JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. BARRAU

**Mouvement algébriques dans le plan**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 7e série*, tome 3 (1917), p. 55-76.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1917_7_3__55_0>

# *Mouvements algébriques dans le plan;*

PAR J.-A. BARRAU,

à Gröningen.

**1.** La position d'un *plan mobile* $(x, y)$ dans un *plan fixe* $(X, Y)$ est donnée par

$$X = xc + ys + a, \tag{1}$$

$$Y = xs + yc + b, \tag{2}$$

où

$$c = \cos\varphi, \qquad s = \sin\varphi;$$

donc

$$c^2 + s^2 = 1. \tag{3}$$

Un mouvement est déterminé si $s$ et $c$, satisfaisant toujours la condition (3), $a$ et $b$ sont connues en fonction du temps $t$, ou, après élimination de $t$, c'est-à-dire passant de la cinématique à la géométrie cinématique, si $s$, $c$, $a$, $b$ parcourent une suite continue de valeurs qu'on peut supposer donnée par deux nouvelles relations :

$$f_1(c, s, a, b) = 0, \tag{4}$$

$$f_2(c, s, a, b) = 0. \tag{5}$$

La trajectoire

$$F(X, Y) = 0$$

du point

$$x = x_1, \qquad y = y_1$$

du plan mobile dans le plan fixe est obtenue par l'élimination de $c$, $s$, $a$, $b$ dans les équations (1), (2), (3), (4), (5).

On peut considérer la suite de valeurs en question comme une *courbe* dans un espace à quatre dimensions, l'*espace cinématique*, en prenant $c$, $s$, $a$, $b$ comme coordonnées par rapport à un système orthogonal OC, OS, OA, OB. Cette courbe sera l'intersection des trois hypersurfaces (3), (4), (5), dont (3) est la même pour chaque mouvement. L'étude des mouvements dans le plan revient donc à celle des *courbes représentantes* qu'on peut tracer dans cette hypersurface

$$c^2 + s^2 = 1,$$

que nous appellerons le *bicylindre cinématique*.

Si $f_1$ et $f_2$ sont algébriques, leur intersection avec le bicylindre sera algébrique et les trajectoires de tous les points deviendront aussi algébriques. Si cette intersection dégénère, chaque courbe partielle sera la représentante d'un mouvement algébrique correspondant : *la classification des mouvements algébriques dans le plan équivaut à celle des courbes algébriques situées dans le bicylindre cinématique.*

**2.** Le bicylindre cinématique peut être regardé comme un *bicône*, dont la *droite-sommet*, commune à tous les *plans générateurs*, est la droite à l'infini $A_\infty B_\infty$ du plan axial OAB. Chaque plan générateur contient un point du *cercle directeur*

$$c^2 + s^2 = 1,$$

situé dans OCS.

La section de l'espace à l'infini avec le bicylindre est composée de deux plans générateurs passant par les points cycliques de OCS.

La section avec un espace linéaire ordinaire $E_3$ est :

Un couple de plans, réels, imaginaires ou confondus, si $E_3$ passe par $A_\infty B_\infty$;

Un cylindre de révolution, si $E_3$ passe par $C_\infty B_\infty$;

Un cylindre elliptique dans le cas général.

Une section plane est :

La droite $A_\infty B_\infty$ comptée double, si le plan contient cette droite ;

Un couple de droites, réelles, imaginaires ou confondues, si le plan a un point commun avec $A_\infty B_\infty$;

Un cercle, si le plan passe soit par $C_\infty S_\infty$, soit par une autre droite à l'infini qui est *parallèle de Clifford* avec $A_\infty B_\infty$ par rapport à la quadrique absolue à l'infini

$$c^2 + s^2 + a^2 + b^2 = 0;$$

une ellipse dans le cas général.

Pour reconnaître le cas circulaire, remarquons que $A_\infty B_\infty$ et $C_\infty S_\infty$ sont réciproques polaires par rapport à la quadrique absolue; elles sont donc un couple d'arêtes opposées d'un tétraèdre dont les deux autres couples d'arêtes sont génératrices des deux réglées de la quadrique.

Les droites d'une congruence linéaire appuyées sur un de ces derniers couples composent un système de parallèles de Clifford, auquel appartiennent, dans les deux cas, $A_\infty B_\infty$ et $C_\infty S_\infty$. Or, un plan ayant comme droite à l'infini une telle parallèle donne une intersection avec le bicylindre cinématique contenant les points d'appui de cette parallèle, c'est-à-dire les points cycliques du plan; cette intersection est donc un cercle.

Chacun des deux systèmes de plans à section circulaire est *isogonal*, cela veut dire que les deux angles de position formés par deux plans quelconques du système sont égaux.

Les équations des plans des deux systèmes peuvent être mises sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} Pc + Qs + Ra + Sb &= \text{const.} \\ Qc - Ps - Sa + Rb &= \text{const.} \end{aligned}\right\} \text{ système } \textit{droit}$$

et

$$\left.\begin{aligned} Pc + Qs + Ra + Sb &= \text{const.} \\ Qc - Ps + Sa - Rb &= \text{const.} \end{aligned}\right\} \text{ système } \textit{gauche}.$$

3. En appliquant des transformations de coordonnées, toujours cartésiennes, dans le plan mobile ainsi que dans le plan fixe, on peut décrire un même mouvement par une infinité de systèmes d'équations (1), ..., (5), donc de courbes représentantes.

Posons dans le plan mobile :

$$x = \xi\gamma_1 + \eta\sigma_1 + \alpha_1, \qquad y = -\xi\sigma_1 + \eta\gamma_1 + \beta_1$$

et dans le plan fixe

$$\Xi = X\gamma_2 + Y\sigma_2 + \alpha_2, \qquad H = -X\sigma_2 + Y\gamma_2 + \beta_2,$$

où

$$\gamma_1^2 + \sigma_1^2 = \gamma_2^2 + \sigma_2^2 = 1.$$

Nous obtiendrons les équations nouvelles :

$$\Xi = \xi\gamma + \eta\sigma + \alpha, \tag{1}$$

$$H = -\xi\sigma + \eta\gamma + \beta, \tag{2}$$

$$\gamma^2 + \sigma^2 = 1, \tag{3}$$

$$\varphi_1(\gamma, \sigma, \alpha, \beta) = 0, \tag{4}$$

$$\varphi_2(\gamma, \sigma, \alpha, \beta) = 0, \tag{5}$$

où $\gamma$, $\sigma$, $\alpha$, $\beta$ et $c$, $s$, $a$, $b$ sont liées par la transformation linéaire :

$$\begin{aligned}
\gamma &= (\gamma_1\gamma_2 - \sigma_1\sigma_2)c - (\sigma_1\gamma_2 + \gamma_1\sigma_2)s,\\
\sigma &= (\sigma_1\gamma_2 + \gamma_1\sigma_2)c + (\gamma_1\gamma_2 - \sigma_1\sigma_2)s,\\
\alpha &= (\alpha_1\gamma_2 + \beta_1\sigma_2)c + (\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\sigma_2)s + \gamma_2 a + \sigma_2 b + \alpha_2.\\
\beta &= (\beta_1\gamma_2 - \alpha_1\sigma_2)c - (\alpha_1\gamma_2 + \beta_1\sigma_2)s - \sigma_2 a + \gamma_2 b + \beta_2.
\end{aligned}$$

Ces transformations, disons *transformations cinématiques*, constituent un groupe de collinéations à quatre paramètres de l'espace cinématique, qui laisse invariant :

L'infini ;

Le bicylindre cinématique et en particulier son plan axial ;

Le système droit des plans isogonaux avec le plan axial, donc des sections circulaires droites.

Les collinéations du groupe ne sont pas, en général, orthogonales ; elles le sont en particulier pour $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Mais rien n'empêche de considérer de nouveau, après une transformation, $\gamma$, $\sigma$, $\alpha$, $\beta$ comme coordonnées orthogonales dans un autre espace cinématique.

Les transformations cinématiques n'affectent pas les propriétés projectives de la courbe représentative, ni sa position projective par rapport aux figures invariantes nommées ci-dessus.

4. *Le degré de chaque trajectoire dans un mouvement algébrique est égal au degré d'une courbe représentante.*

En effet, ce degré est le nombre des points d'intersection de la trajectoire

$$F(X, Y) = 0$$

avec une droite quelconque

$$PX + QY + R = 0$$

ou

$$P(x_1 c + y_1 s + a) + Q(-x_1 s + y_1 c + b) + R = 0.$$

Cette équation représente un espace linéaire (hyperplan) qui a $n$ points en commun avec la courbe représentante, supposée du degré $n$. Il n'y a que ces $n$ solutions $(c, s, a, b)$ qui indiquent une position du plan mobile pour laquelle le point $(x_1, y_1)$ tombe dans la droite choisie dans le plan fixe.

**5.** *Le nombre des points doubles de chaque trajectoire est égal au nombre de points doubles réels et apparents d'une courbe représentante.*

Un point double dans la représentante correspond à deux positions identiques du plan mobile, les trajectoires de tous ses points présentent donc *à la fois* un point double.

Si le point singulier de la représentante est un rebroussement, les trajectoires montreront à la fois un rebroussement.

Pour les points doubles des trajectoires ne provenant pas de positions identiques, on aura

$$\begin{aligned} X &= \phantom{-}c_1 x + s_1 y + a_1 = \phantom{-}c_2 x + s_2 y + a_2, \\ Y &= -s_1 x + c_1 y + b_1 = -s_2 x + c_1 y + b_2 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} (c_1 - c_2)x + (s_1 - s_2)y + (a_1 - a_2).1 + (b_1 - b_2).0 = 0, \\ (c_1 - c_2)y - (s_1 - s_2)x + (a_1 - a_2).0 + (b_1 - b_2).1 = 0. \end{aligned}$$

Les quantités $(c_1 - c_2)$, $(s_1 - s_2)$, $(a_1 - a_2)$, $(b_1 - b_2)$ sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la *corde* de la courbe représentante par les points $(c_1 s_1 a_1 b_1)$ et $(c_2 s_2 a_2 b_2)$. Cette corde doit donc être perpendiculaire aux directions de O à $(x_1, y_1, 1, 0)$ et à $(y_1, -x_1, 0, 1)$, donc au plan contenant ces droites. Ce plan est un « isogonal du système droit » au plan OAB; un second plan absolument perpendiculaire à ce premier appartient encore au même système. La corde doit être parallèle à ce second plan, c'est-à-dire qu'elle doit rencontrer la droite à l'infini de ce plan, laquelle est parallèle de Clifford de $A_\infty B_\infty$ et complètement déterminée par le point $(x_1, y_1)$ du plan mobile dans la trajectoire duquel on cherche les points doubles. Le nombre de ces points doubles égale le nombre de cordes qui rencontrent la droite à l'infini en question, c'est ce que par analogie nous devons appeler le *nombre des points doubles apparents* de la représentante. Si cette courbe est de triple courbure, non contenue dans un hyperplan, ce nombre n'est autre que le degré de l'espace courbe, lieu des cordes. Si la représentante est de double courbure, ce lieu devient une congruence et les points doubles apparents recouvrent leur sens ordinaire, projetés du centre où, dans le cas général, l'espace linéaire contenant la courbe est rencontré par la parallèle de Clifford en question.

6. Les points doubles de la seconde catégorie dans les trajectoires seront des *points de rebroussement* quand la corde devient tangente. Mais le lieu des points $(x, y)$ du plan mobile dont les trajectoires possèdent un tel rebroussement est la *courbe polaire mobile* du mouvement. Nous obtenons donc la relation géométrique suivante entre la courbe représentante et la courbe polaire mobile :

*L'intersection de la surface des tangentes de la représentante avec l'espace à l'infini est une courbe, plane ou tordue, dont chaque point porte une parallèle de Clifford du système droit, l'ensemble desquelles est une surface réglée. La polaire réciproque de cette surface par rapport à la quadrique absolue est une autre surface réglée formée de parallèles du système droit. L'intersection de celle-ci avec le plan à l'infini* $b = 0$ *est une courbe plane collinéaire à la courbe polaire mobile.*

On peut aussi projeter la première surface réglée du centre $B_\infty$ sur le plan $C_\infty S_\infty A_\infty$; le contour apparent sera corrélatif à la courbe polaire.

7. Le mouvement *inverse* ou *indirect* d'un mouvement donné est

déterminé par

$$x = Xc - Ys - ac + bs,$$
$$y = Xs + Yc - as - bc,$$

avec les mêmes équations (3), (4), (5).

On peut écrire aussi

$$(1)\qquad x = XC + YS + A,$$
$$(2)\qquad y = -XS + YC + B,$$
$$(3)\qquad C^2 + S^2 = 1,$$
$$(4)\qquad F_1(C, S, A, B) = 0,$$
$$(5)\qquad F_2(C, S, A, B) = 0,$$

où C, S, A, B et $c$, $s$, $a$, $b$ sont liées par les relations

$$C = c, \qquad S = -s, \qquad A = -ac + bs, \qquad B = -as - bc.$$

Ces relations caractérisent une transformation quadratique, birationnelle et involutive de l'espace cinématique, convertissant la courbe représentante du mouvement direct en celle du mouvement indirect, qui est, en général, du degré double.

La transformation devient linéaire pour

$$c = c_1, \qquad s = s_1 \qquad (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{10})$$

ou

$$a = 0, \qquad b = 0 \qquad (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{11})$$

**8.** La conception même du mouvement indirect comporte, pour les courbes enveloppes des droites du plan mobile, des propriétés en dualisme avec celles des trajectoires du mouvement indirect (Chasles).

Indiquant une droite du plan mobile par les coordonnées tangentielles homogènes

$$u = y_1 - y_2, \qquad v = -(x_1 - x_2), \qquad w = x_1 y_2 - x_2 y_1,$$

on trouve

$$U = cu + sv,$$
$$V = -su + cv,$$
$$W = (-ac + bs)u - (as + bc)v + w.$$

Les formules inverses sont, conformément au n° **7**,

$$u = cU - sV,$$
$$v = sU + cV,$$
$$w = aU + bV + W.$$

Ces formules, jointes aux équations (3), (4), (5) du n° **1**, c'est-à-dire à la connaissance de la représentante, donnent les enveloppes de droites dans les mouvements direct et indirect.

**9.** Les formules des n^os^ **1** et **8** nous permettent de déterminer la courbe représentante dans les cas où, soit deux points du plan mobile sont contraints à parcourir des trajectoires prescrites (qui peuvent coïncider), soit deux droites à décrire des enveloppes voulues (éventuellement confondues), soit un point à parcourir une courbe, tandis qu'une droite glisse le long d'une autre (laquelle encore peut être la même).

Si le point $(x_1, y_1)$ doit suivre la trajectoire

$$f(X, Y) = 0,$$

on aura

$$f[(x_1 c + y_1 s + a), \quad (-x_1 s + yc + b)] = 0$$

ou

$$f_1(c, s, a, b) = 0.$$

Une hypersurface de ce type est un bicylindre du degré de $f$, dont la droite-sommet à l'infini satisfait aux équations

$$x_1 c + y_1 s + a = 0,$$
$$y_1 c - x_1 s + b = 0;$$

elle est donc une parallèle de Clifford de $A_\infty B_\infty$ du système droit. En opérant avec la droite-sommet selon le n° **5**, on voit que chaque plan générateur du bicylindre contient des cordes dont les points d'appui sont les intersections du plan avec la courbe représentante. Tous les points de la trajectoire du point $(x_1, y_1)$ sont donc multiples; tandis que les trajectoires générales sont parcourues une seule fois, celle du point $(x_1, y_1)$ est parcourue, soit réellement, soit imaginairement, autant de fois qu'est le quotient du degré de $f$ dans celui de la représentante.

Si la droite $(u_1, v_1, w_1)$ doit envelopper la courbe

$$\psi(U, V, W) = 0,$$

on aura

$$\psi\{(cu_1 + sv_1), (-su_1 + cv_1), [(-ac + bs)u_1 - (as + bc)v_1 + w_1]\} = 0$$

ou

$$f_2(c, s, a, b) = 0.$$

Cette hypersurface est la transformée selon le n° **7** d'un bicylindre du type précédent.

Plusieurs mouvements d'application technique entrent dans la catégorie de ce paragraphe ; il va sans dire que dans un exemple spécial on pourra profiter d'un choix convenable des axes de coordonnées.

**10.** Une première classe de mouvements algébriques, bien triviaux du reste, est caractérisée par les représentantes qui sont *courbes planes dans un plan générateur* du bicylindre cinématique.

On a alors

$$c = c_1, \qquad s = s_1, \qquad f(a, b) = 0.$$

Il n'y a pas de rotation, le mouvement est *parallèle*, toutes les trajectoires sont congruentes à celle de l'origine du plan mobile, qui est

$$f(X, Y) = 0.$$

La *translation* est le cas plus simple, dont la représentante est une droite.

Les mouvements indirects sont du même type (n° **7**).

**11.** La deuxième classe comprend deux types de mouvement, bien connus encore, correspondant aux *sections planes* du bicylindre cinématique.

La représentante est *circulaire du système droit* (n° **2**), quand $f_1$ et $f_2$ sont de la forme

$$Pc + Qs + Ra + Sb + T_1 = 0,$$
$$Qc - Ps - Sa + Rb + T_2 = 0.$$

Divisant par $\sqrt{R^2+S^2}$, nous obtenons

$$P'c+Q's+R'a+S'b+T'_1=0,$$
$$Q'c-P's-S'a+R'b+T'_2=0.$$

Mais alors, eu égard aux formules du n° **3**, en posant

$$\alpha_1\gamma_2+\beta_1\sigma_2=P', \qquad \beta_1\gamma_2-\alpha_1\sigma_2=Q',$$
$$\gamma_2=R', \qquad \sigma_2=S',$$
$$\alpha_2=T'_1, \qquad \beta_2=T'_2,$$

on peut toujours transformer en

$$f_1\equiv\alpha=0, \qquad f_2\equiv\beta=0.$$

Cela veut dire que la nouvelle origine du plan mobile ($\xi=0$, $\eta=0$) reste à sa place ($\Xi=0$, $H=0$), le mouvement est une *rotation*. Le mouvement inverse est aussi une rotation (n° **7**).

Quand la représentante est *circulaire gauche* ou *elliptique*, $f_1$ et $f_2$ sont des hyperplans dont le plan commun n'est pas isogonal droit avec OAB. Ce plan porte un faisceau d'espaces linéaires, dont chacun peut être regardé comme un bicylindre projetant de degré *un* dans le sens du n° **9**. Il y a donc une infinité de points qui décrivent une droite, parcourue deux fois, puisque les trajectoires générales sont du second degré, notamment des ellipses. On reconnaît le *mouvement elliptique;* le lieu des points à trajectoire droite est, comme on sait et comme le raisonnement du n° **6** le confirme, une circonférence. Le mouvement est complètement déterminé par *trois* positions du plan mobile, puisque les trois points correspondants, s'ils ne sont pas en ligne droite, déterminent le plan de la représentante. Le mouvement inverse tombe sous le type du n° **17**.

**12.** Les représentantes des mouvements de la troisième classe sont des *courbes à double courbure*, situées dans *un* espace linéaire. Cet espace étant un bicylindre du premier degré dans le sens du n° **9**, il existe *un seul point du plan mobile qui décrit une trajectoire droite*.

Inversement, tous les mouvements à *un entraînement droit* seront représentés par une courbe hyperplane.

Par une transformation du n° 3, l'équation de l'espace linéaire peut être ramenée à

$$b = 0,$$

les équations (1), ..., (5) devenant *quatre :*

$$\begin{aligned} X &= \quad xc + ys + a, \\ Y &= -xs + yc, \\ & c^2 + s^2 = 1. \\ & f_1(c, s, a) = 0. \end{aligned}$$

L'origine du plan mobile décrit la droite

$$Y = 0.$$

L'espace cinématique devient tridimensional, le bicylindre cinématique un cylindre de révolution ordinaire ; *il y a autant de types de mouvements d'un entraînement droit qu'il y a de types de courbes non planes sur un cylindre ordinaire.*

Il existera :

Un mouvement cubique, la trajectoire générale est une cubique à point double (n° 5);

Un mouvement biquadratique avec trajectoire du quatrième degré à deux points doubles;

Un mouvement biquadratique avec position double, les trajectoires ont trois points doubles, dont un de première espèce;

Un mouvement biquadratique avec position de rebroussement, les trajectoires ont deux points doubles et un rebroussement (de première espèce);

Et ainsi de suite.

Si les points d'une courbe représentante admettent une construction par les méthodes de la géométrie descriptive ordinaire (comme c'est le cas avec les mouvements mentionnés ci-dessus), ces points pourront être transmis dans une seconde épure comme positions du plan mobile, $a$ étant l'abscisse de l'origine

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang} \frac{s}{c}$$

donnant l'orientation de l'axe OX de ce plan. Ce procédé permet de traiter, à titre d'exercices, une assez grande variété de mouvements par le dessin seul. On trouvera facilement la solution par construction des problèmes rattachés : tangentes aux trajectoires, courbes polaires, points doubles des trajectoires, etc.

**13.** Le *mouvement cubique* est déterminé par cinq positions arbitraires du plan mobile. Pour exécuter la construction, on transmet ces positions sur le cylindre cinématique; la cubique gauche représentante est déterminée par les cinq points correspondants et le sommet à l'infini et peut être construite selon la méthode bien connue.

Les équations (1), ..., (5) du mouvement pourront toujours être transformées à

$$\begin{aligned} X &= \quad xc + ys + a, \\ Y &= -xs + yc, \\ &\quad c^2 + s^2 = 1, \\ &\quad ac + s = 1 \end{aligned}$$

ou, sous forme paramétrique,

$$c = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad s = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad a = t.$$

Pour la courbe polaire mobile, on trouve une *parabole*

$$y^2 - 2x - 1 = 0.$$

Les formules du n° **7** donnent le mouvement inverse, on trouve qu'il est cubique aussi, la courbe polaire fixe est une parabole égale à la première, les sommets des deux paraboles doivent correspondre. Le foyer d'une parabole décrit la directrice de l'autre et inversement; cette propriété peut servir à déterminer le mouvement.

Le mouvement cubique peut être regardé comme le premier terme d'une série de mouvements algébriques, sortant généralement de notre troisième classe, dont la courbe polaire mobile est symétrique à la courbe polaire fixe et roule sur celle-ci de manière à être toujours sa réflexion dans une tangente commune. Une trajectoire est alors le lieu des réflexions d'un point du plan fixe dans les tangentes, elle est homothétique à échelle double de la podaire de ce point par rapport à la polaire fixe. Ses propriétés projectives sont donc déductibles de celles de la courbe polaire; les foyers décrivent toujours des trajectoires plus simples.

Pour ces mouvements on peut donc, en appliquant en sens inverse les n$^{os}$ **4**, **5**, **6**, déterminer d'avance le caractère géométrique de la courbe représentante (exemple au n° **17**).

**14.** Sans entamer l'étude détaillée de tous les cas spéciaux contenus dans les trois types de mouvement biquadratique, nous en voulons signaler deux qui renferment comme exemples particuliers des mouvements connus.

Un mouvement à un entraînement droit peut jouir en outre de la propriété qu'une droite du plan mobile passe toujours par un point fixe. Le mouvement indirect sera alors du même type que le direct : nous dirons *mouvement paraconchoïdal.*

Selon le n° **7**, la courbe représentante du mouvement inverse devra être située dans un hyperplan

$$PC + QS + RA + TB + V = 0$$

où, puisque $b = 0$,

$$C = c, \qquad S = -s, \qquad A = -ac, \qquad B = -as.$$

Donc

$$Pc - Qs - Rac - Tas + V = 0$$

ou

$$a(Rc + Ts) - Pc + Qs - V = 0.$$

Par une transformation convenable, on peut ramener cette équation à

$$ac + s = \text{const.} + p.$$

Le point $(x = 0, y = 0)$ parcourt la droite $Y = 0$, tandis que la droite $x = -p$ passe toujours par le point $(X = 0, Y = 1)$.

Les deux courbes polaires sont en général de même type, l'équation de la polaire mobile est

$$(y^2 - px)^2 = x^2 + y^2.$$

Dans le cas particulier $p = 1$, la représentante dégénère en une droite et une cubique (n° **13**), le mouvement est cubique.

Un autre cas particulier est

$$p = 0,$$

donc

$$ac + s = 0.$$

Cette équation représente le *mouvement conchoïdal* ordinaire; l'équation de son mouvement inverse, mouvement *contraconchoïdal*, peut être ramenée à la forme

$$ac + 1 = 0.$$

On sait qu'une courbe polaire devient doublement symétrique,

$$y^4 = x^2 + y^2,$$

tandis que l'autre est une parabole.

Les représentantes de tous ces mouvements possèdent un point double en $A_\infty$, les mouvements eux-mêmes auront une position double à l'infini qui causera un point double à l'infini dans toutes les trajectoires en dehors des deux points doubles ordinaires (type biquadratique 2 du n° **12**).

**13.** Un mouvement biquadratique peut montrer, outre son entraînement droit nécessaire, un *entraînement quadratique*, c'est-à-dire un point du plan mobile qui décrit une conique.

Selon le n° **9**, la courbe représentante est alors la section du cylindre cinématique avec un autre cylindre. Mais la représentante, étant biquadratique, porte en général *quatre* cônes, dont *un* encore pourra être un cylindre; en ce cas, le sommet du quatrième sera l'intersection des axes de ces trois cylindres, donc un point de OA, qu'on pourra transformer en origine O. Nous trouvons ainsi :

*Un mouvement biquadratique peut avoir deux entraînements quadratiques. L'équation du mouvement pourra être mise sous la forme*

$$F(c, s, a) = 0,$$

F *étant une fonction homogène quadratique.*

Inversement, un cône F détermine une représentante qui porte deux autres cylindres. Ainsi, pour donner un exemple numérique, on peut faire rester l'origine du plan mobile sur la droite $Y=0$, tandis que le point $(1;0)$ reste sur l'ellipse

$$X^2-2XY+3Y^2+4X-4Y-5=0$$

et le point $(0;1)$ sur l'hyperbole

$$X^2+2XY-Y^2+4X+4Y-3=0.$$

**16.** La quatrième classe comprend les mouvements *sans entraînement droit*, dont les courbes représentantes sont *à triple courbure*, situées toujours sur le bicylindre cinématique.

La courbe la plus simple de ce genre est la *rationnelle du quatrième degré*, possédant trois points doubles apparents. Les trajectoires montrent donc trois points doubles (de seconde espèce), le mouvement est bien distingué du deuxième type biquadratique, puisqu'il ne possède ni entraînement droit, ni position double.

La courbe représentante est projetée de chacune de ses cordes par un bicône quadratique, et inversement : la droite-sommet d'un bicône quadratique contenant la courbe doit être une corde. La droite-sommet $A_\infty B_\infty$ du bicylindre cinématique a donc deux points $P_1$ et $P_2$ en commun avec la courbe. La représentante est déterminée par ces deux points, qu'on peut choisir arbitrairement, et *cinq* autres points $P_3$, $P_4$, $P_5$, $P_6$, $P_7$, pris sur le bicylindre cinématique. Elle est l'intersection de celui-ci avec deux bicônes quadratiques, l'un à droite-sommet $P_1P_3$ et passant par $P_2$, $P_4$, $P_5$, $P_6$, $P_7$, l'autre à droite-sommet $P_2P_3$ et passant par $P_1$, $P_4$, $P_5$, $P_6$, $P_7$. Cette construction, comme sa démonstration, est en analogie parfaite avec celle d'une cubique gauche contenant six points donnés.

On peut aussi donner *sept* points arbitraires sur le bicylindre, donc :

*Le mouvement du quatrième ordre sans entraînement droit est déterminé par sept positions du plan mobile.*

Il n'y a aucune difficulté à exécuter, par l'extension de la méthode de la géométrie descriptive à l'espace à quatre dimensions, la construction de la courbe dans une épure et à transporter les positions $c$, $s$, $a$, $b$ obtenues dans l'épure cinématique. On pourra alors résoudre les problèmes que nous avons indiqués dans le n° **12** pour le cas plus facile d'un entraînement droit.

Le procédé pourra encore servir pour les mouvements d'ordre plus élevé si les représentantes admettent un traitement descriptif.

**17.** Le mouvement *cardioïdal*, l'inverse de l'elliptique, est un cas particulier du mouvement du n° **16**.

En effet, les inverses selon les formules du n° **7** de deux espaces linéaires $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ seront deux variétés quadratiques $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$. La partie du second degré dans ces équations sera linéaire en $(-ac + bs)$ et $(-as - bc)$, comme celle du premier degré en $c$ et $s$. Les quadriques à l'infini de $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ passeront donc par les quatre droites :

$$(1)\left\{\begin{aligned} a &= 0,\\ b &= 0;\end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned} a &= bi,\\ c &= -si;\end{aligned}\right. \qquad (3)\left\{\begin{aligned} a &= -bi,\\ c &= si;\end{aligned}\right. \qquad (4)\left\{\begin{aligned} c &= 0,\\ s &= 0.\end{aligned}\right.$$

Le bicylindre cinématique ne contient pas (1), par contre il passe par (2) et (3), tandis que (4) est sa ligne double; il reste de l'intersection dégénérée totale une partie courbe du quatrième ordre à triple courbure.

On obtient les équations de la courbe sous forme paramétrique en partant du plan à section elliptique

$$\begin{aligned} A &= p_1 C + q_1 S,\\ B &= p_2 C + q_2 S,\end{aligned}$$

l'origine étant prise au point commun avec le plan axial du bicylindre cinématique. Après l'introduction de coordonnées homogènes $w$ et W, les formules du n° **7** donnent :

$$\begin{gathered} c = CW, \qquad s = -SW,\\ a = -p_1 C^2 + q_2 S^2 + (p_2 - q_1) CS,\\ b = -p_2 C^2 - q_1 S^2 - (p_1 + q_2) CS,\\ w = W^2,\end{gathered}$$

les paramètres C, S, W devant satisfaire à la relation

$$C^2 + S^2 = W^2.$$

On voit que les quatre points à l'infini de la courbe ($W = o$) coïncident en paires avec les points

$$c = o, \quad s = o, \quad a = 1, \quad b = i$$

et

$$c = o, \quad s = o, \quad a = 1, \quad b = -i,$$

les points isotropes du plan axial.

Pour les tangentes on trouve, par un léger calcul, indépendamment de $p_1, q_1, p_2, q_2$, les droites (3) et (2). Les représentantes cardioïdales sont caractérisées par ces deux points à l'infini et ces tangentes. Ces données équivalent à quatre points de la courbe, celle-ci est déterminée par trois points arbitraires. Comme le mouvement elliptique, le mouvement cardioïdal est déterminé par *trois* positions du plan mobile (construction par inversion du mouvement).

Un autre cas particulier des mouvements du n° **16** est formé par ces mouvements où les courbes polaires sont *deux cercles*, *deux ellipses* ou *deux hyperboles symétriques*, selon le n° **13**.

(Le cas de deux paraboles donnait le mouvement cubique.)

**18.** Imaginons un mouvement quelconque. La courbe représentante C possédera en un point P régulier une tangente $\tau$, un plan osculateur $\pi$ et un espace osculateur $\varepsilon$, ayant respectivement un contact biponctuel, triponctuel, quadriponctuel avec la courbe. La représentante C′ du mouvement inverse aura aussi, en général, au point P′ correspondant à P, une tangente $\tau'$, un plan $\pi'$ et un espace $\varepsilon'$ osculateurs.

Par la tangente $\tau$ on peut mener en général un seul plan ayant avec le bicylindre cinématique une section circulaire du système droit, puisqu'il passe par le point à l'infini de $\tau$ une seule parallèle de Clifford de $A_\infty B_\infty$ de ce système. La rotation déterminée par cette section circulaire a en commun avec le mouvement donné deux positions infiniment voisines, elle est la *rotation tangente* ou *instantanée* pour la position P.

La tangente $\tau'$ donne la rotation instantanée inverse.

*La distribution des tangentes aux trajectoires* en tous les points du plan mobile est, pour une position régulière d'un mouvement quelconque, identique à celle de la rotation tangente.

Le plan osculateur $\pi$ contiendra en général une section elliptique du bicylindre cinématique, représentant un *mouvement elliptique osculateur* (n° **11**).

*La distribution des cercles osculateurs aux trajectoires* en tous les points du plan mobile est à chaque moment identique à celle dans le mouvement elliptique osculateur; la circonférence lieu des points qui décrivent des droites dans ce mouvement n'est rien autre que le cercle des inflexions bien connu.

Le plan osculateur $\pi'$ donne une représentante elliptique dont l'inverse, selon le n° **7**, a un contact triponctuel en P avec C; cette courbe inverse représente donc le *mouvement cardioïdal osculateur* (n° **17**).

L'espace osculateur $\varepsilon$ a en commun avec le bicylindre cinématique un cylindre ne portant que des représentantes de mouvements à entraînement droit (n° **12**). Afin de choisir parmi ces courbes celle qui, ayant en P un contact quadriponctuel avec C, représente le mouvement le plus simple, considérons en même temps l'espace osculateur $\varepsilon'$. L'espace quadratique E' inverse de $\varepsilon'$, selon le n° **7**, aura un contact de ce genre. L'intersection du bicylindre avec $\varepsilon$ et E' représente un *mouvement paraconchoïdal* (n° **14**) ayant en commun avec le mouvement donné quatre positions infiniment rapprochées. Choisissant, pour représenter l'élément différentiel de quatre points confondus d'une courbe plane, la *parabole hyperosculatrice*, nous avons : *la distribution des paraboles hyperosculatrices aux trajectoires en tous les points du plan mobile est, à chaque instant, identique à celle dans le mouvement paraconchoïdal osculateur.*

Quant aux *points singuliers* de la courbe représentante, ils se retrouveront comme *positions singulières* dans le mouvement, les propriétés concernant ces points se traduiront en autant de propriétés de la cinématique du plan.

Ainsi, supposant de nouveau les représentantes algébriques, les relations de Plücker-Cayley et de Salmon-Cremona pourront être appliquées aux mouvements à entraînement droit, comme leurs analogues pour les courbes en $E_4$ (Véronèse) aux mouvements sans cet entraînement.

**19.** Les *mouvements* considérés jusqu'ici sont, proprement dit, des ensembles de positions dépendant d'un seul paramètre. Mais la position d'un plan par rapport à un autre ayant *trois* degrés de liberté, on peut imaginer aussi des ensembles de positions dépendant de *deux* paramètres. Leurs représentantes seront des *surfaces*, soit contenues dans un hyperplan (entraînement droit, n° **12**), soit *tordues*, mais situées toujours sur le bicylindre cinématique.

Le *degré* d'une telle surface est le nombre de points d'intersection avec un plan ou bien le degré de la courbe d'intersection avec un hyperplan. Sa signification cinématique est donc *le nombre de positions que l'ensemble a en commun avec un mouvement elliptique quelconque* ou bien *le degré du mouvement contenu dans l'ensemble qu'effectue le plan quand on contraint un point arbitraire à rester sur une droite choisie.*

Prenant, avec la première définition, un plan de section circulaire droite, le degré devient le nombre de positions dans lesquelles un point arbitraire du plan mobile se trouve à une place prescrite dans le plan fixe.

Un plan générateur du bicylindre cinématique aura en commun avec la surface une courbe de degré $n$, de sorte que

$$2n + k = N,$$

si N est le degré de la surface, $k$ le nombre de fois qu'elle contient la droite $A_\infty B_\infty$; les mouvements parallèles (n° **10**) contenus dans l'ensemble sont donc de degré $n$.

Les seuls *plans* dans le bicylindre sont les plans générateurs, les *ensembles de positions de premier degré* qu'ils représentent sont donc ceux des positions d'*orientation fixe*.

Puisqu'il n'existe pas de surfaces tordues du second degré, les *ensembles du second degré* ne sont autres que ceux dans lesquels *un point du plan mobile est dans une droite du plan fixe*. Les surfaces représentantes sont des cylindres (n° **2**).

Toutes les autres surfaces dans le bicylindre cinématique sont tordues; la plus simple est celle *du troisième degré*, intersection avec un bicône ayant avec le bicylindre un plan générateur en commun. Chaque espace linéaire passant par ce plan contiendra un autre plan générateur du bicylindre ainsi que du bicône, leur droite d'intersection appartiendra à la surface voulue, qui est réglée. Le mouvement d'orientation constante quelconque contenu dans l'ensemble sera donc une translation ($N = 3$, $n = k = 1$). Quand on assujettit un point du plan mobile à un entraînement droit, le mouvement qui reste possible dans l'ensemble sera en général un mouvement cubique.

**20.** Considérons de nouveau les formules

$$\begin{aligned} X &= \quad xc + ys + a, \\ Y &= -xs + yc + b, \end{aligned}$$

*sans supposer maintenant c et s liées par la relation*

$$c^2 + s^2 = 1.$$

La transformation est alors *semblable* en sens direct, le plan $(X, Y)$ étant à échelle $\sqrt{c^2 + s^2} : 1$ par rapport au plan $(x, y)$. Chaque point $(c, s, a, b)$ indique une position semblable du plan mobile dans le plan fixe, le bicylindre

$$c^2 + s^2 = r^2$$

rassemble les positions d'agrandissement $r$. La valeur $r = 1$ correspond à la grandeur originelle; la valeur $r = 0$, donc $c = 0$, $s = 0$, indique que les points à distance finie du plan mobile sont contractés en un point du plan fixe.

*Chaque* courbe tracée dans l'espace cinématique représente un mouvement avec échelle variable. On étend sans difficulté la théorie développée dans ce qui précède à ce cas plus ample; signalons tout d'abord que le degré des trajectoires est encore égal à celui de la courbe représentante.

On aura ainsi :

Deux figures planes directement semblables déterminent un « *mouvement semblable* » *du premier degré*, où toutes les trajectoires sont droites.

Une *courbe plane* représente un mouvement semblable dans lequel les trajectoires sont en général du degré et du type projectif de la représentante. Il y aura pourtant $\infty^1$ trajectoires droites, correspondant aux espaces linéaires du faisceau d'hyperplans porté par le plan de la représentante. En effet, si

$$Pc + Qs + Ra + Sb + T = 0$$

est l'équation d'un hyperplan, le point

$$x = \frac{PR - QS}{R^2 + S^2}, \qquad y = \frac{PS + QR}{R^2 + S^2}$$

du plan mobile, intersection des droites

$$Rx + Sy = P \quad \text{et} \quad Ry - Sx = Q,$$

décrira dans le plan fixe la droite

$$RX + SY + T = 0.$$

Le lieu, dans le plan mobile, des points à trajectoire droite est une circonférence. Donnant le plan de la représentante par les équations

$$P_1 c + Q_1 s + R_1 a + S_1 b + T_1 = 0,$$
$$P_2 c + Q_2 s + R_2 a + S_2 b + T_2 = 0,$$

on trouve l'équation de ce cercle :

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)&(R_1 S_2 - R_2 S_1)\\ &- x(P_1 S_2 - P_2 S_1 + Q_1 R_2 - Q_2 R_1)\\ &+ y(P_1 R_2 - P_2 R_1 - Q_1 S_2 + Q_2 S_1) - (P_1 Q_2 - P_2 Q_1) = 0,\end{aligned}$$

dont les points

$$x_\lambda = \frac{(P_1 + \lambda P_2)(R_1 + \lambda R_2) - (Q_1 + \lambda Q_2)(S_1 + \lambda S_2)}{(R_1 + \lambda R_2)^2 + (S_1 + \lambda S_2)^2},$$
$$y_\lambda = \frac{(P_1 + \lambda P_2)(S_1 + \lambda S_2) + (Q_1 + \lambda Q_2)(R_1 + \lambda R_2)}{(R_1 + \lambda R_2)^2 + (S_1 + \lambda S_2)^2}$$

décrivent les droites du faisceau

$$(R_1 + \lambda R_2)X + (S_1 + \lambda S_2)Y + (T_1 + \lambda T_2) = 0.$$

Dans le *mouvement semblable du second degré*, les trajectoires sont en général des coniques qui sont toutes à la fois ellipses, ou hyperboles, ou bien paraboles. Le mouvement est déterminé par exemple par cinq positions d'un segment AB, les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ étant choisis arbitrairement sur une droite $\alpha$, comme $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ sur une droite $\beta$.

La construction est plus facile encore si l'on donne $\alpha$ et $\beta$, la trajectoire conique $\gamma$ d'un point C du segment AB (on peut prendre un cercle) et le rapport $AC : CB$.

Les *courbes à double courbure* représentent des mouvements semblables à un seul entraînement droit, celles à *triple courbure* les mouvements sans cet entraînement.

Les *surfaces* et les *hypersurfaces* contenues dans l'espace cinématique représentent des ensembles de positions semblables dépendant respectivement de deux ou de trois paramètres.

En un mot, toute la géométrie de l'espace à quatre dimensions aura son interprétation cinématique dans le plan, raison (ou prétexte) de plus de nous occuper de cet espace.