JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

IV. ISÉNOFF

Sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 3 (1920), p. 245-263.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1920_8_3__245_0>

Sur les équations générales du mouvement des systèmes matériels non holonomes;

PAR Iv. ISÉNOFF.

1. On sait que le mouvement sans frottement d'un système matériel holonome ou non holonome est caractérisé par la fonction $S = \frac{1}{2}\Sigma m J^2$, J désignant l'accélération d'un point de masse m. Si $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont les paramètres indépendants, dont les variations virtuelles sont arbitraires, cette fonction S est une fonction du second degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_k$ que nous pouvons supposer réduite seulement aux termes qui contiennent $q''_1, q''_2, \ldots, q''_k$. Les coefficients de cette fonction peuvent dépendre d'autres paramètres encore, dont les variations virtuelles sont des fonctions données, linéaires et homogènes des variations $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Pour un déplacement virtuel donné du système, la somme des travaux des forces appliquées est

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k.$$

Alors les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \text{ (}^1\text{)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

La fonction S s'appelle *énergie d'accélération*, par analogie avec le nom *énergie cinétique* étant ainsi appelée la *demi-force vive du*

(1) Paul APPELL, *Développement, sur une forme nouvelle, des équations de la Dynamique* (Mémoire imprimé dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1900).

système

$$T = \frac{1}{2}\sum mv^2,$$

v étant la vitesse d'un point de masse m.

Si le système est holonome, les équations du mouvement, données par Lagrange, sont

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k).$$

Notre but est d'écrire, sous une autre forme, les équations générales du mouvement d'un système non holonome, au moyen de laquelle, dans la plupart des cas, on parvient plus facilement aux équations différentielles du mouvement.

2. Supposons un système de points matériels soumis aux liaisons, exprimées par des équations finies et différentielles, des paramètres qui définissent la position du système; les premières parties des équations différentielles ne sont pas des différentielles totales et n'ont pas de facteurs intégrants.

En ne tenant compte que des liaisons finies, imposées au système, soit $k+p$ le nombre des paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$, qui fixent sa position. En supposant que ces liaisons dépendent aussi du temps t, nous aurons, pour les coordonnées d'un point quelconque du système,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= f(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}),\\ y &= \varphi(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}),\\ z &= \omega(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}).\end{aligned}\right.$$

Nous obtiendrons un déplacement virtuel du système compatible *avec ces liaisons* au moment t, en donnant aux paramètres q_1, $q_2, \ldots, q_n, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$ des accroissements infiniment petits et arbitraires $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k, dq_{k+1}, \ldots, dq_{k+p}$, ce qui donne:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}\delta q_{k+1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\delta q_{k+p},\\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}\delta q_{k+1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\delta q_{k+p},\\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\delta q_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_k}\delta q_k + \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\delta q_{k+1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\delta q_{k+p}.\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que nous ajoutons, aux liaisons finies ci-dessus, des liaisons nouvelles, dépendant du temps t, exprimées par p relations différentielles, non intégrables entre les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$ et soient ces relations, résolues par rapport à $dq_{k+1}, dq_{k+2}, \ldots, dq_{k+p}$, de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} dq_{k+1} = \alpha_1\,dq_1 + \alpha_2\,dq_2 + \ldots + \alpha_k\,dq_k + \alpha\,dt, \\ dq_{k+2} = \beta_1\,dq_1 + \beta_2\,dq_2 + \ldots + \beta_k\,dq_k + \beta\,dt, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dq_{k+p} = \lambda_1\,dq_1 + \lambda_2\,dq_2 + \ldots + \lambda_k\,dq_k + \lambda\,dt, \end{array}\right.$$

les coefficients de $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k, dt$ étant en général des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_k, q_{k+1}, \ldots, q_{k+p}$. Pour un déplacement virtuel compatible avec ces liaisons au moment t, nous aurons

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta q_{k+1} = \alpha_1\,\delta q_1 + \alpha_2\,\delta q_2 + \ldots + \alpha_k\,\delta q_k, \\ \delta q_{k+2} = \beta_1\,\delta q_1 + \beta_2\,\delta q_2 + \ldots + \beta_k\,\delta q_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta q_{k+p} = \lambda_1\,\delta q_1 + \lambda_2\,\delta q_2 + \ldots + \lambda_k\,\delta q_k. \end{array}\right.$$

Alors nous obtiendrons un déplacement virtuel du système compatible aux deux sortes de liaisons, au moment t, si nous introduisons dans (2) les valeurs de $\delta q_{k+1}, \delta q_{k+2}, \ldots, \delta q_{k+p}$, de (4); donc, pour ce déplacement, nous aurons

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta x = \left(\dfrac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\delta q_1 \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial x}{\partial q_2} + \alpha_2 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_2 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_2 \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\delta q_2 \\ \qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial x}{\partial q_k} + \alpha_k \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_k \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\delta q_k. \\ \delta y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta z = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right.$$

En tenant compte de toutes les liaisons imposées au système, sa position est à chaque instant complètement définie, si nous connaissons, pour ce moment, les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k$, parce que les autres p paramètres $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_{k+p}$ se déterminent par les équations (3); donc la position du système dépend de k paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

L'équation générale de la Dynamique, déduite du principe de d'Alembert et du principe du travail virtuel, est

$$\Sigma m(x''\,\delta x + y''\,\delta y + z''\,\delta z) = \Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z),$$

x'', y'', z'' étant les secondes dérivées des coordonnées par rapport au temps, et X, Y, Z les projections d'une quelconque des forces directement appliquées.

Cette équation doit être satisfaite pour tous les déplacements (5) compatibles avec toutes les liaisons; elle se décompose donc en k équations de la forme

$$\begin{aligned}(6)\quad \Sigma m\Big[\; & x''\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\\ & + y''\left(\frac{\partial y}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\right)\\ & + z''\left(\frac{\partial z}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\right)\Big] = Q_1,\end{aligned}$$

Q_1 étant le coefficient de dq_1 dans l'expression de la somme des travaux virtuels des forces appliquées,

$$\Sigma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) = Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \ldots + Q_k\,\delta q_k.$$

Transformons la partie gauche de l'équation (6) que nous désignerons par P_1. Nous avons

$$\begin{aligned}P_1 = \frac{d}{dt}\Sigma m\Big[\; & x'\left(\frac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\\ & + y'\left(\frac{\partial y}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\right)\\ & + z'\left(\frac{\partial z}{\partial q_1} + \alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\right)\Big]\\ - \Sigma m\Big\{ & x'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+2}}\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\right]\\ & + y'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+2}}\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\right)\right]\\ & + z'\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) + \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}\right) + \ldots + \frac{d}{dt}\left(\lambda_1\frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\right)\right]\Big\}.\end{aligned}$$

Des équations (1), nous obtenons

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
x' &= \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} q'_{k+1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}} q'_{k+p},\\
y' &= \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} q'_{k+1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}} q'_{k+p},\\
z' &= \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_k} q'_k + \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} q'_{k+1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}} q'_{k+p}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations (3) donnent

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
q'_{k+1} &= \alpha_1 q'_1 + \alpha_2 q'_2 + \ldots + \alpha_k q'_k + \alpha,\\
q'_{k+2} &= \beta_1 q'_1 + \beta_2 q'_2 + \ldots + \beta_k q'_k + \beta,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
q'_{k+p} &= \lambda_1 q'_1 + \lambda_2 q'_2 + \ldots + \lambda_k q'_k + \lambda.
\end{aligned}
\right.
$$

Alors, en vertu de (7) et (8), nous aurons

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial q'_1} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} + \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}},\\
\frac{\partial y'}{\partial q'_1} &= \frac{\partial y}{\partial q_1} + \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}},\\
\frac{\partial z'}{\partial q'_1} &= \frac{\partial z}{\partial q_1} + \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}},
\end{aligned}
$$

et la fonction P_1 prend la forme

$$
\begin{aligned}
P_1 = \frac{d}{dt} \Sigma m \left(x' \frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y' \frac{\partial y'}{\partial q'_1} + z' \frac{\partial z'}{\partial q'_1} \right)&\\
- \Sigma m \left[x' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) + y' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + z' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\right]&\\
- \Sigma m \left[\quad x' \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\right)\right.&\\
+ y' \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\right)&\\
\left. + z' \frac{d}{dt}\left(\alpha_1 \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}} + \beta_1 \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}} + \ldots + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\right)\right].&
\end{aligned}
$$

Dans les équations (1), x, y, z sont des fonctions de t, q_1, q_2, ..., q_k, q_{k+1}, ..., q_{k+p}; donc $\frac{\partial x}{\partial q_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q_1}$, $\frac{\partial z}{\partial q_1}$ sont des fonctions des mêmes paramètres; prenant les dérivées par rapport au temps de ces dernières quantités, et en tenant compte des équations (8), nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) = {} & \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_k} q'_k \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+1}} (\alpha_1 q'_1 + \alpha_2 q'_2 + \ldots + \alpha_k q'_k + \alpha) \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+2}} (\beta_1 q'_1 + \beta_2 q'_2 + \ldots + \beta_k q'_k + \beta) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+p}} (\lambda_1 q'_p + \lambda_2 q'_2 + \ldots + \lambda_k q'_k + \lambda), \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

D'autre part, prenant les dérivées partielles, par rapport à q_1, de x', y', z', données par les équations (7), et en tenant compte des équations (8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial q_1} = {} & \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} q'_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_k} q'_k \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+1}} (\alpha_1 q'_1 + \alpha_2 q'_2 + \ldots + \alpha_k q'_k + \alpha) \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+2}} (\beta_1 q'_1 + \beta_2 q'_2 + \ldots + \beta_k q'_k + \beta) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_{k+p}} (\lambda_1 q'_1 + \lambda_2 q'_2 + \ldots + \lambda_k q'_k + \lambda) \\
& + \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}} \frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}} \frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}} \frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}, \\
\frac{\partial y'}{\partial q_1} = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial z'}{\partial q_1} = {} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) &= \frac{\partial x'}{\partial q_1} - \left(\frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) &= \frac{\partial y'}{\partial q_1} - \left(\frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right),\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) &= \frac{\partial z'}{\partial q_1} - \left(\frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right).
\end{aligned}
$$

En tenant compte de ces expressions pour $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)$ et que des équations (8) nous avons

$$
\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} = \alpha_1, \qquad \frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} = \beta_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1} = \lambda_1,
$$

et des équations (7)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}} = \frac{\partial x}{\partial q_{k+1}}, &&\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}} = \frac{\partial x}{\partial q_{k+2}}, &&\ldots, &&\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}} = \frac{\partial x}{\partial q_{k+p}},\\
&\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}} = \frac{\partial y}{\partial q_{k+1}}, &&\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}} = \frac{\partial y}{\partial q_{k+2}}, &&\ldots, &&\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}} = \frac{\partial y}{\partial q_{k+p}},\\
&\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+1}}, &&\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+2}}, &&\ldots, &&\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+p}} = \frac{\partial z}{\partial q_{k+p}},
\end{aligned}
$$

la fonction P prend la forme

$$
\begin{aligned}
P_1 = {}& \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_1}\right)\\
&- \Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right)\\
&+ \Sigma m\left[\; x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\right.\\
&\qquad + y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\\
&\qquad \left. + z'\left(\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{dz'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\right]\\
&- \Sigma m\left[\; x'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\right.\\
&\qquad + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\\
&\qquad \left. + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

En désignant, pour un moment, par M la dernière somme de la fonction P_1, nous aurons

$$M = \frac{d}{dt}\Sigma m\left[x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\right.$$

$$+ y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)$$

$$\left. + z'\left(\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\right]$$

$$- \Sigma m\left[x''\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\right.$$

$$+ y''\left(\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)$$

$$\left. + z''\left(\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\right].$$

Mais la dernière somme de cette expression pour M peut prendre une autre forme, en tenant compte que des équations (7) et (8) nous avons

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}} = \frac{\partial x''}{\partial q''_{k+1}}, \quad \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}} = \frac{\partial x''}{\partial q''_{k+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}} = \frac{\partial x''}{\partial q''_{k+p}},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}} = \frac{\partial y''}{\partial q''_{k+1}}, \quad \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}} = \frac{\partial y''}{\partial q''_{k+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}} = \frac{\partial y''}{\partial q''_{k+p}},$$

$$\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}} = \frac{\partial z''}{\partial q''_{k+1}}, \quad \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}} = \frac{\partial z''}{\partial q''_{k+2}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+p}} = \frac{\partial z''}{\partial q''_{k+p}},$$

$$\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} = \frac{\partial q''_{k+1}}{\partial q''_1}, \quad \frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} = \frac{\partial q''_{k+2}}{\partial q''_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1} = \frac{\partial q''_{k+p}}{\partial q''_1}.$$

Alors pour P_1, nous aurons

$$\begin{aligned}
P_1 = {} & \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q'_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q'_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q'_1}\right) \\
& - \Sigma m\left(x'\frac{\partial x'}{\partial q_1} + y'\frac{\partial y'}{\partial q_1} + z'\frac{\partial z'}{\partial q_1}\right) \\
& + \Sigma m\Bigg[\; x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \qquad + y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right) \\
& \qquad + z'\left(\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q_1} + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q_1} + \ldots + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q_1}\right)\Bigg] \\
- & \frac{d}{dt}\Sigma m\Bigg[\; x'\left(\frac{\partial x'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial x'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right) \\
& \qquad + y'\left(\frac{\partial y'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial y'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right) \\
& \qquad + z'\left(\frac{\partial z'}{\partial q'_{k+1}}\frac{\partial q'_{k+1}}{\partial q'_1} + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+2}}\frac{\partial q'_{k+2}}{\partial q'_1} + \ldots + \frac{\partial z'}{\partial q'_{k+p}}\frac{\partial q'_{k+p}}{\partial q'_1}\right)\Bigg] \\
& + \Sigma m\Bigg[\; x''\left(\frac{\partial x''}{\partial q''_{k+1}}\frac{\partial q''_{k+1}}{\partial q''_1} + \frac{\partial x''}{\partial q''_{k+2}}\frac{\partial q''_{k+2}}{\partial q''_1} + \ldots + \frac{\partial x''}{\partial q''_{k+p}}\frac{\partial q''_{k+p}}{\partial q''_1}\right) \\
& \qquad + y''\left(\frac{\partial y''}{\partial q''_{k+1}}\frac{\partial q''_{k+1}}{\partial q''_1} + \frac{\partial y''}{\partial q''_{k+2}}\frac{\partial q''_{k+2}}{\partial q''_1} + \ldots + \frac{\partial y''}{\partial q''_{k+p}}\frac{\partial q''_{k+p}}{\partial q''_1}\right) \\
& \qquad + z''\left(\frac{\partial z''}{\partial q''_{k+1}}\frac{\partial q''_{k+1}}{\partial q''_1} + \frac{\partial z''}{\partial q''_{k+2}}\frac{\partial q''_{k+2}}{\partial q''_1} + \ldots + \frac{\partial z''}{\partial q''_{k+p}}\frac{\partial q''_{k+p}}{\partial q''_1}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

et l'équation (6) est de la forme

$$(6') \qquad P_1 = Q_1.$$

Désignons par T la demi-force vive du système, en tenant compte des liaisons finies et différentielles, qui lui sont imposées, et par T_0, la demi-force vive du système en ne tenant compte que des liaisons finies. La fonction T s'obtient de T_0 en substituant dans celle-ci aux $q'_{k+p}, q'_{k+2}, \ldots, q'_{k+1}$ leurs valeurs définies par les équations (8). La fonction T_0 se compose de deux parties : l'une contient des termes qui dépendent de $q'_{k+1}, q'_{k+2}, \ldots, q'_{k+p}$, nous la désignerons par T_1; l'autre qui contient les autres termes, nous la désignerons par T_0; de cette manière nous avons

$$T_0 = T_1 = T'_0.$$

D'autre part, désignons par S_0 la demi-énergie de l'accélération du système en ne tenant compte que des liaisons finies, et par S_1 la fonction obtenue de S_0 en ne retenant que les termes qui contiennent les quantités $q''_{k+1}, q''_{k+2}, \ldots, q''_{k+p}$, définies aussi par les équations (8) en les dérivant par rapport à t.

Alors l'équation du mouvement (6') prend la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial T_1}{\partial q_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_1}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial q''_1} = Q_1$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'_0}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial T'_0}{\partial q_1} + \frac{\partial S_1}{\partial q''_1} = Q_1.$$

Donc les équations du mouvement du système sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial T_1}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k) \tag{9}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'_0}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T'_0}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial S_1}{q q''_\alpha} = Q_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, k), \tag{10}$$

T_0 n'étant une fonction que des vrais paramètres indépendants $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et de leurs dérivées; et S_1 n'étant une fonction que des secondes dérivées des paramètres dépendants, lesquelles se déterminent en fonction des secondes dérivées des paramètres indépendants au moyen des équations (8).

Les fonctions T_0 et S_1 dans la plupart des cas se déterminent plus facilement que la partie de la fonction S, introduite par M. Appell, laquelle donne la demi-énergie d'accélération en tenant compte de toutes les liaisons imposées au système.

Ce que nous allons éclaircir avec quelques exemples présentant des systèmes non holonomes.

En écrivant les équations différentielles du mouvement sous la forme (9), nous déduisons les corollaires suivants :

1° Si quelqu'un des paramètres indépendants ne figure pas dans l'équation (8), l'équation différentielle pour ce paramètre s'obtient par la méthode de Lagrange.

Mais, par la méthode de Lagrange, on peut obtenir aussi l'équation différentielle pour quelqu'un des paramètres indépendants, par exemple q_s qui figure dans les équations (8), pourvu que nous ayons

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_s}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial q''_s} = 0.$$

2° L'expression

$$\frac{\partial T_1}{\partial p_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_\alpha}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial q''_\alpha}$$

contient les termes qu'il faut ajouter à la partie gauche de l'équation du mouvement, déduite pour le paramètre q_α par la méthode de Lagrange, pour avoir la vraie équation différentielle du mouvement, répondant à ce paramètre.

3. *Exemple I.* — Une circonférence de rayon a et de masse unité roule, sans frottement ni glissement, sur un plan horizontal fixe (cerceau) (¹).

Dans le plan horizontal xOy, prenons deux axes fixes Ox et Oy, et par le point O, menons un troisième axe Oz, perpendiculaire au plan et dirigé vers le haut. Par le centre de gravité G de la circonférence, menons trois axes $Gx'y'z'$ parallèles aux axes $Oxyz$. Soit GX l'intersection du plan de la circonférence avec le plan $x'Gy'$, désignons par GY l'axe passant par G et le point de contact H de la circonférence et du plan xOy, et enfin soit GZ l'axe du cerceau. Si nous désignons par GD une droite invariablement liée avec la circonférence, située dans son plan, la position de la circonférence autour de G est définie par les angles

$$\widehat{x'X} = \psi, \qquad \widehat{XD} = \varphi, \qquad \widehat{z'Z} = \theta.$$

Les projections de la rotation instantanée du trièdre rectangulaire GXYZ sur les axes GX, GY, GZ sont

$$\text{(11)} \qquad P = \theta', \qquad Q = \psi' \sin\theta, \qquad R = \psi' \cos\theta$$

et celles de la rotation instantanée du corps solide pour le mouvement autour de G sont

$$\text{(12)} \qquad p = \theta', \qquad q = \psi' \sin\theta, \qquad r = \psi' \cos\theta + \varphi',$$

(¹) Paul Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 241, 372, 381.

alors

$$(13) \qquad P = p, \qquad Q = q, \qquad R = q \cos \operatorname{tang} \theta.$$

Si u, v, w sont les projections de la vitesse V^0 du point G sur les axes GXYZ, pour écrire que la circonférence roule sans glisser sur le plan yOx, il faut exprimer que la vitesse du point matériel H (o, $-a$, o) est égale à zéro; donc nous avons

$$u + ar = 0, \qquad v = 0, \qquad w - ap = 0;$$

ces équations sont les équations (8)

θ, ψ, φ étant les paramètres indépendants, la fonction T_0 dans ce cas est la demi-force vive pour le mouvement autour de G

$$T'_0 = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + Cr^2];$$

et la fonction S_1 est la demi-énergie de l'accélération de toute la masse de la circonférence concentrée en G; évidemment, cette fonction est

$$S_1 = \frac{1}{2}[(u' + Qw)^2 + (w' - Qu)^2] + \ldots.$$

La force appliquée, le poids Mg dérive de la fonction de force

$$u = - Mga \sin \theta.$$

Alors l'équation pour φ est

$$\frac{d}{dt}(Cr) + (u' + Qw)(-a) = 0$$

ou

$$(\mathrm{I}) \qquad (C + a^2)r' - a^2pq = 0$$

L'équation pour θ est

$$\frac{d}{dt}(Aq \sin \theta + Cr \cos \theta) + (u' + Qw)(a \cos \theta) = 0$$

ou, en tenant compte de (I), nous aurons

$$(\mathrm{II}) \qquad Aq' + (AR - Cr)p = 0.$$

Enfin, l'équation pour θ sera

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{A}p) - \mathrm{A}g\psi'\cos\theta + \mathrm{C}r\psi'\sin\theta + (w' - \mathrm{Q}u(a = -ag\cos\theta$$

ou

$$(\mathrm{A} + a^2)p' - (\mathrm{AR} - \mathrm{C}r)q + a^2qr = -ag\cos\theta; \tag{III}$$

les équations (I), (II), (III) sont les équations du mouvement.

Il est facile de voir que la méthode de Lagrange, appliquée pour le paramètre θ, donne l'équation (III). En effet, la fonction T dans ce cas est

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}[(\mathrm{A} + a^2)p^2 + \mathrm{A}g^2 + (\mathrm{C} + a^2)r^2]$$

et la fonction

$$\mathrm{T}_1 = \frac{1}{2}(u^2 + w^2);$$

évidemment, nous aurons

$$\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial \theta'}\right) + \frac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial \theta''} = 0.$$

4. *Exemple II.* — Un corps solide pesant de révolution, homogène, roule sans glisser sur un plan horizontal mobile, qui tourne uniformément autour d'un axe vertical fixe ([1]).

Soient Ox et Oy deux axes perpendiculaires dans le plan horizontal mobile, et OZ un troisième axe qui se confond avec l'axe vertical fixe et dirigé vers le haut.

Le mouvement relatif du corps est connu, si nous connaissons celui de son centre de gravité G et son mouvement autour de G.

Le mouvement de G est défini, si nous connaissons en fonction du temps les coordonnées ξ, η, ζ de ce point par rapport aux axes $Oxyz$.

Le point G du corps est situé sur l'axe de rotation que nous désignerons par GZ.

Le mouvement relatif autour de G, c'est-à-dire autour des

([1]) Iv. Isénoff, *Mouvement sans frottement d'un corps solide pesant de révolution sur un plan horizontal* (*Annuaire de l'Université de Sofia*, 1916, 1917, 1918).

axes $G\,x'y'z'$ parallèles aux axes $Oxyz$, est un mouvement d'un corps autour d'un point fixe.

Prenons un axe horizontal GX, perpendiculaire au plan vertical Z'GZ, et un autre axe GY, perpendiculaire au plan XGZ. De cette manière, nous déterminons un trièdre rectangulaire GXYZ dont la position par rapport au trièdre $G\,x'y'z'$ est déterminée par les angles $\psi = \widehat{XG}\,x'$, $\theta = z'\,\widehat{GZ}$.

Le mouvement relatif du corps autour de G est défini par les angles

$$\psi,\ \theta,\quad \varphi = \widehat{XGD},$$

GD étant une droite liée au corps et située dans le plan XGY.

La condition que le corps touche le plan horizontal mobile s'exprime par la liaison finie

$$\zeta = f(\theta),$$

f étant une fonction donnée.

Les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots, q_{k+p}$ dans ce cas sont

$$\varphi,\quad \psi,\quad \theta,\quad \xi,\quad \eta.$$

Les composantes de la rotation du trièdre GXYZ et celles de la rotation du corps pour son mouvement autour de G sont données respectivement par les équations (11) et (12).

Le corps roule sur le plan horizontal, si la vitesse relative du point matériel du contact est nulle. Trouvons les coordonnées de ce point. La courbe méridienne, qui engendre la surface de révolution, est située dans le plan vertical YGZ. On l'obtient comme l'enveloppe de la tangente. L'équation de la tangente en H est

$$-y\sin\theta - z\cos\theta = \zeta;$$

alors, de cette équation et de l'équation

$$-y\cos\theta + z\sin\theta = \zeta',$$

nous obtenons, pour les coordonnées du point M par rapport aux axes GXYZ,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= 0,\\ y &= -f(\theta)\sin\theta - f'(\theta)\cos\theta,\\ z &= -f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\sin\theta; \end{aligned}\right.$$

la vitesse relative de ce point est la résultante de la vitesse de translation des axes Gx', y', z' et de la vitesse due à la rotation du corps autour de G; alors les projections de cette vitesse sur les axes GXYZ sont

$$\begin{gathered}
\xi'\cos\psi + \eta'\sin\psi + qz - ry = 0,\\
-\xi'\sin\psi\cos\theta + \eta'\cos\psi\cos\theta + f'p\sin\theta - pz = 0,\\
\xi'\sin\psi\sin\theta - \eta'\cos\psi\sin\theta + f'p\cos\theta + py = 0
\end{gathered}$$

ou, en tenant compte des valeurs de y et z, ces trois équations se réduisent aux deux suivantes :

$$\begin{aligned}
\xi' &= q\cos\psi(f\cos\theta - f'\sin\theta) - r\cos\psi(f\sin\theta + f'\cos\theta) + pf\sin\psi,\\
\eta' &= q\sin\psi(f\cos\theta - f'\sin\theta) - r\sin\psi(f\sin\theta + f'\cos\theta) + pf\cos\psi,
\end{aligned}$$

qui correspondent aux équations (8).

Les paramètres indépendants sont φ, θ, ψ, les dépendants — ξ, η.

La fonction T'_0 dans ce cas se trouve immédiatement; elle est

$$T'_0 = \frac{1}{2}[Ap^2 + A(q + \mu\sin\theta)^2 + C(r + \mu\cos\theta)^2] + \frac{1}{2}Mf'^2p^2;$$

μ étant la vitesse avec laquelle le plan horizontal tourne autour de l'axe vertical fixe; la fonction S_1 présente la partie suivante de l'énergie de l'accélération absolue de G_1, laquelle fonction se trouve aussi très facile :

$$S_1 = \frac{1}{2}M[\xi''^2 + \eta''^2 - 2\xi''(2\mu\eta' + \mu^2\xi) + 2\eta''(2\mu\xi' - \mu^2\eta)] + \dots.$$

Alors l'équation pour φ sera

$$\frac{d}{dt}C(r + \mu\cos\theta) + \frac{\partial S_1}{\partial\xi''}\frac{\partial\xi''}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial\varphi''} + \frac{\partial S_1}{\partial\eta''}\frac{\partial\eta''}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial\varphi''} = 0$$

ou

$$\begin{aligned}
(1)\quad C(r' - \mu\sin\theta p) - M(\xi'' - 2\mu\eta' - \mu^2\xi)\cos\psi(f\sin\theta + f'\cos\theta)&\\
- M(\eta'' + 2\mu\xi - \mu^2\eta)\sin\psi(f\sin\theta + f'\cos\theta) = 0.&
\end{aligned}$$

L'équation pour ψ sera

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[A(q + \mu\sin\theta)\sin\theta + C(r + \mu\cos\theta)\cos\theta]\\
&\quad + \frac{\partial S_1}{\partial\xi''}\left(\frac{\partial\xi''}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial\psi''} + \frac{\partial\eta''}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial\psi''}\right) + \frac{\partial S_1}{\partial\eta''}\left(\frac{\partial\eta''}{\partial q'}\frac{\partial q'}{\partial\psi''} + \frac{\partial\eta''}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial\psi''}\right) = 0
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de l'équation (I), nous obtenons

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} &\mathrm{A}q' + (\mathrm{A}q\cot\theta - \mathrm{C}r)p + (2\mathrm{A} - \mathrm{C})\mu p\cos\theta \\ &\quad + (f\cos\theta - f'\sin\theta)[\mathrm{M}(\xi'' - 2\mu\eta' - \mu^2\xi)\cos\psi + \mathrm{M}(\eta'' + 2\mu\xi' - \mu^2\eta)\sin\psi] = 0. \end{aligned}$$

Enfin l'équation pour θ sera

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\mathrm{A} + \mathrm{M}f'^2)p - \mathrm{A}(q + \mu\sin\theta)(\psi'\cos\theta + \mu\cos\theta) - \mathrm{C}(r + \mu\cos\theta)(-\psi'\sin\theta - \mu\sin\theta) \\ &\quad - \mathrm{M}f'f''p^2 + \frac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial \xi''}\frac{\partial \xi''}{\partial p'} + \frac{\partial \mathrm{S}_1}{\partial \eta''}\frac{\partial \eta''}{\partial p'} = -\mathrm{M}gf' \end{aligned}$$

ou

$$\text{(III)}\quad \begin{aligned} &(\mathrm{A} + \mathrm{M}f'^2)p' + \mathrm{M}f'f''p^2 - \mathrm{A}(q + \mu\sin\theta)(q\cot\theta + \mu\cos\theta) + \mathrm{C}(r + \mu\cos\theta)(q + \mu\sin\theta) \\ &\quad + \mathrm{M}(\xi'' - 2\mu\eta' - \mu^2\xi)f\sin\psi - \mathrm{M}(\eta'' + 2\mu\xi' - \mu^2\eta)f\cos\psi = -\mathrm{M}gf'. \end{aligned}$$

Dans le cas où le plan est fixe, nous avons le problème suivant : *Un corps solide pesant, de révolution, roule sans glisser sur un plan horizontal fixe* (1).

Les équations du mouvement s'obtiennent de (I), (II), (III) en y posant $\mu = 0$; elles sont

$$\begin{gathered} \mathrm{C}r' - (f\sin\theta + f'\cos\theta)\,\mathrm{M}(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi) = 0, \\ \mathrm{A}q' + (\mathrm{A}q\cot\theta - \mathrm{C}r)p + (f\cos\theta - f'\sin\theta)\mathrm{M}(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi) = 0, \\ (\mathrm{A} + \mathrm{M}f'^2)p' + \mathrm{M}f'f''p^2 - (\mathrm{A}q\cot\theta - \mathrm{C}r)q + \mathrm{M}f(\xi''\sin\psi - \eta''\cos\psi) = -\mathrm{M}gf'; \end{gathered}$$

mais en vertu des équations (14), nous avons, pour les deux premières équations,

$$\begin{gathered} \mathrm{C}r' + \mathrm{M}y(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi) = 0, \\ \mathrm{A}q' + (\mathrm{A}q\cot\theta - \mathrm{C}r)p - \mathrm{M}z(\xi''\cos\psi + \eta''\sin\psi) = 0. \end{gathered}$$

M. Appell donne une autre forme à ces deux équations en introduisant les projections u, v, w de la vitesse du centre de gravité G sur les axes GX, GY, GZ.

Trouvons ces équations. La fonction T_0 sera

$$2\mathrm{T}_0 = \mathrm{M}(u^2 + v^2 + w^2) + \mathrm{A}(p^2 + q^2) + \mathrm{C}r^2.$$

Les équations exprimant la condition que le corps roule seront

$$u + qz - ry = 0, \qquad v - pz = 0, \qquad w + py = 0;$$

---

(1) Paul Appell, *Développement sur une forme nouvelle des équations de la Dynamique* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1900, p. 33).

d'où

$$u = r y - q z, \qquad v = p z, \qquad w = -p y;$$

ces équations correspondent aux équations (8).

Alors

$$T'_0 = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + C r^2] + \ldots$$

se réduit seulement à la demi-force vive pour le mouvement autour de G.

La fonction S_1 est la demi-énergie de l'accélération de toute la masse, concentrée en G :

$$S_1 = \frac{1}{2} M[(u' + q w - \mathrm{R} v)^2 + (v' + \mathrm{R} u - p w)^2 + (w' + p v - q u)^2].$$

L'équation pour φ est

$$\frac{d}{dt}(C r) + M(u' + q w - \mathrm{R} v) y = 0$$

ou

$$\text{(IV)} \qquad C r' + M u' y + M(q y + \mathrm{R} z) w = 0.$$

L'équation pour ψ est

$$\frac{d}{dt}(A q \sin\theta + C r \cos\theta) + M(u' + q w - \mathrm{R} v)(y \cos\theta - z \sin\theta) = 0,$$

ou

$$\begin{aligned} &A q' \sin\theta + C r' \cos\theta + A p q \cos\theta - C r p \sin\theta \\ &\quad + M(u' + q w - \mathrm{R} v) y \cos\theta - M(u' + q w - \mathrm{R} v) y \cos\theta - M(u' + q w - \mathrm{R} v) \sin\theta\, z = 0, \end{aligned}$$

ou enfin, en tenant compte de l'équation (IV) et en divisant les deux parties par sin θ, nous obtenons

$$\text{(V)} \qquad A q' + (A q \cot\theta - C r) p - M u' z + M(q y + \mathrm{R} z) v = 0;$$

(IV) et (V) sont les équations cherchées.

L'équation ci-dessus pour θ peut être remplacée par l'intégrale des forces vives.

3. *Exemple III.* — Une sphère roule sans glisser sur un plan

horizontal qui tourne avec une vitesse angulaire constante μ autour d'un axe vertical [1].

Ce problème est un cas particulier du précédent. Ici $\zeta = a$, a étant le rayon de la sphère. Si nous tenons φ, ψ, θ comme paramètres indépendants, nous travaillerons comme dans **4**. Mais nous prendrons comme paramètres indépendants ξ, η, ψ.

Si nous égalons à zéro les projections sur les axes Gx', y', z' de la vitesse relative du point de contact H de coordonnées o, o, $-a$, nous aurons, comme équations (8), les équations suivantes :

$$\xi' - aq = 0$$
$$\eta' + ap = 0,$$

où

$$p = \theta' \cos\psi + \varphi' \sin\theta \sin\psi,$$
$$q = \theta' \sin\psi - \varphi' \sin\theta \cos\psi.$$

Pour trouver les fonctions T_0'' et S_1, il faut nécessairement calculer complètement T_0 et S_0.

La force vive absolue T_0 et l'énergie de l'accélération absolue S_0 de la sphère, en ne tenant compte que de la liaison finie $\zeta = a$, se calculent très facilement. Ces fonctions sont respectivement

$$2T_0 = M[(\xi' - \mu\eta)^2 + (\eta' + \mu\xi)^2] + A[p^2 + q^2 + (r + \mu)^2]$$
$$S2_0 = M[(\xi'' - 2\mu\eta - \mu^2\xi)^2 + (\eta'' + 2\mu\xi' - \mu\eta)^2] + A[p'^2 + q'^2 + r'^2 + 2\mu(pq' - qp')] + \ldots$$

où

$$r = \psi' + \varphi' \cos\theta \quad (^2).$$

Alors

$$2T_0' = M[(\xi' - \mu\eta)^2 + (\eta' + \mu\xi)^2] + A(r + \mu)^2;$$

nous omettons le terme $A(p^2 + q^2)$, parce qu'il est égal à $A(\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2\theta)$, et

$$2S_1 = A[p'^2 + q'^2 + 2\mu(pq' - qp')].$$

L'équation pour ξ est

$$\frac{d}{dt} M(\xi' - \mu\eta) - M(\eta' + \mu\xi)\mu + \frac{A}{a} q' + 2\frac{A}{a}\mu p = 0$$

---

(1) Iv. Isénoff, *Mouvement sans frottement, etc.* (*Annuaire de l'Université de Sofia*, 1916, 1917, 1918).

(2) Les expressions p, q, r sont les projections de la vitesse angulaire instantanée relative de la sphère sur les axes Gx', y', z'.

ou

$$\frac{7}{5}\xi'' - \frac{12}{15}\mu\eta' - \mu^2\xi = 0. \tag{15}$$

L'équation pour η est

$$\frac{d}{dt}M(\eta' + \mu\xi) + M(\xi' - \mu\eta)\mu - \frac{A}{a}p' + 2\frac{A}{a}\mu q = 0$$

ou

$$\frac{7}{5}\eta'' + \frac{12}{5}\mu\xi' - \mu^2\eta = 0. \tag{16}$$

Enfin l'équation pour ψ est

$$\frac{d}{dt}A(r + \mu) = 0$$

ou

$$r' = 0.$$

Cette équation s'obtient par la méthode de Lagrange, parce que ψ' ne figure pas dans $\xi' = aq$, $\eta' = -ap$.

Les intégrales générales du système d'équations (15) et (16), sont

$$\xi = A\cos(\mu t + \alpha) + B\cos\left(\frac{5}{7}\mu t + \beta\right),$$

$$\eta = -A\sin(\mu t + \alpha) - B\sin\left(\frac{5}{7}\mu t + \beta\right).$$

Ces équations donnent la loi du mouvement du centre de gravité de la sphère.

La trajectoire absolue de la projection de G sur un plan horizontal fixe est une circonférence.