tout d'abord  $\Gamma$  contient des  $\alpha$  qui ne sont pas des multiplications, car les conditions que  $\alpha, V_{ik\lambda}^{-1} \alpha V_{ik\lambda}, U_{ik\lambda}^{-1} \alpha U_{ik\lambda}$  ( $i, k \geq 0$ ),  $t_{12} \alpha t_{12}$  [ $t_{12}$  est dans  $B$  d'après (29)] soient des multiplications donnent

(1) D'ailleurs le diviseur fixant un symbole de  $L(4, 2)$  est isomorphe à un  $\mathcal{G}_{1344}^8$  deux fois transitif (S., 70, 78, 103). Au diviseur fixant un symbole de la représentation en question correspondrait donc un  $\mathcal{G}_{2688}^8$  deux fois transitif. Or un tel groupe n'existe pas (S., 165).

(2) Voir DICKSON, *Linear groups*, 270-276; DE SÉGUIER, *Comptes rendus*, t. 161, 8 novembre 1915, p. 553.

(cf. 15)  $\alpha_{ii} = \alpha_{kk}$ ,  $\beta'_{ii} = \beta'_{kk}$ ,  $\alpha_{ii} = \beta'_{kk}$  ( $i, k \geq 0$ ),  $\alpha_{i1} = \alpha_{jj}$  ( $i \neq 1, 2$ ), et, d'après (4),  $\alpha_{ii}\beta'_{ii} = 1$ , donc  $\alpha = 1$  ou  $d$ .

Soit donc  $\alpha$  une substitution de  $\Gamma$  autre qu'une multiplication. On peut y supposer non nul un coefficient de second indice  $\neq 0$ , non situé dans la diagonale. Sans cela, en effet, les équations (4)-(6) (pour  $j$  ou  $k$  nul) montrent que les  $\alpha_{i0}$ ,  $\alpha'_{i0}$ ,  $\beta_{i0}$ ,  $\beta'_{i0}$  où  $i \neq 0$  sont tous nuls. Et si, pour  $\delta \neq 0$ ,  $\alpha'_{00}$  ou  $\beta_{00}$  était  $\neq 0$ ,  $V_{0k\lambda}^{-1}\alpha V_{0k\lambda}$  ou  $V_{k0\lambda}^{-1}\alpha V_{k0\lambda}$  a, dans l'une des deux dernières lignes et hors des deux dernières colonnes, un coefficient  $\neq 0$ .

En transformant maintenant  $\alpha$  par une  $m'_{i,-1}T'_{ik}t'_{i2}$  [ $r, s = 0$  ou  $1$ ; une substitution de cette forme est toujours dans B (59)], on voit qu'on peut supposer non nul un des  $\alpha_{j1}$ ,  $\beta_{j1}$  autre que  $\alpha_{11}$ . Si alors  $\psi = cx^2$ , l'équation (7) montre qu'un des  $\alpha_{j1}$ ,  $\beta_{j1}$  autres que  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{01}$  est  $\neq 0$ . Si  $\delta \neq 0$ , et si tous les  $\alpha_{j1}$ ,  $\beta_{j1}$  où  $j > 1$  sont nuls,  $\beta_{k1}$  ( $k > 1$ ) est remplacé dans  $V_{0k\lambda}^{-1}\alpha V_{0k\lambda}$  par  $-\lambda(b\beta_{01} + 2c\alpha_{01})$ , et dans  $W_{0k\lambda}^{-1}\alpha W_{0k\lambda}$  par  $-\lambda(b\alpha_{01} + 2c'\beta_{01})$ , et ces deux quantités ne peuvent pas être nulles à la fois. On peut donc supposer, quelle que soit  $\psi$ , qu'un des  $\alpha_{j1}$ ,  $\beta_{j1}$  autres que  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{01}$ ,  $\beta_{01}$  est  $\neq 0$ . En transformant au besoin par une  $m'_{2,-1}T'_{2j}t'_{23}$  ou une  $m'_{2,-1}T'_{2j}t'_{02}m_{2\lambda}$  [ $r, s = 0$  ou  $1$ , et  $\lambda$  étant choisi de manière que cette substitution soit dans B (59)], on peut supposer  $\beta_{21} \neq 0$ . On rendra ensuite  $\beta_{11} \neq 0$ , en exceptant d'abord les cas où  $A = Q(5, \pi)$  ou  $Q_2(6, \pi)$ , par les trois opérations suivantes (cf. 15) : 1° une transformation par  $V_{13\lambda}$  qui, sans altérer  $\beta_{21}$ , rend  $\beta_{23} \neq 0$  (elle remplace  $\beta_{23}$  par  $\beta_{23} - \lambda\beta_{21}$ ); 2° une transformation par  $U_{13\lambda}$  qui, sans altérer  $\beta_{21}$ , rend  $\beta'_{21} \neq 0$  (elle remplace  $\beta'_{21}$  par  $\beta'_{21} + \lambda\beta_{23}$ ); 3° la substitution à  $\alpha$  de  $\alpha^{-1}V_{21\lambda}^{-1}\alpha V_{21\lambda}$  où  $\beta_{11}$  est remplacé par  $\beta_{11} + \lambda^2(\beta_{11}\beta'_{11} - \beta_{12}\beta'_{21})$ . Si  $A = Q(5, \pi)$  ou  $Q_2(6, \pi)$ , on rend  $\beta_{11} \neq 0$  en substituant aux deux premières opérations une seule transformation par  $U_{10\lambda}$  qui rend  $\beta'_{21} \neq 0$  (elle remplace  $\beta'_{21}$  par  $\beta'_{21} + \lambda\beta_{23} - c\lambda^2\beta_{21}$ ).

En transformant maintenant par des  $V_{1j}$ ,  $U_{1j}$  on annulera tous les  $\beta_{j1}$ ,  $\alpha_{j1}$  où  $j \neq 1$  (sans altérer  $\beta_{11}$ ). Alors, d'après (7),  $\alpha_{11} = 0$ . D'après (4) et (5)  $\alpha'_{11}\beta_{11} = 1$ , et tous les  $\alpha_{1j}$ ,  $\alpha'_{1j}$  où  $j \neq 1$  sont nuls. Or,  $|\alpha|$  étant  $\neq 0$ , un des déterminants à quatre éléments des colonnes de  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha'_{12}$  est  $\neq 0$ . Donc un des  $\alpha'_{j2}$ ,  $\beta'_{j2}$  où  $j \neq 1$  est  $\neq 0$ . Comme tout à l'heure on peut y supposer  $j \neq 0$ . En transformant par une  $V_{i1}$  ou une  $W_{i1}$  on rendra  $\beta'_{j2} \neq 0$ . En transformant alors par

des  $V_{i,j}$ ,  $U_{i,j}$  on annulera tous les  $\beta'_{j,2}$  où  $j \neq 1$  et tous les  $\alpha'_{j,2}$  où  $j \neq 1, 2$  ( $|\alpha|$  étant  $\neq 0$ ,  $\alpha'_{2,2}$  sera  $\neq 0$ , d'après ce qu'on vient de voir). On a donc, avec les notations du n° 26,  $Y'_1 = \beta_{1,1}x_1$ ,  $X'_2 = \beta'_{1,2}x_1 + \alpha'_{2,2}y_2$ , et par suite (cf. 13)

$$\alpha^{-1} V_{12\lambda}^{-1} \alpha V_{12\lambda} = V_{21,\lambda\beta_{11}\alpha'_{22}} V_{12\lambda}.$$

Cette substitution étant dans  $V_{1,2}$  (40) hors de  $D_{1,2}$ ,  $\Gamma$  contient  $V_{1,2}$ .

Prenons maintenant  $t_{2,3} \alpha t_{2,3}$ , ou  $m_{2,\lambda}^{-1} t_{2,0} \alpha t_{2,0} m_{2,\lambda}$  si  $\Lambda = Q(5, \pi)$  ou  $Q_2(6, \pi)$  [ $\lambda$  étant tel que  $t_{2,0} m_{2,\lambda}$  soit dans  $B$  (59)] pour  $\alpha$ . Alors les  $\alpha_{j,1}$ ,  $\beta_{j,1}$  autres que  $\beta_{1,1}$  sont nuls; de même les  $\alpha_{j,2}$ ,  $\beta_{j,2}$  où  $j \neq 1$ , sauf  $\beta_{2,2}$ ; de même les  $\alpha_{i,j}$ ,  $\alpha'_{i,j}$  autres que  $\alpha'_{1,1}$ . Mais  $\beta_{1,1}$ ,  $\beta_{2,2}$ ,  $\alpha'_{1,1}$  sont  $\neq 0$ . Donc  $Y'_1 = \beta_{1,1}x_1$ ,  $Y'_2 = \beta_{1,2}x_1 + \beta_{2,2}x_2$ , et l'on a

$$\alpha^{-1} U_{12\lambda}^{-1} \alpha U_{12\lambda} = W_{21,\lambda\beta_{11}\beta_{22}} U_{12\lambda}.$$

Cette substitution étant dans  $W_{1,2}$  hors de  $D_{1,3}$ ,  $\Gamma$  contient  $W_{1,2}$ .

Donc  $\Gamma$  contient  $B_{1,2}$  (40) et de même chaque  $B_{ik}$  où  $i, k$  sont  $\neq 0$ . D'ailleurs, si  $\psi \neq 0$ , d'après (25), ou d'après les théorèmes des nos 45-46 (cf. 13, 21), le p. g. c. d. de  $\Gamma$ ,  $\{B_{ik}, B_{i_0}\}$ , normal dans  $\{B_{ik}, B_{i_0}\}$  et contenant  $B_{ik}$ , contient  $B_{i_0}$  et coïncide avec  $\{B_{ik}, B_{i_0}\}$ . Donc, quelle que soit  $\psi$ ,  $\Gamma$  est  $\geq B$ .

Donc, pour  $n \geq 5$ , tout diviseur normal de  $B$ ,  $A^0$ ,  $A$  ou  $A'$  non  $\leq I$  est  $\geq B^{(1)}$ , et  $\mathfrak{B} = BD$  est simple (le cas  $n \leq 4$  a été traité au n° 40).

48. Considérons, pour  $p > 2$ , les trois groupes  $A^0 = \{B, m_{1N}\}$ ,  $B^1(n, \pi) = \{B, t_1\}$ ,  $B^2(n, \pi) = \{B, t_1 m_{1N}\}^{(2)}$ , en convenant de rem-

(1) On retrouve ainsi, pour  $n \geq 5$ , que  $D$  est le central de  $\Lambda$  (cf. 39).

(2) Désignons généralement par  $(Z)$  l'action d'une partie  $Z$  de  $A$  sur les  $s$  points de  $a = 1$  (cf. 39). ( $B$  étant pair et  $(m_{1N})$  impaire (39),  $(B^1)$  a la parité de  $(t_1)$  et  $(B^2)$  la parité opposée. Or  $(t_1)$  fixe les points de  $a = 1$  où  $x_1 = y_1$ , c'est-à-dire les  $s'$  points de  $\sum_2^s x_i y_i + \psi = 1 - x_1^2$  (on calcule  $s'$  en faisant la somme des nombres de solutions répondant à chaque valeur de  $x_1$ ; cf. E., 44, 45). Donc  $(t_1)$  a la parité de  $\frac{1}{2}(s - s')$ . Or, en désignant toujours par  $\theta_\xi$  le caractère quadratique de  $\xi$  ( $\theta_0 = 1$ ), si  $n$  est impair ( $\psi = cx^2$ ,  $p > 2$ ),  $s = \pi^{2\nu} + \theta_c \pi^\nu$ ,  $s' = \pi^{2\nu-1} - \theta_{-c} \pi^{\nu-1}$ ; si  $n$  est pair,  $s = \pi^{2\nu-1} - \theta \pi^{\nu-1}$  ( $\theta = 1$  si  $\psi$  est réductible ou nulle;  $\theta = -1$  si  $\psi$  est irréductible;  $p \geq 2$ ), et  $s' = \pi^{2\nu-2} + \theta \pi^{\nu-1}$  si  $p > 2$ ,  $s' = \pi^{2\nu-2}$  si  $p = 2$ . Pour  $n$  impair, on peut se servir de la parité de  $(d)$  au lieu de celle de  $(t_1)$ , d'après les indications qui suivent dans le texte.

placer  $B^i$  par  $\bar{B}^i, R^i, \bar{R}^i, R'_k$  ou  $\bar{R}'_k$  quand B sera remplacé par  $\bar{B}, R, \bar{R}, R_k$  ou  $\bar{R}_k$ .

Si  $n$  est impair,  $d$  est hors de  $A^0$ , et  $A = A^0 D$  (59). Donc un des  $B^i$  coïncide avec  $BD$ , et l'autre  $\{B, dm_{1N}\}$  est premier à  $D$  et isomorphe à  $A^0$  ( $dm_{1N}$  a le même ordre que  $m_{1N}$  et transforme les substitutions de B de la même manière que  $m_{1N}$ ). Or  $t_0, m_{1, \dots, c} = \tau$  est dans B (52). Donc, en supposant  $c$  carré, si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $d = \tau t_1 m_{1c} \Pi_2^2 m_{i-1}$  est dans  $B^1$ ; si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $d$  est dans  $B^2$  pour  $\nu$  pair, dans  $B^1$  pour  $\nu$  impair (si  $c$  est non carré, il suffit d'échanger dans cet énoncé  $B^1$  et  $B^2$ ).

Si  $n$  est pair, D divise  $A^0$  (59). Comme la substitution  $\gamma$  du n° 24 transforme  $t_1$  en  $t_1 m_{1\psi}, \{m_{1\psi}\}$  étant le groupe des  $m_1$  (même pour  $n = 2$  et  $\psi \neq 0$ ), on voit d'abord que  $B^1 \equiv B^2$ . Mais  $A^0$  n'est pas isomorphe à  $B^1$ . Cela est clair si  $n = 2$ . Soit donc  $n > 2$ . Si D est premier à B,  $d$  est dans  $Bm_{1N}$ , donc hors de  $Bt_1$ , et de  $Bt_1 m_{1N}$ , donc hors de  $B^1$  et de  $B^2$ , et comme D est le central de A,  $A^0$  est  $\not\equiv B^1$ . Si D est  $< B$ , les normalisants de P dans  $A^0$  et dans celui des deux groupes  $B^1, B^2$  qui contient  $t_\nu$  ( $t_\nu$  est dans  $Bt_1$  ou dans  $Bt_1 m_{1N}$ ) sont respectivement  $M^0 P$  et  $\{M_B P, t_\nu\}$  (42). Or, s'ils étaient isomorphes,  $M^0 P | P$  le serait à  $\{M_B P, t_\nu\} | P$ , donc  $M^0$ , qui est abélien, à  $\{M_B, t_\nu\}$  qui ne l'est pas.

Soit par exemple  $n = 4, \psi$  étant irréductible. Alors  $d$  est hors de B (59), et  $A^0 = BD$ . Soient  $\lambda$  et  $\rho$  des éléments de  $\mathfrak{E}'$  d'ordres respectifs  $\pi - 1$  et  $\pi + 1$ . Comme  $m_{2\rho}$  est dans  $Bm_{1\lambda}$  (40),  $m_{1\lambda} m_{2\rho} = m$  est dans B. En posant d'ailleurs  $\alpha x = \lambda, \alpha x^{-1} = \rho$  (ce qui est toujours permis) et (cf. 40)  $r = m_{1\alpha} m_{22}, s_r = m_{1\alpha} m_{2\alpha}^{-1}$ , puis  $1 + \rho\sigma = \alpha, \alpha\rho' = -\rho, \sigma' = -\sigma\alpha$ , on a  $rs_r = m$  et

$$r = W_{12\sigma'} U_{12\rho'} W_{21\sigma} U_{12\rho}, \quad s_r = V_{12\sigma'} V_{12\rho'} V_{21\sigma} V_{12\rho}$$

[la forme réelle de  $m$  est fournie par (30), (31), (23)]. Ici P dérive des  $V_{10}, U_{10}; M_B = \{m\}$ , et  $t_2 m t_2 = m^\pi$  (1).

(1) On sait (cf. S., 92) que, pour  $p > 2$ , il y a exactement trois groupes abstraits distincts d'ordre  $\pi^2(\pi^2 - 1)$ , non produits directs, ayant un diviseur normal isomorphe à  $\mathcal{O}(2, \pi^2)$ . Ces trois groupes sont isomorphes à  $\mathcal{L}(2, \pi^2), \mathcal{L}'(2, \pi^2) = \{\mathcal{O}, z^\pi\}, \mathcal{L}''(2, \pi^2) = \{\mathcal{O}, v'z^\pi\}$ ,  $z$  étant la variable de  $\mathcal{O}$ . Soient

V. — Sur le groupe linéaire général.

On peut étudier de la même manière que précédemment le groupe sylowien d'ordre  $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}$  de  $U(n, \pi)$  ou  $L(n, \pi)$ . Soient  $x_1, \dots, x_n$  les variables, et posons  $\varepsilon_{i\lambda} = |x_i, \lambda x_i|$ ,  $u_{ik\lambda} = |x_i, x_i + \lambda x_k|$  ( $i \neq k$ ), les variables non écrites étant inaltérées (il sera souvent commode de supprimer le dernier indice de  $u_{ik\lambda}$ ). On sait que  $U$  dérive des  $u_{ik}$ , et  $L = \sum_{k=0}^{\pi-2} U \varepsilon_{i\lambda}^k$ . Les  $u_{ik}$  vérifient les relations

$$u_{h\lambda} u_{k\mu} = u_{k\mu} u_{h\lambda} \quad (i \neq k, h \neq l; k \text{ peut être égal à } h, \text{ et } l \text{ à } i),$$

$$u_{i\mu}^{-1} u_{h\lambda} u_{l\mu} = u_{h\lambda} u_{hl, -i\mu} \quad (h \neq l).$$

Soient  $P_i$  le  $\mathfrak{g}_{\pi^{n-i+1}}$  abélien principal, p. p. c. m. des  $u_{i,i+1}, \dots, u_{in}$  ( $P_0 = P$ ). D'après les formules précédentes  $P_i$  est permutable à toute substitution de  $P_{i+k}$ . Donc  $\mathbf{P} = P P_1 \dots P_{n-1}$  est un  $\mathfrak{g}_{\pi^{\frac{n(n-1)}{2}}}$  sylowien de  $U$ .

Désignons par  $\{u_{ik}\}$  le  $\mathfrak{g}_{\pi}$  abélien principal, p. p. c. m. des  $u_{ik}$ , et considérons le Tableau triangulaire

$$\begin{array}{ccccccc} \{u_{1n}\} & \{u_{1,n-1}\} & \dots & \{u_{13}\} & \{u_{12}\} & & \\ \{u_{2n}\} & \{u_{2,n-1}\} & \dots & \{u_{23}\} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ \{u_{n-1,n}\} & & & & & & \end{array}$$

Appelons  $s^{i\text{ème}}$  transversale la rangée d'éléments (parallèle à l'hypoténuse) formée des  $\{u_{ik}\}$  où  $k - i = n - s$ . Le  $s^{i\text{ème}}$  central de  $\mathbf{P}$  est le p. p. c. m. des  $\{u_{ik}\}$  figurant dans les  $s$  premières transversales. En effet, admettons-le pour  $C_0 = 1, C_1, \dots, C_s$ , et soit  $\xi$  un élément de  $C_{s+1}$  où entre le générateur  $u_{hi}$ . Pour que  $\xi$  soit permutable à  $u_{il}$  mod  $C_s$ , il faut que  $i - h$  soit  $\leq n - s - 1$ , et  $l - h \geq s$  quel que soit  $l \geq i + 1$ . Il

$\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{C}''$  les normalisants respectifs [tous d'ordre  $\pi^2(\pi^2 - 1)$ ] d'un  $\mathfrak{g}_{\pi^2} \mathcal{O}$  de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{L}''$ .  $\mathcal{C}|\mathcal{O} \equiv \{t^i z\}$  est cyclique,  $\mathcal{C}'|\mathcal{O} \equiv \{t^{i^2} z, z^\pi\}$  diédral, et  $\mathcal{C}''|\mathcal{O} \equiv \{t^{i^2} z, t z^\pi\}$  n'est ni cyclique ni diédral [il n'a qu'un  $e_2$  qui est  $(-z)$  et n'est pas abélien]. On a ainsi démontré à nouveau, pour  $p > 2$ , que  $B^2 \equiv \mathcal{L}'$  (cf. 40).

suffit que la condition soit vérifiée pour  $l = i + 1$ , d'où  $i - h = n - s - 1$ .

L'ordre de  $C_s$  est évidemment  $\pi^{\frac{s(s+1)}{2}}$ .

La forme générale des substitutions de  $P_\rho$  est  $|x_\rho, \Sigma \alpha_{\rho k} x_k|$ ,  $\alpha_{\rho k}$  étant nul pour  $k < \rho$  et  $\alpha_{\rho\rho}$  égal à 1. Donc, dans la matrice générale  $a = (a_{ik})$  de  $\mathbf{P}$ , les  $a_{ii}$  sont égaux à 1, et les  $a_{ik}$  où  $k < i$  sont nuls; les autres sont arbitraires.

Soit  $\alpha = (\alpha_{ik})$  une matrice permutable à  $\mathbf{P}$  et  $\alpha a = a' \alpha$ ,  $a$  étant arbitraire dans  $\mathbf{P}$  et  $a' = (a'_{ik})$  étant dans  $\mathbf{P}$ . La comparaison des termes diagonaux de  $\alpha a$ ,  $a' \alpha$  donne  $\Sigma_{\rho=i}^n \alpha_{i\rho} \alpha_{\rho i} = \Sigma_{\rho=1}^i \alpha_{i\rho} a'_{\rho i}$ , d'où, pour  $i = 1$ ,  $\Sigma_2^n \alpha_{1\rho} \alpha_{\rho 1} = 0$ , et, les  $\alpha_{1\rho}$  étant arbitraires,  $\alpha_{\rho 1} = 0$  pour  $\rho > 1$ .

Admettons que  $\alpha_{\rho 1} = 0$  pour  $\rho > 1$ , que  $\alpha_{\rho 2} = 0$  pour  $\rho > 2$ , ..., que  $\alpha_{\rho, k-1} = 0$  pour  $\rho > k - 1$ . L'équation donne, pour  $i = k$ ,  $\Sigma_{\rho=k+1}^n \alpha_{k\rho} \alpha_{\rho k} = 0$ , d'où  $\alpha_{\rho k} = 0$  pour  $\rho > k$ .

Donc, en désignant par  $\mathbf{M}$  le  $g_{(\pi-1), n}$  abélien p. p. c. m. des  $\varepsilon_{ik}$ ,  $\alpha$  est dans  $\mathbf{MP}$ . Donc  $\mathbf{MP} = \mathbf{PM}$ , d'ordre  $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}} (\pi - 1)^n$ , est le normalisant de  $\mathbf{P}$  dans  $\mathbf{L}$ . En désignant par  $\mathbf{M}^0$  le p. g. c. d. de  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{U}$ , on a évidemment  $\mathbf{M} = \Sigma_i^{\pi-2} \mathbf{M}^0 \varepsilon_{ii}^k$ , et  $\mathbf{M}^0 \mathbf{P}$ , d'ordre  $\pi^{\frac{n(n-1)}{2}} (\pi - 1)^{n-1}$  est le normalisant de  $\mathbf{P}$  dans  $\mathbf{U}$ .

NOTE.

Le cas où  $n$  est impair avec  $p = 2$ , écarté au n° 26, donne lieu aux remarques suivantes :

En définissant  $A^0$  et  $B$  comme pour  $n$  pair avec  $p = 2$ , on a ici,  $A$  étant simple,  $B = A^0 = A$ . La dernière formule du n° 32 fournit d'ailleurs l'expression de  $t_k = t_{0k}$  par les générateurs de  $A^0$ .

En désignant généralement par  $G_{k_1 \dots k_\nu}(2\nu, \pi)$  ce que devient  $G(2\nu, \pi)$  quand on remplace  $x_i$  par  $x_{k_i}$  et  $y_l$  par  $y_{k_l}$ , la formule (27) montre que  $\{B_{0k}, B_{0l}\}$  est ici isomorphe au produit direct de  $G_k(2, \pi) = U_{x_k y_k}(2, \pi)$  (20) par  $G_l(2, \pi)$ , donc isomorphe à  $B_{kl}$  (40). Le p. g. c. d.  $\Delta_{kl}$  de  $\{B_{0k}, B_{0l}\}$ ,  $B_{kl}$  est formé des substitutions  $s = s_k s_l$  ( $s_i$  étant dans  $B_{0i}$ ) qui laissent  $x$  inaltéré. Or pour que  $s$  laisse  $x$  inaltéré, il faut évidemment que  $s_k$  et  $s_l$  le laissent aussi inaltéré. D'après le n° 26,  $s_k$  est alors dans le groupe de  $x_k y_k$ , dérivé des  $m_k$  et de  $t_k$ . Donc  $\Delta_{kl}$  dérive des  $m_k$ , des  $m_l$  et de  $t_{kl}$ . Son ordre est  $2(\pi - 1)^2$ .

L'isomorphisme de  $A^0(3, \pi)$  avec  $\mathcal{L}(2, \pi)$  indiqué au n° 40 subsiste pour  $p=2$ , et j'ajouterai que, pour  $p \geq 2$ , la substitution de  $A^0(3, \pi)$  qui transforme  $z$  en  $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  est, en posant  $\alpha\delta - \beta\gamma = \Delta$  (cf. 32)

$$\left[ \begin{array}{l} x_1 \\ y_1 \\ x \end{array} \right] \Delta^{-1} \left[ \begin{array}{l} \alpha^2 x_1 - \frac{\beta^2}{c} y_1 - 2\alpha\beta x \\ -c\gamma^2 x_1 + \delta^2 y_1 + 2c\gamma\delta x \\ -\alpha\gamma x_1 + \frac{\beta\delta}{c} y_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma)x \end{array} \right] = \left\{ \begin{array}{l} U_{01}, \frac{\delta}{c\alpha} V_{01}, -\frac{\alpha\gamma}{\Delta} m_1, -\frac{\Delta}{\alpha^2} \quad \text{si } \alpha \neq 0, \\ t_0 m_1, -\frac{\Delta}{c\gamma^2} V_{01}, -\frac{\gamma\delta}{\Delta} \quad \text{si } \alpha = 0. \end{array} \right.$$

---

**ERRATA.**

Page 308, première ligne du n° 16, au lieu de  $\bar{a} = -a$ , lire  $a$  gauche.

