JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. MONTEL

Sur la représentation conforme

Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série, tome 3 (1917), p. 1-54.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1917_7_3__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la représentation conforme;

PAR P. MONTEL.

INTRODUCTION.

1. La représentation conforme d'un domaine (D), limité par un seul contour (C) et contenu dans le plan de la variable Z, sur un domaine (D′) limité par un seul contour (C′) se ramène à la représentation conforme de chacun de ces domaines sur un cercle (d) de rayon *un* limité par la circonférence (c) et contenu dans le plan des z. La représentation est complètement déterminée si l'on fait correspondre deux éléments de contact arbitrairement choisis l'un dans (D) et l'autre dans (D′), c'est-à-dire si l'on considère comme éléments homologues deux points O et O′ intérieurs à ces domaines et deux directions OT et O′T′, tangentes à des courbes passant respectivement par O et par O′. Il suffit, dans les représentations de (D) et de (D′) sur (d), de faire correspondre les points O et O′ d'une part, les tangentes OT, O′T′ de l'autre, à un même point o du cercle, le centre, par exemple, et à une même direction ot passant par ce point.

C'est Riemann qui a montré le premier la possibilité d'une telle représentation [1]. Appelons $z = \mathrm{F}(\mathrm{Z})$ une fonction faisant la représentation conforme de (D) sur (d) de manière que le point O corresponde au centre o du cercle. Posons $\mathrm{F}(\mathrm{Z}) = e^{\mathrm{U}+i\mathrm{V}}$, U et V étant des fonctions réelles des variables X, Y ($\mathrm{X} + i\mathrm{Y} = \mathrm{Z}$). La fonction U est alors la fonction de Green correspondant au domaine (D) et au point O; comme $\mathrm{U} + i\mathrm{V}$ est analytique, V est une fonction associée de U, elle est déterminée à une constante additive près; il en résulte que F(Z) est déterminé à un facteur constant près de module égal à un, $e^{i\varphi}$; les fonctions

$$z = e^{i\varphi}\,\mathrm{F}(\mathrm{Z})$$

effectuent, quel que soit φ, la représentation conforme de (D) sur (d) de façon que O et o se correspondent. Quand on fait varier φ, le point z tourne autour de o d'un angle égal à la variation de φ. On peut donc déterminer la valeur de φ de manière que deux éléments de contact en O et en o se correspondent : la transformation est alors complètement déterminée.

La démonstration précédente montre que la représentation, quand elle est possible, est complètement déterminée par la correspondance de deux éléments de contact.

Mais, comme l'a montré Poincaré, on peut affirmer, dans tous les cas, qu'il ne peut y avoir deux manières de faire la représentation conforme de (D) sur (d) avec correspondance de deux éléments de contact [2]. Il est facile de l'établir : si l'on pouvait trouver deux représentations $z = \mathrm{F}(\mathrm{Z})$, $z' = \mathrm{G}(\mathrm{Z})$, il en résulterait une relation entre z et z' fournissant une représentation conforme non identique de (d) sur lui-même, de manière qu'un élément de contact en o se corresponde à lui-même. Nous retombons ici dans le cas précédent : la représentation conforme de (d) sur lui-même est unique dans les conditions supposées et c'est évidemment $z' = z$. Donc F(Z) et G(Z) sont identiques.

2. Dans quel cas la représentation conforme d'un domaine simple-

---

(1) Riemann, *Dissertation inaugurale* (*Œuvres complètes*, p. 40).
(2) Poincaré, *Acta mathematica*, t. IV, p. 231.

ment connexe (D) sur le cercle (d) est-elle possible? La théorie de Riemann repose sur l'existence d'une fonction de Green pour le domaine (D). Or, M. Osgood a démontré l'existence de cette fonction pour tout domaine simplement connexe dont la frontière ne se réduit pas à un point unique (1). La représentation conforme d'un tel domaine sur un cercle est donc possible. M. Carathéodory, en considérant le domaine (D) comme la limite d'une suite infinie de domaines (D_n) pour lesquels la représentation est possible, a démontré la possibilité de cette représentation pour des domaines simplement connexes très généraux (2). Les fonctions $f_n(z)$ qui donnent la représentation conforme de (d) sur (D_n) sont en effet bornées : elles forment une famille normale et, en appliquant à cette famille certains théorèmes que j'ai établis précédemment (3) et en introduisant une généralisation d'un lemme classique de M. Schwarz, M. Carathéodory obtient le résultat énoncé.

Je me suis placé au même point de vue : en remarquant que les fonctions $f_n(z)$ *et leurs fonctions inverses* forment des familles normales, j'ai démontré la possibilité de la représentation conforme pour un domaine simplement connexe quelconque dont la frontière ne se réduit pas à un seul point. C'est ce que je montre dans le Chapitre I du présent travail.

3. Considérons maintenant un domaine simplement connexe (D) dont la frontière est (C). Si l'on fait une représentation conforme de l'intérieur de (D) sur l'intérieur du cercle (d) limité par la circonférence (c), la correspondance entre les points frontières est déterminée. Il reste à étudier cette correspondance. Le cas où le con-

---

(1) OSGOOD, *On the existence of Greens Function for the most general simply connected plan region* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. I, 1900, p. 310-314).

(2) CARATHÉODORY, *Untersuchungen über die Konformen Abbildungen von festen and veränderlichen Gebieten* (*Math. Annalen*, t. LXXII, 1912, p. 107-144).

(3) *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 3e série, t. XXIV, 1907); *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 20. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

tour (C) est formé par la réunion de plusieurs arcs analytiques est classique : la représentation conforme est univoque et continue même pour les points des contours, c'est-à-dire pour les domaines fermés (D) et (d). Le cas où le contour (c) forme un seul arc analytique a été traité par M. Schwarz; celui où il se compose de plusieurs arcs analytiques, par M. Picard. M. Painlevé s'est ensuite préoccupé le premier du cas où le contour n'est pas analytique : il a montré que la représentation est valable pour le domaine fermé en supposant seulement que la tangente à la courbe (C) varie d'une manière continue ([1]). M. Carathéodory a étudié le cas d'une frontière quelconque ([2]) et cette étude a été reprise à un autre point de vue par M. Lindelöf qui a apporté des précisions nouvelles ([3]). Je me propose d'apporter quelques compléments à l'étude de cette correspondance et de montrer qu'elle peut être faite en utilisant seulement les théorèmes généraux sur les fonctions analytiques et en leur adjoignant une proposition nouvelle.

Voici l'énoncé de cette proposition :

Soit $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$, une suite infinie de fonctions analytiques bornées dans leur ensemble dans l'intérieur d'un domaine connexe (Δ). Si cette suite converge uniformément sur un arc (γ) arbitrairement petit du contour limitant le domaine, elle converge aussi uniformément dans tout domaine intérieur à (Δ) et dont la frontière peut comprendre des portions de (γ).

La démonstration de ce théorème et de ses conséquences fait l'objet du Chapitre II.

Ce théorème, généralisation nouvelle d'une proposition classique de Weierstrass, permet, dans le Chapitre III, de montrer d'abord qu'à

([1]) Painlevé, *Sur la théorie de la représentation conforme* (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. CXII, 1891, p. 653).

([2]) Carathéodory, *Ueber die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis* (*Math. Annalen*, t. LXXIII, 1913, p. 305) et *Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete* (*Math. Annalen*, t. LXXIII, 1913, p. 323).

([3]) Lindelöf, *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XLVI, n° 4, 1915, p. 1).

tout point accessible Z_0 de la frontière (C) correspond un point (z_0) de (c) tel que $f(z)$ ait pour limite Z_0 lorsque z tend vers z_0 par un chemin quelconque intérieur à (d). On établit en effet que, dans le cas contraire, $f(z)$ aurait pour limite Z_0 sur un arc de (c). C'est l'extension au cas d'un point accessible quelconque, de la méthode que M. Picard a fait connaître pour un point Z_0 commun à deux arcs analytiques distincts de (C) (1). On déduit de ce qui précède l'étude du cas où tous les points du contour sont accessibles et, en particulier, que la représentation conforme sur un cercle d'un domaine limité par une courbe simple de Jordan est biunivoque et continue, même pour les points frontières.

Le même théorème permet d'examiner la nature de la correspondance entre les points frontières pour les points z_0 de (c) tels que le domaine d'indétermination de $f(z)$, lorsque z tend vers z_0 par des chemins intérieurs à (d), ne se réduise pas à un point. Soit E l'ensemble des valeurs limites obtenues : cet ensemble qui est un continu linéaire est la somme de l'ensemble E_0 des valeurs limites de $f(z)$ sur tout chemin aboutissant en z_0 sans être tangent à (c) et d'un autre ensemble F. Le continu E forme un *bout* de la frontière (C); sur ce bout, les points P_0 de E_0 sont des *points principaux*, et les points de F sont des *points accessoires*. Les premiers se distinguent des autres par la propriété suivante : *il existe une infinité de coupures du domaine* (D) *ayant pour limite le point* P_0 *et dont chacune sépare ce point d'un point fixe arbitrairement choisi à l'intérieur de* (D) (2).

Considérons une suite infinie d'arcs de courbes (l_0), (l_1), ..., (l_n), ..., intérieures à (d), aboutissant en z_0 d'un même côté d'un diamètre passant en ce point et telles que l'ordre de contact de ces courbes et du cercle (c) croisse avec n. Si E_n désigne l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur l'arc (l_n), on a les inégalités

$$E_0 \leqq E_1 \leqq E_2 \leqq \ldots \leqq E_n \leqq \ldots.$$

On peut donc dire que : *l'ensemble des valeurs limites de* $f(z)$ *sur*

---

(1) E. Picard, *Cours à la Faculté des Sciences de Paris en* 1888 et *Traité d'Analyse*, 1re édition, t. II, 1893, p. 276.

(2) *Cf.* Carathéodory, *loc. cit.*, et Lindelöf, *loc cit.*

des arcs de courbes aboutissant en z_0 *ne décroît jamais quand augmente l'ordre du contact de ces courbes et du cercle.*

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 4 juin 1917.

CHAPITRE I.

REPRÉSENTATION CONFORME DE L'INTÉRIEUR D'UN DOMAINE SIMPLEMENT CONNEXE SUR L'INTÉRIEUR D'UN CERCLE.

4. Considérons une suite infinie de domaines simplement connexes

$$(D_1),\quad (D_2),\quad (D_3),\quad \ldots,\quad (D_n),\quad \ldots;$$

ces domaines sont des ensembles ouverts de points. Les points qui appartiennent à une infinité de domaines (D_i) forment l'ensemble limite complet des ensembles (D_n); les points qui appartiennent à tous les (D_i) à partir d'un certain rang forment l'ensemble limite restreint des ensembles (D_n). Si ces deux ensembles sont identiques, on dit que les ensembles (D_n) ont un ensemble limite qui coïncide avec chacun d'eux.

Les points P qui appartiennent à un ensemble limite, complet ou restreint, sont intérieurs à une infinité de domaines (D_i); pour chacun de ces domaines (D_i), on peut tracer un cercle de centre P et de rayon r_i qui soit tout entier à l'intérieur du domaine (D_i); mais les nombres r_i ne restent pas nécessairement supérieurs à un nombre positif fixe; une infinité d'entre eux peut avoir zéro pour limite, en sorte que les points P ne sont pas uniformément intérieurs aux domaines auxquels ils appartiennent.

Supposons, par exemple, que le domaine (D_n) soit celui d'une ellipse dont les foyers soient les points $+1$ et -1 de l'axe des abscisses OX et dont le petit axe soit égal à $\frac{1}{n}$. L'ensemble limite complet ou restreint se compose du segment $(-1, +1)$ de OX, mais les rayons r_n ont pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Donnons encore un exemple dans lequel l'ensemble limite est un domaine. Dans le carré $0 \leqq X \leqq 1$, $0 \leqq Y \leqq 1$, menons les segments parallèles à OY définis de la manière suivante :

$$X = \frac{k}{p_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p_n - 1),$$
$$0 \leqq Y \leqq 1 - \frac{1}{p_n},$$

p_n étant le $n^{\text{ième}}$ nombre premier; le domaine simplement connexe (D_n) est formé par les points du carré qui n'appartiennent pas aux côtés ni aux $p_n - 1$ segments précédents. Tous les points du carré appartiennent aux D_n à partir d'un certain rang, car tous les segments sont distincts; mais, pour chacun des points du carré, le rayon r_n a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment.

Nous sommes ainsi conduits à distinguer les points qui sont *uniformément intérieurs* à une infinité d'ensembles (D_i), c'est-à-dire les points P, centres d'un cercle intérieur à une infinité de domaines (D_i). L'ensemble des points uniformément intérieurs à une infinité d'ensembles (D_i) sera appelé *l'ensemble limite complet intérieur* (D_C); l'ensemble des points uniformément intérieurs à tous les ensembles (D_n) à partir d'un certain rang sera appelé *l'ensemble limite restreint intérieur* (D_R). L'ensemble (D_C) contient l'ensemble (D_R); si ces ensembles sont identiques, ils forment *l'ensemble limite intérieur* (D).

Par exemple, si (D_n) est un cercle de centre O et de rayon $1 + \frac{1}{n}$, l'ensemble (D) est formé par l'intérieur du cercle de centre O et de rayon 1. L'ensemble limite intérieur n'est autre que l'intérieur de l'ensemble limite des (D_n). Mais, dans les exemples donnés plus haut, l'ensemble limite se compose d'un segment ou d'un carré, tandis que l'ensemble limite complet intérieur ne possède aucun point.

3. Nous allons maintenant supposer que les domaines

$$(D_1), \quad (D_2), \quad \ldots, \quad (D_n), \quad \ldots$$

soient *bornés dans leur ensemble*, c'est-à-dire soient tous contenus dans un cercle fixe de centre O et de rayon M. Soit $f_n(z)$ la fonction, supposée exister, qui fait une représentation conforme du cercle (d) du plan des z, de centre o et de rayon 1, sur le domaine (D_n); on a

$$|f_n(z)| < M.$$

Par conséquent, la famille des fonctions

$$(1) \qquad f_1(z), \; f_2(z), \; \ldots, \; f_n(z), \; \ldots,$$

holomorphes dans le cercle C, est une *famille normale :* de toute suite infinie de fonctions $f_n(z)$, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans le domaine (d) vers une fonction holomorphe qui peut être une constante. Soit donc

$$f_{\lambda_1}(z), \; f_{\lambda_2}(z), \; \ldots, \; f_{\lambda_n}(z), \; \ldots,$$

une suite partielle, extraite de la suite (1), convergeant uniformément vers la fonction limite $f(z)$ et soit (D_f) l'ensemble des points du plan Z qui représentent les valeurs de la fonction $Z = f(z)$. Cette région ne se recouvre pas partiellement; en d'autres termes, si z_1 et z_2 sont deux points différents du cercle (d), on a

$$f(z_1) \neq f(z_2).$$

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi et que $f(z_1) = f(z_2) = a$ sans que $f(z)$ soit identique à a.

Pour n assez grand, les équations

$$f_{\lambda_n}(z) = a$$

ont au moins une racine voisine de z_1 et une racine voisine de z_2. Si l'on trace deux cercles égaux de centres z_1 et z_2 et dont le rayon est inférieur à la moitié de la distance de z_1 à z_2, lorsque n est assez grand l'équation précédente a une racine z'_1 dans le premier cercle et une racine z'_2 dans le second; les points z'_1 et z'_2 sont donc distincts et l'on aurait

$$f_{\lambda_n}(z'_1) = f_{\lambda_n}(z'_2),$$

ce qui est impossible puisque la fonction $f_{\lambda_n}(z)$ fait la représentation conforme du cercle (d) sur le domaine (D_{λ_n}).

Ainsi, à chaque point de (D_f) ne correspond qu'un point de (d). Je dis que la fonction $f(z)$ fait la représentation conforme de (d) sur (D_f), c'est-à-dire que la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas dans (d). En effet, $f'(z)$ est la limite vers laquelle tend uniformément la suite

$$f'_{\lambda_1}(z), \quad f'_{\lambda_2}(z), \quad \ldots, \quad f'_{\lambda_n}(z), \quad \ldots;$$

et comme $f(z)$ n'est pas une constante, $f'(z)$ n'est pas identiquement nulle. Si l'on avait, pour une valeur z_0 intérieure à C,

$$f'(z_0) = 0,$$

les équations

$$f'_{\lambda_n}(z) = 0$$

auraient, pour n assez grand, au moins une racine voisine de z_0, et, par conséquent, intérieure à (d). Mais cela est impossible parce que, $f_{\lambda_n}(z)$ faisant la représentation conforme de (d) sur le domaine (D_{λ_n}), sa dérivée $f'_{\lambda_n}(z)$ ne peut s'annuler dans (d).

Ainsi, lorsque (D_f) ne se réduit pas à un point, $f(z)$ effectue une représentation conforme de (d) sur (D_f).

Je dis que tous les points de (D_f) appartiennent à l'ensemble limite complet intérieur (D_C) de la famille des domaines (D_n). Soit, en effet, Z_0 un point de (D_f) correspondant au point z_0, intérieur à (d), et traçons un cercle (Γ) de centre Z_0 et de rayon ε tout entier à l'intérieur de (D_f); au cercle (Γ), la transformation $Z = f(z)$ fait correspondre une région intérieure à (d), contenant z_0 et limitée par un contour simple (γ) correspondant à (Γ). Au contour (γ), la fonction $f_{\lambda_n}(z)$ fait correspondre un contour (Γ_n) et, à l'intérieur de (γ), correspond l'intérieur de (Γ_n) : en particulier, à z_0 correspond un point $Z_0^{(n)}$, intérieur à (Γ_n) et défini par la relation

$$Z_0^{(n)} = f_{\lambda_n}(z_0).$$

Prenons n assez grand pour que

$$|f(z) - f_{\lambda_n}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

en tous les points de (γ), contour compris; cela est possible puisque la suite $f_{\lambda_n}(z)$ converge uniformément vers $f(z)$ en tous les points de la région (γ), contour compris. Traçons un cercle (Γ') concentrique à (Γ) de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$. Tous les points de (Γ_n), pour n assez grand, sont extérieurs à (Γ') puisqu'ils sont à une distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ d'un point de (Γ); d'autre part, on a, en faisant $z = z_0$ dans l'inégalité précédente,

$$|Z_0 - Z_0^{(n)}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc le point $Z_0^{(n)}$ est à l'intérieur de (Γ') et, par suite, le cercle (Γ') tout entier est intérieur au domaine limité par le contour (Γ_n), et par suite est intérieur à (D_{λ_n}), puisque ce dernier domaine est simplement connexe. Le cercle (Γ') appartient donc à une infinité de domaines (D_{λ_n}) et, par conséquent, le point Z_0 appartient à (D_C).

Nous avons écarté dans ce qui précède le cas où les $f_{\lambda_n}(z)$ ont pour limite une constante, c'est-à-dire le cas où (D_f) se réduit à un point : donnons un exemple de ce dernier cas. Dans un cercle (D) de centre $Z = 0$ et de rayon 1, traçons, sur les rayons faisant avec OX les angles

$$0, \quad \frac{1}{p_n} 2\pi, \quad \frac{2}{p_n} 2\pi, \quad \frac{3}{p_n} 2\pi, \quad \ldots, \quad \frac{p_n - 1}{p_n} 2\pi,$$

p_n désignant le $n^{\text{ième}}$ nombre premier, des segments limités, d'une part à la circonférence de rayon 1, d'autre part à la circonférence de rayon $\frac{1}{p_n}$.

(D_n) est formé par les points de (D) non situés sur ces segments; ici, (D_C) se réduit à zéro. Considérons la suite des fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots,$$

$f_n(z)$ faisant la représentation conforme de (D_n) sur (d), de manière que $f_n(0) = 0$. On peut extraire des $f_n(z)$ une suite partielle convergeant uniformément. Le domaine (D_f) correspondant ne peut comprendre que des points du cercle (D); si ce domaine ne se réduit pas à un point, ces points de (D_f) appartiendraient à (D_C), ce qui est impossible. Donc (D_f) se réduit à un point et la suite partielle a pour limite une constante nécessairement nulle puisque $f_n(o) = o$. Il résulte de là que la suite des $f_n(z)$ tout entière converge uniformément vers zéro.

6. Considérons maintenant un point Z_0 appartenant à (D_C) et proposons-nous de rechercher dans quelles conditions ce point fera partie de l'un des domaines (D_f).

Le point Z_0 est le centre d'un cercle (Γ) tout entier intérieur à une infinité de domaines (D_n), que nous appellerons

$$(D_{\mu_1}),\quad (D_{\mu_2}),\quad \ldots,\quad (D_{\mu_n}),\quad \ldots.$$

Soient

$$f_{\mu_1}(z),\quad f_{\mu_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{\mu_n}(z),\quad \ldots,$$

les fonctions de la famille $f_n(z)$ qui font la représentation conforme du cercle (d) sur les domaines (D_{μ_n}) et

$$\varphi_{\mu_1}(Z),\quad \varphi_{\mu_2}(Z),\quad \ldots,\quad \varphi_{\mu_n}(Z),\quad \ldots,$$

les fonctions inverses correspondantes. Considérons l'ensemble des points de (d) correspondants à Z_0, c'est-à-dire l'ensemble des points

$$z_{\mu_1} = \varphi_{\mu_1}(Z_0),\qquad z_{\mu_2} = \varphi_{\mu_2}(Z_0),\qquad \ldots,\qquad z_{\mu_n} = \varphi_{\mu_n}(Z_0),\qquad \ldots.$$

Ces points sont à l'intérieur de (d); supposons qu'ils aient au moins un point limite z_0 intérieur à (d). Choisissons une suite partielle φ_{ν_n} extraite des φ_{μ_n} telle que $\varphi_{\nu_n}(Z_0)$ ait pour limite z_0. Nous pourrons, de la suite $f_{\nu_n}(z)$, extraire une suite partielle convergeant uniformément dans (d); soit

$$f_{\lambda_1}(z),\quad f_{\lambda_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{\lambda_n}(z),\quad \ldots,$$

cette suite et $f(z)$ la fonction limite supposée non constante. Dans le voisinage de z_0, les équations

$$f_{\lambda_n}(z) = Z_0$$

ont une infinité de racines qui sont les valeurs z_{ν_n} pour n assez grand; comme z_0 est intérieur à (d), il en résulte que

$$f(z_0) = Z_0$$

et le point Z_0 appartient au domaine (D_f). Si $f(z)$ est une constante, cette constante est Z_0 et nous allons montrer que cela est impossible.

Notre raisonnement serait en défaut, si tous les points limites des z_{μ_n} se trouvaient sur la circonférence (c) du cercle (d). Nous allons voir que cela ne peut se présenter que si, pour chaque suite partielle z_{ν_n} de points z_{μ_n} ayant un point limite unique sur (d), ce point demeure le même lorsqu'on remplace les nombres $z_{\nu_n} = \varphi_{\nu_n}(Z_0)$ par les nombres $\varphi_{\nu_n}(Z)$, Z désignant un point du cercle (Γ).

En effet, les fonctions $\varphi_{\mu_n}(Z)$ sont bornées dans leur ensemble lorsque Z est dans (Γ), puisque les points représentant les valeurs de ces fonctions sont situés à l'intérieur de (d).

On peut donc extraire de la suite $\varphi_{\mu_n}(Z)$, une suite partielle

$$\varphi_{\nu_1}(Z), \quad \varphi_{\nu_2}(Z), \quad \ldots, \quad \varphi_{\nu_n}(Z), \quad \ldots$$

convergeant uniformément dans (Γ') concentrique à (Γ) et de rayon moitié, vers une fonction holomorphe $\varphi(Z)$. Si $\varphi(Z)$ n'est pas une constante, les valeurs de cette fonction font la représentation conforme de (Γ') sur un domaine (γ') intérieur au cercle (d). En effet, la convergence uniforme a lieu en tous les points de (Γ'), contour compris, aucun point intérieur de (Γ') ne peut correspondre à un point du contour de (d), puisque les fonctions $\varphi_{\nu_n}(Z)$ ne prennent, dans le voisinage de ce point, aucune valeur représentant un point de (c). Il résulte de là que Z_0, qui est intérieur à (Γ'), correspond à un point z_0, intérieur à (γ') et par conséquent à (d). Dans ce cas, le point Z_0, nous l'avons vu, appartient à un domaine (D_f).

Reste le cas où $\varphi(Z)$ est une constante z_0 ; si z_0 n'est pas sur (c), cette hypothèse est inadmissible puisque, dans ce cas, les fonctions inverses $f_{\nu_n}(z)$ donnent naissance à une suite partielle ayant une fonction limite non constante $f(z)$, telle que $f(z_0) = Z_0$.

Le seul cas d'exception est donc celui où les fonctions $\varphi_{\nu_n}(Z)$ ont pour limite une constante dont le module est égal à 1. Ce cas ne pourra évidemment se présenter s'il existe dans le cercle (Γ') un point particulier P tel que les points z correspondants soient tous situés à l'intérieur d'un cercle (c') de rayon moindre que 1. Plus généralement, considérons l'ensemble des points Z appartenant au domaine limite complet intérieur de la suite des domaines (D_{μ_n}) et formant un domaine (Γ) d'un seul tenant contenant Z_0. Si l'on désigne encore par (Γ') un domaine contenant Z_0 et limité par une courbe intérieure au domaine (Γ) et très voisine de sa frontière, (Γ') sera comme (Γ) un domaine d'un seul tenant et simplement connexe comme tous les (D_n). Si les fonctions $\varphi_{\nu_n}(Z)$ n'ont pas pour limite une constante de module égal à l'unité, les points de (Γ') seront obtenus à l'aide d'une suite $f_{\lambda_n}(z)$ et (Γ') appartiendra au domaine (D_f) relatif à cette suite.

Il en sera en particulier toujours ainsi, si le domaine (Γ') contient un point P dont les correspondants z sont intérieurs à un cercle (c') intérieur à (c). Ceci nous conduit à restreindre le choix des fonctions $f_n(z)$.

On peut toujours supposer que les domaines bornés (D_n) ont un point commun $Z = 0$; il suffit de faire subir une translation convenable à ceux des domaines qui ne contiendraient pas le point O. Dans la suite des raisonnements, nous pourrons simplement supposer que les points $\varphi_n(o)$, correspondant à O, sont tous situés à l'intérieur d'un cercle (c') intérieur à (c). Dans ces conditions tout domaine (D_f) contient O et tout domaine simplement connexe (Γ') formé de points uniformément intérieurs à une suite de domaines (D_n) et contenant O appartient à un domaine (D_f). En particulier, appelons (D_0) l'ensemble des points de (D_R) formant un domaine connexe contenant O, ce domaine (D_0) appartient à tout domaine (D_f), puisque toute suite infinie de fonctions $f_n(z)$ donne naissance à une suite partielle convergeant vers une fonction $f(z)$ dont le domaine (D_f) contient O et par suite (D_0).

Supposons que la suite $f_n(z)$ admette une fonction limite $f(z)$ vers laquelle elle converge uniformément, et soit (D_f), le domaine correspondant à $f(z)$, domaine qui contient le point O; tous les points de (D_f) appartiennent à (D_0) et réciproquement; (D_f) coïncide avec (D_0). Il n'existe d'ailleurs pas de domaine (D') contenant (D_0) et formé de points uniformément intérieurs à une infinité de domaines (D_n).

Réciproquement, étant donnés les domaines (D_n) et la suite $f_n(z)$, puisque le domaine (D_0) appartient à tous les (D_n), toute suite partielle extraite des $f_n(z)$ donnera naissance à une suite partielle nouvelle dont la limite $f(z)$ fournira un domaine (D_f) contenant (D_0).

D'ailleurs, s'il n'existe pas de domaine (D′) contenant (D_0) et formé de points uniformément intérieurs à une infinité de domaines (D_n), tous les domaines (D_f) ainsi obtenus sont les mêmes et, par conséquent, toutes les fonctions $f(z)$ font la représentation conforme du cercle (d) sur le domaine (D_0).

Si en particulier on suppose que les points o et O se correspondent toujours, en sorte que $f_n(o) = o$, quel que soit n et que les directions positives des axes des abscisses se correspondent, c'est-à-dire que les fonctions $f_n(z)$ ont deux éléments de contacts correspondants, il en résultera que les fonctions $f(z)$ auront aussi en commun cet élément de contact; comme chacune d'elles fait la représentation conforme de (d) sur (D_0), ces fonctions sont identiques. Ainsi, de toute suite infinie extraite des $f_n(z)$, on peut tirer une suite nouvelle ayant pour limite $f(z)$; il en résulte que la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans (D) vers $f(z)$.

En effet, dans le cas contraire, il existerait un domaine (D_1) intérieur à (D) et un nombre ε tels que pour chaque fonction d'une suite infinie

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

extraite de $f_n(z)$, il existerait un point z pour lequel $|f(z) - f_{n_p}(z)| > \varepsilon$. Alors il serait impossible d'extraire de cette suite une suite nouvelle convergeant uniformément vers $f(z)$ dans (D_1).

Un cas assez simple est celui où les ensembles (D_C) et (D_R) coïncident; dans ce cas, l'ensemble (D_0) correspond à une fonction $f(z)$ limite de la suite infinie $f_n(z)$.

7. Je me propose maintenant d'établir que *tout domaine simplement connexe* (D) *peut être représenté d'une manière conforme sur un cercle* (d).

Supposons d'abord que le domaine (D) soit borné et appelons (D′) l'ensemble formé par les points de (D) et ses points frontières.

L'ensemble fermé (D′) est aussi borné. Soit O un point intérieur à (D). Enfermons tous les points de (D′) dans des cercles de rayon égal à $\frac{1}{n}$; il suffit, pour couvrir (D′), d'un nombre fini de ces cercles, puisque (D′) est fermé. Supprimons ceux de ces cercles qui contiennent un point frontière : la région couverte par les cercles conservés forme un ou plusieurs domaines limités par des arcs de cercle et l'un de ces domaines contient O. Appelons (D_n) le domaine simplement connexe limité par le contour extérieur de ce dernier. Je dis que tout point P de (D) est uniformément intérieur aux domaines (D_n) à partir d'un certain rang. En effet, traçons une ligne brisée intérieure à (D) et joignant P et O et soit δ la distance de cette ligne brisée à la frontière de (D). Lorsque $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$, le cercle ($\Gamma$) de centre P et de rayon $\frac{\delta}{2}$ est intérieur à tous les (D_n); car, si l'on fait déplacer un cercle de rayon $\frac{1}{2}\delta$ de manière que son centre décrive la ligne brisée, ce cercle couvrira une région contenue tout entière dans (D_n). Il résulte de là que tous les points de (D) appartiennent au domaine que nous avons appelé (D_0). D'ailleurs, tout point n'appartenant pas à (D) (extérieur ou frontière), n'appartient à aucun (D_n) à partir d'un certain rang. En résumé, les ensembles (D_c) ou (D_n) coïncident avec (D_0) ou (D).

Soit alors $f_n(z)$, la fonction qui fait la représentation conforme du cercle (d) sur (D_n) de manière que le centre $z = o$ du cercle (d) corresponde au point O et que les directions positives de Ox et OX se correspondent. La suite infinie

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

converge uniformément vers une fonction limite $f(z)$; cette fonction $Z = f(z)$ fait la représentation conforme du cercle (d) sur le domaine (D) de manière que le centre o du cercle (d) corresponde au point O de (D) et que les directions positives de Ox et OX se correspondent. En effet, $f(o)$ est la limite des nombres $f_n(o)$ qui sont nuls ; il est donc nul. D'autre part $f'(z)$ est la limite de $f(z)$; or, tous les nombres $f'_n(o)$ sont réels par hypothèse, donc $f'(o)$ est réel.

8. Nous avons supposé que le domaine (D) était borné. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Deux cas peuvent alors se présenter : ou bien il existe dans le plan Z un point Q extérieur à (D), ou bien tous les points du plan appartiennent à (D) ou à sa frontière, c'est-à-dire appartiennent à (D').

Dans le premier cas, une transformation homographique, effectuée sur la variable Z, permet de remplacer le point Q par le point à l'infini du plan Z et le domaine (D) par un domaine (Δ) borné. Si l'on fait la représentation conforme de (Δ) sur le cercle (d) à l'aide de la fonction $f(z)$, la transformation homographique inverse, effectuée sur $f(z)$, donnera la représentation cherchée.

Supposons maintenant que tous les points du plan appartiennent à (D′) et soit O un point de (D). Nous pouvons définir comme précédemment un domaine (D_n) simplement connexe contenant O : nous traçons pour cela autour de chaque point de (D′) un cercle de rayon $\frac{1}{n}$, et autour du point à l'infini, que nous pouvons toujours supposer appartenir à la frontière de (D) en faisant, au besoin, une transformation homographique sur Z, un cercle (Γ_n) de rayon n ayant son centre au point O. Les points de (D′) intérieurs à (Γ_n) sont intérieurs à un nombre fini des cercles précédents. Supprimons ceux de ces cercles qui contiennent un point frontière : la région couverte par les cercles restants forme un ou plusieurs domaines limités par des arcs de cercle et l'un de ces domaines contient le point O. Appelons (D_n) le domaine simplement connexe limité par le contour extérieur de ce dernier. Tout point de (D) est uniformément intérieur à (D_n) pour n assez grand. Les fonctions $f_n(z)$ sont maintenant holomorphes dans (d), mais non bornées. Prenons sur la frontière de (D) deux points distincts α et β. Les fonctions $f_n(z)$ admettent dans (d) les deux valeurs exceptionnelles α et β ; on peut leur appliquer les théorèmes que nous avons utilisés pour les fonctions bornées [1]; il en résulte que la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans (d) vers une fonction limite $f(z)$ qui fait la représentation conforme de (d) sur (D). Ce raisonnement suppose que la frontière de (D) contienne au moins deux points.

En définitive, tout domaine simplement connexe peut être représenté d'une manière conforme sur un cercle.

---

[1] *Voir* P. MONTEL, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 496) et *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXXIII, 1916, p. 242).

9. Voici quelques exemples; on peut prendre pour D un cercle de centre O dont on a enlevé les points d'un rayon OA; soit encore un cercle de centre O et de rayon *un*; sur chaque rayon faisant avec OX l'angle $\pm \frac{\pi}{n}$ enlevons les points situés sur un segment ayant une extrémité sur la circonférence et l'autre à la distance $\frac{1}{n}$ du point O, enlevons aussi les points situés sur le rayon OX. Le domaine restant (D) peut être représenté sur un cercle.

Faisons dans le plan Z une coupure limitée à deux points A et B distincts quelconques : on peut représenter sur un cercle le domaine restant (D). On suppose, bien entendu, que la coupure ne morcelle pas le plan.

Considérons la courbe de Cornu définie par la relation

$$Z = \int^{s} e^{is^2}\, ds,$$

s désignant l'arc; un cercle de rayon $\frac{1}{s^3}$ dont le centre est le point $Z(s)$ décrit, lorsque s varie de $-\infty$ à $+\infty$, un domaine simplement connexe que l'on peut représenter sur un cercle. Il en est de même du domaine limité par l'axe OX, les droites $X = \pm 1$ et la courbe $Y = 1 + \sin^2 \frac{\pi}{X}$ avec $-1 \leqq X \leqq +1$.

CHAPITRE II.

VALEURS LIMITES D'UNE FONCTION HOLOMORPHE POUR UN POINT FRONTIÈRE.

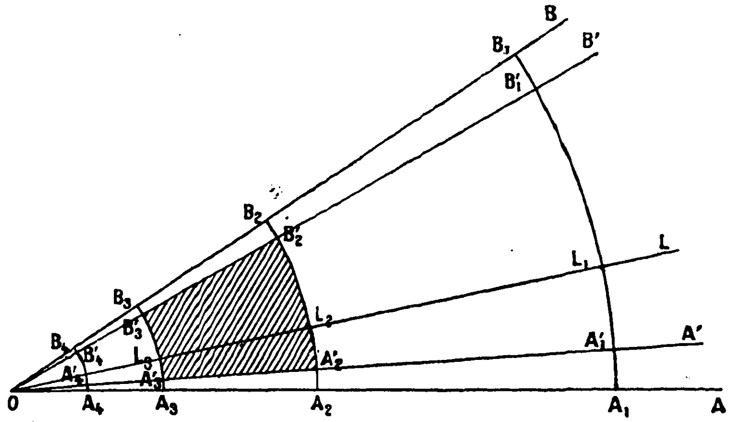
10. Avant d'aborder l'étude de la correspondance entre les points frontières du domaine simplement connexe (D) et ceux de la circonférence (c), je rappellerai quelques résultats que j'ai déjà établis sur les valeurs limites des fonctions dans un angle et je démontrerai quelques résultats nouveaux.

Considérons un angle AOB et une fonction $f(z)$ bornée dans le secteur limité par les côtés OA, OB et l'arc de cercle A_0B_0 de centre O.

Si $f(z)$ tend vers la valeur α sur le rayon OL *intérieur au secteur, $f(z)$ tend uniformément vers α dans tout secteur* A′OB′ *intérieur au premier lorsque z tend vers* o.

Nous pouvons toujours supposer que $z=0$ au point O et que $OA_0 = OB_0 = 1$. Traçons les arcs de cercle de centre O, de rayons $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}$, etc. Ces arcs coupent la droite OA (*fig.* 1) aux points $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$; la droite OB aux points $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$;

Fig. 1.



les droites OA′ et OB′ respectivement aux points $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n, \ldots$, et $B'_0, B'_1, \ldots, B'_n, \ldots$, et la droite OL aux points $L_0, L_1, \ldots, L_n, \ldots$. Appelons Δ_n le domaine limité par les droites OA, OB et les arcs A_nB_n, $A_{n+3}B_{n+3}$ et Δ'_n le domaine limité par les droites OA′, OB′ et les arcs $A_{n+1}B_{n+1}$, $A_{n+2}B_{n+2}$ et posons

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^{n-1}}\right).$$

Lorsque z et dans Δ_1, le point $\frac{z}{2^n}$ est situé dans Δ_n et comme $f(z)$ est borné dans le secteur, les fonctions $f_n(z)$ sont bornées dans le domaine Δ_1; ces fonctions forment une suite normale dans le domaine Δ'_1, intérieur à Δ_1. Or, elles convergent vers α en tous les points du segment L_2L_3, puisque $f_n(z)$ prend sur ce segment, les mêmes valeurs que $f(z)$ sur le segment $L_{n+1}L_{n+2}$. Il en résulte que la suite converge uniformément vers α pour tous les points de Δ'_1. En d'autres termes, pour $n > p$, on aura

$$|f_n(z) - \alpha| < \varepsilon$$

pour tous les points de Δ'_1. Or, si z est dans Δ_1, $|z|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et $\left|\frac{z}{2^{n-1}}\right|$ est inférieur à $\delta = \frac{1}{2^p}$; donc, si

$$|z| < \delta,$$

on a

$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

à l'intérieur de A′OB′.

11. La démonstration s'étend, presque sans modification, au cas où l'on remplace le rayon OL par une courbe tout entière à l'intérieur de AOB et aboutissant en O ou par un continu quelconque intérieur à AOB et contenant O ; en d'autres termes :

Si, lorsque z tend vers 0 *en demeurant sur un ensemble parfait continu quelconque contenant* O *et dont tous les points autres que* O *sont intérieurs au secteur, $f(z)$ a pour limite α, $f(z)$ tend uniformément vers α dans tout secteur* A′OB′ *intérieur au premier, lorsque z tend vers* 0. *En particulier, le continu peut être une courbe simple* (1).

Soient OA′ et OB′ deux droites contenues dans le secteur AOB et telles que la courbe ou le continu OL soit à l'intérieur de l'angle A′OB′ lorsque z est dans le secteur A_0OB_0. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'une courbe; il existe un arc l_n de cette courbe

(1) J'ai démontré le théorème relatif au rayon OL dans le Mémoire : *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. XXIX, 1912, p. 519). Ce théorème a été généralisé par M. Lindelöf en remplaçant la droite OL par une courbe. Voir *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XLVI, 1915, p. 10). M. Lindelöf s'occupe aussi du cas où la courbe OL a des points communs avec OA ou OB. Je laisserai de côté cette hypothèse parce que je n'aurai pas à l'introduire dans la suite.

qui est tout entier dans Δ'_n et dont les extrémités sont l'une sur $A'_{n+1}B'_{n+1}$ et l'autre sur $A'_{n+2}B'_{n+2}$. Il suffit pour obtenir un arc tel que l_n de prendre un point de la courbe situé à l'intérieur de Δ'_n et de se déplacer successivement dans l'un et l'autre sens sur la courbe jusqu'à ce que l'on rencontre un point L_{n+1} et un point L_{n+2} de la frontière de Δ'_n. Ces points ne pouvant être sur les droites OA' ni OB' sont sur les arcs de cercle précédents. Lorsque z est sur l'arc l_n, le point $2^{n-1}z$ est sur un arc λ_n situé dans Δ'_1 et joignant un point de $A'_2\,B'_2$ à un point de $A'_3\,B'_3$. Les arcs λ_n ont pour limite un continu λ, puisque les points limites des λ_n sont au moins au nombre de deux, l'un sur $A'_2\,B'_2$, l'autre sur $A'_3B'_3$. En tout point z_0 de λ, $f_n(z)$ converge vers α; en effet lorsque n est assez grand, z_0 est voisin d'un point z_n de λ_n tel que

$$|f_n(z_n) - \alpha| < \varepsilon;$$

or, à l'intérieur de Δ'_1, les fonctions $f_n(z)$ sont uniformément continues, on peut donc supposer que z_n est assez voisin de z_0 pour que

$$|f_n(z_0) - f_n(z_n)| < \varepsilon;$$

il en résulte que

$$|f_n(z_0) - \alpha| < 2\varepsilon,$$

quel que soit ε, pour n assez grand. En tout point de λ, qui comprend une infinité de points, la limite de $f_n(z)$ est α; il en résulte comme plus haut que la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α dans Δ'_1 et la conclusion est la même.

On voit que, pour la validité du raisonnement, il suffit que l'ensemble limite λ ait une infinité de points. On peut donc remplacer la courbe OL par un continu quelconque ou même par un ensemble dénombrable convenablement choisi. Dans le cas du continu on prendra, par exemple, pour l_n l'ensemble des points de ce continu contenus dans Δ'_n; l_n a au moins un point sur chaque arc de cercle de centre O et contenu dans Δ'_n, donc λ_n et par suite λ ont au moins un point sur chaque arc de cercle de centre O et contenu dans Δ_1. On aurait pu raisonner de la même manière dans le cas de la courbe.

12. Appelons maintenant *valeur exceptionnelle* de $f(z)$, toute valeur α qui n'est prise qu'un nombre fini de fois par $f(z)$ lorsque z

reste à l'intérieur du secteur A_0OB_0. Supposons que sur un rayon OL contenu dans AOB, l'une des valeurs limites de $f(z)$ soit une valeur exceptionnelle α : je dis que, sur tout autre rayon OL', α sera aussi une valeur limite. En d'autres termes, on peut énoncer le théorème suivant :

L'ensemble des valeurs limites exceptionnelles est le même pour deux rayons issus de O *intérieurs à* AOB *ou pour deux courbes quelconques issues de* O *et contenues dans un secteur* A'OB' *intérieur à* AOB.

Soit, sur le rayon OL, une suite de points

$$z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots$$

tels que $\lim f(z_n) = \alpha$, α étant une valeur exceptionnelle de $f(z)$. Posons

$$f_n(z) = f\left(\frac{z_n}{z_1} z\right)$$

et traçons un domaine $A'_1 B'_1 B''_1 A''_1$ limité, d'une part, par deux rayons OA', OB' intérieurs à AOB, aussi rapprochés qu'on le veut de OA ou de OB et contenant OL et OL'; d'autre part, par deux arcs de cercle de centre O et équidistants de z_1; à ce domaine Δ_1, la transformation

$$z' = \frac{z_n}{z_1} z$$

fait correspondre pour le point z' un domaine semblable Δ_n contenant le point z_n, correspondant au point z_1.

Toute suite extraite des $f_n(z)$ donne naissance à une suite partielle ayant une limite $f(z)$ dans Δ_1; $f(z_1)$ est égal à α, puisque $f_n(z_1) = f(z_n)$. Or, α étant une valeur exceptionnelle, les équations $f_n(z) = \alpha$ n'ont qu'un nombre limité de racines dans Δ_1; donc $f(z)$ ne peut prendre la valeur α que si cette fonction est la constante α (1). Toute suite partielle convergente extraite de la suite $f_n(z)$ a donc pour limite α; il en

(1) *Voir* P. MONTEL, *Sur les fonctions holomorphes qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, t. XXIX, 1912, p. 490).

résulte que la suite $f_n(z)$ elle-même converge uniformément vers α dans le domaine Δ_1.

Désignons par ζ_1 le point de rencontre de OL′ avec le cercle de centre O et passant par z_1 et soit

$$\zeta_n = \frac{z_n}{z_1}\zeta_1,$$

le point ζ_n, situé sur OL′, est dans le domaine Δ_n et

$$f(\zeta_n) = f_n(\zeta_1);$$

comme la suite $f_n(\zeta_1)$ converge vers α, on voit que la suite $f(\zeta_n)$ converge vers α, lorsque n augmente indéfiniment, ζ_n tendant alors vers o comme z_n.

Soit maintenant OL″ une courbe contenue tout entière dans l'angle A′OB′; désignons par ξ_n le point de rencontre de cette courbe avec le cercle de centre O, passant par z_n, ou l'un des points de rencontre lorsqu'il y en a plus d'un. Le point ξ_n est dans Δ_n et le point

$$z''_n = \frac{z_1}{z_n}\xi_n$$

est situé dans Δ_1; on a d'ailleurs

$$f_n(z''_n) = f(\xi_n).$$

La suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α; on a donc, lorsque n est assez grand,

$$|f_n(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

quel que soit z dans Δ_1, en particulier,

$$|f_n(z''_n) - \alpha| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$|f(\xi_n) - \alpha| < \varepsilon.$$

La suite $f(\xi_n)$ converge donc vers α, qui est une des valeurs limites exceptionnelles obtenues sur la courbe OL″. Inversement, on démontrerait de la même manière que toute valeur exceptionnelle obtenue comme valeur limite sur la courbe OL″ peut aussi être obtenue comme valeur limite sur le rayon OL.

Il résulte de là que les valeurs limites exceptionnelles sont les mêmes pour deux courbes contenues dans l'angle A′OB′ puisque, pour chacune d'elles, l'ensemble des valeurs limites est le même que pour un rayon OL contenu dans A′OB′. Si une courbe passant par O a une tangente unique, il suffira que cette tangente soit distincte de OA et de OB; sinon, les tangentes en O sont comprises entre deux droites limites et il faudra que l'angle formé par ces droites limites et contenant toutes les tangentes soit intérieur à l'angle AOB. Nous dirons dans les deux cas que la courbe n'est pas tangente au bord de l'angle.

13. Si la fonction $f(z)$ ne prend dans l'angle AOB qu'un nombre limité de fois chaque valeur, toute valeur limite α sera une valeur exceptionnelle; l'ensemble des valeurs limites sera le même que pour toute courbe non tangente au bord. Dans la suite, nous aurons surtout à nous occuper du cas particulier où la fonction ne prend jamais deux fois la même valeur.

14. Je démontrerai encore un théorème relatif aux valeurs exceptionnelles. Supposons que, dans l'angle AOB, $f(z)$ ne tende pas vers une valeur unique α et soient α et β deux valeurs limites. Soient

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

une suite infinie de points tels que $f(x_n)$ ait pour limite α;

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_n, \quad \ldots$$

une suite infinie de points tels que $f(\zeta_n)$ ait pour limite β; nous supposons que les modules r_n des x_n et les modules ρ_n des ζ_n décroissent constamment lorsque n augmente et que la suite des modules

$$r_1, \quad \rho_1, \quad r_2, \quad \rho_2, \quad r_3, \quad \rho_3, \quad \ldots, \quad r_n, \quad \rho_n, \quad \ldots$$

soit aussi décroissante. Cela est toujours possible : ayant choisi x_1, on prend pour ζ_1 un point ζ de module moindre que r_1; puis on prend pour x_2 un des x de module moindre que ρ_1 et ainsi de suite. On peut alors énoncer le théorème suivant :

Le rapport $\frac{\rho_n}{r_n}$ a pour limite o *lorsque n augmente indéfiniment.*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et qu'il existe une suite infinie de valeurs de ce rapport telle que tous les nombres de cette suite soient supérieurs à un nombre fixe k; on aura

$$1 > \frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}} > k,$$

pour toutes les valeurs entières de i. Traçons des arcs de cercle limités à OA et OB et de rayons $r_{n_i}(1+h)$, $r_{n_i}(1-h)$; on peut déterminer h de façon que

$$r_{n_i}(1-h) < \rho_{n_i}$$

ou

$$1 - h < \frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}};$$

il suffit pour cela que

$$1 - h < k$$

ou

$$1 > h > 1 - k.$$

Nous prendrons

$$h = 1 - \frac{k}{2}.$$

Considérons alors le domaine D_{n_i} limité par les arcs de cercle $r_{n_i}(1+h)$, $r_{n_i}(1-h)$ et les demi-droites OA′, OB′ intérieures à l'angle AOB. Nous supposons que l'angle A′OB′ contienne les points x_n et ζ_n, au moins à partir d'une certaine valeur de n.

Les fonctions

$$f_{n_i}(z) = f\left(\frac{r_{n_i}}{r_{n_1}} z\right)$$

considérées à l'intérieur de D_{n_1} définissent une famille normale, et toute fonction $f_{n_i}(z)$ prend la valeur $f(x_{n_i})$ au point

$$z = \frac{r_{n_1}}{r_{n_i}} x_{n_i}$$

dont le module est r_{n_1}, et la valeur $f(\zeta_{n_i})$ au point

$$z' = \frac{r_{n_1}}{r_{n_i}} \zeta_{n_i}$$

dont le module ρ' est $\frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}} r_{n_1}$. Ce nombre est supérieur à $k r_{n_1}$; on a donc

$$r_{n_1} - \rho' < (1-k) r_{n_1} < h\, r_{n_1}$$

et le point z' est dans D_{n_1}.

Toute suite infinie de fonctions $f_{n_i}(z)$ devrait donner naissance à une suite convergeant uniformément dans D_{n_1} vers la constante α et vers la constante β, ce qui est impossible. Donc, toutes les suites telles que $\frac{\rho_{n_i}}{r_{n_i}}$ ont pour limite zéro. Le théorème est démontré. On verrait de même que le rapport $\frac{r_{n+1}}{\rho_n}$ a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment. Il en résulte que le produit $\frac{r_{n+1}}{\rho_n}\frac{\rho_n}{r_n}$ ou $\frac{r_{n+1}}{r_n}$ a aussi pour limite zéro.

Donc : *Si, dans l'angle* AOB, $f(z)$ *n'a pas une limite unique lorsque z tend vers zéro et si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ forment une suite infinie de points de cet angle tels que $f(x_n)$ ait pour limite une valeur exceptionnelle, et que entre $|x_n|$ et $|x_{n+1}|$ se trouve un des nombres $|\zeta_n|$ pour la suite desquels $f(\zeta_n)$ ait pour limite une autre valeur exceptionnelle β, le rapport $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ a pour limite zéro lorsque n augmente indéfiniment.*

15. Les propositions que nous venons d'établir sont toutes des conséquences d'un théorème fondamental sur les familles de fonctions normales dans un domaine (D) : toute suite partielle admet au moins une fonction limite vers laquelle elle converge uniformément dans tout domaine (D′) complètement intérieur à (D).

Nous allons maintenant établir un théorème plus précis sur les familles de fonctions normales : cela nous permettra de préciser aussi quelques-uns des résultats des pages précédentes. Voici ce théorème :

Soit

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

une suite infinie de fonctions, holomorphes et bornées dans un domaine (D) *et continues sur un arc* $\lambda\mu$ *de la frontière* (C) *de ce domaine. Si la suite converge uniformément sur l'arc* $\lambda\mu$, *elle converge aussi uniformément sur tout domaine* (D′) *dont les points intérieurs sont tous intérieurs à* (D) *et dont la frontière peut contenir une partie* $\lambda'\mu'$ *de l'arc* $\lambda\mu$.

Nous supposerons ici que l'arc $\lambda\mu$ est analytique et régulier ou formé d'un certain nombre d'arcs réguliers analytiques. Nous verrons plus loin comment on peut se débarrasser de cette restriction.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Si une suite de fonctions, holomorphes et bornées dans un cercle (C) *et continues sur la circonférence converge sur cette circonférence, la convergence étant uniforme, sauf en un nombre fini de points, cette suite converge uniformément dans le domaine fermé formé par le cercle dont on a enlevé des segments aussi petits qu'on le veut contenant les points de convergence non uniforme.*

Soit

$$u_1(x, y), \quad \ldots, \quad u_n(x, y), \quad \ldots$$

la suite formée par les parties réelles des fonctions holomorphes. Les fonctions $u_n(x, y)$ sont bornées dans le cercle (C), continues sur la circonférence, et leurs valeurs $u_n(s)$ sur cette circonférence convergent vers une fonction $u(s)$, qui est continue sur tout arc ne comprenant aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ de convergence non uniforme. La fonction

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C u(s)\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds,$$

s désignant l'arc de la circonférence (C) de rayon R, r la distance du point (x, y) au point s, φ l'angle de la normale au point s avec la demi-droite joignant ce point au point (x, y), est une fonction harmonique dans (C) puisque le second membre est l'intégrale de Poisson. On a de même

$$u_n(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C u_n(s)\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds$$

et

$$u(x, y) - u_n(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_C [u(s) - u_n(s)]\left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{2R}\right) ds;$$

d'où

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leq \frac{1}{\pi}\int_C |u(s) - u_n(s)| \frac{\cos\varphi}{r} ds,$$

car on a toujours

$$r \leqq 2R\cos\varphi.$$

Divisons le chemin d'intégration en arcs partiels, en marquant p arcs de cercles ayant chacun pour milieu un point $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et dont la longueur totale ne dépasse pas ε. Sur ces arcs, la différence

$$|u(s) - u_n(s)|$$

ne dépasse pas $2M$, M désignant la borne supérieure de la valeur absolue des fonctions $u_n(x, y)$ et, sur les arcs restants, cette différence ne dépasse pas ε si n est assez grand. D'autre part, l'intégrale

$$\int \frac{\cos\varphi}{r}\,ds$$

étendue à un arc quelconque est inférieure à 2π. On a donc

$$|u(x, y) - u_n(x, y)| \leqq \frac{4M\varepsilon}{\delta} + 2\varepsilon \text{ (1)}.$$

Nous désignons par δ la plus courte distance du point (x, y) aux arcs de circonférence, dont les milieux sont $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

La convergence est donc uniforme pour tout point intérieur; comme en un point s de la circonférence, distinct des points a_i, les fonctions $u_n(x, y)$ et $u(x, y)$ sont continues et prennent les valeurs $u_n(s)$ et $u(s)$, on voit que l'on peut adjoindre ce point s aux points de convergence uniforme. Si donc on isole les points a_i, à l'aide de petits segments les contenant, la convergence est uniforme dans le domaine fermé restant. Le même raisonnement *s'applique aux fonctions conjuguées $v_n(x, y)$, et par suite aux fonctions données.*

On peut aisément étendre l'énoncé précédent. Le raisonnement repose sur la possibilité d'enfermer les points de convergence non uniforme dans des arcs dont la somme est aussi petite qu'on le veut. Rappelons la définition de ces points. La convergence est uniforme en

---

(1) On pourrait aussi remplacer u et u_n par zéro aux points a_i. Cela ne change pas la valeur des intégrales. On voit aussi *que la suite $u_n(s)$ peut ne pas converger aux points a_i.*

un point s de (C), si l'on peut tracer un arc assez petit ayant ce point pour milieu tel que la convergence des fonctions $u_n(s)$ soit uniforme sur cet arc. Dans le cas contraire, le point s est un point de convergence non uniforme. Il résulte immédiatement de cette définition que l'ensemble des points de convergence non uniforme est fermé. S'il est de mesure nulle, on peut enfermer les points de cet ensemble dans des arcs dont la somme des longueurs est aussi petite qu'on le veut. Nous dirons dans ce cas que la convergence est uniforme *presque partout* sur C.

Donc, *si une suite infinie de fonctions, holomorphes et bornées dans un cercle* (C), *converge uniformément presque partout sur la circonférence, cette suite converge uniformément dans le domaine fermé formé par le cercle d'où l'on a exclu, par de petits segments, les points de divergence ou de convergence non uniforme.*

16. Considérons maintenant un domaine simplement connexe limité par un contour formé d'un nombre fini d'arcs réguliers et analytiques et supposons qu'une suite infinie de fonctions holomorphes et bornées dans ce domaine $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$, continues sur le contour, converge uniformément sur ce contour, sauf aux points A_1, $A_2, \ldots, A_p$. On peut faire la représentation conforme de ce domaine sur un cercle et étendre ainsi le lemme précédent au nouveau domaine.

17. Il est maintenant facile d'établir le théorème énoncé au début. Extrayons de la suite $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ une suite partielle

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_p}(z), \quad \ldots$$

convergente dans le domaine ouvert (D) et convergeant uniformément dans tout domaine complètement intérieur à (D). Cette suite converge uniformément sur l'arc $\lambda\mu$ vers la fonction continue $f(s)$. Soit (D′) un domaine limité par un arc $\lambda'\mu'$ intérieur à $\lambda\mu$ et un arc (C′) dont tous les points, sauf les extrémités λ', μ', sont intérieurs à (D). Soit (D″) un domaine, formé par l'arc $\lambda\mu$ et un arc de courbe (C″) dont tous les points sauf λ, μ sont intérieurs à (D) et contenant à son intérieur les points intérieurs de (D′). La suite $f_{n_p}(z)$ converge sur la frontière de (D'') et la convergence est uniforme, sauf peut-être aux points λ et μ. Il résulte du lemme précédent que la convergence est uniforme dans le domaine fermé (D') et que la fonction limite $f(z)$ prend sur l'arc $\lambda'\mu'$ les valeurs $f(s)$.

Une autre suite partielle convergente extraite des $f_n(z)$ aurait une fonction limite $g(z)$ prenant les mêmes valeurs $f(s)$ sur l'arc $\lambda'\mu'$, de sorte que la fonction $f(z)-g(z)$ holomorphe dans (D') prend, sur l'arc analytique $\lambda\mu$, la valeur zéro. Cette fonction peut donc être prolongée analytiquement au delà de $\lambda'\mu'$ à l'extérieur de (D); elle est donc holomorphe sur $\lambda'\mu'$ et par suite identiquement nulle. Donc $f(z)$ et $g(z)$ sont identiques.

Toute suite convergente extraite des $f_n(z)$ a pour limite la même fonction holomorphe dans (D'). Il en résulte (¹) que cette fonction converge uniformément dans le domaine fermé (D') vers une fonction $f(z)$ holomorphe dans (D') et continue sur l'arc $\lambda'\mu'$ où elle prend les valeurs $f(s)$.

18. La démonstration se simplifie lorsque les valeurs $f(z)$ prises sur l'arc analytique $\lambda\mu$ appartiennent à une fonction $\varphi(z)$, analytique de z dans (D) et sur $\lambda\mu$. Il suffit en effet de montrer que toute suite $f_n(z)$ converge dans le domaine (D'') vers une fonction analytique qui prend sur $\lambda\mu$ les valeurs $\varphi(z)$. Or on a

$$f_n(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C''}\frac{f_n(z)\,dz}{z-x}+\frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda\mu}\frac{f_n(z)\,dz}{z-x}.$$

La suite $f_n(z)$ converge dans (D''), la convergence est uniforme sur (C'') sauf peut-être aux extrémités et sur $\lambda\mu$. Comme les $f_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble on a, en faisant croître n indéfiniment,

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{C''}\frac{f(z)\,dz}{z-x}+\frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda\mu}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x};$$

$f(z)$ étant la limite des $f_n(z)$ dans (D'') et sur (C''). D'ailleurs,

---

(¹) *Voir* P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 21 (Paris, Gauthier-Villars, 1910).

puisque $\varphi(z)$ est analytique dans le domaine fermé (D″)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C''}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x} + \frac{1}{2i\pi}\int_{\lambda\mu}\frac{\varphi(z)\,dz}{z-x},$$

d'où, en retranchant,

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C''}\frac{[f(z)-\varphi(z)]\,dz}{z-x}.$$

Cette formule montre que la différence $f(x) - \varphi(x)$, holomorphe dans (D″) est continue sur l'arc $\lambda'\mu'$ où elle prend la valeur zéro : la différence est donc nulle dans (D″) et $f_n(x)$ converge uniformément dans (D′) vers $\varphi(x)$. On peut supposer en particulier que $\varphi(x)$ soit une constante α : ce cas est le seul que nous aurons à considérer dans la suite.

19. Voici maintenant quelques conséquences du théorème qui précède. Supposons que la courbe (C) soit formée par un nombre fini d'arcs réguliers et analytiques et que les fonctions

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots$$

soient holomorphes et bornées dans l'intérieur du domaine simplement connexe (D) limité par le contour (C). Soient encore

$$\lambda_1\mu_1,\quad \lambda_2\mu_2,\quad \ldots,\quad \lambda_n\mu_n,\quad \ldots$$

des coupures simples du domaine (D), joignant deux points λ_n et μ_n de (C). Nous supposons que cette suite de coupures converge uniformément vers un arc $\lambda\mu$ de (C), c'est-à-dire que, étant donné un nombre η arbitrairement petit, à partir d'une certaine valeur de n, l'arc de courbe $\lambda_n\mu_n$ appartienne tout entier au voisinage η de $\lambda\mu$ (1).

Supposons, en outre, que les valeurs de $f_n(z)$ sur l'arc $\lambda_n\mu_n$ convergent uniformément vers un nombre α lorsque n croît indéfiniment : en d'autres termes, si l'on se donne le nombre ε positif, on aura,

(1) Le voisinage η de l'arc $\lambda\mu$ est le domaine formé par les points intérieurs à l'un des cercles de rayons η dont le centre est un point de $\lambda\mu$.

pour n assez grand,

$$|f_n(z)-\alpha|<\varepsilon,$$

lorsque z est sur l'arc $\lambda_n\mu_n$.

Dans ces conditions, on peut affirmer que *la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α dans l'intérieur de* (D).

Soit O un point fixe intérieur à (D); à partir d'un certain rang les coupures $\lambda_n\mu_n$ partagent (D) en deux régions dont l'une (D_n) contient le point O. Nous pouvons supposer qu'il en est ainsi à partir de $n=1$ et nous définissons alors une suite de domaines

$$(D_1),\quad (D_2),\quad \ldots,\quad (D_n),\quad \ldots,$$

(D_n) étant limité par $\lambda_n\mu_n$ et l'arc (γ_n) de la courbe (C) limité aux points $\lambda_n\mu_n$; (D_n) a pour limite (D) lorsque n croît indéfiniment. Soit $\varphi_n(z)$ la fonction qui fait la représentation conforme du domaine (D_n) sur le cercle (d) de rayon *un*, de manière que le point O corresponde au centre o du cercle et le point λ_n à un point a de la circonférence : le point μ_n correspond alors à un point b_n de cette circonférence. L'arc ab_n reste supérieur à une longueur fixe [1].

Appelons $a'b'$ un arc de (d) contenu, quel que soit n, dans ab_n et extrayons de la suite $f_n(z)$ une suite partielle convergeant unifor-

---

[1] Ce point est facile à établir. Posons $\log\varphi_n(z)=U_n+iV_n$; soient de même $\varphi(z)$ et $\log\varphi(z)=U+iV$ les fonctions correspondantes pour le domaine (D); la fonction U_n est nulle sur le contour formé par (γ_n) et $\lambda_n\mu_n$ et négative dans (D_n); la fonction U est nulle sur le contour (C) et négative dans (D); il en résulte que $U-U_n$ est nulle sur (γ_n) et négative sur $\lambda_n\mu_n$, donc $U-U_n<0$ dans (D_n). En un point de (γ_n) on a donc

$$\frac{dU}{dn}<\frac{dU_n}{dn},$$

en prenant la dérivée normale intérieure, comme le montre immédiatement une figure. Comme

$$\frac{dV_n}{ds}=-\frac{dU_n}{dn},$$

la dérivée $\frac{dV_n}{ds}$ étant prise sur (γ_n) dans le sens direct, on a, en allant de λ_n à μ_n

mément dans l'intérieur de (D), suite que nous appellerons encore

$$f_1(z),\quad f_2(z),\quad \ldots,\quad f_n(z),\quad \ldots.$$

Soit $\Phi_n(z')$ la fonction inverse de $z'=\varphi_n(z)$, posons $F_n(z')=f_n[\Phi_n(z')]$. La suite

$$F_1(z'),\quad F_2(z'),\quad \ldots,\quad F_n(z'),\quad \ldots$$

converge uniformément à l'intérieur de (d). $F_n(z')$ prend, sur ab_n, les mêmes valeurs que $f_n(z)$ prend sur $\lambda_n\mu_n$, donc la suite $F_n(z')$ converge uniformément vers α sur l'arc $a'b'$. Comme ces fonctions sont bornées dans (d), elles convergent uniformément vers α dans l'intérieur de (d) et en particulier au point o. Donc la suite $f_n(z)$ converge vers α au point O et comme ce point est arbitraire dans (D), la suite $f_n(z)$ converge uniformément vers α dans l'intérieur de (D).

D'ailleurs la suite $f_n(z)$ est une suite convergente partielle quelconque extraite de la suite primitive. Puisque toute suite partielle converge uniformément vers α dans (D), il en résulte que la suite primitive converge aussi uniformément dans (D) et le théorème est établi.

20. Supposons en particulier que toutes les fonctions $f_n(z)$ soient identiques entre elles : soit $f(z)$ leur valeur commune; cette fonction est partout égale à α. En d'autres termes, *si une fonction $f(z)$, holomorphe et bornée dans un domaine, converge uniformément vers α sur des coupures $\lambda_n\mu_n$ ayant pour limite un arc analytique $\lambda\mu$ de la frontière de ce domaine, cette fonction est identique à la constante α.*

---

sur l'arc (γ_n) et en appelant δV_n la variation de V_n,

$$\delta V_n = \int_{(\gamma_n)} -\frac{dU_n}{dn}\,ds < \int_{(\gamma_n)} -\frac{dU}{dn}\,ds.$$

La dernière intégrale a pour limite δV lorsque n croît indéfiniment : donc l'angle $\widehat{aob_n}$ ou $2\pi - \delta V_n$ est supérieur à $2\pi - \delta V$ ou $\widehat{aob}$, a et b étant les points correspondants aux points λ et μ dans la représentation conforme de (D) sur (d). On voit d'ailleurs aisément que $\widehat{aob_n}$ a pour limite $\widehat{aob}$.

Nous n'avons pas supposé ici que la frontière (C) tout entière est formée d'arcs réguliers et analytiques, car on peut évidemment remplacer une frontière simple par une frontière voisine comprenant l'arc $\lambda\mu$ et un autre arc analytique.

Nous aurons bientôt l'occasion d'appliquer le cas particulier signalé. Voici d'abord des applications du théorème principal et des conséquences précédentes.

21. Considérons de nouveau un angle AOB et une fonction $f(z)$ bornée dans le secteur limité par les côtés OA, OB et l'arc de cercle A_0B_0 de centre O : *Si $f(x)$ tend vers α sur le rayon* OA, *cette fonction tend uniformément vers α dans tout secteur* AOB', *tel que* OB' *soit intérieur à* AOB. Reprenons la construction indiquée au paragraphe **10** : nous traçons les arcs de cercles de rayons 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^n}$, ..., et nous désignons par Δ_n le quadrilatère curviligne $A_nA_{n+3}B_{n+3}B_n$, par Δ'_n le quadrilatère curviligne $A_{n+1}A_{n+2}B'_{n+2}B'_{n+1}$; nous posons encore

$$f_n(z) = f\left(\frac{z}{2^{n-1}}\right).$$

Les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément vers α sur le segment A_1A_4 qui fait partie de la frontière du domaine Δ_1, donc elles convergent uniformément vers α dans le domaine Δ'_1 qui n'a en commun avec la frontière de Δ_1 que les points du segment A_2A_3 intérieur au segment A_1A_4. En d'autres termes, on aura pour $n > p$ et pour tous les points de Δ'_1, frontière comprise,

$$|f_n(z) - \alpha| < \varepsilon.$$

Or, lorsque z est dans Δ'_1, $|z|$ est inférieur à $\frac{1}{2}$ et $\left|\frac{z}{2^{n-1}}\right|$ est inférieur à $\frac{1}{2^p} = \delta$; donc si

$$|z| < \delta,$$

on a

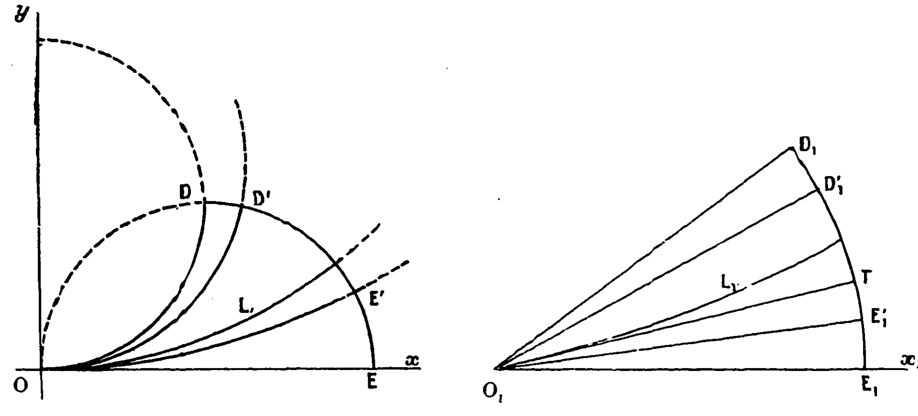
$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon,$$

pourvu que z soit dans l'angle AOB' ou sur les côtés de cet angle.

22. Remplaçons maintenant le rayon OA par une courbe L contenue dans AOB, tangente en O au rayon OA et dont nous supposerons que toute portion ne contenant pas le point O est formée d'un nombre fini d'arcs réguliers et analytiques. Nous définirons, comme au paragraphe **11**, les arcs $L_{n+1}L_{n+2}$ et les arcs λ_n qui leur correspondent par homothétie dans le domaine Δ'_1. Ici encore les deux droites OA et OA′ sont confondues. Les fonctions $f_n(z)$ prennent, sur les arcs λ_n, des valeurs convergeant uniformément vers α; d'autre part, les arcs λ_n convergent uniformément vers le segment A_2A_3; il en résulte que les fonctions $f_n(z)$ convergent uniformément vers α dans le domaine Δ''_n, frontière comprise, ce domaine étant limité par le segment $B'_2B'_3$ de la droite OB′, par les arcs de cercle B'_2A_2, B'_3A_3, limités aux points de rencontre avec la courbe λ_n et par cette courbe elle-même. Ce domaine est homothétique du domaine $A_{n+1}A_{n+2}L_{n+2}L_{n+1}$; on en conclut que $f(z)$ converge uniformément vers α dans l'angle formé par la droite OB′ et la courbe L.

23. Étudions maintenant ce qui se passe entre la courbe L et la demi-droite OA. Supposons d'abord que la courbe L ait, au point O,

Fig. 2.



une courbure finie et non nulle; soient ρ et ω les coordonnées polaires d'un point M de L, en prenant OA comme axe polaire Ox; le rayon de courbure en O est la limite R de $\frac{\rho}{2\omega}$ pour ω tendant vers zéro et nous supposons que R est différent de zéro. Considérons (*fig.* 2) le domaine ODE, limité par Ox, l'arc de cercle OD appartenant à un cercle tangent en O à Ox et de rayon inférieur à R, l'arc de cercle DE appartenant à un cercle quelconque tangent en O à Oy. Nous pouvons toujours supposer, en faisant au besoin une homothétie de centre O, que R est supérieur à $\frac{1}{2}$ et supposer que les arcs OD et DE appartiennent à des cercles de rayon $\frac{1}{2}$.

La transformation conforme

$$z_1 = e^{-\frac{1}{z}}$$

fait correspondre au point (ρ, ω) le point (ρ_1, ω_1) et l'on a

$$\rho_1 = e^{-\frac{\cos\omega}{\rho}},$$
$$\omega_1 = \frac{\sin\omega}{\rho}.$$

Les cercles tangents en O à Ox, pour lesquels $\frac{\sin\omega}{\rho}$ est constant, se transforment en droites issues de la nouvelle origine O_1; les cercles tangents en O à Oy, pour lesquels $\frac{\cos\omega}{\rho}$ est constant, se transforment en cercles de centre O_1. Ox correspond à Ox_1, l'arc OD à un segment O_1D_1 de la demi-droite $\omega_1 = 1$; l'arc DE, à un segment D_1E_1 de la circonférence $\rho_1 = \frac{1}{e}$.

Le triangle curviligne ODE est représenté d'une manière conforme sur le triangle $O_1D_1E_1$ et la courbe L a pour transformée une courbe L_1, tangente en O à une droite O_1T d'argument $\frac{1}{2R} < 1$. Supposons que $f(z)$ ait pour limite α lorsque z tend vers zéro sur la courbe L. La fonction $F(z_1) = f\left(-\frac{1}{\log z_1}\right)$ correspondante tend vers α sur la courbe L_1. On en déduit que $F(z_1)$ tend uniformément vers α dans tout angle $D'_1O_1E'_1$, intérieur à $D_1O_1E_1$, et contenant OT; il en résulte que $f(z)$ tend uniformément vers α dans tout domaine D'OE' limité par des arcs de cercles tangents en O à Ox et de rayons $R_1 < R < R_2$ arbitrairement choisis.

Si $f(z)$ n'a pas une limite unique, la même transformation prouve que l'ensemble des valeurs limites exceptionnelles est le même pour toute courbe contenue dans la région $D'OE'$. On a donc la proposition suivante :

Soit L *une courbe intérieure à l'angle* AOB, *tangente en* O *à* OA *et admettant en ce point un rayon de courbure* R *non nul :*

1° *Si $f(z)$ tend vers α sur la courbe* L, *$f(z)$ tend uniformément vers α dans l'angle curviligne* $D'O'E'$ *dont les côtés sont des arcs de cercle tangents en* O *à* OA *et de rayons* R_1 *et* R_2 *tels que* $R_1 > R > R_2$.

2° *L'ensemble des valeurs limites exceptionnelles est le même pour toutes les courbes contenues dans l'angle* $D'O'E'$ *et aboutissant en* O.

24. Supposons maintenant que $R = \infty$ et que la courbe L ait avec OA un contact d'ordre supérieur au premier. Si le contact est d'ordre p, le rapport $\frac{\rho^p}{\omega}$ a une limite finie non nulle. La représentation conforme

$$z_1 = z^p$$

fait correspondre au point (ρ, ω) le point (ρ_1, ω_1) et l'on a

$$\rho_1 = \rho^p, \qquad \omega_1 = p\omega;$$

à la courbe L correspond une courbe L_1 pour laquelle le rapport $\frac{\rho_1}{\omega_1}$ a une limite finie non nulle; cette courbe est tangente en O_1 à $O_1 x_1$ et sa courbure en O_1 n'est ni nulle ni infinie. Nous sommes donc ramenés au cas précédent. Si la courbe L a pour équation

$$\rho^p = a\omega[1 + \varepsilon(\omega)],$$

$\varepsilon(\omega)$ étant infiniment petit avec ω et a une constante positive; le théorème est applicable au domaine curviligne limité par les courbes

$$\rho^p = a_1\omega[1 + \varepsilon_1(\omega)],$$
$$\rho^p = a_2\omega[1 + \varepsilon_2(\omega)],$$

$\varepsilon_1(\omega)$, $\varepsilon_2(\omega)$ étant des infiniment petits avec ω et $a_1 > a > a_2$.

On arriverait aux mêmes résultats si R était nul et si la courbe L avait avec OA un contact d'ordre inférieur à un.

Je laisse de côté le cas où le contact serait d'un ordre non fini (¹).

25. Nous avons supposé dans tout ce qui précède que la courbe L avait en O un rayon de courbure déterminé, c'est-à-dire que le rapport $\frac{\rho}{2\omega}$ avait une limite lorsque ω tend vers zéro. Il peut ne pas en être ainsi et ce rapport peut avoir une plus grande limite R_M et une plus petite limite R_m.

Si R_m n'est pas nul ni R_M infini, il n'y a rien à changer aux raisonnements que nous avons faits; il suffit de choisir des cercles de rayons R_1 et R_2 tels que $R_1 > R_M$ et $R_2 < R_m$.

CHAPITRE III.

CORRESPONDANCE ENTRE LES POINTS DES CONTOURS.

26. Nous désignerons par (C) la frontière du domaine (D) dont on fait la représentation conforme sur le cercle (d) de rayon un, limité par la circonférence (c). Nous supposons que la représentation fait correspondre à un point O de (D) le centre o de d et que, à une direction donnée partant de O correspond une direction donnée partant de o. Soit

$$Z = f(z),$$

la fonction qui fait cette représentation ; $f(z)$ est holomorphe dans (d) et ne prend pas deux fois la même valeur à l'intérieur de ce cercle. La fonction inverse

$$z = F(Z)$$

(¹) Quelques cas particuliers des propositions établies ici ont déjà été démontrés par M. Lindelöf [*Sur un principe général de l'Analyse*, etc. (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XLVI, 1915, p. 12)].

est holomorphe dans l'intérieur de (D) et ne prend pas deux fois la même valeur.

Soit $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ une suite infinie de points ayant pour limite un point Z_0 de (C). Tout point limite de la suite $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ des points correspondants est situé sur (c). Car si un point limite z'_0 était intérieur à (d), il lui correspondrait un point Z'_0 intérieur à (D) qui serait un point limite des Z_n. Inversement, si une suite infinie $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ a pour limite un point z_0 de (c), les points limites de la suite correspondante $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ sont tous sur (C).

27. On dit qu'un point A de (C) est un point *accessible* s'il existe une courbe simple (L) aboutissant en A et dont tous les points, sauf A, sont intérieurs à (D). Cette courbe unit A à un point quelconque intérieur à (D), le point O par exemple. On peut supposer que toute portion OA′ de cette ligne est composée d'un nombre fini de segments rectilignes ou analytiques. Soit, en effet, $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, une suite de points situés sur la ligne simple (L) et ayant A pour seul point limite et supposons que le point A_{n+1} ne soit pas sur l'arc OA_n, quel que soit n. On peut, autour de l'arc OA_1, construire un domaine simplement connexe composé de points intérieurs à (D); on pourra par exemple considérer un cercle dont le rayon ε est inférieur à la distance non nulle de OA_1 et de (C) et dont le centre est sur OA_1 : le domaine balayé par ce cercle sera le domaine cherché. Dans ce domaine, on joindra O à A_1 par une courbe analytique ou une ligne polygonale. On opérera de même sur l'arc $A_1 A_2$, puis sur les arcs $A_2 A_3, \ldots, A_n A_{n+1}, \ldots$. La ligne (L′) ainsi obtenue répondra aux conditions imposées.

Tous les points d'une courbe fermée simple (C) ou courbe de Jordan sont accessibles. Mais tous les points frontières d'un domaine ne sont pas accessibles. Cependant, l'ensemble des points accessibles de la frontière (C) d'un domaine est partout dense sur (C). Soit, en effet, B un point quelconque de (C), je dis qu'il existe des points accessibles aussi près que l'on veut de B. Donnons-nous un nombre ε arbitrairement petit; il existe dans le voisinage de B un point B′ intérieur à (D) et dont la distance à B est inférieure à ε. Traçons le cercle de centre B et passant par B′. Les points de (C) situés sur la circonférence forment un ensemble fermé et B′ est à l'intérieur d'un arc AA′ contigu à cet ensemble dont les extrémités A et A′ sont des points frontières. Les points A et A′ sont accessibles, puisqu'on peut les réunir au point B′ par des arcs de cercle et leur distance à B est inférieure à ε.

28. Soit A ou Z_0 un point accessible de (C) et (L) une courbe simple aboutissant au point A et dont tous les points, sauf A, sont intérieurs à (D). Lorsque Z décrit (L), le point z décrit une courbe (l). A toute suite infinie de points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ situés sur (L) et ayant pour limite Z_0, correspond une suite infinie de points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ situés sur (l) et dont les points limites sont situés sur (c). Je dis que les suites z_n ont un seul point limite z_0. Supposons, en effet, que l'on puisse obtenir deux points limites z_0 et z'_0 sur (c) et correspondant respectivement aux suites $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ et $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_n, \ldots$. On peut toujours supposer, en supprimant des points, si cela est nécessaire, que, lorsqu'on se déplace sur (L) en allant vers A, les points Z et Z′ sont rencontrés dans l'ordre suivant :

$$Z_1, Z'_1, \quad Z_2, Z'_2, \quad Z_3, Z'_3, \quad \ldots, \quad Z_n, Z'_n, \quad \ldots,$$

et que l'on a, pour toute valeur de n,

$$|z_n - z_0| < \varepsilon, \qquad |z'_n - z'_0| < \varepsilon,$$

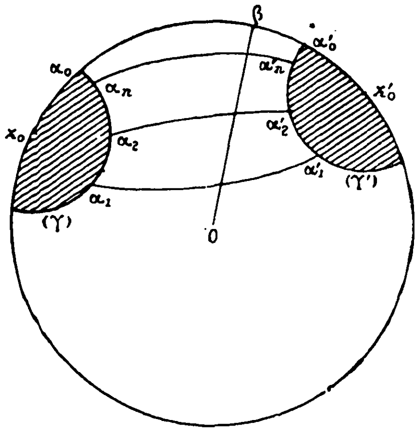
ε étant arbitrairement petit et

$$z_n = F(Z_n), \qquad z'_n = F(Z'_n).$$

Marquons sur le cercle (c) les points z_0 et z'_0 et traçons les arcs de cercle (γ) et (γ') intérieurs à (d), de centres z_0 et z'_0 et de rayon ε. Quand Z décrit l'arc $Z_1 Z'_1$, z décrit un arc de (l) qui va d'un point du segment hachuré voisin de z_0 à un point du segment hachuré voisin de z'_0 ; il y a donc un arc $\alpha_1\alpha'_1$ de la courbe (l) qui joint un point α_1 de l'arc (γ) à un point α'_1 de l'arc (γ'). De même, l'arc $Z_2 Z'_2$ nous donne un arc $\alpha_2\alpha'_2, \ldots$; l'arc $Z_n Z'_n$ nous donne un arc $\alpha_n\alpha'_n, \ldots$. Deux arcs $\alpha_p\alpha'_p$ et $\alpha_q\alpha'_q$ ne se coupent pas, si l'on a supposé que la courbe (L) ne se coupe pas elle-même. Les points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ont donc pour limite un point α_0 de (c) situé sur (γ), puisque $f(\alpha_n)$ a pour limite Z_0, comme Z_n et Z'_n. De même $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n, \ldots$ ont pour limite α'_0 sur (c) et (γ').

Toute suite infinie de points $z''_1, z''_2, \ldots, z''_n, \ldots$, telle que z''_n soit sur l'arc $\alpha_n\alpha'_n$ a pour limite un point de l'arc de cercle $\alpha_0\alpha'_0$; en effet, le

Fig. 3.



point Z''_n est situé sur l'arc $Z_nZ'_n$ et a pour limite Z_0. Réciproquement, tout point β de $\alpha_0\alpha'_0$ est un point limite ainsi obtenu; en effet, joignons β au point O par une courbe simple, le rayon $O\beta$ par exemple, ou un arc de cercle. Cette courbe rencontre les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ en des points z''_n qui ont nécessairement pour point limite le point β. Il résulte de ce qui précède que les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ ont pour limite $\alpha_0\alpha'_0$. La limite est d'ailleurs uniforme : en d'autres termes, traçons le cercle de rayon $1 - \varepsilon$, ε étant arbitrairement petit; ce cercle coupe (γ) en un point α voisin de α_0 et (γ') en un point α' voisin de α'_0. Si n est assez grand, $\alpha_n\alpha'_n$ est tout entier à l'intérieur du quadrilatère curviligne $\alpha\alpha_0\alpha'_0\alpha'$, car, s'il en était autrement, il existerait un nombre ε et une infinité de valeurs de n,

$$n_1, \quad n_2, \quad \ldots, \quad n_p, \quad \ldots,$$

telles que l'arc $\alpha_n\alpha'_n$ ait un point Z''_{n_p} extérieur au quadrilatère : la suite z''_{n_p} aurait un point limite non situé sur le cercle (c), ce qui est impossible.

Il est donc établi que les arcs $\alpha_n\alpha'_n$ convergent uniformément vers l'arc $\alpha_0\alpha'_0$. D'autre part, les valeurs de $f(z)$ sur ces arcs convergent uniformément vers la constante Z_0; il en résulterait, d'après le théorème du paragraphe **18**, que $f(z)$ est constante dans (d). On ne peut donc pas supposer qu'il existe deux points z_0 et z'_0. Donc, lorsque Z décrit la courbe (L) et s'approche de Z_0, le point z décrit une courbe (l) qui aboutit à un point unique z_0 du cercle (c). Puisqu'il existe une courbe aboutissant en z_0, sur laquelle $f(z)$ a une limite unique Z_0, on en déduit que $f(z)$ a pour limite Z_0, sur toute courbe intérieure à (d), aboutissant en z_0 et remplissant les conditions indiquées au paragraphe **23**. En particulier, $f(z)$ tend uniformément vers Z_0 dans tout angle de sommet z_0 et dont les côtés sont deux cordes du cercle (d).

Réciproquement, supposons que le point z_0 de (c) soit tel que $f(z)$ ait pour limite la constante Z_0 sur une courbe simple (l) intérieure à (d) et aboutissant en z_0. On sait que $f(z)$ tend alors vers Z_0 sur toute corde du cercle passant par z_0, ou toute courbe simple non tangente en z_0 du cercle et même sur certaines courbes tangentes au cercle en z_0, lorsque la courbe (l) a, avec le cercle (c), un contact d'un ordre déterminé. Je dis que le point Z_0, qui est sur la frontière (C) du domaine (D), est un point accessible. En effet, si z décrit, par exemple, le rayon Oz_0, le point Z décrit une courbe simple aboutissant en Z_0, dont tous les points, sauf Z_0, sont intérieurs à (D). En résumé :

A un point accessible Z_0 de (C) correspond un point z_0 de (c) tel que $f(z)$ ait une limite unique Z_0 lorsque z tend vers z_0 sur un chemin quelconque intérieur à (d) et non tangent à (c). Réciproquement, si $f(z)$ a une limite unique Z_0 quand z tend vers z_0 sur un chemin quelconque intérieur à (d), tangent ou non à (c), Z_0 est un point accessible de (C).

29. Le point z_0 que nous faisons ainsi correspondre à un point Z_0 de (C) à l'aide du chemin (L) est-il déterminé d'une manière unique? En d'autres termes, si nous remplaçons le chemin (L) par un autre chemin (L'), la limite de z sera-t-elle le même point z_0 de la circonférence (c)? Nous pouvons toujours supposer que les chemins (L) et (L′) partent tous deux de O. Lorsqu'on suit le chemin (L) de O jusqu'à A d'affixe Z_0, le point z décrit une ligne (l) qui part de o et aboutit à z_0; lorsqu'on suit le chemin (L′) de O jusqu'à A, le point z décrit une ligne (l') qui part de o, et aboutit à z'_0. Supposons que z_0 et z'_0 soient distincts, alors les chemins (l) et (l') ont un dernier point commun intérieur lorsqu'on les suit à partir de o et il en est de même des chemins (L) et (L′) suivis à partir de O. On peut d'ailleurs toujours supposer que les chemins (L) et (L′) n'ont d'autres points communs que O et A, car, dans le cas contraire, on fera jouer au dernier point commun intérieur le rôle du point O.

La portion (Δ) du domaine (D) qui est limitée par les courbes (L) et (L′) est représentée d'une manière conforme par $z = F(Z)$, sur la portion (δ) du cercle (d) limitée par (l), (l') et l'arc (λ) d'extrémités z_0 et z'_0. Supposons que (Δ) ne contienne, à son intérieur, aucun point frontière de (D); dans ce cas, lorsque z tend vers un point de (λ), Z tend nécessairement vers Z_0. On en déduirait que $f(z)$ est une constante dans (δ), ce qui est impossible. Donc z_0 et z'_0 coïncident.

Supposons inversement que les points z_0 et z'_0 coïncident. On peut choisir pour (L) et (L′) des lignes polygonales ([1]), et supposer qu'aucun des points M, où les lignes se traversent, ne soit un sommet de (L) ni de (L′). Soient M_1, M_2, ..., M_n, ..., les points où se traversent les lignes (L) et (L′). Partons de O; suivons (L) jusqu'au point M_1, puis (L′) entre M_1 et M_2, de nouveau (L) entre M_2 et M_3, etc. Nous définissons ainsi une nouvelle ligne brisée (L_1). On définit de même une ligne brisée (L'_1) en suivant (L′) entre O et M_1, puis (L) entre M_1 et M_2, etc. Nous remplacerons ainsi (L) et (L′) par les deux lignes brisées (L_1), (L'_1) ne se traversant pas. En modifiant un peu ces lignes en leurs points communs, on en déduira deux nouvelles lignes (L_2), (L'_2) sans point commun et allant de O en A. Sur chacune des lignes (L_1), (L'_1), (L_2), (L'_2), la valeur $z = F(Z)$ a une limite unique z_0, lorsque Z tend vers Z_0. Cela résulte immédiatement du

---

([1]) Chacune de ces lignes brisées a tous ses points intérieurs à (D), sauf l'extrémité A. Toute portion de chacune de ces lignes, limitée par deux points intérieurs, n'a qu'un nombre fini de côtés. La construction de ces lignes est indiquée au paragraphe 27.

fait qu'il en est ainsi pour (L) et (L'). En résumé, si z_0 et z'_0 coïncident, on peut toujours supposer que (L) et (L') n'ont d'autres points communs que O et A, car, dans le cas contraire, on remplacerait ces lignes par (L_2) et (L'_2). La fonction $z = F(Z)$ fait la représentation conforme de (Δ) sur (δ) de manière que les points de (L) et (l) d'une part, les points de (L') et (l') de l'autre, se correspondent. D'ailleurs lorsque z tend vers z_0 sur un chemin quelconque intérieur à (δ), nous savons que Z tend vers la limite unique Z_0. Il en résulte que (Δ) ne contient pas d'autre point frontière que A. Donc :

Pour que deux chemins aboutissant à un même point accessible A *de* (c) *fassent correspondre à* A, *un même point* a *de* (c), *il faut et il suffit que le domaine* (Δ) *limité extérieurement par ces courbes ne contienne que le seul point frontière* A.

30. Dans le cas où il existe deux chemins (L) et (L') aboutissant en A et limitant un domaine (Δ) contenant un autre point frontière et par conséquent une infinité de tels points, ces deux chemins fournissent deux valeurs limites différentes z_0 et z'_0. Nous conviendrons dans ce cas de dédoubler le point A qui comptera deux fois comme point frontière. D'une manière générale un point A comptera autant de fois qu'il y a de chemins (L') conduisant à des valeurs z'_0 distinctes de z_0 et distinctes entre elles. Ces différents points A superposés seront, par convention, distincts. Supposons par exemple que (D) soit le domaine formé par les points intérieurs à une circonférence (C) de centre P, exception faite des points du rayon PQ supposé appartenir à la frontière. Chaque point A de PQ, sauf le point P, devra compter pour deux : on pourra imaginer que la frontière PQ est fournie par les deux bords d'une coupure. Soit encore un cercle (C) et le cercle (Γ) tangent intérieurement en un point A de (C) et de rayon moitié de celui de (C). Menons, dans le cercle (Γ), les cordes

$$AB_1,\ AB'_1;\quad AB_2,\ AB'_2;\quad \ldots,\quad AB_n,\ AB'_n;\quad \ldots,$$

faisant respectivement avec la tangente en A aux deux cercles les angles

$$+1, \quad -1; \qquad +\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}; \qquad \ldots, \qquad +\frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n}; \qquad \ldots.$$

Le domaine (D) sera formé par les points intérieurs à (C) qui n'appartiennent à aucune de ces cordes. Dans ce cas, le point A doit être compté une infinité de fois sur la frontière (C). Il lui correspond une infinité de points sur la circonférence (c).

31. Il résulte immédiatement de ce qui précède que deux points accessibles distincts Z_0 et Z'_0 ne peuvent fournir le même point z_0 de (c). Nous avons vu, en effet, que dans ce cas, le domaine (Δ) qui correspond à (δ) ne peut contenir qu'un seul point frontière. Donc :

A tout point accessible de la frontière (C) *de* (D) *correspond un point unique de la circonférence* (c). *A deux points accessibles distincts correspondent deux points différents de* (c).

32. Je vais maintenant établir la proposition suivante : soit Z_0 ou A un point accessible de (C) auquel correspond le point z_0 de (c); si une suite infinie de points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p, \ldots$ a pour limite unique Z_0, la suite des points correspondants $z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots$ a pour limite unique z_0. Nous supposons essentiellement que le point Z_0 n'est pas compté plusieurs fois sur la frontière ou que, s'il en est ainsi, on peut enfermer les points Z_p, sauf un nombre fini d'entre eux, dans un domaine (Δ) formé de points intérieurs à (D) et du seul point frontière Z_0.

Soit (L) une ligne polygonale joignant O à A à l'aide de points intérieurs à (D) [et intérieure à (Δ) si c'est nécessaire]. Traçons le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{n}$ (n entier). Soit A_n le dernier point de rencontre de (L) et de la circonférence, lorsqu'on se déplace de O vers A. Le point A_n intérieur à (D) appartient à un arc $B_nA_nB'_n$ de la circonférence dont les points intérieurs sont intérieurs à (D) et les extrémités B_n, B'_n appartiennent à la frontière (C). Les points B_n et B'_n sont accessibles et il leur correspond sur (c) les points b_n, b'_n ; à l'arc de cercle $B_nA_nB'_n$ correspond un arc de courbe (λ_n) dont les points intérieurs sont intérieurs à (d). La coupure $B_n A_n B'_n$ partage le domaine (D) en deux domaines simplement connexes (D_1) et (D_2). Le domaine (D_1) contient A sur sa frontière et ne contient pas O; le domaine (D_2) contient O dans son intérieur. Cela résulte aussitôt du fait que la courbe (L) partie du point O de (D_2), ne peut plus rentrer dans ce domaine à partir du point A_n, puisqu'elle ne rencontre plus l'arc $B_n B'_n$ et qu'elle n'a, avec la frontière de (D), d'autre point commun que le point A. La coupure (λ_n) partage le cercle (d) en deux domaines simplement connexes (d_1) et (d_2). Le domaine (d_1) contient a et ne contient pas o. Le domaine (d_2) contient o et ne contient pas a.

En donnant à n toutes les valeurs entières, nous définissons ainsi une suite infinie de coupures (λ_1), (λ_2), ..., (λ_n), ... Chacune d'elles entoure les suivantes. En effet, les coupures (λ_n) et (λ_{n+1}) ne se coupent pas dans (d) puisqu'elles correspondent à des arcs de cercles concentriques et de rayons $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}\cdot$ Comme les domaines (d_1) qui leur correspondent contiennent tous deux a, il en résulte que (λ_n) entoure (λ_{n+1}). Je dis que (λ_n) a pour limite le point a lorsque n croît indéfiniment. En effet, s'il n'en était pas ainsi, (λ_n) aurait pour limite un arc (λ_0) de la circonférence (c). Or on a, sur (λ_n),

$$|f(z) - Z_0| = \frac{1}{n};$$

donc, $f(z)$ aurait pour limite Z_0, uniformément, quand les coupures s'approcheraient de (λ_0). Cela est impossible, puisque $f(z)$ n'est pas constant.

Soit alors la suite Z_1, Z_2, ..., Z_p, ... admettant l'unique point limite Z_0 ou A. Pour chaque valeur de n, ces points, sauf un nombre fini d'entre eux, sont contenus dans (D_1); donc les points z_1, z_2, ..., z_p, ... sont contenus dans (d_1), sauf un nombre fini d'entre eux, et comme le domaine (d_1) se réduit à la limite au point z_0 ou a, il en résulte que la suite z_p a pour limite a.

33. Voici une conséquence immédiate de la proposition précédente : supposons que les points accessibles Z'_0, Z''_0, Z'''_0, ..., $Z^{(n)}_0$, ...

aient pour limite le point accessible Z_0 ; je dis que les points correspondants z'_0, z''_0, z'''_0, ..., $z_0^{(n)}$, ... ont pour limite le point z_0, correspondant à Z_0. Soit, en effet, ζ_0 un point limite de l'ensemble des points $z_0^{(n)}$. D'après ce qui précède, on peut choisir Z_n tel que ce point soit à une distance de $Z_0^{(n)}$ inférieure à $\frac{1}{n}$ et que le point correspondant z_n soit à une distance de $z_0^{(n)}$ inférieure aussi à $\frac{1}{n}$. Les points Z_n ont pour limite Z_0 et les points z_n ont pour limite ζ_0. D'après la proposition précédente, ζ_0 coïncide avec z_0. Comme ce raisonnement s'applique à tout point limite des $z_0^{(n)}$, la suite infinie de ces points a pour unique limite z_0.

Sur l'ensemble des points accessibles, z_0 est une fonction continue de Z_0.

34. Supposons que la courbe (C) qui limite le domaine (D) soit une courbe simple de Jordan. Tous les points Z_0 de cette courbe sont accessibles et lorsque Z_0 parcourt (C), z_0 est une fonction continue de Z_0. On peut représenter les affixes Z_0 des points de (C) par la formule $Z_0 = \varphi(\theta)$, θ étant un nombre réel qui varie de o à 2π ; on a $\varphi(o) = \varphi(2\pi)$ et les valeurs de $\varphi(\theta)$ pour deux valeurs quelconques de θ intérieures à l'intervalle $(o, 2\pi)$ sont distinctes. La fonction $\varphi(\theta)$ est une fonction continue de son argument puisque (C) est une courbe de Jordan. Le nombre z_0 est une fonction continue de Z_0, donc de θ et par suite, puisque $|z_0| = 1$, l'argument ψ de z_0 est une fonction continue de θ, $\psi(\theta)$. Cette fonction varie toujours dans le même sens de $\psi_1 = \psi(o)$ à $\psi_2 = \psi(2\pi)$; en effet, dans le cas contraire, ψ prendrait la même valeur pour deux valeurs distinctes θ' et θ'' et un même point z_0 correspondrait à deux points Z'_0 et Z''_0 de (C). Pour la même raison l'arc $\psi_1 \psi_2$ n'est pas supérieur à une circonférence. Il n'est pas inférieur non plus à une circonférence, car il y aurait un arc de la circonférence (c) qui ne serait pas parcourue par z_0. Or, lorsque z s'approche d'un point de cet arc, Z admet au moins un point limite sur (C) et ce point, étant accessible d'une seule manière, correspond à un point unique de (c). L'arc $\psi_1 \psi_2$ couvre donc toute la circonférence (c) ; en d'autres termes $|\psi_2 - \psi_1| = 2\pi$. Donc Z est, inversement, une fonction continue de z.

Ainsi, *lorsqu'un domaine* (D) *est limité par une courbe simple de Jordan, on peut faire la représentation conforme de ce domaine sur un cercle* (d) *de manière qu'à un élément de contact intérieur à* (D) *corresponde un élément de contact intérieur à* (d). *Les frontières des deux domaines se correspondent alors d'une manière univoque et continue.*

La démonstration de ce théorème fait simplement appel aux théorèmes classiques sur les fonctions analytiques.

35. Revenons au cas où la frontière (C) est quelconque. Le mode de raisonnement du paragraphe **32** a montré que si l'on a une suite infinie d'arcs simples $(\Lambda_1), (\Lambda_2), \ldots, (\Lambda_n), \ldots$, formant coupures pour (D) et ayant pour limite le seul point frontière Z_0, les arcs correspondants $(\lambda_1), (\lambda_2), \ldots, (\lambda_n), \ldots$ ont pour limites des points et non des arcs de (c), c'est-à-dire que, de toute suite infinie d'arcs, extraite des (λ_n), on peut extraire une suite nouvelle ayant pour limite un point z_0.

Soit z_0, un point quelconque de (c), et une suite infinie de points z ayant pour unique point limite z_0. On peut extraire de cette suite, une suite nouvelle $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ telle que la suite $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n, \ldots$ ait un seul point limite Z_0 sur (C). Nous pouvons, comme au paragraphe **32**, tracer des arcs de cercles (Λ_n) passant par Z_n et formant coupures pour (D). Les arcs de courbes correspondants ont pour unique point limite z_0, puisque l'arc (λ_n) passe par le point z_n et que la suite z_n a pour unique limite z_0. Les extrémités B_n, B'_n des coupures (Λ_n) sont des points accessibles de (C), donc les points b_n, b'_n correspondent à des points accessibles. Le point z_0 est un point limite de points correspondants à des points accessibles. Comme z_0 est arbitraire sur (c), on voit que l'ensemble des points z_0 correspondant à des points accessibles est partout dense sur (c).

36. Appelons E le domaine d'indétermination de $f(z)$ au point z_0, pour les valeurs de z intérieures à (d). Nous pouvons obtenir cet ensemble en traçant des cercles de centre z_0 et de rayons indéfiniment décroissants. L'ensemble E est la limite des domaines formés par les valeurs de $f(z)$ pour chacun des domaines intérieurs à la fois à (d) et à ces cercles. E est un ensemble continu formé de points frontières de (C). Nous l'appellerons un *bout* de cette frontière. Soit $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ une suite de points intérieurs à (d), ayant z_0 pour limite et tels que les valeurs Z_n correspondantes aient une limite unique Z'_0.

Supposons que l'on puisse tracer une infinité d'arcs de cercle (Λ_n) ayant leur centre en Z'_0, de rayons indéfiniment décroissants, tels que chacun d'eux forme coupure pour (D) de manière que la portion (D_2) du domaine (D), qui ne contient pas O et qui est obtenue à l'aide de (Λ_n), contienne une infinité de points Z_n. Le point Z'_0 est alors appelé, par M. Carathéodory, *point principal* du bout E. Un point Z''_0 appartenant à E qui ne possède pas cette propriété sera appelé un *point accessoire* du bout E.

Pour le point principal Z'_0, aux coupures (Λ_n) correspondent des arcs de courbes (λ_n) ayant pour limite z_0. En effet, (λ_n) est une coupure pour (d) et la portion (d_1) de (d), qui ne contient pas o, contient une infinité de points z_n et par suite z_0. Les différents domaines (d_1) sont emboîtés les uns dans les autres et ont pour limite z_0.

Menons, dans le cercle (d), le rayon oz_0. Ce rayon rencontre la courbe (λ_n) au moins en un point z'_n. La suite des points z'_n a pour limite z_0, tandis que la suite des valeurs $Z'_n = f(z'_n)$ a pour limite Z'_0. Ainsi, l'affixe Z'_0 d'un point principal relatif à z_0 est une des valeurs limites de $f(z)$ sur le rayon oz_0.

37. Réciproquement, toute valeur Z'_0, limite d'une suite infinie des valeurs de $f(z)$ sur le rayon oz_0 est un point principal. Cette réciproque a été établie par M. Lindelöf (¹). Je vais en donner une démonstration reposant sur les principes que nous avons utilisés dans ce travail.

Menons deux cordes $z_0 A$ et $z_0 B$ du cercle (d) également inclinées sur le rayon oz_0. Nous savons que dans l'angle $\widehat{Az_0B}$, l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ est le même sur toute courbe aboutissant en o. Soit Z'_0 une des valeurs limites de $f(z)$ sur le rayon. Nous avons vu que l'on peut, par des arcs de cercles de centre o, découper dans l'angle $\widehat{Az_0B}$ des quadrilatères curvilignes semblables tels que $f(z)$

(¹) *Sur un principe général de l'Analyse*, etc., p. 28.

converge uniformément vers Z'_0 à l'intérieur de ces quadrilatères. Il en résulte immédiatement que l'on peut tracer, à l'intérieur de ces quadrilatères, une suite infinie de cercles (μ'_1), (μ'_2), ..., (μ'_n), ..., homothétiques par rapport à z_0, dont les centres $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \ldots$ sont sur le rayon oz_0 et tels que, à l'intérieur du cercle (μ'_n), on ait

$$|f(z) - Z'_0| < \varepsilon_n,$$

la suite décroissante $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ ayant pour limite zéro.

La suite $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_n, \ldots$, correspondant à $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n, \ldots$, a pour limite le point Z'_0 de (C). Il faut démontrer que Z'_0 est un point principal. Admettons qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire qu'il soit impossible de trouver une infinité d'arcs de cercles de centre Z'_0, de rayons indéfiniment décroissants, formant coupures pour (D) et tels que chacun d'eux sépare O d'une infinité de points Z'_n. Il en résulte que lorsque le rayon d'un cercle (Γ) de centre Z'_0 est assez petit, aucune des coupures, en nombre fini ou infini, formées par les arcs de ce cercle ne possède la propriété précédente. Soit ρ le rayon de l'un de ces cercles; les points de (C) situés sur la circonférence forment un ensemble fermé et nous désignerons par (Σ_1), (Σ_2), ..., (Σ_n), ..., les arcs de cercle contigus à cet ensemble. A ces arcs de cercles correspondent des arcs de courbes (σ_1), (σ_2), ..., (σ_n), ... Puisque les arcs (Σ_n) appartiennent au cercle (Γ), aucun des arcs (σ_n) ne sépare o de z_0. D'ailleurs, aucun des arcs (σ_n) n'est fermé : chacun d'eux aboutit en deux points de la circonférence (c) correspondant aux extrémités accessibles de l'arc (Σ_n) correspondant à (σ_n).

Pour cette suite (σ_n), les ensembles limites se réduisent tous à des points, car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait extraire de la suite (σ_n) une nouvelle suite (σ'_n) admettant comme limite les points d'un arc (σ) de la circonférence (c). Les arcs de cercle (Σ'_n) correspondants sont des arcs contigus à l'ensemble fermé des points de (C) situés sur le cercle (Γ). On peut extraire de la suite (Σ'_n), une suite nouvelle (Σ''_n) ayant pour limite un point unique Z_0 de (C) situé sur la circonférence (Γ). Les courbes (σ''_n) correspondantes ont encore (σ) pour limite et, z étant pris sur ces courbes, $f(z)$ a pour limite la constante Z_0. Nous savons que cela est impossible si (σ) ne se réduit pas à un point.

Appelons domaine (σ_n) celui des deux domaines en lesquels (d) est partagé par la coupure (σ_n), qui ne contient pas o. Il résulte de ce qui précède que, si p est un point quelconque intérieur à (d), il n'y a qu'un nombre fini de domaines (σ_n) contenant le point p.

Prenons ε_1 inférieur à ρ : je dis que le cercle (μ'_1) est tout entier à l'intérieur d'un domaine (σ_n). En effet, le centre z'_1 est à l'intérieur de l'un de ces domaines : supposons en effet le contraire, et traçons le cercle (c') de centre o et passant par z'_1. Il n'y a qu'un nombre fini d'arcs (σ_n) rencontrant ce cercle et aucun des domaines (σ_n) correspondant ne contient z'_1 par hypothèse. On peut donc tracer un chemin l joignant o à z'_1 et ne rencontrant aucune courbe (σ_n). La courbe (L) correspondante joint alors les deux points O et Z'_1 et ne rencontre aucun arc (Σ_n); elle ne rencontre donc pas le cercle (Γ). Mais Z'_1 est à l'intérieur du cercle puisque $|Z'_0 - Z'_1| < \varepsilon_1 < \rho$ et O est, par hypothèse, à l'extérieur de (Γ); il y a donc contradiction et z'_1 appartient à un domaine (σ_n) que nous appellerons (σ'_1). Le point z'_1 est d'ailleurs à l'intérieur du domaine puisque sur l'arc (σ'_1), on a $|Z - Z'_0| = \rho > \varepsilon_1$. D'ailleurs, le cercle (μ'_1) est tout entier à l'intérieur de (σ'_1), car s'il en sortait, il y aurait un point de ce cercle sur la frontière (σ'_1) [puisque les points de (μ'_1) sont tous intérieurs à (d)], et cela est impossible pour la même raison que pour le point z'_1.

Le cercle (μ'_1) est donc tout entier à l'intérieur du domaine (σ'_1). Par hypothèse, le domaine (σ'_1) ne contient pas z_0; il y a, par suite, sur le rayon Oz_0, des points z'_n et des cercles (μ'_n) extérieurs à ce domaine (σ'_1). Nous pouvons toujours supposer que (μ'_2) est le premier de ces cercles en supprimant, s'il le faut, des cercles intermédiaires. Le cercle (μ'_2) est alors intérieur à un domaine (σ'_2) *nécessairement distinct* de (σ'_1) et ainsi de suite. Nous définirons une suite infinie de domaines distincts

$$(\sigma'_1), \quad (\sigma'_2), \quad \ldots, \quad (\sigma'_n), \quad \ldots.$$

tels que le domaine (σ'_n) contienne (μ'_n) tout entier à son intérieur. De la suite (σ'_n) extrayons une suite (σ''_n) telle que les arcs de cercle correspondants (Σ''_n) aient une limite unique Z_0. Nous aurons alors une suite de domaines

$$(\sigma''_1), \quad (\sigma''_2), \quad \ldots, \quad (\sigma''_n), \quad \ldots,$$

contenant respectivement les cercles

$$(\mu''_1),\quad (\mu''_2),\quad \ldots,\quad (\mu''_n),\quad \ldots$$

à leur intérieur et tels que lorsque z est sur l'arc (σ''_n), $f(z)$ tende uniformément vers Z_0.

Je dis qu'un tel résultat est impossible. Par une homothétie de centre z_0 amenons tous les cercles (μ''_n), qui sont homothétiques par rapport à z_0, à coïncider avec un même cercle (μ) de centre o. Ce cercle (μ) sera intérieur à tous les domaines (s_n) résultant par homothétie des domaines (σ''_n). Appelons a_n et b_n les deux points de la frontiere de (s_n) qui correspondent aux deux points de rencontre de l'arc (σ''_n) avec le cercle (c); l'arc de cercle $a_n b_n$ correspondra à l'arc du cercle (c) qui fait partie de la frontière du domaine (σ''_n).

Faisons maintenant la représentation conforme du domaine (s_n) sur le cercle (γ) de rayon 1 du plan des ζ de manière que les points a_n et b_n correspondent à deux points α et β pris sur la circonférence (γ). Soit $z = \varphi_n(\zeta)$ la fonction qui fait cette représentation et ζ_n le point correspondant à $z = 0$. Je dis que tous les points ζ_n sont complètement intérieurs à (γ), c'est-à-dire qu'aucun point limite des ζ_n n'est sur la circonférence (γ). Dans le cas contraire, nous pourrions trouver une suite infinie $\zeta_{p_1}, \zeta_{p_2}, \ldots, \zeta_{p_n}, \ldots$, extraite des ζ_n et telle que ζ_{p_n} ait pour limite un point ζ de la circonférence (γ). Des fonctions $\varphi_{p_n}(\zeta)$ correspondantes, on peut extraire une suite $\varphi_{q_n}(\zeta)$ ayant pour limite une fonction $\varphi(\zeta)$, laquelle fait la représentation conforme de l'intérieur de (γ) sur un domaine (s) formé des points complètement intérieurs aux (s_{q_n}). Le point o appartient nécessairement au domaine (s) puisque les cercles (μ) sont intérieurs à tous les (s_n); il lui correspond, à l'aide de la fonction $\varphi(\zeta)$, un point ζ_0 intérieur au cercle (γ). Il en résulte que les points ζ_{q_n} qui font partie de la suite ζ_{p_n} auraient pour limite ζ_0 et non ζ. Cette contradiction établit notre proposition.

Considérons maintenant la fonction $f(z) - Z_0 = g(z)$ qui prend sur les arcs (σ''_n), des valeurs dont le module tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Par les transformations précédentes, il lui correspond des fonctions $h_n(\zeta)$ qui, sur l'un des arcs $\alpha\beta$, prennent des valeurs de module indéfiniment décroissant. Comme les $h_n(\zeta)$ sont bornées dans (γ), il en résulte que $h_n(\zeta)$ a pour limite zéro dans tout domaine intérieur à (γ) et cette limite est atteinte uniformément. Enfermons les points ζ_n dans un tel domaine, on voit que $h_n(\zeta_n)$ a pour limite zéro; mais $h_n(\zeta_n)$ a la même valeur que $g(z)$ au point z'_n, c'est-à-dire $f(z'_n) - Z_0$ ou $Z'_n - Z_0$. Ainsi $Z'_n - Z_0$ tendrait vers zéro; mais ce nombre a pour limite $Z'_0 - Z_0$; il en résulterait que cette limite est nulle, ce qui est impossible puisque son module est égal à ρ.

La proposition est démontrée : Z'_0 est un point principal.

38. Soient A et B, deux valeurs limites sur le rayon Oz_0 et les suites de nombres

$$z'_1,\quad z'_2,\quad \ldots,\quad z'_n,\quad \ldots,$$
$$z''_1,\quad z''_2,\quad \ldots,\quad z''_n,\quad \ldots,$$

ayant respectivement pour limite A et B. Appelons ρ_n la distance $z_0\,z'_n$ et r_n la distance $z_0\,z''_n$. Nous supposons que la suite

$$r_1,\quad \rho_1,\quad r_2,\quad \rho_2,\quad \ldots,\quad r_n,\quad \rho_n,\quad \ldots$$

soit décroissante. Nous avons vu au paragraphe **14** que le rapport $\frac{\rho_n}{r_n}$ a pour limite zéro quand n croît indéfiniment. Par chacun des points z'_n ou z''_n passe une coupure (λ'_n) ou (λ''_n) séparant le point z_0 du point o : on peut donner de la remarque qui précède un énoncé ne faisant intervenir que ces coupures [1], mais ce dernier énoncé n'est que l'application au cas qui nous occupe de la proposition générale établie au paragraphe **14**.

39. Nous avons vu que l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$, au point P, d'affixe z_0, est le même sur toute corde issue de z_0 et plus généralement sur toute courbe passant en z_0 et non tangente à la circonférence en ce point. Appelons E_0 l'ensemble des valeurs limites ainsi obtenues et F l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ qui ne sont pas obtenues sur le rayon. On a

$$E = E_0 + F.$$

---

[1] *Cf.* LINDELÖF, *Sur un principe général de l'Analyse*, etc., p. 32.

E_0 est l'ensemble des affixes des points principaux relatifs à z_0; F est l'ensemble des affixes des points accessoires. En particulier, E_0 peut se réduire à un point unique Z'_0 qui est alors accessible.

40. Soit $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ une suite infinie d'arcs de courbes intérieures à (d) et dont les contacts avec le cercle (c) au point P sont respectivement d'ordre $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Soient $E_0, E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ les ensembles formés par les valeurs limites de $f(z)$ sur ces arcs de courbes que nous supposons situés d'un même côté du diamètre du cercle passant en P.

L'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur les arcs $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$, ne décroît jamais lorsque l'ordre du contact augmente; en d'autres termes, on a les inégalités :

$$E_0 \leqq E_1 \leqq E_2 \leqq \ldots \leqq E_n \ldots.$$

Nous pouvons, par une première représentation conforme, remplacer le cercle (d) par le demi-plan situé au dessus de la tangente Px à ce cercle, le point P coïncidant avec son homologue; les courbes $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$ deviennent des courbes $l'_0, l'_1, \ldots, l'_n, \ldots$ ayant avec Px des contacts d'ordres $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$. Soit (δ') le domaine limité par un cercle tangent en P à Px et laissant l_1 à son extérieur, la droite Px elle-même et un arc de cercle normal à Px au point P. Ce domaine est un triangle curviligne que l'on peut, par la transformation conforme du paragraphe **23**, remplacer par un secteur circulaire (δ'') de centre P dont un des rayons sera Px. Les courbes $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n, \ldots$ deviennent des courbes $l''_1, l''_2, \ldots, l''_n, \ldots$, et la courbe l''_1 n'est pas tangente à Px. Soit $F(\zeta)$, la fonction déduite de $f(z)$ par la représentation conforme qui substitue au plan des Z, le plan des ζ où est tracé le secteur (δ''). Les valeurs limites de $F(\zeta)$ sur l''_1 sont celles de E_1. Les points correspondants du plan des Z sont principaux pour le domaine (Δ) homologue de (δ''). Il y a des courbes σ'''_n, tracées dans (δ''), séparant P du bord circulaire du secteur et se réduisant à la limite à P, sur lesquelles $F(\zeta)$ a pour limite une valeur Z_1 de E_1.

Comme $l''_2, l''_3, \ldots, l''_n, \ldots$ rencontrent ces courbes, la valeur Z_1 fait partie des ensembles $E_2, E_3, \ldots, E_n, \ldots$.

On raisonnerait de même en partant d'une courbe l_n et en opérant les transformations indiquées aux paragraphes **23** et **24**. Par conséquent, une valeur limite obtenue sur une courbe ayant en P un contact déterminé avec (c), sera obtenue aussi sur tout arc dont le contact en P est d'ordre supérieur à celui de la première courbe.