JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE JANET

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 3 (1920), p. 65-151.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1920_8_3__65_0>

Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles;

PAR MAURICE JANET.

INTRODUCTION.

1. Dans la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles, deux cas peuvent être actuellement considérés comme classiques :

1° Celui d'un système du *premier ordre* à *une* fonction inconnue;
2° Celui d'un système à *autant d'équations* que *de fonctions inconnues de la forme de Cauchy et de Mme Kovalewsky.*

Le système d'équations aux dérivées partielles le plus général est susceptible de différentes formes simples :

Tout système peut se ramener à un système du premier ordre.

Tout système peut se ramener à un système du deuxième ordre à une seule fonction inconnue ([1]).

Dans un autre ordre d'idées, on peut remarquer que tout système d'équations aux dérivées partielles est équivalent à un système d'équations aux différentielles totales : la théorie de ces derniers systèmes ([2]) fournirait donc une base d'étude pour celle que nous avons en vue.

([1]) Cette propriété, plus cachée que la précédente, a été signalée par M. Drach (*C. R. Acad. Sc.*, 1897, p. 598).

([2]) *Voir* en particulier les travaux de M. Cartan (*Ann. Éc. Norm.*, 1901-1904) et de M. Goursat (*Ann. Toulouse*, 1915) auxquels se rattachent ceux de M. G. Cerf (*C. R. Acad. Sc.*, 1920).

Mais si cette méthode éclaire bien des questions posées par la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles, il en est d'autres au contraire dont l'étude directe est plus naturelle : citons l'étude des systèmes *linéaires*.

Dans ce qui suit, nous n'aurons pas à nous servir des remarques qui précèdent; nous traiterons directement un système d'équations aux dérivées partielles donné sans changer de fonctions inconnues ni de variables indépendantes; nous arriverons à une forme canonique entièrement générale où le « degré de généralité » de la solution apparaîtra nettement.

Cette forme canonique générale est due à M. Riquier, qui a le premier [1], en 1892, démontré l'existence des solutions d'un système différentiel [2] quelconque.

Elle comprend comme cas particulier la forme canonique adoptée par M. Delassus : bien que cette dernière forme ait un grand degré de généralité, on doit remarquer qu'il existe des systèmes [3] auxquels elle ne peut s'appliquer même après un changement de variables.

2. Le présent travail a pour objet essentiel l'exposition simple des résultats de M. Riquier. Cette exposition nous conduira naturellement à certains résultats de nature algébrique qui complètent la théorie des formes donnée par M. Hilbert [4]. Les développements que comporterait cette théorie et leur application à la théorie des caractéristiques des systèmes seront réservés pour un autre travail : il nous a semblé qu'il y avait lieu d'exposer tout d'abord par une méthode nouvelle aussi simple que possible le théorème général relatif à l'existence des solutions d'un système quelconque.

Nous commencerons par des remarques de nature arithmétique : les dérivées d'une fonction de n variables (ou les coefficients du déve-

---

(1) *Voir* pour l'historique de la question l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, 4, 1, et la préface de l'Ouvrage de M. Riquier : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles* (Gauthier-Villars, 1910).

(2) « formellement » compatible.

(3) Ce fait a été signalé par MM. Gunther et Robinson (*C. R. Acad. Sc.*, 1913, p. 1147).

(4) *Mathematische Annalen*, 1890.

loppement d'une fonction de n variables en série entière) correspondent aux systèmes constitués par n entiers rangés dans un certain ordre; nous avons adopté le langage algébrique : le premier Chapitre sera consacré à l'étude des systèmes de « monomes » et en particulier des *modules* de monomes; nous mettons en évidence la notion de système de monomes complet qui est fondamentale pour la suite. Lorsqu'un système de monomes est complet, les monomes multiples de l'un d'eux (au moins) se répartissent immédiatement en un nombre fini de classes de formation simple (I). La classification des monomes d'un système complet d'après leur « hauteur » conduit à une propriété importante (II) qui est utilisée au Chapitre II. Nous en indiquons immédiatement l'application à ce que l'on peut appeler le « calcul inverse de la dérivation ».

Le deuxième Chapitre a un caractère algébrique : il est consacré à l'étude formelle des systèmes d'équations aux dérivées partielles; l'attribution de cotes aux fonctions et variables permet de classer d'une manière simple les dérivées des inconnues. Pour les systèmes de forme canonique, les deux notions de « système complet » et de « classement des dérivées des inconnues au moyen de cotes » permettent la position d'un problème « formel » pour lequel le degré de généralité de la solution est nettement en évidence; dans le cas où le système proposé est complètement intégrable, ce problème est équivalent au problème que l'on pose en assujettissant les équations du système à être simultanément vérifiées quelles que soient les valeurs des variables. Nous indiquons un procédé régulier pour reconnaître au bout d'un nombre fini d'opérations si un système donné est complètement intégrable. Nous montrons d'ailleurs que tout système peut se ramener par un procédé régulier à une forme canonique complètement intégrable. Nous donnons enfin quelques indications sur les conséquences que l'on peut tirer de ce qui précède dans la théorie des formes algébriques.

Les méthodes précédentes donnent le moyen de calculer les coefficients du développement en série d'une solution dont on suppose l'*existence* et la *régularité*, lorsque l'on connaît les conditions initiales relatives à cette solution. Réciproquement, les coefficients calculés définissent-ils effectivement une solution? Il suffit, pour démontrer qu'il en est ainsi, de démontrer que les séries obtenues pour la solution sont *convergentes* (lorsque les variables diffèrent assez peu de certaines valeurs : valeurs initiales). C'est à cette démonstration qu'est consacré le troisième Chapitre. Il convient tout d'abord de généraliser les résultats indiqués au Chapitre II. Lorsque cette généralisation est faite, la démonstration devient très simple; nous mettons en évidence et nous prouvons à part trois lemmes de nature algébrique que nous utilisons. Cette démonstration de convergence n'est pas seulement plus simple que celle de M. Riquier; elle est aussi plus compréhensive puisqu'elle prouve en même temps les résultats plus généraux trouvés ensuite par le même auteur (¹).

Nous terminons en traitant quelques exemples simples : le premier illustre à la fois la théorie exposée au premier Chapitre, celle des systèmes canoniques de M. Riquier et celle des chaînes de systèmes de M. Hilbert; le second est intéressant au point de vue de cette dernière théorie; le troisième enfin indique comment se présentent les cas singuliers qui échappent aux méthodes de M. Delassus.

Nous adressons ici l'expression de notre respectueuse gratitude à M. Hadamard, qui a orienté le début de nos recherches, et à M. Goursat, qui a bien voulu nous encourager de ses précieux conseils.

CHAPITRE I.

MODULES DE MONOMES. — THÉORIE GÉNÉRALE ET APPLICATIONS.

Le mot *monome* désignera dans ce qui suit une expression de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où les α sont des entiers positifs (sens large); ($x_1^0 x_2^0 \ldots x_n^0$ devra être considéré comme un « monome »).

1. Théorème général sur certaines suites de monomes. — *Une suite de monomes* M_1, M_2, ... *telle que chacun d'eux n'est multiple*

(¹) Signalés aussi par M. Goursat pour l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q, r, t) \qquad \text{lorsque} \qquad \left|\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_0\right| < \frac{1}{4}$$

(z étant donnée sur $x = 0$ et sur $y = 0$).

d'aucun des précédents ne peut comprendre qu'un nombre fini de termes.

Dans le cas d'une variable, la proposition se réduit à celle-ci : Une suite d'entiers positifs décroissants est finie.

Admettons la proposition dans le cas de $n-1$ variables, et démontrons-la pour n. Soit $M_1 = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ le premier monome de la suite donnée (S); dans un des suivants, pris arbitrairement, l'exposant d'une des variables au moins, x_i par exemple, est inférieur à l'exposant de cette variable dans M_1. Appelons (S_{ik}) la suite des monomes de (S) où x_i entre à l'exposant k exactement : $(k = 0, 1, 2, \ldots, \alpha_i - 1)$; nous obtenons ainsi $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ suites partielles, dont l'ensemble renferme (peut-être avec répétition) *tous* les monomes de (S) qui suivent M_1. Mais les termes de S_{ik} ne sont autres, au facteur près x_i^k, que des monomes à $n-1$ variables $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ tels que chacun d'eux ne soit multiple d'aucun des précédents. Chacune de ces suites est donc finie et il en est de même de la suite donnée.

2. *Conséquences diverses.* — Il résulte du théorème précédent que d'un système quelconque, infini, de monomes, on peut en extraire un système fini (M) tel que tout monome du système donné soit multiple de l'un, au moins, des monomes (M) : il suffit, en effet, de choisir arbitrairement un monome du système donné, M_1, puis, parmi les monomes du système, un monome M_2 qui ne soit pas multiple de M_1, puis parmi les monomes du système qui ne sont multiples ni de M_1, ni de M_2, un monome M_3, etc.; la suite ainsi obtenue sera finie : tout monome du système donné sera multiple de l'un au moins des monomes ainsi obtenus $M_1, M_2, \ldots, M_p$.

On peut utiliser la proposition précédente sous différentes formes que nous allons indiquer :

Si l'on considère une *suite* infinie de monomes, à partir d'un certain rang r, on n'obtient que des multiples des monomes de rang inférieur à r.

Si l'on considère une suite quelconque de monomes de degrés non décroissants, à partir d'un certain degré p, les monomes de la suite sont des multiples de monomes de la suite de degré inférieur à p.

Une suite de *systèmes* de monomes contenant chacun des monomes qui ne sont multiples d'aucun de ceux contenus dans les systèmes précédents est finie.

Soit $S_1 S_2 \ldots S_k \ldots$ une suite de systèmes de monomes où S_{k+1} est constitué par : 1° les monomes de S_k; 2° des monomes qui ne sont multiples d'aucun monome de S_k; une telle suite est nécessairement finie (¹).

Si l'on considère une suite de systèmes (²) de monomes $E_k, E_{k+1}, \ldots,$ de degrés $k, k+1, \ldots,$ où E_{i+1} contient tous les monomes de degré $i+1$ multiples des monomes de E_i (quel que soit i), dès que i dépasse une certaine valeur p, E_{i+1} ne contient *que* les multiples (de degré $i+1$) de E_i.

3. *Modules de monomes.* — Nous dirons qu'un *système de monomes* forme un *module* si *tout multiple d'un de ces monomes appartient au système.* Un module est toujours constitué par les multiples d'un nombre *fini* de monomes. Nous dirons quelquefois que ces monomes forment une *base* pour le module.

L'ensemble de tous les monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ forme un module.

Tout ce qui précède comme ce qui suivra s'applique, au langage près, aux systèmes de dérivées d'*une* fonction.

On pourra dire qu'un système de dérivées de u forme un *module* si toute dérivée de l'une d'elles appartient au système.

Il sera utile, pour la généralité du langage, de considérer u comme une *dérivée* (d'ordre zéro).

Le système formé par la fonction et toutes ses dérivées (d'ordre $\geqq 1$) pourra être considéré comme un module.

4. *Structure d'un module. Généralités.* — Lorsqu'il n'y a qu'une lettre, x_1, un module de monomes se compose simplement des multiples de *l'un d'eux*, celui qui entre au plus bas degré dans le module. Nous allons montrer comment on peut ramener l'étude d'un module M de monomes à n lettres à l'étude d'un certain nombre (fini) de modules de monomes à *moins de n lettres*. Nous aurons donc un procédé de récurrence pour faire l'étude d'un module quelconque.

(¹) Cet énoncé sera directement utilisé plus loin (II, **12**).

(²) *Cf.* Delassus. *Extension du théorème de Cauchy* (*Annales de l'École Normale*, 1896).

Parmi les monomes de M, considérons ceux M_0 qui ne contiennent pas x_n; ceux $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda$ qui contiennent x_n respectivement au premier degré, au second degré, ..., au degré λ. L'ensemble des coefficients de x_n^λ dans ceux qui contiennent x_n au degré λ forme un module M'_λ; on obtient ainsi une infinité de modules $M'_0, M'_1, \ldots, M'_\lambda, \ldots$, aux $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Quelques-uns de ces modules, au début, peuvent ne pas se présenter effectivement; mais si M'_i existe, M'_{i+1} existe également et contient *tous les monomes de* M'_i (car si $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$ appartient à M'_i, $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} x_n^i$ appartient à M. Il en est donc ainsi de $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} x_n^{i+1}$, et $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$ appartient à M'_{i+1}). Par suite, à partir d'un certain rang k, les modules $M'_\lambda (\lambda \geq k)$ sont identiques. Pour connaître la constitution du module M à n variables, il suffit de connaître celle des modules $M'_0, M'_1, \ldots, M'_k$ à $n-1$ variables.

Supposons que l'on connaisse des monomes, en nombre fini, qui puissent servir à définir ces modules, c'est-à-dire qui, multipliés (une ou plusieurs fois) par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, donnent tous leurs monomes. Si l'on multiplie (une ou plusieurs fois) par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ les monomes correspondants de $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$, et par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les monomes correspondants de M_k, on obtient certainement *tous* les monomes de M; car, un monome de M où x_n a un exposant $\lambda < k$ s'obtient en multipliant un monome de M_λ par un monome en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et un monome de M où x_n a un exposant $k+i (i \geq 0)$ s'obtient en multipliant un monome de M_{k+i} par un monome en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et par suite un monome de M_k par x_n^i et par un monome en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

3. *Étude d'un exemple.* — Nous allons appliquer le procédé précédent à un exemple que nous traiterons complètement et qui nous fera pressentir les résultats généraux que nous avons en vue.

Considérons le module constitué par les multiples de l'un des quatre monomes

$$x_1^7, \quad x_3^2 x_2^2 x_1^4, \quad x_3^3 x_1^5, \quad x_3^3 x_2^2 x_1^2.$$

Les modules (à deux variables x_1, x_2) M'_0, M'_1, M'_2, M'_3 sont définis ici par les monomes

$$\left|\, x_1^7 \right. \qquad \left|\, x_1^7 \right. \qquad \left|\, \begin{matrix} x_1^7 \\ x_2^2 x_1^4 \end{matrix} \right. \qquad \left|\, \begin{matrix} x_1^5 \\ x_2^2 x_1^2 \end{matrix} \right.$$

et les modules M'_4, M'_5, ... sont identiques au module M'_3. A chaque monome du module donné correspond un et un seul monome d'un module M'_i.

Pour étudier plus complètement la constitution de chacun de ces modules à deux variables, appliquons à chacun d'eux la méthode même qui vient de nous servir.

Il n'y a évidemment pas lieu de l'appliquer à M'_0, M'_1 constitués chacun par les multiples d'un seul monome x_1^7.

Les monomes multiples de l'un des deux monomes

$$x_1^7, \quad x_2^2 x_1^4$$

peuvent se grouper d'après l'exposant de x_2 qui y figure; l'ensemble de ceux qui ne contiennent pas x_2 sera appelé M'_{20}; l'ensemble de ceux qui contiennent x_2 au premier, au second degré, ..., au degré λ, sera appelé M'_{21}, M'_{22}, ..., $M'_{2\lambda}$.

L'ensemble des coefficients de x_2^λ dans $M'_{2\lambda}$ constituera un module à une variable x_1, que nous désignerons par $M''_{2\lambda}$. Les modules à une variable M''_{20}, M''_{21}, M''_{22} sont définis ici par les monomes

$$x_1^7, \quad x_1^7, \quad x_1^4.$$

Les modules M''_{23}, M''_{24}, ... sont identiques au module M''_{22}.

De même, en appelant $M'_{3\lambda}$ l'ensemble de ceux des monomes du module M'_3 qui contiennent x_2 à l'exposant λ, et $M''_{3\lambda}$ le module (à une variable x_1) constitué par les coefficients de x_2^λ dans ces monomes, M''_{30}, M''_{31}, M''_{32} seront définis par les monomes

$$x_1^5, \quad x_1^5, \quad x_1^2,$$

M''_{33}, M''_{34}, ... étant identiques à M''_{32}.

Le procédé précédent a mis en évidence certains monomes M du module (¹) primitif, à savoir :

$$\begin{array}{|l|l|l|l}
x_1^7 & x_3 x_1^7 & x_3^2 x_1^7 & x_3^3 x_1^5 \\
 & & x_3^2 x_2 x_1^7 & x_3^3 x_2 x_1^5 \\
 & & x_3^2 x_2^2 x_1^4 & x_3^3 x_2^2 x_1^2
\end{array} \quad \cdots$$

(¹) La lettre M désigne donc dans ce qui suit les *monomes du présent Tableau*, et non plus, comme au n° **4**, le *module* lui-même.

qui suffisent évidemment à définir ce module puisqu'ils contiennent tous les monomes dont nous sommes partis, mais qui jouissent de plus des propriétés suivantes :

On obtient tous les monomes du module où x_3 intervient au degré $i (i = 0, 1, 2)$, et ceux-là seulement, en multipliant tous les monomes M où x_3 a le degré i par tous les monomes en x_1, x_2.

On obtient tous les monomes du module où x_3 intervient à un degré $\geqq 3$ en multipliant tous les monomes M où x_3 a le degré 3 par tous les monomes en x_1, x_2, x_3.

On peut aller plus loin, et dire :

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant au deuxième degré, x_2 intervient au degré $j (j = 0, 1)$, et ceux-là seulement, en multipliant le monome M où x_3 intervient au degré 2, et x_2 au degré j, par tous les monomes en x_1.

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant au deuxième degré, x_2 intervient à un degré $\geqq 2$ en multipliant le monome M où x_3 a le degré 2 et x_2 le degré 2 par tous les monomes en x_1, x_2.

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant à un degré $\geqq 3$, x_2 intervient au degré $k (k = 0, 1)$, et ceux-là seulement, en multipliant le monome M où x_3, intervenant au degré 3, x_2 intervient au degré k, par tous les monomes en x_1, x_3.

On obtient tous les monomes du module où, x_3 intervenant à un degré $\geqq 3$, x_2 intervient à un degré $\geqq 2$, en multipliant le monome M, où x_3 a le degré 3 et x_2 le degré 2, par tous les monomes en x_1, x_2, x_3.

En résumé, on obtient, sans omission ni répétition, tous les monomes du module donné en multipliant :

	$x_3^3 x_2^2 x_1^2$	par tous les monomes en	x_1, x_2, x_3;
	$x_3^3 x_2 x_1^4$	»	x_1, x_3;
	$x_3^3 x_1^5$	»	x_1, x_3;
(M)	$x_3^2 x_2^2 x_1^4$	»	x_1, x_2;
	$x_3^2 x_2 x_1^7$	»	x_1;
	$x_3^2 x_1^7$	»	x_1;
	$x_3 x_1^7$	»	x_1, x_2;
	x_1^7	»	x_1, x_2.

A chaque monome M du Tableau précédent, nous faisons ainsi « correspondre » certaines variables x, celles qui se trouvent dans la seconde colonne, sur la même ligne que M.

Faisons, dès maintenant, au sujet des monomes M, les remarques suivantes, qui seront généralisées plus loin (¹) :

Le produit par x_3 d'un monome $\overline{M}$ (où l'exposant λ de x_3 est inférieur à 3) est identique au produit d'un monome $\overline{\overline{M}}$ plus haut que $\overline{M}$ par un monome ne contenant que les variables correspondant à $\overline{\overline{M}}$.

Le produit par x_2 d'un monome $\overline{M}$ (où l'exposant de x_2 est inférieur à 2 pour ceux qui contiennent x_3 au deuxième degré, où il est inférieur à 2 pour ceux qui contiennent x_3 au troisième degré) est identique au produit d'un monome $\overline{\overline{M}}$ plus haut que $\overline{M}$ par un monome ne contenant que les variables correspondant à $\overline{\overline{M}}$.

6. *Suite de l'étude précédente. Répartition en classes des monomes qui ne font pas partie du module.* — Nous avons réparti tous les monomes du module défini par les monomes donnés en un nombre fini de classes sans éléments communs, les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec certaines variables déterminées.

On peut répartir tous les monomes ($\mathfrak{M}$) *qui ne font pas partie du module* en un nombre fini de classes de même nature.

Les monomes ($\mathfrak{M}$) qui ne contiennent pas x_3 contiennent x_1 au degré 0, 1, 2, ... ou 6. Ce sont les monomes en x_2 seul, les produits de x_1 par les monomes en x_2, ..., les produits de x_1^6 par les monomes en x_2.

Les monomes ($\mathfrak{M}$) qui contiennent x_3 au premier degré sont constitués d'une manière analogue ; ce sont les produits de x_3, $x_3 x_1$, ..., $x_3 x_1^6$, par les monomes en x_2.

Les monomes ($\mathfrak{M}$) qui contiennent x_3 au deuxième degré se répartissent tout d'abord en trois groupes suivant que l'exposant de x_2 y est 0, 1 ou bien égal ou supérieur à 2. Le premier est constitué par les seuls monomes x_3^2, $x_3^2 x_1$, ..., $x_3^2 x_1^6$. Le second par les monomes $x_3^2 x_2$, $x_3^2 x_2 x_1$, ..., $x_3^2 x_2 x_1^6$. Dans le troisième, l'exposant de x_1 est

(¹) Nous employons les notations $\overline{M}$, $\overline{\overline{M}}$ pour désigner des monomes M particuliers.

nécessairement inférieur à 4; et les diverses classes sont constituées par les produits de $x_3^2x_2^2$, $x_3^2x_2^2x_1$, $x_3^2x_2^2x_1^2$, $x_3^2x_2^2x_1^3$ par tous les monomes en x_2.

Les monomes $(\mathfrak{M})$ qui contiennent x_3 à un degré égal ou supérieur à 3 se répartissent d'abord en trois groupes suivant que l'exposant de x_2 y est 0, 1, ou bien égal ou supérieur à 2.

Le premier est constitué par les produits des monomes $x_3^3, x_3^3x_1, \ldots, x_3^3x_1^4$ par tous les monomes en x_3. Le second par les produits des monomes $x_3^3x_2, x_3^3x_2x_1, \ldots, x_3^3x_2x_1^4$ par tous les monomes en x_3. Le troisième par les produits des monomes $x_3^3x_2^2$, $x_3^3x_2^2x_1$ par tous les monomes en x_3, x_2.

En résumé, nous obtenons, sans omission ni répétition, tous les monomes $(\mathfrak{M})$ en multipliant :

$$
(\mathrm{N})\quad
\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l}
1, x_1, \ldots, x_1^6 \\
x_3, x_3x_1, \ldots, x_3x_1^6
\end{array}\right\} & \text{par tous les monomes en } x_2; \\
\left.\begin{array}{l}
x_3^2, x_3^2x_1, \ldots, x_3^2x_1^6 \\
x_3^2x_2, x_3^2x_2x_1, \ldots, x_3^2x_2x_1^6
\end{array}\right\} & \text{par } 1; \\
x_3^2x_2^2, x_3^2x_2^2x_1, x_3^2x_2^2x_1^2, x_3^2x_2^2x_1^3 & \text{par tous les monomes en } x_2; \\
\left.\begin{array}{l}
x_3^3, x_3^3x_1, \ldots, x_3^3x_1^4 \\
x_3^3x_2, x_3^3x_2x_1, \ldots, x_3^3x_2x_1^4
\end{array}\right\} & \text{par tous les monomes en } x_3; \\
x_3^3x_2^2, x_3^3x_2^2x_1 & \text{par tous les monomes en } x_3, x_2.
\end{array}
$$

La théorie générale qui suit, préparée par les numéros précédents, en est logiquement indépendante; en particulier, elle ne nécessite pas la connaissance du théorème initial.

7. *Systèmes de monomes. Variables multiplicatrices; classes.* — Considérons un système formé d'un nombre fini de monomes, tous différents; nous désignerons l'un quelconque de ces monomes par la lettre M.

Soient $x_n^{\alpha_n}x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\ldots x_1^{\alpha_1}$ l'un d'eux; j un des indices 1, 2, ..., n. On examinera si, parmi ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{j+1}$ figurent avec les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{j+1}$ exactement, il y en a où x_j figure avec un exposant supérieur à α_j; s'il n'y en a pas (et en particulier s'il n'y a pas d'autre monome M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{j+1}$ figurent avec les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{j+1}$), nous dirons que x_j est *variable multi-*

plicatrice pour $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système des monomes M donnés.

[Dans le cas $j = n$, on examinera si, parmi les monomes M, il y en a où x_n figure avec un exposant supérieur à α_n; s'il n'y en a pas (et en particulier si le monome $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ constitue à lui seul le système donné), nous dirons que x_n est variable multiplicatrice pour $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système des monomes M donnés.]

De cette définition résulte immédiatement la remarque suivante :

Considérons ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$ figurent avec les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{k+1}$ exactement; divisons-les par $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$; soit Q les quotients ainsi obtenus. Celles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qui sont multiplicatrices pour $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (M) sont précisément celles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ qui sont multiplicatrices pour $x_k^{\alpha_k} x_{k-1}^{\alpha_{k-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (Q) (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$).

En particulier, considérons ceux des monomes (M) où x_n figure avec un exposant donné α_n; divisons-les par $x_n^{\alpha_n}$, soit Q les quotients ainsi obtenus; si α_n n'a pas sa valeur maxima, *les variables multiplicatrices* de $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (M) sont précisément les variables multiplicatrices de $x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (Q) (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Si α_n a sa valeur maxima, les variables multiplicatrices de $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (M) sont : 1° x_n; 2° les variables multiplicatrices de $x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ dans le système (Q) (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$).

Soit un monome M particulier; faisons le produit de M par un quelconque des monomes que l'on peut former avec ses variables multiplicatrices; les produits ainsi obtenus (en y comprenant M lui-même $= \mathrm{M} \times 1$) formeront la classe $(\mathfrak{M})$ correspondant à M dans le système donné (si M n'admet pas de variable multiplicatrice, la classe $\mathfrak{M}$ se réduit à M lui-même). Nous définissons ainsi autant de classes qu'il y a de monomes M.

Deux classes différentes n'ont aucun élément commun. — La proposition est vraie lorsque les M sont des « monomes » à une seule variable x_1; en effet, en désignant par a le plus grand des exposants de x_1, tout monome M, sauf x_1^a, constitue à lui seul sa classe, et la classe de x_1^a est constituée par tous les monomes $x_1^{a+\lambda}$ où $\lambda \gtrless 0$. Admettons que la proposition soit vraie pour tout système de monomes à $n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; montrons qu'elle est vraie pour tout système de monomes M à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Considérons deux monomes $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ obtenus en multipliant deux monomes M différents, M_1, M_2, respectivement par un certain nombre de leurs variables multiplicatrices. Si M_1, M_2 ont des *degrés différents* en x_n, x_n n'est multiplicatrice que pour l'un d'eux *au plus;* si x_n n'est multiplicatrice ni pour l'un ni pour l'autre, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ont respectivement les mêmes degrés en x_n que M_1, M_2; si x_n est multiplicatrice pour M_1 et non pour M_2, le degré en x_n de $\mathfrak{M}_1$ est supérieur (et non égal) au degré en x_n de $\mathfrak{M}_2$. $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont donc certainement différents. Si M_1, M_2 ont *même degré* λ en x_n, considérons ceux des M où x_n figure avec l'exposant λ; soient Q leurs quotients par x_n^λ. Supposons $\lambda < a$, maximum des degrés de x_n dans les M; les variables multiplicatrices de M_1, M_2 dans le système M sont les mêmes que les variables multiplicatrices des monomes correspondants Q_1, Q_2 dans le système Q aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; les monomes $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ne diffèrent que par le facteur x_n^λ des monomes correspondants $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ provenant de Q_1, Q_2; $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ étant différents, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont différents. Supposons que M_1, M_2 aient tous deux pour degré en x_n le degré maximum de x_n dans les M, a; les variables multiplicatrices de M_1, M_2 dans le système M sont : 1° x_n; 2° les variables multiplicatrices des monomes correspondants Q_1, Q_2 dans le système Q (aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Si $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ ont été obtenus en multipliant M_1, M_2 par des monomes de degrés (en x_n) différents, ils sont certainement différents; s'ils ont été obtenus en multipliant M_1, M_2 par des monomes de même degré μ en x_n, ils ne diffèrent que par le facteur $x_n^{a+\mu}$ de deux monomes $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ provenant de $Q_1 Q_2$ dans le système Q; $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$ étant différents, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ sont différents.

8. *Systèmes complets. Condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit complet.* — Les monomes $\mathfrak{M}$ font partie du module défini par les M. Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des monomes $\mathfrak{M}$ coïncide avec l'ensemble des monomes du module M, autrement dit pour que tout multiple d'un M fasse partie d'une classe $\mathfrak{M}$.

Multiplions un monome M quelconque par une quelconque de ses variables non multiplicatrices; il est *nécessaire* que tous les produits ainsi obtenus fassent partie des $\mathcal{M}$. Je dis que cette condition est *suffisante*.

Si le produit d'un monome M *quelconque par une quelconque de ses variables non multiplicatrices est contenu dans les* ($\mathcal{M}$), *tout multiple d'un* M *est contenu dans les* ($\mathcal{M}$).

La proposition est vraie lorsque les M sont des monomes à une variable x_1. Supposons que le produit par x_1 de tout M où x_1 n'a pas son exposant maximum a fasse partie d'une classe $\mathcal{M}$; il en résulte que si x_1^λ (où $\lambda \leqq a - 1$) figure parmi les M, $x_1^{\lambda+1}$ figure aussi parmi les M (puisque les seuls $\mathcal{M}$ qui ne soient pas des M ont des exposants supérieurs à a); si b est le minimum des exposants de x_1 dans les M, x_1^{b+1}, x_1^{b+2}, ..., $x_1^{b+a-b-1}$ sont des monomes M ; tout monome de degré supérieur ou égal à b fait donc partie d'une classe $\mathcal{M}$.

Admettons que la proposition soit vraie pour tout système de monomes à $n - 1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; montrons qu'elle est vraie pour tout système de monomes M à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Considérons ceux des monomes M donnés où x_n a un exposant déterminé λ : M_λ et leurs quotients par x_n^λ : Q_λ; celles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, qui sont multiplicatrices pour un (¹) des monomes $\overline{M}_\lambda$ dans le système donné (M) sont précisément celles de ces variables qui sont multiplicatrices pour son quotient par x_n^λ dans le système des Q_λ; toute classe $\overline{\mathcal{M}}_\lambda$ contient donc les produits par x_n^λ des monomes $\overline{\mathcal{Q}}_\lambda$ de la classe correspondant à ce quotient $\overline{Q}_\lambda$ dans le système des Q_λ. Si le produit d'un $\overline{M}_\lambda$ quelconque par une $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ non multiplicatrice pour cet $\overline{M}_\lambda$ fait partie d'une classe $\mathcal{M}_\lambda$, on voit que le produit de $\overline{Q}_\lambda = \dfrac{\overline{M}_\lambda}{x_n^\lambda}$ par une $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ non multiplicatrice pour ce $\overline{Q}_\lambda$ dans le système des Q_λ fait partie d'une classe $\mathcal{Q}_\lambda$; d'après la proposition admise, il en résulte que le produit d'un Q_λ quelconque par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ fait partie

(¹) Nous emploierons souvent dans ce qui suit la notation $\overline{M}$, ou $\overline{\overline{M}}$, pour désigner un monome M particulier ; la notation $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$ pour désigner une classe $\mathcal{M}$ particulière, etc.

d'une classe $\mathcal{Q}_\lambda$; donc le produit d'un M_λ quelconque par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ fait partie d'une classe $\mathcal{M}_\lambda$. Remarquons que le produit par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de tout monome $\mathcal{M}$ où l'exposant de x_n n'est pas supérieur à sa valeur maxima dans les (M) fait partie d'une classe ($\mathcal{M}$); car le monome $\mathcal{M}$ considéré est le produit d'un M par un monome où peuvent figurer $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, mais non x_n.

Admettons que le produit de tout monome M par tout monome dont le degré en x_n est ρ fasse partie des ($\mathcal{M}$) ; nous allons démontrer qu'il en est encore ainsi lorsque ce degré est $\rho + 1$.

Le produit d'un M par un monome de degré $\rho + 1$ en x_n peut, d'après l'hypothèse, être considéré comme le produit d'un ($\mathcal{M}$) par x_n.

Si le degré en x_n du monome $\mathcal{M}$ considéré, $\overline{\mathcal{M}}$, est inférieur à a, maximum du degré de x_n dans les (M), ce monome $\overline{\mathcal{M}}$ fait partie d'une classe où x_n n'est pas variable multiplicatrice; soit $\overline{M}$ le monome auquel correspond cette classe ; $x_n\overline{M}$ est un $\mathcal{M}$ de degré (en x_n) au plus égal à a; donc $x_n\overline{\mathcal{M}}$, qui est égal au produit de $x_n\overline{M}$ par un monome ne renfermant pas x_n, est encore un $\mathcal{M}$ (remarque faite plus haut). Si le degré en x_n du monome $\overline{\mathcal{M}}$ est supérieur ou égal à a, $\overline{\mathcal{M}}$ fait partie d'une classe où x_n est variable multiplicatrice, $x_n\overline{\mathcal{M}}$ fait partie de la même classe.

Ce qui précède suffit à prouver que le produit de tout monome du système par un monome quelconque en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ fait partie d'une classe $\mathcal{M}$.

Si tous les produits obtenus en multipliant un quelconque des monomes M par une quelconque de ses variables non multiplicatrices font partie des ($\mathcal{M}$), nous dirons que le système (M) est *complet*. Nous venons de démontrer que :

Lorsqu'un système de monomes (M) *est complet, tout multiple d'un* M *appartient à une classe* ($\mathcal{M}$) *et à une seule* (propriété I).

Tous les monomes du *module défini par les* M se trouvent répartis en un *nombre fini* de classes *sans éléments communs*, les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec certaines variables déterminées.

9. *Procédé régulier pour obtenir un système complet base d'un module donné.* — Soit $M^{(1)}$ un système quelconque de monomes donnés; si $M^{(1)}$ est incomplet, formons le produit d'un monome $\overline{M}^{(1)}$, par une quelconque de ses variables non multiplicatrices; adjoignons aux $M^{(1)}$ ceux de ces produits qui ne font pas partie des $\mathcal{M}^{(1)}$. Soit $M^{(2)}$ le système ainsi formé; si ce système $M^{(2)}$ est incomplet, opérons sur lui comme nous avons opéré sur $M^{(1)}$, ... et ainsi de suite.

Je dis que cette série d'opérations ne pourra se prolonger indéfiniment : autrement dit, *au bout d'un nombre fini d'opérations* on obtiendra *un système complet.*

Nous démontrerons une proposition un peu plus générale. *Soient* $M^{(1)}$, P *deux systèmes quelconques de monomes donnés en nombre fini; formons le produit d'un monome* $\overline{M}^{(1)}$ *par une quelconque de ses variables non multiplicatrices dans* $M^{(1)}$. *Adjoignons au système* $M^{(1)}$: 1° *tous ceux de ces produits qui ne font pas partie des* $\mathcal{M}^{(1)}$ (*classes des* $M^{(1)}$ *dans le système* $M^{(1)}$); 2° *ceux des monomes* P *qui ne font pas partie des* $\mathcal{M}^{(1)}$. Soient A(P) cette opération, et $M^{(2)}$ le système ainsi obtenu. Effectuons sur $M^{(2)}$ l'opération A(P); soit $M^{(3)}$ le système obtenu.... Cette série d'opérations « ne pourra se prolonger indéfiniment » (¹), ou, plus correctement :

Il existe un nombre entier K *tel que :* 1° $M^{(i)}$ *est différent de* $M^{(i+1)}$ *quand* $i \leqq K$; 2° $M^{(i)}$ *est identique à* $M^{(K)}$ *lorsque* $i \geqq K$.

La proposition est presque évidente pour les systèmes de monomes à une variable. Chaque système $M^{(i)}$, P est défini par le système des exposants de x_1 qui y entrent. Soit a l'exposant maximum dans $M^{(1)}$, c'est aussi l'exposant maximum dans $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, ... Soit b l'exposant

---

(¹) Il peut se faire que tous les P fassent partie des $\mathcal{M}^{(1)}$, mais qu'ils ne fassent plus tous partie des $\mathcal{M}^{(2)}$. Prenons pour monomes $M^{(1)}$ les deux monomes $x_3^3 x_2 x_1$, $x_3^2 x_2^3$ et pour monome P $x_3^3 x_2^2 x_1$; P est le produit de $x_3^3 x_2 x_1$ par la variable multiplicatrice x_2.

Le système $M^{(2)}$ est ici constitué par $x_3^3 x_2^3$, $x_3^3 x_2 x_1$, $x_3^2 x_2^3$ dont les variables multiplicatrices sont respectivement (x_3, x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_1); P ne fait partie d'aucune classe $\mathcal{M}^{(2)}$.

Si tous les P font partie des $\mathcal{M}^{(1)}$ *et si* $M^{(1)}$ *est un système complet*, $M^{(2)}$ est identique à $M^{(1)}$, tous les P font partie des $\mathcal{M}^{(2)}$ qui ne sont autres que les $\mathcal{M}^{(1)}$.

minimum dans (M^1, P); c'est l'exposant minimum dans $M^{(2)}$, donc dans (M^2, P) et, par suite, dans M^3, M^4, ... Si M^2 est identique à M^1, M^i est identique à M^1 quel que soit i. Supposons M^2 différent de M^1; M^2, M^3, M^4, ... sont caractérisés chacun par un système d'entiers compris entre a, b (sens large), chacun de ces systèmes comprenant le précédent; il y a au plus $a-b$ systèmes $M^{(2)}$, $M^{(3)}$, ... différents.

Admettons la proposition dans le cas des systèmes à $n-1$ variables et démontrons-la pour des systèmes quelconques (M^0, P) à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Dans cette démonstration, nous appellerons, pour abréger, degré d'un monome, son degré en x_n.

Soit b le minimum des degrés des M^1, on peut supposer (¹) qu'il n'y a pas de monome P dont le degré soit inférieur à b. Le minimum des degrés de M^i est b quel que soit i.

Soit a le maximum des degrés des (M^1, P).

L'opération $A(P)$ n'introduit aucun monome dont le degré soit supérieur à a. Le maximum des degrés des (M^i, P) est toujours a quel que soit i. Dans le système M^i considérons les monomes M^i de degré $b+h$ $(h=0, 1, 2, \ldots, a-b)$; soient Q^i_{b+h} les quotients par x_n^{b+h} des M^i_{b+h}.

Soient de même R_{b+h} les quotients des P de degré $b+h$ par x_n^{b+h} $(h=0, 1, 2, \ldots, a-b)$. (Pour certaines valeurs de h, il peut se faire qu'il n'y ait pas de Q^i_{b+h} ou de R_{b+h}.)

Les monomes de degré b que l'opération $A(P)$ adjoint à M^1 sont : 1° ceux des produits des $x_n^b Q^1_b$ par leurs variables non multiplicatrices (prises parmi les $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$), qui ne font pas partie des classes des $x_n^b Q^1_b$; 2° ceux des $x_n^b R_b$ qui ne font pas partie de ces classes. Par suite, Q^2_b s'obtient en effectuant sur Q^1_b l'opération $A(R_b)$ ($n-1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$). Au bout d'un nombre fini d'opérations $A(P)$, on pourra affirmer : 1° le système Q_b est complet; 2° tout R_b fait partie d'une classe $\mathcal{Q}_b$. Soit M^{i_0} le premier système obtenu qui jouisse de cette propriété.

(¹) Car si, en général, b est le minimum des degrés des (M^1, P), b est le minimum des degrés des M^2, et l'on opérera sur M^2 comme on opère dans le texte pour M^1.

Envisageons maintenant parmi les systèmes M^{10} et suivants un système $M^{1\lambda}$ ayant les propriétés suivantes (I) :

$Q_b^{1\lambda}$ est complet; tout monome R_b fait partie des $\mathfrak{Q}_b^{1\lambda}$;

$Q_{b+1}^{1\lambda}$ est complet; tout monome R_{b+1} et tout monome $Q_b^{1\lambda}$ fait partie des $\mathfrak{Q}_{b+1}^{1\lambda}$;

. . . . ;

$Q_{b+\lambda}^{1\lambda}$ est complet; tout monome $R_{b+\lambda}$ et tout monome $Q_{b+\lambda-1}^{1\lambda}$ fait partie des $\mathfrak{Q}_{b+\lambda}^{1\lambda}$.

(Remarquons que $Q_b^{1\lambda}$ contient effectivement des monomes puisqu'il est identique au système Q_b^{10}; des propriétés que l'on vient d'énoncer, il résulte que $Q_{b+1}^{1\lambda}$, $Q_{b+2}^{1\lambda}$, ..., $Q_{b+\lambda}^{1\lambda}$ contiennent effectivement des monomes.)

Nous supposerons de plus (II) que :

Ou bien (1^{re} hypothèse) $M^{1\lambda}$ ne contient pas de monome de degré supérieur à $b+\lambda$ et P contient au moins un monome n'appartenant pas aux $\mathfrak{M}^{1\lambda}$;

Ou bien (2^e hypothèse) $M^{1\lambda}$ contient effectivement un monome au moins de degré supérieur à $b+\lambda$, et l'opération $A(R_{b+\lambda+1}, Q_{b+\lambda}^{1\lambda})$ effectuée sur $Q_{b+\lambda+1}^{1\lambda}$ lui adjoint effectivement un monome au moins.

Si l'on excluait l'une et l'autre de ces hypothèses, il faudrait supposer, ou bien que l'opération $A(P)$ effectuée sur $M^{1\lambda}$ reproduit ce système, et la propriété à démontrer se trouverait vérifiée d'elle-même, ou bien que le système $M^{1\lambda}$ a les propriétés (I) *jusqu'à la valeur* $\lambda+1$ *de l'indice :* dans ce cas, on substituera $\lambda+1$ à λ dans l'énoncé de ces propriétés; on raisonnera à nouveau de même sur le système $M^{i\lambda}$ envisagé, appelé cette fois $M^{1(\lambda+1)}$; λ ne pouvant en tout cas dépasser $a-b$, ce mode de raisonnement ne pourra s'employer qu'un nombre limité de fois et, ou bien la propriété à démontrer sera vérifiée d'elle-même, ou bien on aura l'une ou l'autre des propriétés supposées (II).

Dans la première hypothèse, d'après les propriétés de $M^{1\lambda}$, les monomes introduits par l'opération $A(P)$ sont de degrés supérieurs à $b+\lambda$.

Dans la seconde, l'opération $A(P)$ effectuée une ou plusieurs fois sur $M^{1\lambda}$ donne des systèmes $M^{i\lambda}$ tels que $Q_b^{i\lambda}$, $Q_{b+1}^{i\lambda}$, ..., $Q_{b+\lambda}^{i\lambda}$ soient identiques à $Q_b^{1\lambda}$, $Q_{b+1}^{1\lambda}$, ..., $Q_{b+\lambda}^{1\lambda}$; $Q_{b+\lambda+1}^{(i+1)\lambda}$ se déduira de $Q_{b+\lambda+1}^{i\lambda}$ en effectuant sur ce système l'opération $A(R_{h+\lambda+1}, Q^{i}_{h+\lambda})$. Au bout d'un nombre fini d'opérations, $Q^{i+1}_{h+\lambda+1}$ sera identique à $Q^{i}_{h+\lambda+1}$; autrement dit, on obtiendra un système possédant les mêmes propriétés (I) que le système primitif, λ étant remplacé par $\lambda+1$.

Dans l'une et l'autre hypothèse, on sera ramené à un système de la même forme que celui d'où l'on est parti (I), où soit λ, soit le degré maximum des M a augmenté d'une unité (au moins).

Mais on ne peut faire qu'un nombre fini de pas de l'une quelconque des deux sortes que nous venons de décrire, puisque le degré maximum des M ne peut dépasser a, et que λ ne peut dépasser $a - b$.

Autrement dit, au bout d'un nombre fini d'opérations, on obtiendra un système M identique au précédent.

Étant donné un système de monomes quelconque M, nous sommes en possession d'*un procédé régulier*, pour obtenir un système *complet* définissant le *même module;* et par suite pour répartir tous les monomes du module défini par les M en un nombre fini de classes sans éléments communs, les monomes de chaque classe s'obtenant en multipliant un monome déterminé par tous les monomes que l'on peut former avec certaines variables déterminées.

10. *Hauteur d'un monome. Théorème faisant intervenir cette notion.* — Revenons à un système de monomes M différents quelconques. Posons la définition suivante : $M = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$ est dit plus *haut* ou plus *bas* que $M' = x_n^{\alpha'_n} x_{n-1}^{\alpha'_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha'_1}$ suivant que la première des différences $\alpha_n - \alpha'_n, \alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}, \ldots, \alpha_1 - \alpha'_1$ qui ne s'annule pas est positive ou négative (¹); la classe $(\mathfrak{M})$ est plus haute ou plus basse que la classe $(\mathfrak{M}')$ suivant que M est plus haut ou plus bas que M'.

Montrons que :

Le produit d'un monome d'une classe $\overline{\mathfrak{M}}$ *par une variable non multiplicatrice pour le monome* $\overline{M}$ *auquel correspond* $\overline{\mathfrak{M}}$ *(s'il appartient à une classe* $\mathfrak{M}$*) ne peut appartenir qu'à une classe plus haute que* $\overline{\mathfrak{M}}$ (et non pas à la même ou à une classe plus basse).

(¹) Il est bien connu que cette définition est *légitime :* si M est plus haut que M', et M' plus haut que M'', M est plus haut que M''.

La proposition est évidente dans le cas de monomes à une variable. Admettons-la pour les monomes à $n-1$ variables et démontrons-la pour les monomes à n variables.

Considérons le produit d'un monome $\overline{\mathfrak{M}}$ de la classe de $\overline{M}$ par une variable x_i non multiplicatrice (dans le système M) pour le monome $\overline{M}$. Si $i=n$, la proposition est évidente puisque d'une part l'exposant de x_n dans le produit considéré est supérieur à l'exposant λ de x_n dans $\overline{M}$, et que d'autre part les $\mathfrak{M}$ provenant de $\overline{M}$ et des monomes plus bas sont au plus de degré λ en x_n. Supposons $i \neq n$ et soit λ le degré en x_n du monome considéré $\overline{M}_\lambda$; λ peut être ici inférieur ou *égal* à a exposant maximum de x_n dans les (M).

Si $\lambda \neq a$, $\overline{M}_\lambda$ a mêmes variables multiplicatrices dans (M) que son quotient $\overline{Q}_\lambda$ par x_n^λ dans le système (Q_λ) (quotients par x_n^λ de tous les M qui contiennent x_n à l'exposant λ). Le produit $x_i\overline{\mathfrak{M}}$ considéré dont le degré en x_n est $\lambda < a$ ne peut provenir que d'une classe correspondant à un M de degré λ en x_n; il ne peut donc faire partie d'une classe $\mathfrak{M}$ qu'en étant le produit par x_n^λ d'un monome d'une classe $\mathfrak{Q}_\lambda$ du système Q_λ; il n'en est ainsi que si le produit $x_i\overline{\mathfrak{Q}}$ fait partie d'une classe $\mathfrak{Q}_\lambda$; mais d'après le théorème admis dans le cas de $n-1$ variables, cette classe $\mathfrak{Q}_\lambda$ est alors plus haute que $\overline{\mathfrak{Q}}$; la classe $\mathfrak{M}_\lambda$ correspondante est donc aussi plus haute que $\overline{\mathfrak{M}}$.

Si $\lambda = a$, soit $a+a'$ le degré en x_n du monome $\overline{\mathfrak{M}}$ considéré $(a' \geqq 0)$, $\overline{M}_a$ monome dont il provient a pour variables multiplicatrices, outre x_n, celles qui sont multiplicatrices pour son quotient $\overline{Q}_a$ par x_n^a dans le système des (Q_a) (quotients par x_n^a de tous les M qui contiennent x_n à l'exposant a). Le produit $x_i\overline{\mathfrak{M}}$ considéré, dont le degré en x_n est $\geqq a$, ne peut provenir que d'une classe correspondant à un M de degré a en x_n; il ne peut donc faire partie d'une classe $\mathfrak{M}$ qu'en étant le produit par $x_n^{a+a'}$ d'un monome d'une classe $\mathfrak{Q}_a$ du système Q_a; il n'en est ainsi que si le produit $x_i\overline{\mathfrak{Q}}$ fait partie d'une classe $\mathfrak{Q}_a$; mais d'après le théorème admis dans le cas de $n-1$ variables, cette classe $\mathfrak{Q}_a$ est alors plus haute que $\overline{\mathfrak{Q}}$, et la classe $\mathfrak{M}_a$ correspondante est plus haute que $\overline{\mathfrak{M}}$.

Si le système M est complet, on pourra affirmer :

Tout produit d'un monome d'une classe $\overline{\mathfrak{M}}$ par une variable non multiplicatrice pour le monome $\overline{\mathrm{M}}$ auquel elle correspond fait partie d'une classe $\mathfrak{M}$ plus haute que $\overline{\mathfrak{M}}$ (propriété II).

On démontrera d'une manière analogue la proposition suivante, que nous n'utiliserons pas :

Le produit d'un monome $\overline{\mathrm{M}}$ d'un système complet par une variable non multiplicatrice de $\overline{\mathrm{M}}$, x_i, est égal au produit d'un M par des variables multiplicatrices de cet M, *d'indices inférieurs à i.*

On peut d'ailleurs énoncer une réciproque qui permettrait de donner une nouvelle définition des systèmes complets :

Si le produit de tout monome $\overline{\mathrm{M}}$ d'un système par une variable non multiplicatrice pour ce monome, x_i, est égal au produit d'un M par des variables d'indices inférieurs à i, le système M est complet.

11. *Remarques diverses.* — Dans tout système de monomes M, il existe un monome, et un seul, dont les variables multiplicatrices sont $x_1, x_2, \ldots, x_n$; le monome M *le plus haut.*

Un système de monomes peut être complet pour un classement déterminé des variables et ne pas l'être pour un autre classement.

Un système de monomes du premier ordre est toujours complet quel que soit le classement adopté; il suffit de montrer qu'un système composé d'un certain nombre des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seules, est complet pour le classement particulier donné $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

En se reportant à la définition, on voit que :

Les variables multiplicatrices d'un monome x_i du système sont : 1° tous les x_k où $k \leqq i$; 2° parmi les x_k où $k > i$ ceux qui ne figurent pas dans le système donné.

La classe correspondant à chaque monome x_i a donc une définition très simple.

Montrons que tout multiple m d'un monome du système appartient à une de ces classes.

Parmi les variables que contient m figure au moins un des monomes donnés; soit h le plus grand des indices des variables de cette espèce; x_h admet pour variables multiplicatrices toutes les variables qui figurent dans le monome donné, car ce monome ne contient pas de variables d'indice supérieur à h figurant dans le système.

Soit M un système de monomes; M_b, M_{b+1}, ..., M_a les monomes M répartis d'après leur degré en x_n, b, $b+1$, ..., a; Q_b, Q_{b+1}, ..., Q_a les quotients des M_b, M_{b+1}, ..., M_a respectivement par x_n^b, x_n^{b+1}, ..., x_n^a.

De la définition même d'un système complet, résulte l'énoncé suivant :

« Pour que le système M soit complet, il faut et il suffit que les systèmes Q_b, Q_{b+1}, ..., Q_a (à $n-1$ variables) soient complets et que tout monome $Q_c (b \leq c < a)$ fasse partie d'une classe $\mathfrak{Q}_{c+1}$. »

Montrons que le système formé par tous les monomes d'ordre (¹) p en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est complet. Admettons la proposition dans le cas de $n-1$ variables. Soient M les monomes d'ordre p aux n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$Q_0, Q_1, \ldots, Q_p$ sont précisément tous les monomes d'ordre p, $p-1$, ..., 0 en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; ils sont complets et tout $Q_i (0 \leq i < p)$ fait partie du module Q_{i+1}, et est par suite contenu dans une classe $\mathfrak{Q}_{i+1}$.

Adoptons la définition des mots *plus haut* et *plus bas* donnée au nº **10**.

Le système constitué par tous les monomes d'ordre p étant complet possède la propriété II. En particulier :

Le produit d'un monome d'ordre p par une variable x_i non multiplicatrice pour lui est égal au produit d'un monome d'ordre p *plus haut* par une variable multiplicatrice pour ce dernier.

12. *Étude du système des monomes d'ordre p (p assez grand) qui font partie d'un module donné.* — Considérons un système de monomes complet M (nº **8**). Soit p un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum des M.

Formons les monomes P d'ordre p de chacune des classes $\mathfrak{M}$. Ces monomes P s'obtiennent en multipliant un monome M déterminé

(¹) Le mot *ordre* est équivalent aux mots *degré total.*

d'ordre $p_1 \leqq p$ par tous les monomes μ d'ordre $p - p_1$, en $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ ($x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ étant les variables multiplicatrices de M).

Ces monomes μ forment un système complet, à condition que l'on y considère comme seules variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$: chacun d'eux a, de ce point de vue, certaines variables multiplicatrices; on les considérera par définition comme les variables multiplicatrices du monome P correspondant. Les produits d'un P par tous les monomes que l'on peut former avec ses variables multiplicatrices constitueront la sous-classe de P. La définition des mots plus haut et plus bas (**10**) étant appliquée aux monomes μ, $P_1 = \mu_1 M$ sera dit plus haut ou plus bas que $P_2 = \mu_2 M$ suivant que μ_1 sera plus haut ou plus bas que μ_2. D'autre part, si deux monomes P, P′ proviennent de deux monomes différents M, M′, P sera dit plus haut ou plus bas que P′, suivant que M sera plus haut ou plus bas que M′.

I′. *Tout multiple d'ordre supérieur ou égal à p d'un monome* M *appartient à une sous-classe et à une seule.*

En effet, tout multiple d'un M appartient à une classe et à une seule; et tout monome d'ordre supérieur ou égal à p d'une classe $\mathfrak{M}$ appartient à une sous-classe et à une seule.

II′. *Le produit d'un monome* $\overline{\mathrm{P}}$ *quelconque par une variable non multiplicatrice pour lui est égal au produit d'un monome* $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ *plus haut que* $\overline{\mathrm{P}}$ *par une variable multiplicatrice pour* $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$.

Si la variable non multiplicatrice pour $\overline{\mathrm{P}}$ est une des variables $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ multiplicatrices pour le $\overline{\mathrm{M}}$ d'où provient $\overline{\mathrm{P}}$, la proposition résulte immédiatement de la remarque faite à la fin du n° **11**.

Si c'est une variable non multiplicatrice pour le $\overline{\mathrm{M}}$ d'où provient P, le produit considéré sera, d'après la propriété II, égal à un $\mathfrak{M}$ provenant d'un M plus haut que $\overline{\mathrm{M}}$; ce $\mathfrak{M}$, étant d'ordre $p + 1$, sera le produit par une variable multiplicatrice d'un P provenant de M.

Considérons maintenant le système S formé par tous les monomes ($\mathfrak{M}$) d'ordre inférieur ou égal à p; gardons la définition précédente pour les variables multiplicatrices des monomes d'ordre p. Par définition, un monome $\mathfrak{M}$ d'ordre inférieur à p n'aura *aucune* *variable multiplicatrice;* il constituera à lui seul sa sous-classe. On pourra dire, pour l'ensemble des sous-classes correspondant aux monomes de S :

I''. *Tout multiple d'un monome* M *appartient à une sous-classe et à une seule.*

Considérons le produit d'un $\overline{\mathfrak{M}}$ d'ordre p_1 inférieur à p par une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; c'est un $\mathfrak{M}$, car le système (M) est complet; il est d'ordre $p_1 + 1$, inférieur ou égal à p.

Étant donnés deux monomes de S, d'ordres différents, le monome du plus grand ordre sera dit le plus haut. Rapprochons cette définition de celles que nous avons posées pour les P. Nous obtenons la proposition :

II''. *Le produit d'un monome $\overline{\mathfrak{M}}$ quelconque d'ordre inférieur ou égal à p par une variable non multiplicatrice de $\overline{\mathfrak{M}}$ est égal à un monome $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ plus haut que $\overline{\mathfrak{M}}$, ou au produit d'un monome $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$ plus haut que $\overline{\mathfrak{M}}$ par une variable multiplicatrice* (¹) *de $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$.*

13. *Monomes complémentaires. Application aux modules.* — L'étude qui suit a pour objet final de classer les monomes *qui ne font pas partie d'un module donné.*

Considérons tout d'abord un système quelconque de monomes M (complet ou non). Soit x_{n-i} une des variables $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. $Q^{(i)}$ le système des monomes obtenus en remplaçant $x_{n-i}, x_{n-i-1}, \ldots, x_1$ par l'unité dans les monomes M; Q^0 est l'unique monome 1 (²).

Chacun des monomes $x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}}$ de $Q^{(i)}$ a pour variables multiplicatrices dans $Q^{(i)}$ précisément celles des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-i+1}$ qui sont multiplicatrices dans le système M pour un monome de ce système où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-i+1}$ ont les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-i+1}$ (d'après la définition des variables multiplicatrices, il est inutile de spécifier ce monome d'une manière plus complète).

(¹) Les mots « variable multiplicatrice » ont dans cet énoncé le sens qui a été précisé pour les monomes de S.

(²) On pourrait appeler $Q^{(n)}$ le système M lui-même.

Considérons un quelconque des monomes (Q) :

$$Q = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}}.$$

Considérons l'ensemble des exposants de x_{n-i} dans ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i+1}$ ont les exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{n-i+1}$; soit β un entier positif ou nul n'appartenant pas à cet ensemble et inférieur au plus grand des nombres qui le composent.

Posons

$$N = x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots x_{n-i+1}^{\alpha_{n-i+1}} x_{n-i}^{\beta}.$$

Nous appellerons *variables multiplicatrices de* N : 1° les variables $x_1, x_2, \dots, x_{n-i-1}$; 2° celles des variables $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i+1}$ qui sont multiplicatrices pour l'un des M où $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i+1}$ entrent aux degrés $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{n-i+1}$; et classe ($\mathfrak{N}$) correspondant à N l'ensemble de tous les monomes obtenus en faisant le produit de N par un monome quelconque formé avec ses variables multiplicatrices.

(Les N correspondant à $i = 0$ s'obtiennent en donnant à x_n les divers exposants qui ne figurent pas comme exposant de x_n dans les M et sont inférieurs au plus grand de ces exposants; les variables multiplicatrices d'un tel N sont $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.)

Les monomes N seront appelés *monomes complémentaires des monomes* M. On en verra plus loin la raison.

Pour former tous les N où x_n a un exposant donné α_n, considérons tous les M où x_n a cet exposant; appelons M′ les quotients de ces M par $x_n^{\alpha_n}$; soient N′ les monomes en $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ complémentaires des M′; les N cherchés sont les produits des N′ par $x_n^{\alpha_n}$. Les variables multiplicatrices d'un N sont celles du monome N′ correspondant, auxquelles on adjoint x_n dans le cas où α_n est le plus grand des exposants de x_n dans les M donnés.

Deux classes différentes $\mathfrak{N}$ n'ont aucun élément commun.

Soient j, j' les valeurs de l'indice i auxquelles correspondent les deux monomes N qui définissent les classes considérées ($j \leqq j'$).

Si ces deux monomes N_j, $N_{j'}$ correspondent à un même système de valeurs des exposants $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{n-j+1}$, les exposants de x_{n-j} y sont différents, l'exposant de x_{n-j} dans tout $\mathfrak{N}$ provenant de N_j est le même,

β, que dans N_j; l'exposant de x_{n-j} dans un $\mathfrak{N}$ provenant de $N_{j'}$ ne peut être différent de l'exposant de x_{n-j} dans $N_{j'}$ que si $j' > j$ et s'il est supérieur au maximum des exposants de x_{n-j} dans ceux des monomes M où $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-j+1}$ ont les exposants

$$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-j+1}),$$

nombre lui-même *supérieur* à β.

Si les deux monomes N_j, $N_{j'}$ correspondent à des systèmes différents des exposants : $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-j+1})$; $(\alpha'_n, \alpha'_{n-1}, \ldots, \alpha'_{n-j+1})$, les résultats obtenus en remplaçant $x_{n-j}, x_{n-j-1}, \ldots, x_1$ par l'unité dans deux monomes $\mathfrak{N}$ provenant respectivement de N_j, $N_{j'}$ peuvent être considérés comme deux monomes $\mathfrak{Q}$ de deux classes différentes du système $Q^{(j)}$: ces résultats seront donc différents, et les deux monomes $\mathfrak{N}$ seront *a fortiori* différents.

On démontre de la même manière que :

Une classe $\mathfrak{N}$ et une classe $\mathfrak{M}$ n'ont aucun élément commun.

Cette proposition peut d'ailleurs être regardée comme une extension de la précédente en considérant le monome M comme un monome N_n.

Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Un monome quelconque appartient à une classe

$$\mathfrak{N}_i(i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

ou à une classe $\mathfrak{M}$ (d'après ce qui précède, il n'appartient d'ailleurs qu'à une seule de ces classes). On pourra encore dire :

Un monome quelconque appartient à une classe $\mathfrak{N}_i(i = 0, 1, \ldots, n)$ et à une seule.

La proposition est évidente dans le cas d'un système M à une variable. Admettons-la pour $n-1$ variables et démontrons-la pour n.

Soit $X = x_n^{\lambda_n} x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \ldots x_1^{\lambda_1}$ un monome quelconque. Si λ_n est inférieur au maximum a des exposants de x_n dans les M et ne figure pas parmi ces exposants, X est évidemment un $\mathfrak{N}_0$. Supposons que λ_n soit inférieur à a et figure parmi les exposants de x_n dans les M; soit M' les quotients par $x_n^{\lambda_n}$ des monomes M où x_n a l'exposant λ_n, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ les classes à $n-1$ variables que définit le système des monomes M'; $x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}\ldots x_1^{\lambda_1}$ fait partie d'une de ces classes $\overline{\mathfrak{M}}'$ ou $\overline{\mathfrak{N}}'$ provenant d'un $\overline{\mathrm{M}}'$ ou $\overline{\mathrm{N}}'$ particulier; $x_n^{\lambda_n}\overline{\mathrm{M}}'$ ou $x_n^{\lambda_n}\overline{\mathrm{N}}'$ est un des monomes $\overline{\mathrm{M}}$ ou $\overline{\mathrm{N}}$ ayant mêmes variables multiplicatrices que $\overline{\mathrm{M}}'$, $\overline{\mathrm{N}}'$; X fait donc partie de la classe $\overline{\mathfrak{M}}$, ou $\overline{\mathfrak{N}}$ correspondante.

Supposons que λ_n soit supérieur ou égal à a; soient M' les quotients par x_n^a des monomes M où x_n a l'exposant a; $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ les classes à $n-1$ variables que définit le système des monomes M'; $x_{n-1}^{\lambda_{n-1}}\ldots x_1^{\lambda_1}$ fait partie d'une de ces classes $\overline{\mathfrak{M}}'$ ou $\overline{\mathfrak{N}}'$ provenant d'un $\overline{\mathrm{M}}'$ ou $\overline{\mathrm{N}}'$ particulier; $x_n^a\overline{\mathrm{M}}'$ ou $x_n^a\overline{\mathrm{N}}'$ est un des monomes $\overline{\mathrm{M}}$ ou $\overline{\mathrm{N}}$ ayant pour variables multiplicatrices : 1° celles de $\overline{\mathrm{M}}'$ ou $\overline{\mathrm{N}}'$; 2° x_n. X fait donc partie de la classe $\overline{\mathfrak{M}}$, ou $\overline{\mathfrak{N}}$ correspondante.

La proposition précédente justifie le nom de *monomes complémentaires* donné aux N.

Dans le cas où le système M est *complet*, les monomes $\mathfrak{N}$ ne sont autres que les monomes qui ne font pas partie du module défini par les M, puisque les $\mathfrak{M}$ sont précisément les monomes de ce module.

Puisque nous avons un procédé régulier pour obtenir une base *complète* du module défini par un système M quelconque, nous avons par là même un procédé régulier pour répartir les monomes *qui ne font pas partie d'un module* en un nombre fini de classes sans éléments communs, chaque classe étant toujours constituée par les produits d'un monome par tous les monomes formés avec certaines variables déterminées.

14. *Nombre des monomes d'ordre p qui font partie d'un module donné.* — Considérons un système quelconque de monomes M (complet ou non). Soit p_0 l'ordre maximum de ces monomes. Les monomes N sont au plus de l'ordre p_0-1. Soit p un entier quelconque supérieur ou égal à p_0; le nombre des monomes $\mathfrak{M}$ d'ordre p et le nombre des monomes $\mathfrak{N}$ d'ordre p sont des polynomes en p.

On sait en effet que le nombre des monomes, à α variables, d'ordre β, est égal au polynome en β :

$$\Gamma(\alpha,\beta)=\frac{(\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+\alpha-1)}{1.2\ldots(\alpha-1)}.$$

Soit a l'ordre d'un des monomes $\overline{\mathrm{M}}$, le nombre des monomes $\overline{\mathfrak{M}}$

d'ordre p de sa classe est, en appelant α le nombre des variables multiplicatrices de $\overline{\mathrm{M}}$,

$$\Gamma(\alpha, p-\alpha);$$

c'est donc un polynome en p; le nombre des monomes $\mathfrak{M}$ d'ordre p est la somme d'un nombre fini de polynomes en p; c'est aussi un polynome. Il en est de même pour le nombre des monomes $\mathfrak{N}$ d'ordre p.

D'ailleurs la somme des nombres des monomes $\mathfrak{M}$ et des monomes $\mathfrak{N}$ d'ordre p est le polynome en p

$$\Gamma(n, p).$$

Retenons de ce qui précède la conséquence suivante :

Le nombre des monomes d'ordre p qui ne font pas partie d'un *module donné* est un polynome en p dès que p est assez grand.

15. *Remarques sur le développement en série de Taylor.* — Considérons un développement complet en série de Taylor.

Supposons, pour simplifier l'écriture, que les valeurs initiales des variables soient toutes nulles.

Groupons ensemble tous les termes renfermant un monome déterminé : $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$ et le produit de ce monome par tous ceux qu'on peut former avec certaines variables déterminées x_a, choisies parmi les x_i, variables que nous pouvons appeler *variables multiplicatrices du monome* $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$, les autres variables x_b étant *non multiplicatrices*.

La portion de développement en série ainsi obtenue constitue une nouvelle fonction U.

Considérons, d'autre part, la fonction des x : $\mathrm{V}(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h})$ qu'on obtient en annulant tous les x_b dans l'expression de la dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\,\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Je dis que $\mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est égal au résultat obtenu en intégrant V : α_1 fois par rapport à x_1; α_2 fois par rapport à x_2, ... ; α_n fois par rapport à x_n, en ayant soin, à chaque quadrature, de prendre zéro comme constante d'intégration ([1]).

([1]) Intégrer une fois par rapport à x_i, en prenant zéro comme constante d'intégration, un monome M où x_i a l'exposant λ, c'est former le monome $\dfrac{\mathrm{M}x_i}{\lambda+1}$.

Lorsqu'on effectue, sur un monome $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$, la dérivation $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$; si $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$ n'est pas multiple de $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, le résultat est identiquement nul.

Si $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}$ est le produit de $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ par un monome qui contienne au moins une des variables x_b, le résultat contient cette variable en facteur. Il en résulte que, pour obtenir la fonction V, on peut se borner à opérer sur la portion U du développement de u.

Soit

$$\frac{A_{(\alpha_{a_1}+\rho_1),(\alpha_{a_2}+\rho_2),\ldots,(\alpha_{a_h}+\rho_h)\alpha_{b_1}\ldots\alpha_{b_k}}}{(\alpha_{a_1}+\rho_1)!\,(\alpha_{a_2}+\rho_2)!\ldots(\alpha_{a_h}+\rho_h)!\,\alpha_{b_1}!\ldots\alpha_{b_k}!}\,x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\,x_{a_1}^{\rho_1} x_{a_2}^{\rho_2}\ldots x_{a_h}^{\rho_h}$$

un terme quelconque du développement de U. On a identiquement

$$(1)\quad \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\left[\frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}\,x_{a_1}^{\rho_1} x_{a_2}^{\rho_2}\ldots x_{a_h}^{\rho_h}}{(\alpha_{a_1}+\rho_1)!\ldots(\alpha_{a_h}+\rho_h)!\,\alpha_{b_1}!\ldots\alpha_{b_k}!}\right]=\frac{x_{a_1}^{\rho_1} x_{a_2}^{\rho_2}\ldots x_{a_h}^{\rho_h}}{\rho_1!\,\rho_2!\ldots\rho_h!}.$$

Les x_b ne figurent plus dans ce terme. On peut écrire

$$V=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}U}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

On voit d'autre part comment on peut passer du développement de V au développement de U. Il suffit de faire exactement les opérations qui permettent de passer du deuxième membre de l'égalité (1) au terme entre crochets dans son premier membre. Ce qui justifie la règle énoncée plus haut ($U = I_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}V$). Les développements sont convergents en même temps. Ainsi, la connaissance de la fonction V est *équivalente* à celle de la fonction U.

Nous savons donc résoudre le problème suivant :

Supposons les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réparties d'une manière quelconque en deux groupes

$$x_{a_1},\quad x_{a_2},\quad \ldots,\quad x_{a_h};\qquad x_{b_1},\quad x_{b_2},\quad \ldots,\quad x_{b_k}\qquad (h+k=n);$$

donnons-nous un système d'entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (positifs ou nuls) et une fonction $f(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h})$. Trouver toutes les fonctions u telles que l'on ait, sur la multiplicité $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$,

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}=f(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}).$$

La portion U du développement de u sera entièrement connue :

$$U = 1_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} f(x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}).$$

Les coefficients de tous les termes qui ne font pas partie de U seront arbitraires (assujettis seulement à rendre convergent le développement total).

Application. — Donnons-nous un système quelconque de monomes M en nombre fini.

Nous avons réparti tous les monomes en un nombre fini de classes $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, sans éléments communs; chacune de ces classes étant engendrée par tous les produits d'un monome déterminé par tous les monomes formés avec certaines variables déterminées. A une telle répartition correspond une répartition parfaitement définie des termes d'une série de Taylor en un nombre fini de fonctions dont les développements en série n'ont aucun élément commun, chacun de ces développements contenant tous les monomes d'une classe.

Soient $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ un quelconque des N ; $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}$ ses variables multiplicatrices; $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k}$ les autres variables. Donnons-nous arbitrairement la valeur de $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\,\partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ sur $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$. La donnée arbitraire de toutes ces fonctions que nous supposons développables en séries convergentes, et que pour abréger nous désignons par $N(x_a)$, entraîne la connaissance de toutes les portions de développement où entrent les monomes ($\mathfrak{N}$).

Resterait pour déterminer complètement la fonction u développable en série convergente à définir les coefficients correspondant aux ($\mathfrak{M}$) en ayant soin que le développement total obtenu soit convergent.

Soient $x_1^{\alpha'_1} x_2^{\alpha'_2} \ldots x_n^{\alpha'_n}$ un quelconque des M ; $x_{a'_1}, x_{a'_2}, \ldots, x_{a'_{h'}}$ ses variables multiplicatrices; $x_{b'_1}, x_{b'_2}, \ldots, x_{b'_{k'}}$ les autres variables. Si l'on se donne la valeur de $\frac{\partial^{\alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_n} u}{\partial x_1^{\alpha'_1}\,\partial x_2^{\alpha'_2} \ldots \partial x_n^{\alpha'_n}}$ pour $x_{b'_1} = x_{b'_2} = \ldots = x_{b'_{h'}} = 0$ (développable en série entière convergente), $M(x_{a'})$, la fonction u sera entièrement définie et développable en série entière convergente dans le domaine même où le sont l'ensemble des fonctions précédentes $N(x_a)$, $M(x_{a'})$.

16. *Calcul inverse de la dérivation. Position du problème.* — Proposons-nous de trouver les fonctions u de n variables dont certaines dérivées D (en nombre fini) d'ordres partiels donnés soient égales à des fonctions données des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Une dérivée quelconque d'une D sera une fonction connue des n variables. Considérons en particulier celles des dérivées des D que l'on doit adjoindre aux D pour obtenir un système complet : utilisons (¹) pour leur calcul les dérivations mêmes qui ont été indiquées (n° **9**); les dérivées D_1 de ce système complet sont des fonctions connues bien déterminées des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Le problème proposé est donc équivalent à un problème de même énoncé, où l'on suppose de plus que les dérivées d'ordres partiels donnés forment un système complet.

C'est cette nouvelle forme d'énoncé que nous adopterons.

Nous poserons aussi le même problème sous une autre forme :

Soit p un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum du système complet D_1. Considérons toutes les dérivées des D_1 dont l'ordre ne dépasse pas p : utilisons (¹) pour leur calcul les variables « multiplicatrices » mêmes qui les définissent à partir des D_1, et adjoignons les nouvelles conditions obtenues aux conditions relatives aux D_1 ; on voit que le problème proposé est équivalent à un problème de même énoncé, où l'on suppose de plus que les dérivées d'ordres partiels donnés sont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à p d'un système complet (p désignant un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum des dérivées qui constituent ce système complet).

17. *Étude du problème précédent (première forme).* — Considérons un système formé d'un nombre fini de dérivées d'une même inconnue, le système des monomes correspondants étant *complet*.

Considérons maintenant le système d'équations aux dérivées partielles obtenu en égalant respectivement ces dérivées à des fonctions données $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $Du = f$.

(¹) Nous indiquons ce mode de calcul uniquement pour avoir un procédé de formation bien déterminé : on pourra, en fait, opérer plus librement, en s'astreignant seulement à calculer une seule expression pour chacune des dérivées D_1 que l'on veut faire figurer aux premiers membres.

Pour que ce système soit possible, il est nécessaire que les fonctions f satisfassent identiquement aux relations différentielles correspondant aux relations (II) (n° **10**).

Parmi les relations (II) considérons celles $(II)_1$ qui expriment que le produit d'un monome M par *une* variable qui n'est pas multiplicatrice pour lui appartient à une classe plus haute.

Nous allons montrer que les relations différentielles $(II)_1$, en nombre fini [1], suffisent pour que le problème soit possible, et nous indiquerons, lorsqu'elles sont vérifiées, le degré de généralité de la solution du système.

Dans chacun des deuxièmes membres des équations données, annulons toutes les variables qui ne sont pas multiplicatrices pour le monome correspondant au premier membre. Nous obtenons ainsi la valeur de chacune des fonctions $M(x_{a'})$ (*voir* numéro précédent).

Choisissons arbitrairement les fonctions $N(x_a)$ correspondant au système complémentaire des premiers membres.

Je dis que la fonction u bien déterminée, que l'on peut former à l'aide des fonctions M et N, satisfait au système des équations données.

Chaque expression $Du - f$ est nulle lorsque les variables non multiplicatrices correspondant à D sont nulles; nous allons montrer que $Du - f$ est nulle partout. La proposition est exacte d'elle-même pour la plus haute des expressions $Du - f$ puisque, pour cette expression, toutes les variables sont multiplicatrices. Montrons que si elle est exacte pour les k plus hautes, elle l'est aussi pour les $k+1$ plus hautes.

Remarquons que les expressions $Du - f$ satisfont aux mêmes relations $(II)_1$ que les fonctions correspondantes f. Écrivons les relations où figure au premier membre la $(k+1)^{\text{ième}}$ (en comptant à partir du haut) des expressions $Du - f$.

Les seconds membres sont nuls partout (propriété II, n° **10**), donc, les dérivées premières de la $(k+1)^{\text{ième}}$ expression $Du - f$ par rapport à ses variables non multiplicatrices sont identiquement nulles. $Du - f$ est donc indépendante de ses variables non multiplicatrices, et comme elle est nulle dès que ces variables le sont, elle est nulle partout.

---

[1] Réalisées en particulier si toutes les f sont nulles.

Exemple :

$$p_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu} u}{\partial x_1^\lambda \partial x_2^\mu \partial x_3^\nu}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} p_{223} = f, \\ p_{513} = g, \\ p_{503} = h, \\ p_{422} = k, \\ p_{712} = l, \\ p_{702} = m, \\ p_{701} = r, \\ p_{700} = s. \end{array} \right.$$

Pour que ce système soit possible, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial s}{\partial x_3} = r, \qquad \frac{\partial r}{\partial x_3} = m, \qquad \frac{\partial m}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}, \qquad \frac{\partial l}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}, \qquad \frac{\partial k}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial m}{\partial x_2} = l, \qquad \frac{\partial l}{\partial x_2} = \frac{\partial^3 k}{\partial x_1^3}, \qquad \frac{\partial h}{\partial x_2} = g, \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1^3}.$$

Une solution est parfaitement déterminée par la donnée des fonctions suivantes :

$$\left| \begin{array}{llll} u, & \dfrac{\partial u}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial^6 u}{\partial x_1^6} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3}, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array} \right| \text{ pour } x_1 = x_3 = 0,$$

$$\left| \begin{array}{llll} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array} \right| \text{ pour } x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

. . . .

Voir le Tableau (N), (**6**).

18. *Étude du même problème (deuxième forme).* — Considérons maintenant le système obtenu en égalant à certaines fonctions données f toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à p d'un système complet (p désignant un entier supérieur ou égal à l'ordre maximum des dérivées de ce système complet).

Pour que ce système soit possible, il est nécessaire que les fonctions f satisfassent identiquement aux relations différentielles correspondant aux relations (II)″ (*voir* n° **12**). Ces relations en nombre fini suffisent pour que le problème soit possible.

La démonstration est entièrement analogue à la précédente.

Les fonctions arbitraires sont précisément les mêmes que pour le système complet dont le système actuel est dérivé.

Les relations auxquelles doivent satisfaire les f sont ici toutes du premier ordre.

CHAPITRE II.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — ÉTUDE FORMELLE. SYSTÈMES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES.

1. Nous aurons à envisager dans ce qui suit des équations au sens algébrique du mot et des équations aux dérivées partielles.

Afin de simplifier le langage, nous les supposerons linéaires; mais tout ce que nous dirons pourra s'étendre à des équations quelconques, sous réserve des conditions de régularité habituelles.

Les « combinaisons » d'équations que nous considérerons seront toujours des combinaisons linéaires homogènes (résultats obtenus en additionnant ces équations membre à membre après les avoir éventuellement multipliées par des fonctions des variables indépendantes).

Nous étudierons certaines formes canoniques de « systèmes d'équations aux dérivées partielles » pour lesquelles nous pourrons préciser les « conditions initiales », que l'on peut se donner arbitrairement pour déterminer une solution et une seule. Il ne s'agira dans cette étude, comme l'exige la généralité du problème, que de fonctions développables en série de Taylor.

Nous montrons d'ailleurs que l'on peut ramener un système quelconque à une forme canonique.

Les « conditions initiales » détermineront certaines portions de développements en série des fonctions inconnues, et par suite certains coefficients de ces développements. Le système donné et les équations que l'on peut en déduire par dérivations permettent de déduire des « conditions initiales » par résolutions successives d'équations ordinaires, tous les autres coefficients des développements cherchés.

On conçoit donc qu'il soit utile de *classer* les divers coefficients des deux sortes, qui ne sont autres, à des facteurs numériques près, que les valeurs en un point des dérivées des fonctions inconnues; pour simplifier le langage, nous supposerons souvent que ce point est l'origine des coordonnées (o, o, ..., o).

2. *Quelques résultats simples relatifs aux systèmes d'équations ordinaires.* — Au sujet des équations ordinaires, rappelons les propriétés suivantes :

Imaginons une infinité dénombrable d'inconnues (y); et supposons que l'on ait défini une répartition de ces inconnues en une suite linéaire de classes $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$, chacune des C ne contenant qu'un nombre fini des inconnues y. Si y, y' appartiennent à deux classes différentes, C_k, $C_{k'}$, y sera dit antérieur ou postérieur à y' suivant que k est inférieur ou supérieur à k'.

Considérons une équation en (y), résolue par rapport à l'une des y, et telle que l'inconnue qui figure au premier membre soit postérieure à toutes les inconnues qui figurent au deuxième.

Considérons maintenant un système fini (E) d'équations dont chacune possède les propriétés précédentes, les premiers membres étant tous différents.

α. Un tel système (E) est formé d'équations indépendantes (son rang est égal au nombre des équations qui y figurent). Il est équivalent à un système (E′) dont les premiers membres sont respectivement les mêmes que ceux de E, sont postérieurs à toutes les inconnues du second membre correspondant, et *de plus ne figurent dans aucun des seconds membres*. Les (E′) sont des combinaisons des (E) (¹).

β. Soit maintenant une équation quelconque e ; on peut ajouter à e une combinaison des équations (E) de manière que l'équation obtenue e_1 ne renferme plus aucun des premiers membres de (E) (²).

En particulier, e_1 peut ne renfermer aucune des inconnues y et se

(¹) On pourra par exemple montrer que si la proposition est exacte, lorsque les premiers membres appartiennent à des classes d'indice inférieur ou égal à k, elle l'est encore lorsque les premiers membres appartiennent à des classes d'indice inférieur ou égal à $k+1$. Étant vraie pour $k=1$, elle est générale.

(²) On voit immédiatement que l'on peut faire disparaître dans e chacun des premiers membres de E en ajoutant l'équation E′ correspondant à ce premier membre, multipliée préalablement par un facteur convenable; or les E′ sont des combinaisons des E.

réduire à la forme $a = 0$, a étant une constante. Si cette constante est différente de zéro, le système (E, e) est impossible. Si elle est nulle, le système (E, e) est équivalent au système (E).

3. *Application.* — Les inconnues (y) seront les valeurs en un point d'une fonction u de n variables et de toutes ses dérivées. Si y, y' sont deux dérivées d'ordres différents p, p', y sera dite *antérieure* ou *postérieure* à y' suivant que p est inférieur ou supérieur à p'. Si y, y' sont de même ordre, désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$ les ordres de dérivation par rapport aux diverses variables, y sera dite postérieure ou antérieure à y' suivant que la première des différences $\alpha_n - \alpha'_n$, $\alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}$, $\ldots$, $\alpha_1 - \alpha'_1$ qui n'est pas nulle est positive ou négative; chaque classe C ne contient ici qu'une seule variable.

Considérons maintenant une équation aux dérivées partielles en u, (A), résolue par rapport à une dérivée Du et ne contenant dans son second membre que des dérivées antérieures à celle qui figure au premier membre; il en est de même de l'équation qu'on obtient en dérivant une fois l'équation donnée, par rapport à une quelconque des variables x_i; ce fait devient évident dès que l'on a fait la remarque suivante: soient y, y' deux dérivées de même ordre; pour reconnaître si y est antérieur ou postérieur à y' d'une part, ou si $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est antérieur ou postérieur à $\frac{\partial y'}{\partial x_i}$ d'autre part, on a à former les mêmes différences (*voir* d'ailleurs plus loin n° 4). La propriété est encore vraie pour une dérivée d'ordre quelconque de l'équation donnée.

Adjoignons à l'équation donnée toutes les équations dérivées jusqu'à un certain ordre.

On peut appliquer à ce système (E) (où l'on considère les dérivées de u comme autant d'« inconnues ») les propositions α, β que nous avons indiquées plus haut:

1° On pourra le remplacer par un système équivalent ayant respectivement pour premiers membres Du et ses dérivées, et où les seconds membres ne comprendront ni Du ni *aucune de ses dérivées.*

Prenons pour conditions initiales les conditions initiales mêmes que nous avons prises dans l'étude de l'équation D$u = 0$; nous nous donnons arbitrairement un certain nombre fini de fonctions (développables), d'où résulte la connaissance en un point de toutes les dérivées autres que Du ou ses dérivées. Elles permettent, d'après ce qui précède, de déterminer entièrement la valeur en ce point de Du et de ses dérivées et par suite de construire un développement en série parfaitement déterminé pour la fonction u.

L'équation a au plus *une* solution développable satisfaisant aux conditions initiales spécifiées. Nous ne pourrons affirmer qu'elle en a effectivement une que si nous pouvons démontrer la convergence du développement en série obtenu. Admettons provisoirement que cette convergence soit établie.

2° Donnons-nous d'autre part une équation aux dérivées partielles quelconque (a); soit p son ordre. Formons le système des équations (E) déduites de (A) que nous venons de considérer au présent paragraphe (1°) en ayant soin de conduire les dérivations de manière à obtenir dans les premiers membres toutes les dérivées de Du d'ordre total inférieur ou égal à p ; et appliquons la remarque β au système (E, e) où (e) est l'équation (a), considérée comme une équation ordinaire par rapport aux diverses dérivées qui y entrent.

L'équation e_1 obtenue peut être considérée comme une équation aux dérivées partielles d'ordre $\leqq p$, conséquence du système (E, e) [et par suite du système A, a], où ne figurent plus ni D ni ses dérivées. Seules peuvent figurer les autres dérivées de u d'ordre $\leqq p$; si quelqu'une y figure effectivement, les « conditions initiales relatives à D » ne pourront plus être prises arbitrairement (¹); si e_1 ne contient aucune dérivée de u, le système (E, e) sera impossible ou équivalent (algébriquement) au système E; dans ce dernier cas, e sera une combinaison des E.

Nous pourrons donc dire :

« Pour que la solution du système (A, a) dépende des mêmes fonctions arbitraires (²), que la solution de l'équation A, il faut et il suffit que a soit une combinaison homogène des dérivées de A dont l'ordre (en u) est inférieur ou égal à celui de a. »

(¹) *Voir* plus loin (7).

(²) Cette expression se trouve précisée par le texte.

Remarque. — Remarquons le rôle essentiel joué dans ce qui précède par la propriété suivante du classement adopté : suivant que y est antérieur ou postérieur à y', $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est antérieur ou postérieur à $\frac{\partial y'}{\partial x_i}$. Cette propriété appartient à tout classement où la question de savoir si y est antérieure ou postérieure à y' peut être tranchée par la seule connaissance des différences $\alpha_n - \alpha'_n, \alpha_{n-1} - \alpha'_{n-1}, \ldots, \alpha_1 - \alpha'_1$.

D'après cela, on pourrait être tenté de modifier légèrement la convention que nous venons de faire pour classer les dérivées.

Soient y, y' deux dérivées d'*ordres quelconques;* convenons de dire que y est postérieur ou antérieur à y', suivant que y est plus haut ou plus bas que y' (*voir* I, n° **10**). Tout ce qui précède subsiste. Mais nous verrons qu'avec la première convention faite, la convergence de nos développements est assurée; *elle ne l'est plus avec la nouvelle.*

Un exemple bien connu de ce fait est donné par l'équation $\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$; il n'existe pas toujours une solution (développable en série entière) de cette équation prenant pour $x_2 = 0$ une valeur (développable en série entière) donnée.

C'est pour cette raison que, dans tous les classements que nous allons définir, si deux dérivées y, y' d'une même fonction sont d'ordres différents p, p', y sera dite *antérieure* ou *postérieure* à y suivant que p est inférieur ou supérieur à p'. On verra au numéro suivant la convention générale que nous adopterons lorsqu'il s'agira de plusieurs fonctions inconnues, convention qui comprendra la précédente comme cas particulier.

4. *Cotes. Classement des dérivées.* — Attachons à chacune des variables indépendantes et des fonctions inconnues, s nombres entiers [1] qui seront appelés cote première, seconde, ..., $\lambda^{\text{ième}}$, ..., $s^{\text{ième}}$ de la variable ou de la fonction inconnue considérée. Appelons cote $\lambda^{\text{ième}}$ d'une dérivée d'une fonction inconnue, d'ordre total r, la somme des cotes $\lambda^{\text{ièmes}}$ de la fonction et des r variables de dérivation.

---

[1] Positifs, négatifs ou nuls. On pourrait d'ailleurs se borner à considérer des nombres positifs ou nuls; la généralité des classements obtenus serait la même (*voir* III, 3ᵉ lemme) (*cf.* RIQUIER, *Systèmes*, p. 195).

Nous supposerons toujours *que les cotes premières des variables indépendantes sont toutes égales à* 1. Les autres cotes des variables indépendantes et toutes celles des fonctions inconnues seront arbitraires. Ces nombres étant choisis, nous allons montrer comment ils permettent de définir un classement des fonctions inconnues et de toutes leurs dérivées.

1° Soient y, y' deux dérivées (ou fonctions) quelconques; $c_1, c_2, \ldots, c_s, c'_1, c'_2, \ldots, c'_s$ leurs cotes; y sera dite *postérieure* ou *antérieure* à y' suivant que la première des quantités $c_1 - c'_1$, $c_2 - c'_2$, $\ldots$, $c_s - c'_s$ qui n'est pas nulle est positive ou négative; si toutes ces quantités sont nulles, y sera dite de même *classe* (¹) que y'. Il apparaît immédiatement que si y est postérieure à y' et y' postérieure à y'', y est postérieure à y'' (si le premier des entiers $c_i - c'_i$, $c'_i - c''_i$ qui n'est pas nul est positif, le premier des entiers $c_i - c''_i$ qui n'est pas nul est aussi positif). La définition est donc *légitime*.

2° Groupons ensemble toutes les dérivées qui ont même cote première; les dérivées qui figurent dans un tel groupe peuvent être d'ordres différents; mais, parmi elles, celles qui sont relatives à une fonction donnée sont d'un ordre déterminé; par suite, les dérivées qui ont une cote première déterminée sont en nombre fini. Il en résulte *a fortiori* que chaque classe *ne renferme qu'un nombre fini d'éléments*.

3° La cote première d'un élément quelconque ne peut être inférieure à la cote première minima a des fonctions inconnues.

Les éléments en nombre fini, qui ont pour cote première a, sont antérieurs à tous les autres. Il y a donc *une classe* qui précède toutes les autres (à savoir celle qui précède toutes les autres lorsqu'on se borne à envisager les éléments en nombre fini de cote première a).

En résumé, les dérivées des fonctions inconnues se trouvent réparties en classes $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots$ dont chacune ne contient qu'un nombre fini d'éléments. Les dérivées appartenant à la classe C_k seront appelées, pour abréger, dérivées de la classe k.

(¹) Le sens du mot classe est donc tout différent de celui qu'il avait dans le Chapitre I (7 en particulier).

Un tel classement possède en outre les propriétés fondamentales suivantes :

a. Quelle que soit la dérivée y, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est postérieur à y; en effet, la cote première de $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est supérieure d'une unité à celle de y.

b. $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ est antérieur ou postérieur à $\frac{\partial y'}{\partial x_i}$ suivant que y est antérieur ou postérieur à y'. Il suffit d'observer que l'on a, en désignant par c, c', γ les cotes de y, y', x_i :

$$c_\lambda - c'_\lambda = (c_\lambda + \gamma_\lambda) - (c'_\lambda + \gamma_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s).$$

Considérons alors une équation aux dérivées partielles (A) *résolue* par rapport à une dérivée y d'une fonction inconnue et ne contenant dans son second membre que des dérivées antérieures à celle qui figure au premier; il en est de même de l'équation qu'on obtient en dérivant une fois l'équation donnée par rapport à une quelconque des variables x_i; les éléments susceptibles de figurer au deuxième membre de l'équation dérivée sont : 1° les éléments du deuxième membre de l'équation primitive; 2° leurs dérivées par rapport à x_i. Les éléments 1° sont antérieurs à y, donc à $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ (remarque *a*). Les éléments 2° sont antérieurs à $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ (remarque *b*).

Toute équation obtenue en dérivant l'équation donnée un nombre quelconque de fois jouit encore de la même propriété : toutes les quantités qui figurent au deuxième membre sont antérieures au premier.

Supposons que (A) ne renferme qu'une inconnue; on pourra répéter pour cette équation toutes les remarques qui ont été faites au sujet de l'équation (A) du n° **3**.

Le classement indiqué au n° **3** est d'ailleurs un cas particulier des classements généraux que l'on vient de définir. Considérons une seule fonction inconnue; attribuons-lui $n+1$ cotes nulles; attribuons à x_1, x_2, ..., x_n des cotes 2^e, 3^e, ..., $(n+1)^{\text{ième}}$ nulles, sauf la dernière pour x_1, sauf l'avant-dernière pour x_2, ..., sauf la deuxième pour x_n, les cotes non nulles étant égales à 1; le classement obtenu est précisément celui qui a été utilisé au n° **3**.

5. *Forme canonique d'un système d'équations aux dérivées partielles.* — Nous avons rencontré jusqu'ici *deux* formes, particulièrement simples, de « systèmes d'équations aux dérivées partielles ».

L'une de ces formes, considérée au Chapitre précédent, est obtenue quand, les premiers membres étant constitués par des dérivées quelconques différentes d'une ou de plusieurs fonctions inconnues, les deuxièmes membres sont des fonctions complètement connues.

L'autre de ces formes, considérée au paragraphe précédent, est constituée par *une* équation résolue par rapport à une dérivée, et ne renfermant au deuxième membre que des dérivées antérieures au premier (classement quelconque répondant aux définitions du n° 4).

Pour la *première forme*, si après un certain nombre (fini) de dérivations (dont nous avons indiqué la formation régulière), il n'apparaît aucune incompatibilité, *le système est réellement possible*, et nous avons spécifié la nature des *conditions initiales* susceptibles d'être prises arbitrairement pour déterminer une solution et une seule.

Pour la *deuxième forme*, nous avons spécifié la nature des conditions initiales susceptibles d'être prises arbitrairement pour déterminer une solution et une seule, mais au point de vue *formel seulement;* une question de convergence reste à trancher. Nous verrons plus loin que le problème est alors réellement possible.

Nous allons considérer maintenant un système d'équations (C) tel que:

a. Les *premiers membres* sont des dérivées quelconques, toutes *différentes*, d'une ou de plusieurs fonctions inconnues.

b. *Chacune* des équations ne contient [1] dans son second membre que des quantités *antérieures* à son premier membre.

6. *Unicité de la solution (supposée).* — Nous avons vu comment on peut trouver la forme des « conditions initiales » qui, prises arbitrairement, déterminent, d'une manière unique, une solution du système obtenu en égalant à zéro les premiers membres des équations données. Montrons qu'un système (C) a *au plus une* solution (développable en série entière) qui satisfasse au système des « conditions initiales » précédentes.

---

[1] « Outre les variables x_1, x_2, ..., x_n ». Ces mots seront sous-entendus dans la suite.

Parmi les dérivées des fonctions inconnues, distinguons celles qui sont dérivées de l'un des premiers membres au moins (y compris les premiers membres eux-mêmes), nous les appellerons dérivées *principales;* toutes les autres dérivées des inconnues seront appelées dérivées *paramétriques*. Autrement dit, les dérivées principales sont celles qui font partie des modules définis par les premiers membres relatifs à chacune des inconnues; les dérivées paramétriques sont toutes les autres. Les « conditions initiales » font connaître les valeurs des dérivées paramétriques en un point P_0.

En dérivant convenablement une des équations données, convenablement choisie, on peut obtenir une équation ayant pour premier membre une dérivée principale quelconque; le second membre ne contient que des dérivées antérieures au premier.

Soient k_0 la classe maxima des premiers membres de (C) et k un entier quelconque supérieur ou égal à k_0. On pourra adjoindre aux équations (C) un certain nombre de leurs dérivées, de manière que les équations du système total obtenu aient des premiers membres tous distincts, qui soient respectivement toutes les dérivées principales de classe inférieure ou égale à k.

L'application à ce système de la remarque α conduit évidemment à la conclusion suivante :

« On peut, par dérivations et combinaisons, déduire du système (C) une expression (au moins) d'une dérivée principale quelconque en fonction des dérivées *paramétriques* de classe inférieure. » Mais les conditions initiales font connaître les valeurs en P_0 des dérivées paramétriques; par suite les valeurs en P_0 de toutes les dérivées principales ne peuvent être choisies que d'une manière, au plus. *Le système* (C) *a au plus une solution* (holomorphe) *qui satisfasse aux conditions initiales indiquées.*

7. *Systèmes complètement intégrables.* — Nous nous proposons de trouver dans quel cas le système *a effectivement une solution* pour des valeurs *arbitraires* des « conditions initiales » (¹) (la *forme*, ou, si l'on veut, l' « *économie* » de ces conditions initiales est toujours supposée

(¹) P_0 étant lui-même *arbitraire* dans un petit domaine *à n dimensions;* nous avons le droit de supposer que ce domaine contient l'origine.

être celle même qui correspond au système obtenu en égalant à zéro les premiers membres de C).

Si, par dérivations et combinaisons, on ne peut tirer de (C) aucune relation entre les seules dérivées paramétriques (et variables indépendantes), on dira que le système est *complètement* intégrable. Nous verrons d'ailleurs au Chapitre suivant qu'un système complètement intégrable a effectivement une solution répondant à des conditions initiales arbitraires. Nous allons nous occuper de reconnaître au moyen d'un nombre fini d'opérations si un système est complètement intégrable, et, lorsqu'il n'en sera pas ainsi, d'en déduire un système équivalent complètement intégrable.

Considérons les diverses dérivées d'une même inconnue qui figurent aux premiers membres de (C); on sait qu'on peut leur adjoindre un certain nombre de leurs dérivées de manière que le système total soit complet (Chap. I, n° **9**). Adjoignons aux équations données les équations obtenues par les dérivations ([1]) mêmes qui nous ont permis d'obtenir dans les premiers membres un système complet **M**.

Opérons de même pour chacune des inconnues. Nous obtenons un nouveau système C_1 qui est équivalent au système primitif, et que nous pouvons lui substituer dans l'étude du problème proposé. (La forme des « conditions initiales » relatives aux premiers membres n'a pas changé.)

Dérivons chacune des équations, A, du *nouveau système* par rapport aux seules « variables multiplicatrices » correspondant au premier membre; les premiers membres $\mathcal{M}$ des équations $\mathcal{A}$ ainsi obtenues ([2]) reproduisent sans omission ni répétition toutes les dérivées principales (propriété I) (I, n° **8**).

Les équations dérivées des équations données sont de deux espèces : 1° les $\mathcal{A}$; 2° toutes les autres, que nous nommerons $\mathcal{A}'$. Il sera commode d'appeler classe d'une équation $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{A}'$ la classe même de son premier membre.

([1]) Cela simplement pour avoir un procédé régulier; on pourra en fait dériver librement en s'astreignant simplement à faire apparaître aux premiers membres le système complet en question.

([2]) Nous comprenons dans les $\mathcal{A}$ les équations du système C_1 elles-mêmes (et par suite celles du système C).

Considérons une équation $\mathcal{A}'$ quelconque, soit k sa classe; appliquons la remarque β au système (E) constitué par toutes les équations $\mathcal{A}$ de classe inférieure ou égale à k et à l'équation e constituée par l'équation $\mathcal{A}'$ considérée, les (y) étant ici les premiers membres $\mathcal{M}$ de classe inférieure ou égale à k. On peut ajouter à $\mathcal{A}'$ une combinaison homogène des $\mathcal{A}$ (de classes inférieures ou égales à la classe de $\mathcal{A}'$) de manière que l'équation obtenue $\mathcal{A}''$ ne contienne aucun $\mathcal{M}$. Si l'équation $\mathcal{A}''$ contient effectivement une dérivée (¹) (au moins), $\mathcal{A}''$ constitue une relation que doivent vérifier les dérivées (¹) paramétriques des inconnues; mais alors le système ne serait pas complètement intégrable.

Si l'équation se réduit à $f = 0$, f étant une fonction des variables indépendantes seules, le système est certainement impossible, à moins que la fonction f soit identiquement nulle, auquel cas $\mathcal{A}'$ sera une combinaison homogène des $\mathcal{A}$ de classes inférieures ou égales à k.

Ainsi, pour que le système soit complètement intégrable, *il est nécessaire que tout $\mathcal{A}'$ soit une combinaison homogène des $\mathcal{A}$ dont la classe ne dépasse pas celle de $\mathcal{A}'$*. Si, d'ailleurs, cette condition est vérifiée, choisissons arbitrairement les conditions initiales autour de l'origine, et déterminons les valeurs à l'origine des dérivées principales à l'aide des équations $\mathcal{A}$; les développements construits à l'aide des conditions initiales et de ces valeurs *satisfont formellement au système proposé;* en effet, une équation dérivée quelconque d'une des équations données, étant une combinaison des équations $\mathcal{A}$, est vérifiée à l'origine par les valeurs données ou calculées des divers coefficients qui y entrent : dérivées paramétriques et dérivées principales.

Nous démontrerons plus loin que les développements (u) sont convergents.

Pour que *le système soit complètement intégrable, il faut et il suffit que tout $\mathcal{A}'$ soit combinaison homogène des $\mathcal{A}$ dont la classe ne dépasse pas la classe de $\mathcal{A}'$.*

Nous allons voir au n° **8** qu'il suffit de faire cette hypothèse pour

---

(¹) « Dérivée » est pris ici au sens large; les fonctions inconnues qui ne figurent pas par elles-mêmes dans les premiers membres sont des « dérivées paramétriques d'ordre zéro ».

certains $\mathcal{A}'$ (en nombre fini) que nous préciserons. Faisons auparavant une remarque sur la forme des relations en question. Retranchons de $\mathcal{A}'$ celle des équations $\mathcal{A}$ qui a même premier membre; l'équation obtenue $\mathcal{A}'''$ ne contient que des quantités de classes *inférieures* à k. Supposons maintenant que $\mathcal{A}'$ soit combinaison homogène des $\mathcal{A}$; il en est de même de $\mathcal{A}'''$; mais ce qui précède permet de préciser : $\mathcal{A}'''$ est combinaison homogène des $\mathcal{A}$ de classes *inférieures* à k. Ainsi, pour que *le système* (S) *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que la différence d'une équation $\mathcal{A}'$ quelconque et de celle des équations $\mathcal{A}$ qui a même premier membre soit combinaison homogène des équations $\mathcal{A}$ de classes inférieures à la classe de $\mathcal{A}'$.*

8. *Conditions, en nombre fini, pour qu'un système soit complètement intégrable.* — Considérons les $\mathcal{A}'$ que l'on obtient en dérivant *une* seule fois une équation du système C_1. Ces équations $\mathcal{A}'_1$ sont en nombre fini; leurs premiers membres sont les dérivées qui correspondent respectivement aux produits d'un « monome » M par chacune de ses variables non multiplicatrices. Je dis que si *les $\mathcal{A}'_1$ sont combinaisons homogènes d'équations $\mathcal{A}$, il en est de même de tous les $\mathcal{A}'$.*

Si dans une équation $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'_1$ ... quelconque, on retranche le deuxième membre du premier, on obtient une expression différentielle qu'il sera commode de désigner par la lettre $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'_1$, ..., qui désigne l'équation elle-même. Ce langage n'entraînera pas de confusion à condition de convenir, une fois pour toutes, que lorsqu'on parlera du *premier membre* ou du *second* membre d'une équation $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}'_1$, ..., on la supposera écrite sous la forme primitive (définitions a, b, et n^os **6**, **7**).

Il résulte de notre hypothèse que toute expression $\mathcal{A}'_1$ de classe k est égale à l'expression $\mathcal{A}$ qui a même « premier membre » augmentée d'une combinaison homogène des expressions $\mathcal{A}$ de classes *inférieures à k.* Les expressions A satisfont ainsi identiquement (c'est-à-dire quelles que soient les fonctions u) à un certain système d'équations aux dérivées partielles (C_2) que nous nous proposons d'étudier. Ce système (où l'on considère les A comme les « fonctions inconnues ») satisfait évidemment à la condition a du n° **5** (les premiers membres sont tous ici du *premier* ordre); je dis qu'il satisfait à la condition *b* à condition d'adopter un *classement* convenable pour les fonctions A et leurs dérivées.

Adoptons pour les premiers membres M relatifs à une inconnue déterminée, et pour les équations et expressions A correspondantes, la définition des mots *plus haut* et *plus bas* (Chap. I, n° **10**) et numérotons les équations A : $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ..., $A^{(q)}$ en allant *de haut en bas*.

Attachons à chacune des variables indépendantes et des fonctions A $s+1$ cotes dont les s premières seront précisément les cotes des variables indépendantes et des premiers membres des A (considérés comme dérivées des fonctions u) dans le système primitif C. La $(s+1)^{\text{ième}}$ cote sera o pour toutes les variables indépendantes; pour toute fonction A, la $(s+1)^{\text{ième}}$ cote sera égale à *l'indice de* A. Grâce à ce choix, si une dérivée y quelconque d'un A est antérieure à une dérivée y' d'un A dans *l'ancien* classement, y est aussi antérieur à y' dans le nouveau. Si deux dérivées (y, y') de deux A, A' différents sont dans la même classe (ancien classement), y est antérieure ou postérieure à y' (nouveau classement) suivant que A est plus haut ou plus bas que A'.

Considérons une équation quelconque du système (C_2). *Au sens de l'ancien classement* elle contient, outre *des y de classe inférieure, un y*, que nous désignerons par y_2, *de classe égale à celle de l'y premier membre*, que nous désignerons par y_1, mais on peut affirmer : y_2 est une dérivée d'un A *plus haut que le* A *d'où dérive* y_1 (propriété II, *voir* I, **10**)

Par suite, au sens du nouveau classement, chacune des équations de (C_2) ne renferme au second membre que des *quantités antérieures* à celle qui figure au premier. Ces expressions sont d'ailleurs homogènes ; en se reportant au n° **6**, on voit que toute dérivée d'un A où la dérivation est faite au moins une fois par rapport à une variable non multiplicatrice pour le M correspondant s'exprime en fonction homogène des dérivées des A où la dérivation ne fait intervenir que des variables multiplicatrices pour le M correspondant. Ce qui revient à dire : tout $\mathcal{A}'$ est combinaison homogène des $\mathcal{A}$.

Réserve faite de la démonstration de convergence, nous avons donc démontré la proposition suivante :

Pour que le système C_1 formé par les équations A soit *complètement intégrable*, il faut et *il suffit* que les *dérivées premières* $\frac{\partial A}{\partial x_i}$ *des expressions* A *par rapport à leurs variables non multiplicatrices* soient *identiquement*, c'est-à-dire quelles que soient les fonctions u, *des combinaisons homogènes des dérivées* $\mathcal{A}$ *des* A *par rapport à leurs variables multiplicatrices*: les seules dérivées $\mathcal{A}$ qui peuvent intervenir sont d'ailleurs de classe au plus égale à la classe de la dérivée $\frac{\partial A}{\partial x_i}$ considérée ([1]).

9. *Autre forme de la démonstration précédente.* — Nous allons étendre ce qui précède au cas des systèmes C_1 non linéaires, et nous en profiterons pour présenter les résultats sous une forme légèrement différente. Soit $\overline{A}$ une équation A particulière pour laquelle les x ne soient pas toutes variables multiplicatrices ([2]). Dérivons-la une fois par rapport à une variable x_i qui ne soit pas multiplicatrice pour elle; le premier membre obtenu $\frac{\partial \overline{M}}{\partial x_i}$ est égal au premier membre $D\overline{\overline{M}}$ d'une équation $\mathcal{A}$, déterminée $D\overline{\overline{A}}$; l'expression $\frac{\partial \overline{A}}{\partial x_i} - D\overline{\overline{A}}$ ne contient que les variables indépendantes et des dérivées de classes inférieures à la classe commune k de $\frac{\partial \overline{M}}{\partial x_i}$ et de $D\overline{\overline{M}}$. Cette expression peut donc être considérée comme une fonction des variables indépendantes, des dérivées paramétriques de classes inférieures à k, et des $\mathcal{A}$ de classes inférieures à k; pour que le système soit complètement intégrable, il est nécessaire que cette fonction s'annule quand on y annule tous les $\mathcal{A}$; car sans cela on obtiendrait une relation entre les dérivées paramétriques. Supposons donc que les expressions $\frac{\partial \overline{A}}{\partial x_i} - D\overline{\overline{A}}$ soient des fonctions des variables indé-

---

([1]) Observons de plus que si les premiers membres de C_1 sont d'ordre 1, et si ses seconds membres sont d'ordre au plus égal à 1, les seules $\mathcal{A}$ qui peuvent intervenir sont des dérivées des A d'ordre (en A) ≤ 1. On verra plus loin une application de cette remarque.

([2]) Une variable est dite « multiplicatrice pour une équation A » si elle est multiplicatrice pour son premier membre.

pendantes, des dérivées paramétriques et des $\mathcal{A}$, *ces fonctions possédant la propriété de s'annuler dès qu'on y annule tous les* $\mathcal{A}$. Appelons C_2 le système de relations ainsi obtenu. Donnons-nous un système de conditions initiales arbitraires pour les u (système de conditions dont la forme est fixée par les premiers membres des A); déterminons les dérivées principales (à l'origine) des inconnues u par les équations $\mathcal{A}$; et admettons la convergence des développements qui en résulteraient; autrement dit, considérons un système de fonctions u holomorphes répondant aux conditions initiales proposées et satisfaisant (à l'origine) à toutes les équations $\mathcal{A}$. Remplaçons les dérivées paramétriques des u par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans le système C_2; les A peuvent être considérées comme des fonctions holomorphes des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui satisfont au système C_2 quelles que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

D'autre part, appelons $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}$ les variables multiplicatrices, $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k}$ les variables non multiplicatrices d'une équation A (dans le système C_1). L'expression A s'annule par hypothèse sur $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$, puisque tous les $\mathcal{A}$ sont nuls à l'origine.

Or : 1° le système C_2 considéré comme système par rapport aux A admet *au plus* une solution holomorphe telle que les différentes fonctions A qui la constituent s'annulent respectivement sur les multiplicités $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$ correspondantes; 2° ce système admet la solution 0.

Donc tous les A sont nuls quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

10. *Chaîne de systèmes.* — Revenons au cas d'un système C_1 linéaire. *Si le système* C_1 *est complètement intégrable*, le système C_2 relatif aux expressions A (expressions que nous appellerons désormais A_1) ne contient plus explicitement que les x et les A_1, et non plus les u et leurs dérivées paramétriques; il est *linéaire par rapport aux* A_1. Chaque relation C_2 peut s'écrire en plaçant dans le premier membre la quantité $\frac{\partial A_1}{\partial x_i}$ seule (notation du paragraphe précédent) et nous avons vu (**8**) que lorsque l'on considère les A_1 comme les inconnues, on obtient un système C_2 satisfaisant aux deux conditions a' et b.

a'. Les premiers membres sont des dérivées *premières* toutes différentes des inconnues.

b. Chaque second membre ne contient que des dérivées antérieures au premier membre correspondant.

Ce système (C_2) possède ainsi les propriétés fondamentales du système (C_1), ses premiers membres relatifs à une inconnue déterminée forment un système de monomes complet puisqu'il en est ainsi de tout système de monomes du premier ordre (**I**, **11**).

(C_2) est complètement intégrable. En effet, si par dérivations et combinaisons on pouvait en tirer une relation entre les dérivées « paramétriques » des A_1 (relativement au système C_2), on aurait par là même une relation entre des expressions $\mathcal{A}$, ce qui est impossible, puisque le « rang » de tout système d'expressions $\mathcal{A}$ est égal à leur nombre.

Au système C_2 aux inconnues A_1, on pourra appliquer la méthode même que nous avons appliquée à C_1; le système des conditions d'intégrabilité complète formera un système C_3 aux inconnues A_2, que l'on formera à l'aide des équations A_2, comme on avait formé C_2 à l'aide des équations A_1, etc.

La suite des systèmes que l'on forme ainsi est nécessairement limitée et a au plus $n+1$ éléments.

En effet, dans le système C_2, les premiers membres dérivés d'une même fonction inconnue A_1 sont au plus au nombre de n; dans le système C_3, les premiers membres dérivés d'une même fonction inconnue A_2 sont au plus au nombre de $n-1, \ldots$; dans le système C_{n+1} (s'il existe), chaque inconnue intervient dans un premier membre au plus. La chaîne des systèmes s'arrête donc au plus tard au système C_{n+1}; elle peut effectivement ne s'arrêter qu'au système C_{n+1} (*voir* exemple **2**).

11. *Nouvelle forme des conditions pour qu'un système soit complètement intégrable.* — La méthode précédente (**8** et **9**) permet de reconnaître si un système est complètement intégrable.

Il pourra y avoir avantage à opérer d'une manière un peu différente.

Soit p_0 la cote première maxima des premiers membres de C_1. Considérons celles des équations $\mathcal{A}$ dont la cote première ne dépasse pas un nombre $p \geqq p_0$. Les premiers membres qui sont relatifs à une même inconnue forment un système de la nature de ceux pour lesquels nous avons défini des variables multiplicatrices (I, n° **12**).

Désignons par B les équations considérées, par $\mathcal{B}$ les équations obtenues en les dérivant par rapport à leurs variables multiplicatrices seules, $\mathcal{B}'$ les autres équations que l'on peut en déduire par dérivations; affectons $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}'$ de l'indice 1 lorsque cette équation a été déduite d'une équation B par *une* seule dérivation.

On voit, comme précédemment, que :

Pour que le système donné soit complètement intégrable, il faut que tout $\mathcal{B}'_1$ soit combinaison homogène des $\mathcal{B}_1$ et des B, et d'une manière plus précise ;

Pour que le système donné soit complètement intégrable, il faut :

1° Que la différence de tout $\mathcal{B}'_1$ provenant d'une équation B de cote première p et de l'équation $\overline{\mathcal{B}}_1$ qui a même premier membre soit combinaison homogène des $\mathcal{B}_1$ (de classes inférieures à la classe commune de $\mathcal{B}'_1, \overline{\mathcal{B}}_1$) et des B ;

2° Que la différence de tout $\mathcal{B}'_1$ provenant d'une équation B de cote première $p_1 < p$ et de l'équation $\overline{\mathrm{B}}$ qui a même premier membre soit combinaison homogène des B de classes inférieures à la classe commune de $\mathcal{B}'_1$, $\overline{\mathrm{B}}$ (et par suite de cotes premières $\leqq p_1 + 1$).

On voit comme précédemment que ces conditions sont *suffisantes*.

Dire que ces conditions sont réalisées, c'est dire que les *expressions* (¹) B satisfont identiquement (quels que soient les u) à un certain système d'équations aux dérivées partielles *du premier ordre*, dont les premiers membres sont tous différents. *Ce système possède la propriété b.* Il suffit pour le voir d'attacher à chacune des variables indépendantes et des B $s + 1$ cotes choisies de la manière suivante : les s premières seront celles des variables et des premiers membres des B (considérés comme dérivées des u) dans le système primitif C; la $(s + 1)^{\text{ième}}$ sera 0 pour chaque variable, elle sera égale au numéro d'ordre du premier membre de B lorsqu'on numérote tous les premiers membres relatifs à une même inconnue u en allant de haut en

---

(¹) Comme précédemment, nous désignons par *expression* B l'expression obtenue en retranchant le second membre du premier dans *l'équation* B.

bas (I, n° **12**). On voit alors immédiatement, en se reportant à la démonstration du n° **8** (II) et à la propriété II″ (I, **12**) que chaque second membre du système en B considéré, C_2, ne contient que des quantités antérieures au premier membre. Toute équation $\mathcal{B}'$ est alors une combinaison homogène des $\mathcal{B}$ et le système primitif est complètement intégrable.

Supposons que le système donné B soit linéaire et complètement intégrable. Les B satisfont au système C_2.

On voit, comme au n° **10**, que ce système C_2 est complètement intégrable. *Il est, de plus, du premier ordre.* Mais alors le nouveau système C_3 que l'on en déduira comme précédemment (n° **10**) sera aussi du premier ordre (¹). Tous les systèmes de la chaîne C_2, C_3, ... seront du premier ordre.

12. *Réduction d'un système quelconque à une forme canonique complètement intégrable.* — Tout système d'équations aux dérivées partielles peut se ramener, par résolutions et dérivations, à un système équivalent, *possédant les propriétés a, b et, de plus, complètement intégrable.*

Adoptons pour les fonctions et les variables un système de cotes tel que chacune des classes qui en résultent ne contienne qu'un élément; c'est ce qui aura lieu, par exemple, pour le système de cotes suivant :

u	v	w		x_1	x_2	.	.	.	x_n
0	0	0		1	1	.	.	.	1
0	1	2		0	0	.	.	.	0
0	0	0		0	0	.	.	.	1
.	.	.		.	.	.	.	.	.
0	0	0		0	1	.	.	.	0
0	0	0		1	0	.	.	.	0

Les cotes 3^e, 4^e, ..., $(n+2)^{\text{ième}}$ de u, v, w, ..., x_i, ... étant nulles, sauf la cote $(n+3-i)^{\text{ième}}$ de x_i qui est égale à 1. Autrement dit, les

(¹) *Voir* note de la fin du n° **8**.

dérivées sont rangées d'après leur ordre, puis dans chaque ordre d'après la fonction d'où elles proviennent ; puis pour les dérivées d'un ordre déterminé d'une fonction déterminée dans l'ordre adopté plus haut (n° **3**).

Étant donné un système quelconque de p équations, on pourra toujours par simples combinaisons en déduire un système équivalent de p équations possédant les deux propriétés a et b : soit d la dérivée de la classe la plus élevée qui entre dans le système des p équations données ; résolvons par rapport à d l'une des équations qui la contient, substituons l'expression obtenue dans le système restant : nous obtenons un système de $p-1$ équations ne contenant que des équations de classes inférieures à d ; si donc la proposition est vraie pour $p-1$ équations, elle l'est aussi pour p ; étant vraie pour une équation, elle est générale.

D'un système mis sous la forme (C) jouissant des propriétés a, b, on pourra tirer une forme (C_1) où les premiers membres constituent le système complet déduit des premiers membres de C ; de cette forme (C_1) on déduit les « conditions d'intégrabilité » qui ne *contiennent pas de dérivées des premiers membres de* C : ces « conditions », considérées seules, seront résolues [1] de manière à satisfaire aux conditions a, b, puis seront adjointes au système (C). On obtiendra ainsi un système (C′), formé au total des équations (C) et des « conditions d'intégrabilité » ; ce système satisfait aussi aux conditions a, b.

Soit D l'opération qui permet de passer de (C) à (C′). Je dis que cette opération ne peut s'effectuer qu'un nombre limité de fois. En effet, les systèmes des premiers membres S, S′,... des systèmes C, C′, ... sont tels que chacun d'eux contient : 1° tous les monomes du système précédent ; 2° d'autres monomes dont aucun n'est multiple des monomes du système précédent.

Une telle suite est nécessairement finie (I, **2**).

La démonstration précédente fournit un procédé régulier pour

---

[1] Dans ce genre de raisonnements, il est sous-entendu que l'on se place au voisinage d'un système de valeurs (des variables indépendantes et des dérivées des premières classes) pour lequel toutes les résolutions successives supposées dans le texte sont possibles conformément à la théorie générale des fonctions implicites.

déduire ([1]) d'un système quelconque donné un système équivalent possédant les propriétés a, b, et complètement intégrable.

Une modification évidente de cette démonstration fournit immédiatement le théorème de M. Tresse :

« Des équations aux dérivées partielles (à un nombre fini d'inconnues) peuvent toujours être considérées comme des combinaisons (algébriques et différentielles) d'un nombre fini d'entre elles. »

13. *Résultats relatifs aux systèmes de formes algébriques.* — Les remarques qui ont été faites dans les paragraphes précédents conduisent à des conséquences algébriques intéressantes sur lesquelles nous allons donner quelques indications.

Pour abréger le langage, nous appellerons « forme différentielle » (en u) correspondant à une forme algébrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ donnée, le résultat que l'on obtient lorsque, dans cette dernière, on substitue à chaque monome $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ la dérivée correspondante de u, $p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$: lorsqu'on dérive une forme différentielle, on en obtient une nouvelle, qui n'est autre que la forme différentielle correspondant au produit de la forme algébrique primitive par le monome correspondant à la dérivation considérée.

Nous obtiendrons des résultats relatifs à un système de formes algébriques en appliquant nos méthodes générales au système obtenu en égalant à zéro les formes différentielles (en u) correspondantes. Traitons un tel système (où la seule inconnue est u); et tout d'abord, cherchons à le ramener à une forme canonique complètement intégrable (n° **12**) : nous adjoignons pour cela au système donné, résolu convenablement, certaines formes, résolues convenablement, et nous supposons que les premiers membres du système total formé (A) constituent un système complet; les équations A dérivées par rapport à leurs variables multiplicatrices ont été appelées $\mathcal{A}$; le rang de tout système d'équations $\mathcal{A}$ est égal à leur nombre. Or, lorsqu'on forme les « conditions d'intégrabilité », on est amené à rechercher si certaines formes différentielles (déduites du système par des procédés indiqués)

([1]) Sauf rencontre d'incompatibilité (relation non identique entre les seules variables x) mettant en évidence *l'impossibilité* du système.

sont ou non combinaisons d'équations $\mathcal{A}$: il suffira ici, d'après les remarques qui viennent d'être faites, de reconnaître si une telle forme est combinaison à coefficients constants d'équations $\mathcal{A}$ *de son ordre* ; lorsqu'il n'en est pas ainsi, on est amené à adjoindre au système primitif une combinaison à coefficients constants de cette forme et d'équations A *de son ordre*, c'est-à-dire une nouvelle *forme différentielle*.

Le système canonique complètement intégrable A_1, que l'on obtient, est composé uniquement de *formes différentielles* en u.

Soit p_0 l'ordre maximum de ces formes ; et $p \geqq p_0$. Considérons, comme au n° **11**, les équations $\mathcal{A}_1$ d'ordre inférieur ou égal à p, équations que nous appelons B ; les expressions B sont ici des formes différentielles. En utilisant toujours les mêmes remarques, nous obtenons les résultats suivants :

1° Toute dérivée d'une expression B d'ordre p_1 inférieur à p est une combinaison linéaire à coefficients constants des B d'ordre $p_1 + 1$.

2° Les expressions B d'ordre p satisfont identiquement (c'est-à-dire quel que soit u) à un système C_2 d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires, *à coefficients constants*, et *sans autres termes que les termes du premier ordre par rapport aux* B.

Ce système est d'ailleurs complètement intégrable.

Écrivons les identités qui expriment ce fait ; il apparaît immédiatement qu'elles se présentent sous la forme d'un système linéaire du premier ordre, *à coefficients constants* et *sans autres termes que les termes du premier ordre*.

Les systèmes C_3, C_4, ... dont nous avons expliqué la formation au n° **11** ont tous les propriétés qui viennent d'être spécifiées pour C_2 (2°).

Revenons aux formes *algébriques* (¹) B d'ordre p : $B_1, B_2, \ldots, B_{m^{(1)}}$. Comment peut-on obtenir tous les systèmes de formes algébriques $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ tels que l'on ait (quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$)

$$X_1 B_1 + X_2 B_2 + \ldots + X_{m^{(1)}} B_{m^{(1)}} = 0. \tag{1}$$

(¹) Il est commode, dans les cas où aucune confusion n'est à craindre, de désigner la forme algébrique et la forme différentielle correspondante par la même lettre. Nous adoptons cette convention.

Chaque équation du système C_2 peut s'écrire symboliquement comme l'équation (1); chacune de ces équations fournit, en somme, un système de solutions *du premier ordre* de l'équation précédente : il suffit d'y remplacer chaque symbole de dérivation $\frac{\partial}{\partial x_i}$ par la variable correspondante x_i. Soit

$$F^{(1)}_{1s},\quad F^{(1)}_{2s},\quad \ldots,\quad F^{(1)}_{m^{(1)}s} \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(2)}]$$

une telle solution [1]. Aucune de ces solutions n'est « combinaison » des autres. Le système C_2 étant complètement intégrable, toute autre solution du premier ordre est combinaison linéaire à coefficients constants des solutions précédentes; toute « solution du 2^e, 3^e, ... ordre » se déduit régulièrement des solutions

$$F^{(1)}_{1s},\quad F^{(1)}_{2s},\quad \ldots,\quad F^{(1)}_{m^{(1)}s} \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(2)}]$$

grâce à la définition des variables multiplicatrices.

Cherchons maintenant à obtenir tous les systèmes de formes

$$X^{(1)}_1,\quad X^{(1)}_2,\quad \ldots,\quad X^{(1)}_{m^{(2)}}$$

tels que l'on ait, quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et quels que soient les paramètres β,

$$\begin{aligned}
(2)\qquad & X^{(1)}_1\left[F^{(1)}_{11}\beta_1 + F^{(1)}_{21}\beta_2 + \ldots + F^{(1)}_{m^{(1)}1}\beta_{m^{(1)}}\right]\\
& + X^{(1)}_2\left[F^{(1)}_{12}\beta_1 + F^{(1)}_{22}\beta_2 + \ldots + F^{(1)}_{m^{(1)}2}\beta_{m^{(1)}}\right]\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& + X^{(1)}_{m^{(2)}}\left[F^{(1)}_{1m^{(2)}}\beta_1 + F^{(1)}_{2m^{(2)}}\beta_2 + \ldots + F^{(1)}_{m^{(1)}m^{(2)}}\beta_{m^{(1)}}\right] = 0
\end{aligned}$$

[ce qui pourrait encore s'écrire sous forme de $m^{(1)}$ équations, en égalant à zéro les coefficients de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m^{(1)}}$].

Chaque équation du système C_3 peut s'écrire symboliquement comme l'équation (2); chacune de ces équations fournit une solution du premier ordre de l'équation précédente, il suffit, comme précédemment, de remplacer chaque symbole de dérivation par la variable correspondante. Soit

$$F^{(2)}_{1s},\quad F^{(2)}_{2s},\quad \ldots,\quad F^{(2)}_{m^{(2)}s} \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(3)}]$$

une telle solution. Aucune de ces solutions n'est combinaison des

(1) *Cf.* Hilbert, *Math. Annalen*, t. XXXVI, 1890, p. 490.

autres. Le système C_3 étant complètement intégrable, toute autre solution du premier ordre est combinaison linéaire à coefficients constants des solutions précédentes; toute solution de 2e, 3e, ... ordre se déduit régulièrement des solutions

$$F^{(2)}_{1s}, \quad F^{(2)}_{2s}, \quad \ldots, \quad F^{(2)}_{m^{(2)}s} \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(3)}]$$

grâce à la définition des variables multiplicatrices.

On pourra poser, relativement aux formes $F^{(2)}$, un problème analogue à celui que l'on a posé pour les $F^{(1)}$ [équation (2)].... La chaîne de systèmes ainsi formée s'arrête nécessairement (et comprend n chaînons au plus).

Le problème que nous venons de traiter pour *le système des formes* B *d'ordre p* est le problème que s'est posé M. Hilbert pour un système de formes quelconques. Mais nous arrivons ici à un résultat plus précis que le résultat général.

Pour le système des formes B *d'ordre* p, *les solutions fondamentales des systèmes successifs de Hilbert sont toutes constituées par des formes linéaires.*

Il est d'ailleurs à remarquer qu'un module [1] *quelconque* de formes peut toujours être considéré comme constitué par l'adjonction d'un nombre fini de formes (de degré $< p$) à un module défini par un système B.

On pourra énoncer la proposition suivante :

« Soit un module quelconque de formes algébriques; on sait que toutes les formes d'ordre p du module sont des combinaisons linéaires à coefficients constants d'un nombre fini d'entre elles linéairement indépendantes $F_1, F_2, \ldots, F_{m^{(1)}}$.

[1] On dit qu'un système de formes constitue un module si toute combinaison linéaire des formes de ce système fait partie du système, en entendant ici, par combinaison linéaire des formes $F_1, F_2, \ldots, F_k$, toute forme du type $\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_k F_k$, où les λ sont des formes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Les théories développées dans les paragraphes précédents donnent un procédé régulier pour obtenir une fois et une seule fois toutes les formes d'un module donné.

» *Si p est assez grand :*

» 1° Tout système de formes $X_1, X_2, \ldots, X_{m^{(1)}}$ solution de l'équation

$$X_1 F_1 + X_2 F_2 + \ldots + X_{m^{(1)}} F_{m^{(1)}} = 0$$

est combinaison de $m^{(2)}$ solutions indépendantes, dont chacune est constituée par *des formes linéaires*

$$F_{1s}^{(1)},\quad F_{2s}^{(1)},\quad \ldots,\quad F_{m^{(1)}s}^{(1)} \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(2)}].$$

» 2° Tout système de formes $X_1^{(1)}, X_2^{(1)}, \ldots, X_{m^{(2)}}^{(1)}$ solution du système

$$X_1^{(1)} F_{t1}^{(1)} + X_2^{(1)} F_{t2}^{(1)} + \ldots + X_{m^{(2)}}^{(1)} F_{tm^{(2)}}^{(1)} = 0 \qquad [t = 1, 2, \ldots, m^{(1)}]$$

est combinaison de $m^{(3)}$ solutions indépendantes, dont chacune est constituée par *des formes linéaires*

$$F_{1s}^{(2)},\quad F_{2s}^{(2)},\quad \ldots,\quad F_{m^{(2)}s}^{(2)} \qquad [s = 1, 2, \ldots, m^{(3)}].$$

» 3° Tout système $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \ldots, X_{m^{(3)}}^{(2)}$ solution du système

$$X_1^{(2)} F_{t1}^{(2)} + X_2^{(2)} F_{t2}^{(2)} + \ldots + X_{m^{(3)}}^{(2)} F_{tm^{(3)}}^{(2)} = 0$$

est combinaison, etc. »

14. *Nombre* $\chi(p)$. — On a vu au n° **14** (I) que le nombre des monomes d'ordre p qui n'appartiennent pas à un module donné est un polynome en p, $\chi(p)$, dès que p est assez grand. Soit M un système complet définissant ce module; soit λ le nombre maximum des variables multiplicatrices des monomes N(I, **15**); μ le nombre des N qui ont λ variables multiplicatrices; on voit immédiatement que le terme de plus haut degré de $\chi(p)$ est

$$\mu \frac{p^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}.$$

Si les dérivées de u correspondant aux monomes M sont les premiers membres d'un système canonique complètement intégrable à la seule inconnue u, $\chi(p)$ représente le nombre maximum des variables des « fonctions initiales » de la solution, μ le nombre des fonctions initiales à λ variables. Or lorsqu'on fait un changement quelconque de variables indépendantes, le polynome $\chi(p)$ ne change pas [1]; le nombre maximum λ des variables des fonctions initiales et le nombre μ de ces fonctions qui contiennent λ variables sont donc invariants par tout changement de variables.

Plaçons-nous dans le cas considéré au n° **15** et parlons seulement de formes algébriques : $\chi(p)$ est le nombre des conditions indépendantes auxquelles on doit assujettir une forme d'ordre p (p assez grand) pour que cette forme fasse partie du module envisagé. Le polynome $\chi(p)$ est en relation étroite avec la multiplicité algébrique dont les équations s'obtiennent en égalant à zéro les formes de ce module. Nous nous bornerons à la remarque suivante.

Hilbert énonce sans démonstration la règle suivante : « Le nombre μ est le degré de la multiplicité algébrique à $\lambda - 1$ dimensions définie par le système précédent. »

Pour que cet énoncé soit général, il y aurait lieu de définir les degrés de multiplicité des solutions de certains systèmes singuliers.

A ce point de vue, il y aurait lieu de dire, par exemple, que, dans l'espace à deux dimensions (coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3), le système d'équations

$$x_1^2 = 0, \qquad x_1 x_2 = 0, \qquad x_2^2 = 0$$

définit une multiplicité de dimension 0 et d'ordre 3 : *trois* points confondus en

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \lambda \neq 0.$$

CHAPITRE III.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — GÉNÉRALISATION DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS. — DÉMONSTRATION DE CONVERGENCE.

1. *Forme canonique étudiée.* — Avant de passer à la démonstration de la convergence des développements en série obtenus pour les

---

(1) Nous laissons de côté dans le présent exposé la démonstration détaillée de ce point.

intégrales, nous indiquerons quelques généralisations de ce qui précède.

Considérons un système d'un nombre fini d'équations telles que :

a. Les premiers membres sont des dérivées quelconques toutes différentes d'une ou plusieurs inconnues.

b_1. Chacune des équations ne contient dans son second membre que des quantités de cote première au plus égale à celle du premier.

Autrement dit, le nouveau système donné diffère du système donné que l'on envisageait précédemment en ceci que chaque second membre peut contenir des dérivées qui ne sont ni antérieures ni postérieures au premier membre, ou même des dérivées postérieures à celui-ci; mais la cote première de ces dérivées (plus simplement leur ordre s'il n'y a qu'une inconnue) doit ne pas dépasser la cote première du premier membre.

La définition ne suppose même pas qu'il ait été fait de convention particulière pour le classement des dérivées; elle suppose seulement l'attribution d'une cote première à chacune des fonctions inconnues (si les cotes premières des inconnues sont égales, le mot cote première dans b_1 peut être remplacé par le mot *ordre*).

De plus, nous ne supposerons plus, même dans le langage, que les équations sont linéaires. Il est commode, pour éviter les redites, de faire dès maintenant cette autre généralisation.

Si l'on dérive une fois, par rapport à une quelconque des variables, une quelconque des équations données, l'équation obtenue ne contient dans son second membre que des quantités de cote première au plus égale à celle du premier.

Formons comme précédemment le système (A) obtenu en adjoignant aux équations données celles qu'on en déduit par les dérivations mêmes qui nous permettent de déduire des premiers membres un système complet de dérivées ([1]) (pour chacune des fonctions inconnues).

Celles des dérivées, d'ordre quelconque, de A que l'on peut former en utilisant comme variables de dérivations les seules « variables mul-

([1]) Nous nous assujettissons à ne former qu'une équation ayant un premier membre déterminé.

tiplicatrices » du premier membre de A constitueront un ensemble d'équations $\mathcal{A}$ correspondant à A.

Les équations $\mathcal{A}$ ainsi obtenues (en y comprenant toujours les A) ont encore ici des premiers membres tous distincts.

Groupons ici toutes les équations $\mathcal{A}$ de cote première ([1]) déterminée : il n'y en a qu'un nombre fini. Soient δ la cote première minima des premiers membres *du système donné ;* Δ la cote première maxima *des* A.

Considérons les systèmes formés par les équations $\mathcal{A}$ de cote première δ, $\delta + 1$, ..., Δ, $\Delta + 1$; le dernier système est formé d'équations linéaires par rapport aux dérivées de cote première $\Delta + 1$ qui y entrent.

Le système total ainsi obtenu satisfait encore aux deux propriétés a et b_1. C'est sur lui que nous raisonnerons dans la suite.

2. *Position du problème.* — Les conditions initiales que nous nous imposerons seront encore les conditions initiales « relatives aux premiers membres ». Au sujet de ces conditions et des équations proposées elles-mêmes, nous aurons à faire, outre certaines réserves de régularité, certaines réserves d'inégalité que nous préciserons dans la suite. D'ailleurs, dans le cas où les conditions a et b seront réalisées ([2]), les réserves d'inégalité disparaîtront, et la proposition que nous avions en vue dans les paragraphes précédents apparaîtra comme un cas particulier de celle que nous obtiendrons.

Donnons-nous un « système de conditions initiales relatives aux premiers membres » et considérons les valeurs à l'origine qui en résultent pour les dérivées paramétriques de cote première δ, $\delta + 1$, ..., Δ (dérivées en nombre fini). Substituons ces valeurs dans les équations $\mathcal{A}$ de cote première δ, $\delta + 1$, ..., Δ et supposons que les équations obtenues (où l'on fait $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$) soient alors vérifiées pour un certain système de valeurs numériques attribuées aux

([1]) Nous appellerons pour abréger cote première d'une équation la cote première de son « premier membre » ou, ce qui revient au même, la cote première maxima des termes qui y entrent.

([2]) Et non pas seulement a et b_1.

dérivées principales de cote première δ, $\delta + 1$, ..., Δ (dérivées qui sont en nombre fini), de sorte que tous les seconds membres soient réguliers au voisinage des valeurs que nous venons de considérer pour les variables qui y figurent.

Soient maintenant $x_{a_1}, x_{a_2}, \ldots, x_{a_h}$; $x_{b_1}, x_{b_2}, \ldots, x_{b_k}$ les variables multiplicatrices et non multiplicatrices d'une équation de cote première $\Delta + 1$.

Il est naturel de se poser le problème suivant : Y a-t-il un système de fonctions u régulier au voisinage de l'origine satisfaisant : 1° aux conditions initiales précédentes; 2° aux équations $\mathcal{A}_\delta, \mathcal{A}_{\delta+1}, \ldots, \mathcal{A}_\Delta$ à l'origine; 3° à chacune des équations $\mathcal{A}_{\Delta+1}$ sur la multiplicité correspondante $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$ [1].

Nous substituerons au problème proposé un problème analogue où les données initiales seront identiquement nulles ainsi que les valeurs à l'origine des dérivées principales de cote première au plus égale à Δ. Soit U la portion de développement de l'inconnue u dont la connaissance résulte des conditions initiales données (autrement dit, la portion de développement où apparaissent dans les coefficients les dérivées paramétriques de u). Soit $a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ la valeur numérique (à l'origine) de la dérivée principale de u (de cote première au plus égale à Δ) $p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$. Nous poserons

$$u = u' + U + \sum \frac{a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}}{\alpha_1 ! \alpha_2 ! \ldots \alpha_n !} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

le signe Σ étant étendu à toutes les dérivées principales de cote première $\leqq \Delta$. Il est évident que pour que u satisfasse : 1° aux conditions initiales proposées; 2° aux conditions

$$(p_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n})_0 = a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

il faut et il suffit que u' satisfasse : 1° aux conditions initiales de même forme où toutes les fonctions données sont identiquement nulles; 2° aux conditions

$$(p'_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n})_0 = 0 \quad \left(p'_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} u'}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\right).$$

---

[1] Celles des fonctions inconnues du système primitif qui ne figuraient dans aucun premier membre doivent, d'après cela, être considérées comme des données dans le nouveau problème posé.

Dans les équations ($\mathcal{A}$) de cote première $\Delta + 1$, substituons aux u leurs expressions en fonction des u'. Faisons passer aux deuxièmes membres les termes connus; nous obtenons un nouveau système de même forme $\mathcal{M}_{\Delta+1}$. A tout système de fonctions (u) satisfaisant aux conditions imposées correspond un système de fonctions u', satisfaisant aux conditions analogues *relativement au système* $\mathcal{M}_{\Delta+1}$, les « conditions initiales » étant toutes identiquement nulles : les dérivées paramétriques de u', *relatives au système* $\mathcal{M}_{\Delta+1}$, sont en effet de deux sortes : elles s'obtiennent à partir de u' par les dérivations qui, appliquées aux u, donneraient relativement au premier système, soit des dérivées paramétriques, soit les dérivées principales de cote première inférieure ou égale à Δ ; en se reportant à ce qui précède, on voit que les « dérivées paramétriques » de u', relatives au système $\mathcal{M}_{\Delta+1}$, sont toutes nulles.

La question posée est équivalente à celle-ci (en appelant u les nouvelles inconnues) : *Y a-t-il un système de fonctions u, régulières au voisinage de l'origine, dont les conditions initiales (prises relativement au système* $\mathcal{M}_{\Delta+1}$*) soient identiquement nulles et qui satisfassent à chacune des équations* $\mathcal{M}_{\Delta+1}$ *sur la multiplicité correspondante* $x_{b_1} = x_{b_2} = \ldots = x_{b_k} = 0$?

Nous indiquerons des cas très généraux où l'on peut affirmer que ce problème a une solution et une seule.

3. Nous sommes amené à poser le problème suivant :

« Soit un système (S) d'équations ayant les propriétés suivantes :

» a_2. Les premiers membres sont des dérivées d'une ou plusieurs inconnues; les premiers membres dérivées d'une même inconnue sont tous différents, tous *de même ordre* p_i et forment un système *dérivé d'un système complet.*

» b_2. Les seconds membres sont *linéaires* par rapport à l'ensemble des dérivées *d'ordre* p_1 *de* u_1, p_2 *de* u_2, ...; les coefficients L de ces dérivées et le terme R qui en est indépendant ne contiennent, outre les variables indépendantes, que des dérivées de u_1 d'ordre inférieur à p_1, de u_2 d'ordre inférieur à p_2, ..., et sont holomorphes au voisinage du système de valeurs *zéro* attribuées à ces diverses quantités.

» La propriété a_2 permet de définir pour chaque équation un système de variables multiplicatrices; cherchons à satisfaire à cette équation sur la multiplicité dont l'équation s'obtient en égalant à zéro *toutes les variables non multiplicatrices* (*multiplicité associée à l'équation*). C'est le système de conditions ainsi obtenues que nous appellerons dorénavant $\mathcal{B}$.

» Le système des premiers membres définit la forme des *conditions initiales* prises pour les u; égalons à zéro les diverses fonctions initiales.

» Indiquer des cas où le problème ainsi posé a *une solution et une seule*. »

Considérons un système (S′) ne différant du système (S) précédent que par les « coefficients » des seconds membres : supposons que chacun des L′ ou R′ soit majorant (¹) pour le L ou R correspondant; et de plus que, dans tout R′, les coefficients des termes où n'interviennent que les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient *tous positifs* au *sens strict*.

Nous dirons alors, pour abréger, que (S′) est majorant pour (S).

Soit $\mathcal{B}'$ le système de conditions correspondant à (S′) comme $\mathcal{B}$ correspond à S.

Supposons que l'on puisse satisfaire à $\mathcal{B}'$ par un système de fonctions u dont les développements aient leurs coefficients tous positifs.

Je dis que le système $\mathcal{B}$ a une solution et une seule dont les « valeurs initiales » sont nulles.

La démonstration repose essentiellement sur le lemme d'algèbre (²) que voici :

Soient :

$$(1) \qquad X_i = \sum_{k=1}^{k=N} A_{ik} X_k + Y_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, N)$$

$$(1)' \qquad X'_i = \sum_{k=1}^{k=N} A'_{ik} X'_k + Y'_i$$

(¹) Dans un L′ (ou R′) tout coefficient d'une quantité quelconque (x ou dérivée de cote première $<$ P) est supérieur (ou égal) à la valeur absolue du coefficient correspondant dans le L (ou R) correspondant.

(²) *Voir* en annexe la démonstration de ce lemme.

deux systèmes de N équations linéaires à N inconnues X, X′. Si le système (1)′ est vérifié pour un système de valeurs positives pour les A′, X′, Y′ (le mot positif étant pris *au sens strict pour tous les* Y′, et par suite pour tous les X′), et si l'on a

$$|A_{ik}| \leqq A'_{ik}, \qquad |Y_i| \leqq Y'_i,$$

le système (1), où les X sont considérées comme les inconnues, a une solution et une seule, et cette solution satisfait aux inégalités

$$|X_i| < X'_i.$$

Il est commode, pour abréger le langage, d'attribuer de nouveau aux fonctions inconnues des « cotes premières » c_1, c_2, ... telles que

$$p_1 + c_1 = p_2 + c_2 = \ldots = P;$$

P étant un entier arbitraire, choisi une fois pour toutes.

Admettons l'existence d'une solution du système $\mathcal{M}$.

Le système (S) donné où l'on fait $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ constitue un système d'équations ordinaires $\mathcal{M}_P$ auquel doivent satisfaire les valeurs numériques, à l'origine des coordonnées, des dérivées de cote première inférieure ou égale à P des fonctions inconnues.

Le système obtenu en dérivant chaque équation (S) par rapport à ses variables multiplicatrices, l'ordre total de dérivation λ étant donné, puis en faisant $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ dans le résultat, constitue un système d'équations ordinaires $\mathcal{M}_{P+\lambda}$ auquel doivent satisfaire les valeurs numériques à l'origine des dérivées, de cote première inférieure ou égale à $P+\lambda$, des fonctions inconnues solution de $\mathcal{M}$.

Tout ce que l'on vient de dire sur le système $\mathcal{M}$ se répète mot pour mot pour le système $\mathcal{M}'$ à condition de remplacer dans ce qui précède S, $\mathcal{M}_P$, $\mathcal{M}_{P+\lambda}$ par S′, $\mathcal{M}'_P$, $\mathcal{M}'_{P+\lambda}$.

$\mathcal{M}'$ étant effectivement vérifié par un système de fonctions u, les systèmes ordinaires $\mathcal{M}'_{P+\lambda}$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ sont effectivement vérifiés par certains systèmes de nombres, les valeurs numériques initiales des dérivées de cote première inférieure ou égale à $P + \lambda$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$. Chacun des systèmes ainsi obtenus $(\overline{\mathcal{M}'_{P+\lambda}})$ $(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$ peut tenir successivement le rôle du système (1)′ du lemme ci-dessus : les X′ seront les dérivées principales d'ordre $P + \lambda$; les A′ seront des fonctions des dérivées de cote première inférieure à P ; dans les Y′ pourront figurer, outre des dérivées de cote première inférieure à $P+\lambda$, les dérivées paramétriques d'ordre $P+\lambda$; un Y' *ne peut se réduire à zéro* puisqu'il contient, outre des termes positifs (sens large), le terme constant d'un R' ou la valeur à l'origine d'une dérivée d'un R', nombres positifs (sens strict).

Comparons au système $(\overline{\mathfrak{M}'_P})$ (*coefficients* A'_0, Y'_0; dérivées principales de cote première P : X'_0) le système $(\overline{\mathfrak{M}_P})$ obtenu en annulant dans $\mathfrak{M}_P$ toutes les dérivées paramétriques qui y entrent.

Les coefficients A_0, Y_0 de ce système sont tels que $|A_0| \leqq A'_0$, $|Y_0| \leqq Y'_0$.

Le système $(\overline{\mathfrak{M}_P})$ aura une solution (X_0) et une seule et l'on aura $|X_0| \leqq X'_0$. Ainsi le système $\mathfrak{M}_P$ où l'on remplace les dérivées paramétriques par o a une solution et une seule ; toutes les dérivées de cote première au plus égale à P des inconnues ont des valeurs absolues inférieures aux dérivées correspondantes de la solution de $\mathfrak{M}'$.

Admettons que les systèmes $(\overline{\mathfrak{M}_P})$, $(\overline{\mathfrak{M}_{P+1}})$, ..., $(\overline{\mathfrak{M}_{P+\lambda}})$ obtenus en remplaçant respectivement dans $(\mathfrak{M}_P)$, $(\mathfrak{M}_{P+1})$, ..., $(\mathfrak{M}_{P+\lambda})$ les variables et les dérivées paramétriques par o, les dérivées principales autres que les premiers membres par leurs valeurs tirées des systèmes précédents aient chacun une solution et une seule, et que les nombres qui constituent cette solution soient respectivement inférieurs en valeur absolue aux dérivées principales correspondantes de la solution de $\mathfrak{M}'$ dont nous supposons l'existence.

Soit $(\overline{\mathfrak{M}_{P+\lambda+1}})$ le système obtenu en remplaçant dans $(\mathfrak{M}_{P+\lambda+1})$ les variables et les dérivées paramétriques par o, et les dérivées principales de cote première inférieure ou égale à $P+\lambda$ par leurs valeurs tirées des $(\overline{\mathfrak{M}_P})$, $(\overline{\mathfrak{M}_{P+1}})$, ..., $(\overline{\mathfrak{M}_{P+\lambda}})$.

Soient $A_{\lambda+1}$, $Y_{\lambda+1}$ les coefficients de ce système où les inconnues $X_{\lambda+1}$ sont les dérivées principales de cote première $P+\lambda+1$; $A'_{\lambda+1}$, $Y'_{\lambda+1}$ les coefficients du système $(\overline{\mathfrak{M}'_{P+\lambda+1}})$ aux inconnues $X'_{\lambda+1}$. Les $Y'_{\lambda+1}$ sont positifs au sens strict. D'autre part, chaque $|A_{\lambda+1}|$, $|Y_{\lambda+1}|$ est inférieur au $A'_{\lambda+1}$, $Y'_{\lambda+1}$ correspondant. Donc $(\overline{\mathfrak{M}_{P+\lambda+1}})$ a une solution et une seule $(X_{\lambda+1})$ et les $X_{\lambda+1}$ satisfont aux inégalités $|X_{\lambda+1}| \leqq X'_{\lambda+1}$.

La démonstration précédente suffit à prouver que le système $\mathfrak{M}$ a effectivement une solution et une seule dont les valeurs initiales sont nulles : 1° les coefficients des développements des inconnues sont déterminés d'une manière unique; 2° les développements sont convergents puisque les valeurs absolues de ces coefficients sont respectivement inférieures aux coefficients de certaines séries convergentes (constituant la solution supposée du système $\mathfrak{G}'$). Ces développements satisfont d'ailleurs évidemment au système $\mathfrak{G}$.

4. La question posée au début du n° 3 est ramenée à la suivante : Étant donné un système (S) ayant les propriétés a_2, b_2, indiquer des cas *où l'on peut former un système* (S') *majorant tel que* $\mathfrak{G}'$ *soit vérifié par un système de fonctions u dont les développements aient leurs coefficients tous positifs.*

Nous supposerons que des cotes aient été attribuées aux fonctions et aux variables (II, 4); il en résulte, comme il a été expliqué, un certain classement des dérivées des inconnues.

Les coefficients (L et R) du système S admettent une majorante commune de la forme $\frac{M}{1-t}$, où M représente un nombre positif et t le quotient par le nombre positif r de la somme de toutes les variables indépendantes et de toutes les dérivées de cote première inférieure à P. Soit s l'expression obtenue en remplaçant, dans l'expression algébrique de t, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ par $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n$; si les ξ sont des nombres supérieurs à 1, $\frac{M}{1-s}$ est encore une majorante pour les L et R. $\frac{M_1}{1-s}$ où M_1 *est un nombre quelconque* supérieur à M est encore une majorante pour tous les L, R; supposons que l'on sache de plus que la valeur absolue du terme constant d'une fonction L particulière est inférieure à $M_2 < M_1$, on pourra prendre pour majorante de cette fonction L :

$$\frac{M_1}{1-s} - M_1 + M_2 = \frac{M_1}{1-s} - (M_1 - M_2).$$

Telle est la forme des majorantes que l'on utilisera : les ξ seront choisis d'une manière unique pour tous les termes de toutes les équations; les M_1, M_2 pourront varier d'un terme à l'autre.

Sans nous préoccuper des conditions d'inégalité auxquelles doivent satisfaire les M, nous allons tout d'abord choisir leurs expressions en fonction d'un certain nombre de paramètres (les ξ; $\zeta, \ldots$; $\lambda, \ldots$; $\mu, \ldots$; $\rho, \ldots$) de manière que (S′) et par suite $\mathfrak{M}'$ aient certainement une solution à coefficients tous positifs.

Puis nous nous proposerons de choisir les paramètres ξ, ζ, λ, μ, ρ, de manière que (S′) soit majorant pour le système (S) donné; nous verrons que ce choix est possible moyennant quelques réserves « d'inégalité » : les termes constants des coefficients relatifs aux dérivées « non antérieures » au premier membre correspondant doivent être assez petits en valeur absolue. La proposition générale que nous avons en vue sera dès lors démontrée.

5. Soit N le nombre des fonctions inconnues ($u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(N)}$) ou, ce qui revient au même, le nombre des fonctions dont quelque dérivée figure dans un premier membre (*voir* note du n° **2**); λ_{ik}, μ_{ik}, ρ_i, ζ_i $2(N^2+N)$ nombres positifs provisoirement arbitraires $(i, k = 1, 2, \ldots, N)$.

Soit H_i le nombre des dérivées de cote première P (ou, ce qui revient au même, d'ordre p_i) de la fonction $u^{(i)}$. Soit $u^{(i)}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$ un des premiers membres. Le coefficient R′ de l'équation correspondante sera

$$\frac{1}{1-s}\rho_i\,\zeta_i\,\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}.$$

Dans la même équation, le coefficient L′ de $u^{(k)}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$ sera

$$\frac{1}{1-s}\,\frac{\lambda_{ik}+\mu_{ik}}{H_k}\,\frac{\zeta_i\,\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k\,\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\ldots\xi_n^{\beta_n}}-\frac{\mu_{ik}}{H_k}\,\frac{\zeta_i\,\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\ldots\xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k\,\xi_1^{\beta_1}\xi_2^{\beta_2}\ldots\xi_n^{\beta_n}}.$$

Nous obtenons un système aux dérivées partielles (S′) bien défini, à la valeur numérique près des constantes ξ, ζ, λ, μ, ρ.

Cherchons à satisfaire à ce système par un système de fonctions

$$u^{(i)}=\zeta_i\,U_i(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\ldots+\xi_nx_n),$$

où les U désignent des fonctions d'une seule variable

$$X=\xi_1x_1+\xi_2x_2+\ldots+\xi_nx_n.$$

On voit immédiatement que l'on a

$$u^{(i)}_{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}=\zeta_i\,\xi_1^{\gamma_1}\xi_2^{\gamma_2}\ldots\xi_n^{\gamma_n}\,U_i^{(\gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_n)},$$

en désignant par $U_i^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}$ la dérivée d'ordre $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n$ de la fonction U_i.

s devient une certaine expression en X, U, U′, ...

$$s_1 = X + \zeta_1 U_1 + \zeta_2 U_2 + \ldots + \zeta_N U_N$$
$$+ (\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)(\zeta_1 U'_1 + \zeta_2 U'_2 + \ldots + \zeta_n U'_N) + \ldots.$$

Les équations dont les premiers membres sont des dérivées d'une fonction déterminée $u^{(i)}$ conduisent toutes *à la même équation*

$$(1)\qquad (U_i)^{p_i} = \sum_{k=1}^{k=N} \left(\frac{\lambda_{ik}+\mu_{ik}}{1-s_1} - \mu_{ik} \right) U_k^{p_k} + \frac{\rho_i}{1-s_1}.$$

Les N fonctions U doivent satisfaire au système des N équations différentielles ordinaires obtenues en faisant dans la précédente $i = 1, 2, \ldots, N$.

Si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1-\lambda_{11} & -\lambda_{12} & \ldots & -\lambda_{1N} \\ -\lambda_{21} & 1-\lambda_{22} & \ldots & -\lambda_{2N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda_{N1} & \ldots & \ldots & 1-\lambda_{NN} \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, le système précédent définit les $U_i^{p_i}$ comme fonctions holomorphes de X et des dérivées d'ordre inférieur à p_1, $p_2, \ldots, p_N$ (ou de cote première inférieure à P) des $U_1, U_2, \ldots, U_N$ (au voisinage du système de valeurs $0, 0, \ldots, 0$); il a une solution et une seule s'annulant ainsi que ces dérivées pour $X = 0$. Connaissant les valeurs pour $X = 0$ des dérivées de cote première P, $P+1, \ldots, P'-1$ des U, ce système dérivé $P'-P$ fois permet d'avoir la valeur pour $X = 0$ des dérivées de cote première P′.

Les équations (1) s'écrivent encore

$$(2)\qquad U_i^{p_i} = U_i^{p_i} s_1 + \sum_{k=1}^{k=N} (\lambda_{ik} + \mu_{ik} s_1) U_k^{p_k} + \rho_i.$$

Supposons que les N inégalités suivantes soient vérifiées (au sens strict):

$$\sum_{k=1}^{k=N} \lambda_{ik} < 1,$$

Le déterminant D est alors certainement différent de o (*voir* lemme II).

Les valeurs initiales des $U_i^{(p_i)}$ satisfont au système

$$(U_i^{(p_i)})_0 = \sum_{k=1}^{k=N} \lambda_{ik} (U_k^{(p_k)})_0 + \rho_i.$$

La solution de ce système est donnée par des formules

$$(U_i^{(p_i)})_0 = \sum_{k=1}^{k=N} \lambda'_{ik} \rho_k,$$

où les λ'_{ik} sont *positifs* (lemme II). Les ρ étant positifs, on en conclut que les valeurs initiales des dérivées de cote première P des U sont positives (sens large).

Je dis qu'il en est de même des valeurs initiales des dérivées de cote première P' (P' quelconque > P). Admettons qu'il en soit ainsi pour les dérivées de cote première inférieure ou égale à P' — 1. Dérivons les équations (2) P' — P fois ; les deuxièmes membres obtenus sont des polynomes relativement à X, aux U et à leurs dérivées ; les coefficients de ces polynomes sont tous positifs ; d'autre part, les coefficients des dérivées de cote première P' sont précisément les coefficients des dérivées de cote première P dans l'équation (2). Les valeurs initiales des dérivées de cote première P' sont donc données par un système de la forme

$$(U_i^{(p_i+P'-P)})_0 = \sum_{k=1}^{k=N} \lambda_{ik} (U_k^{(p_k+P'-P)})_0 + \rho'_i.$$

où les ρ'_i désignent des quantités positives (résultats de la substitution de quantités positives dans des polynomes à coefficients positifs). Ces valeurs sont donc toutes positives.

Si donc les λ_{ik} satisfont aux inégalités

$$\sum_{k=1}^{k=N} \lambda_{ik} < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

on pourra affirmer que le système S' a une solution à coefficients tous positifs (sens large), la solution

$$\zeta_i U_i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

6. 1° Fixons les valeurs positives (sens strict) des λ de manière que les N inégalités

$$\sum_{k=1}^{k=N} \lambda_{ik} < 1$$

soient vérifiées (au sens strict).

2° Parmi les L′ distinguons les coefficients des dérivées antérieures au premier membre correspondant. Pour les systèmes d'indices $i, k; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ qui leur correspondent, fixons les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n; \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ de manière que l'on ait

$$\text{(I)} \qquad \xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n > 1,$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{\lambda_{ik}}{H_k} \frac{\zeta_i \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \ldots \xi_n^{\beta_n}} \geq M,$$

ou encore

$$\frac{\zeta_i \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \ldots \xi_n^{\beta_n}} \geq \frac{M H_k}{\lambda_{ik}}.$$

Ce choix est possible d'après le lemme (III) (*voir* ce lemme en annexe).

3° Soit $i', k'; \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ le système d'indices correspondant à un autre L′; nous fixerons $\mu_{i'k'}$ (positif sens large) de manière que l'on ait

$$\frac{\lambda_{i'k'} + \mu_{i'k'}}{H_{k'}} \frac{\zeta_{i'} \xi_1^{\alpha'_1} \xi_2^{\alpha'_2} \ldots \xi_n^{\alpha'_n}}{\zeta_{k'} \xi_1^{\beta'_1} \xi_2^{\beta'_2} \ldots \xi_n^{\beta'_n}} \geq M.$$

4° Fixons encore les ρ_i de manière que l'on ait

$$\rho_i \zeta_i \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n} \geq M.$$

Ces choix étant faits, les R′ sont majorants pour les R correspondants; les L′ de première espèce (2°) sont majorants pour les (L) correspondants, car dès que

$$\frac{1}{1-s} \frac{\lambda_{ik}}{H_k} \frac{\zeta_i \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}}{\zeta_k \xi_1^{\beta_1} \xi_2^{\beta_2} \ldots \xi_n^{\beta_n}}$$

est majorant pour une fonction, il en est de même de

$$\frac{1}{1-s}\,\frac{\lambda_{ik}+\mu_{ik}}{\mathrm{H}_k}\,\frac{\zeta_i\,\zeta_1^{\alpha_1}\zeta_2^{\alpha_2}\ldots\zeta_n^{\alpha_n}}{\zeta_k\,\zeta_1^{\beta_1}\zeta_2^{\beta_2}\ldots\zeta_n^{\beta_n}}-\frac{\mu_{ik}}{\mathrm{H}_k}\,\frac{\zeta_i\,\zeta_1^{\alpha_1}\zeta_2^{\alpha_2}\ldots\zeta_n^{\alpha_n}}{\zeta_k\,\zeta_1^{\beta_1}\zeta_2^{\beta_2}\ldots\zeta_n^{\beta_n}}.$$

Il en est de même pour les L′ de deuxième espèce (3°), *à condition* que le terme constant du L qui correspond au système d'indices i', k'; $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$; $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ *soit inférieur, en valeur absolue*, à

$$\frac{\lambda_{i'k'}}{\mathrm{H}_{k'}}\,\frac{\zeta_{i'}\,\zeta_1^{\alpha'_1}\zeta_2^{\alpha'_2}\ldots\zeta_n^{\alpha'_n}}{\zeta_{k'}\,\zeta_1^{\beta'_1}\zeta_2^{\beta'_2}\ldots\zeta_n^{\beta'_n}}.$$

7. *Conclusion.* — Nous venons de démontrer aux nos **5** et **6** les divers points annoncés au n° **4**.

Nous en retiendrons particulièrement la conséquence suivante :

« Soit un système (C) satisfaisant aux conditions a, b (*voir* II, **5**). Donnons-nous *arbitrairement* un système de fonctions (*holomorphes* autour de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) pour les « fonctions initiales » (dont la forme est définie par les premiers membres) (I, **16** et **17**). Supposons que les valeurs à l'origine qui en résultent pour les dérivées *susceptibles* de figurer dans les deuxièmes membres forment des systèmes de valeurs *ordinaires* pour ces deuxièmes membres. Supposons enfin que le système soit *complètement intégrable* (ce dont on s'assurera par le procédé indiqué au n° **9**, II). Il existe un système de fonctions holomorphes autour de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, et un seul, qui satisfait au système (C) et aux conditions initiales choisies. »

Trois lemmes d'Algèbre.

I. [1] *Soient* A, B, ..., C″ *des quantités positives ou nulles. Supposons qu'il existe un système de nombres positifs* (*sens strict*) X, Y, Z, U, V, W *tels que l'on ait*

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{A\,X} + \mathrm{B\,Y} + \mathrm{C\,Z} + \mathrm{U}, \\ \mathrm{Y} = \mathrm{A'X} + \mathrm{B'Y} + \mathrm{C'Z} + \mathrm{V}, \\ \mathrm{Z} = \mathrm{A''X} + \mathrm{B''Y} + \mathrm{C''Z} + \mathrm{W}. \end{cases}$$

[1] *Cf.* RIQUIER, *Systèmes*, p. 369.

Soient $a, b, \ldots, c'', u, v, w$, des quantités dont les valeurs absolues sont respectivement inférieures (ou égales) à $A, B, \ldots, C'', U, V, W$.

1° *Le système d'équations en x, y, z :*

$$(1) \quad \begin{cases} x = a\,x + b\,y + c\,z + u, \\ y = a'x + b'y + c'z + v, \\ z = a''x + b''y + c''z + w, \end{cases}$$

a une solution ;

2° *Il n'en a qu'une : x, y, z ;*

3° *On a, pour cette solution, les inégalités*

$$|x| \leqq X, \qquad |y| \leqq Y, \qquad |z| \leqq Z.$$

Remarquons tout d'abord que, si l'on prouve la première des propositions précédentes, on aura prouvé par là même que le système (1), où les $a, b, \ldots, c''$ conservent la même signification et où u, v, w désignent des nombres *quelconques*, a *une solution et une seule*, autrement dit que « son déterminant » sera différent de zéro. Si, en effet, le déterminant des coefficients des inconnues est nul, on sait, d'après la théorie des systèmes linéaires, que le système (1) (où $a, b, \ldots, c''$ gardent des valeurs déterminées) *n'est possible* que si u, v, w sont assujettis à des *conditions d'égalité ;* or l'énoncé n'assujettit u, v, w qu'à des *conditions d'inégalité :* ces quantités peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre, de manière seulement que $|u|, |v|, |w|$ soient inférieurs à U, V, W, quantités toutes trois essentiellement positives.

Il nous suffira donc de prouver les propositions 1° et 3°.

Posons :

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} X_1 = U, \\ Y_1 = V, \\ Z_1 = W; \end{cases}$$

$$(\text{III}) \quad \begin{cases} X_n = A\,X_{n-1} + B\,Y_{n-1} + C\,Z_{n-1} + U \\ Y_n = A'X_{n-1} + B'Y_{n-1} + C'Z_{n-1} + V \\ Z_n = A''X_{n-1} + B''Y_{n-1} + C''Z_{n-1} + W \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Montrons que lorsque n tend vers l'infini, X_n, Y_n, Z_n tendent en croissant (sens large) vers des limites ξ, η, ζ ; il résultera d'ailleurs de là et des formules (III) que (ξ, η, ζ) satisfait au système (I).

1° $X_n - X_{n-1}$, $Y_n - Y_{n-1}$, $Z_n - Z_{n-1}$ sont positifs ou nuls. Le fait est exact pour $n = 2$, car ces quantités sont alors

$$AU + BV + CW, \qquad A'U + B'V + C'W, \qquad A''U + B''V + C''W.$$

D'autre part, les égalités (IV) déduites des équations (III) écrites pour les valeurs n et $n-1$,

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} X_n - X_{n-1} = A\,(X_{n-1} - X_{n-2}) + B\,(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C\,(Z_{n-1} - Z_{n-2}), \\ Y_n - Y_{n-1} = A'(X_{n-1} - X_{n-2}) + B'(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C'(Z_{n-1} - Z_{n-2}), \\ Z_n - Z_{n-1} = A''(X_{n-1} - X_{n-2}) + B''(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C''(Z_{n-1} - Z_{n-2}) \end{cases}$$

montrent que, s'il est vrai pour la valeur $n-1$ de l'indice, il est encore vrai pour la valeur n. Le fait est général : X_n, Y_n, Z_n ne décroissent jamais, quand n augmente.

2° $X - X_n$, $Y - Y_n$, $Z - Z_n$ sont positifs ou nuls.

Le fait est exact pour $n = 1$, les quantités considérées sont alors

$$AX + BY + CZ, \qquad A'X + B'Y + C'Z, \qquad A''X + B''Y + C''Z.$$

D'autre part, les égalités, déduites de (I) et (III),

$$\begin{aligned} X - X_n &= A\,(X - X_{n-1}) + B\,(Y - Y_{n-1}) + C\,(Z - Z_{n-1}), \\ Y - Y_n &= A'(X - X_{n-1}) + B'(Y - Y_{n-1}) + C'(Z - Z_{n-1}), \\ Z - Z_n &= A''(X - X_{n-1}) + B''(Y - Y_{n-1}) + C''(Z - Z_{n-1}) \end{aligned}$$

prouvent que s'il est vrai pour la valeur $n-1$ de l'indice, il est vrai pour la valeur n. Le fait est général : X_n, Y_n, Z_n ne dépassent pas X, Y, Z.

Des remarques précédentes résulte immédiatement la conclusion : X_n, Y_n, Z_n tendent (en croissant) vers des limites ξ, η, ζ qui sont au plus égales respectivement à X, Y, Z, et qui, comme X, Y, Z, forment un système de solutions de (I).

Posons maintenant

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = u, \\ y_1 = v, \\ z_1 = w; \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x_n = a\,x_{n-1} + b\,y_{n-1} + c\,z_{n-1} + u, \\ y_n = a'x_{n-1} + b'y_{n-1} + c'z_{n-1} + v, \\ z_n = a''x_{n-1} + b''y_{n-1} + c''z_{n-1} + w. \end{cases}$$

Montrons que l'on a

$$|x_n - x_{n-1}| \leqq X_n - X_{n-1}, \quad |y_n - y_{n-1}| \leqq Y_n - Y_{n-1}, \quad |z_n - z_{n-1}| \leqq Z_n - Z_{n-1}.$$

Le fait est exact pour $n = 2$; il se réduit au suivant :

$$\begin{aligned}
|a\,u + b\,v + c\,w| &\leqq A\,U + B\,V + C\,W,\\
|a'\,u + b'\,v + c'\,w| &\leqq A'U + B'V + C'W,\\
|a''u + b''v + c''w| &\leqq A''U + B''V + C''W.
\end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}
x_n - x_{n-1} &= a\ (x_{n-1} - x_{n-2}) + b\ (y_{n-1} - y_{n-2}) + c\ (z_{n-1} - z_{n-2}),\\
y_n - y_{n-1} &= a'\,(x_{n-1} - x_{n-2}) + b'\,(y_{n-1} - y_{n-2}) + c'\,(z_{n-1} - z_{n-2}),\\
z_n - z_{n-1} &= a''(x_{n-1} - x_{n-2}) + b''(y_{n-1} - y_{n-2}) + c''(z_{n-1} - z_{n-2}).
\end{aligned}$$

Si donc le fait est exact pour la valeur $n - 1$ de l'indice on a

$$\begin{aligned}
|x_n - x_{n-1}| &\leqq A\ (X_{n-1} - X_{n-2}) + B\ (Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C\ (Z_{n-1} - Z_{n-2}).\\
|y_n - y_{n-1}| &\leqq A'(X_{n-1} - X_{n-2}) + B'(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C'(Z_{n-1} - Z_{n-2}),\\
|z_n - z_{n-1}| &\leqq A''(X_{n-1} - X_{n-2}) + B''(Y_{n-1} - Y_{n-2}) + C''(Z_{n-1} - Z_{n-2}).
\end{aligned}$$

Mais ces deuxièmes membres de ces inégalités sont égaux, d'après (IV), à $X_n - X_{n-1}$, $Y_n - Y_{n-1}$, $Z_n - Z_{n-1}$. Le fait est donc général.

La série $x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots$ est convergente; la valeur absolue de sa somme est au plus égale à ξ.

Ainsi x_n, y_n, z_n tendent vers des limites x, y, z telles que $|x| \leqq \xi$, $|y| \leqq \eta$, $|z| \leqq \zeta$. D'après (3), ces limites forment un système solution de (1).

La proposition 1° est donc démontrée.

Comme nous l'avons remarqué au début, il résulte de là que le déterminant des coefficients des inconnues dans (1) est *différent de zéro*, on voit qu'il en est de même du déterminant correspondant de (I), en donnant aux a, b, ... les valeurs A, B, ...; (I) *n'a qu'une solution*; ξ, η, ζ n'est autre que X, Y, Z.

La proposition est donc entièrement démontrée.

Nous avons obtenu en même temps un théorème plus général que l'on peut énoncer de la manière suivante :

Soient A_{ik} *des nombres positifs (ou nuls)*; a_{ik} *des nombres quelconques tels que* $|a_{ik}| \leqq A_{ik}$:

1° *Si le système d'inégalités*

$$(1) \qquad X_i - \sum_{k=1}^{k=N} A_{ik} X_k > 0,$$

prises au sens strict, est résoluble en nombres X *positifs* (¹), *le déterminant du système de formes linéaires*

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=N} a_{ik} x_k$$

est différent de zéro.

2° *Les* X *désignant un système particulier de solutions positives du système* (1), *appelons* Y_i *la quantité positive*

$$X_i - \sum_{k=1}^{k=N} A_{ik} X_k;$$

y_i *des nombres quelconques tels que* $|y_i| \leqq Y_i$, *la solution du système d'équations*

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=N} a_{ik} x_k = y_i$$

satisfait aux inégalités

$$|x_i| \leqq X_i.$$

II. Nous avons utilisé la proposition suivante :

Soient A_{ik} n^2 *nombres positifs (ou nuls) tels que l'on ait*

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Le système d'équations en x

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=n} A_{ik} x_k = y_i$$

(¹) On voit immédiatement qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter ici « au sens strict ».

(où les y sont arbitraires) *admet une solution et une seule: cette solution est donnée par les formules*

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} B_{ik} y_k,$$

où les B *sont positifs* (*ou nuls*).

Cette proposition apparaîtra comme un cas particulier d'une proposition plus générale.

Considérons le système d'équations en x, y, z :

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a\ x + b\ y + c\ z + u, \\ y = a' x + b' y + c' z + v, \\ z = a'' x + b'' y + c'' z + w. \end{cases}$$

où $a, b, \ldots, c'', u, v, w$ sont des nombres quelconques tels que

$$|a| + |b| + |c|, \quad |a'| + |b'| + |c'|, \quad |a''| + |b''| + |c''|$$

soient < 1 ; soit k le plus grand de ces trois nombres.

Soit x_1, y_1, z_1 un système de valeurs initiales quelconque pour x, y, z. Posons

$$(2) \qquad \begin{cases} x_n = a\ x_{n-1} + b\ y_{n-1} + c\ z_{n-1} + u \\ y_n = a' x_{n-1} + b' y_{n-1} + c' z_{n-1} + v \\ z_n = a'' x_{n-1} + b'' y_{n-1} + c'' z_{n-1} + w \end{cases} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

On tire de là

$$x_n - x_{n-1} = a\ (x_{n-1} - x_{n-2}) + b\ (y_{n-1} - y_{n-2}) + c\ (z_{n-1} - z_{n-2}).$$
$$y_n - y_{n-1} = a' (x_{n-1} - x_{n-2}) + b' (y_{n-1} - y_{n-2}) + c' (z_{n-1} - z_{n-2}).$$
$$z_n - z_{n-1} = a'' (x_{n-1} - x_{n-2}) + b'' (y_{n-1} - y_{n-2}) + c'' (z_{n-1} - z_{n-2}).$$

Soit δ_n le plus grand des trois nombres

$$|x_n - x_{n-1}|, \quad |y_n - y_{n-1}|, \quad |z_n - z_{n-1}|.$$

Des égalités précédentes, on tire :

$$|x_n - x_{n-1}| \leqq [|a| + |b| + |c|]\delta_{n-1} \leqq k\delta_{n-1},$$

et deux inégalités analogues pour

$$|y_n - y_{n-1}|, \quad |z_n - z_{n-1}|;$$

d'où

$$\delta_n < k\delta_{n-1}.$$

Les séries

$$x_1 + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots,$$
$$y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$
$$z_1 + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

sont donc absolument convergentes; soient x, y, z leurs sommes. D'après (2), x, y, z est solution du système (1). Le système (1) n'a d'ailleurs qu'une solution puisque u, v, w ne sont assujetties à aucune restriction. Nous avons obtenu *la* solution du système.

Supposons a, b, ..., c'' positifs et fixes. Partons du système de valeurs $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; quels que soient u, v, w positifs, les valeurs x_n, y_n, z_n sont positives; les équations (2) montrent en effet que ce fait est vrai pour $n = 2$ et que s'il est vrai pour la valeur $n - 1$ de l'indice, il l'est aussi pour la valeur n. Les valeurs x, y, z sont donc positives. En particulier, en faisant $u = 1$, $v = w = 0$, on voit que les coefficients de u dans les expressions de x, y, z sont tous trois positifs; il en est de même des coefficients de v, w.

Nous avons donc obtenu la proposition générale :

Soient a_{ik} n^2 nombres quelconques tels que

$$\sum_{k=1}^{k=n} |a_{ik}| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant Δ du système de formes linéaires

$$x_i - \sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_k$$

est différent de zéro; supposons les a_{ik} *réels;* le déterminant Δ étant une fonction continue des a_{ik} et le domaine où varient les a_{ik} étant d'un seul tenant, on peut affirmer que Δ garde *un signe constant;* ce signe est d'ailleurs *le signe* $+$, qu'il a lorsque les a_{ik} s'annulent.

Si tous les a_{ik} sont de plus positifs, les mineurs à $n - 1$ lignes et $n - 1$ colonnes du déterminant Δ sont eux aussi positifs (dans cette dernière phrase, *positif* doit être pris au sens large).

III. *Étant donnés un système de monomes quelconques en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en nombre fini et un nombre positif quelconque* A, *on peut trouver un nombre f_0 et des fonctions de* 1, 2, ..., $n-1$ *variables $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ tels que si l'on a à la fois*

$$x_1 > f_0, \quad x_2 > f_1(x_1), \quad x_3 > f_2(x_1, x_2), \quad \ldots,$$
$$x_n > f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$

le rapport de chacun des monomes à tout monome du système plus bas que lui est supérieur à A.

La proposition est évidente lorsque $n = 1$. Admettons-la lorsque le nombre des variables est égal à $n-1$, et démontrons-la pour n.

Considérons le système partiel formé par tous ceux des monomes donnés où l'exposant de x_n est λ; soient $f_0^{(\lambda)}, f_1^{(\lambda)}, \ldots, f_{n-2}^{(\lambda)}$ le nombre et les fonctions telles que les inégalités

$$x_1 > f_0^{(\lambda)}, x_2 > f_1^{(\lambda)}(x_1), \ldots, x_{n-1} > f_{n-2}^{(\lambda)}(x_1, x_2, \ldots x_{n-2})$$

entraînent la conséquence que le rapport de chacun des monomes à tout monome du système partiel plus bas que lui soit supérieur à A. Cela étant fait pour chacune des valeurs de λ, appelons f_0 le plus grand des $f_0^{(\lambda)}$; $f_1(x_1)$ une fonction plus grande que tous les $f_1^{(\lambda)}(x_1)$; $f_2(x_1, x_2)$ une fonction plus grande que tous les $f_2^{(\lambda)}(x_1, x_2)$, ...; $f_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ une fonction plus grande que tous les $f_{n-2}^{(\lambda)}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$; les inégalités

$$x_1 > f_0, \quad x_2 > f_1(x_1), \ldots, x_{n-1} > f_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$$

entraînent cette conséquence : le rapport de chacun des monomes du système à chacun de ceux, plus bas que lui, *où x_n a le même exposant*, est supérieur à A. Exprimons maintenant que le rapport de chaque monome du système à tout monome contenant x_n à un exposant inférieur est supérieur à A; nous obtenons un certain nombre fini d'inégalités de la forme $x_n > \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; on appellera $f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ une fonction plus grande que tous les φ; $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ satisfont à toutes les conditions de l'énoncé.

Corollaire. — Étant donnés un système quelconque de monomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en nombre fini et un nombre positif A, on peut choisir pour les x un système de valeurs, toutes plus grandes que 1, tel que le rapport de chacun des monomes à chacun des monomes plus bas soit supérieur à A.

Il suffit de choisir pour x_1 un nombre supérieur à 1 et f_0, pour x_2 un nombre supérieur à 1 et $f_1(x_1)$, pour x_3 un nombre supérieur à 1 et $f_2(x_1, x_2)$, etc.

Le théorème précédent s'applique encore lorsqu'on entend par monome une expression de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où les α sont des entiers positifs, négatifs ou nuls.

Application. — Considérons un système de variables et de fonctions auxquelles des cotes ont été attribuées suivant les indications données au Chapitre II (n° 4). On peut (¹) sans changer le classement substituer aux cotes données des cotes toutes positives; il nous suffira de supposer que les cotes des *variables indépendantes* sont positives.

Faisons correspondre aux variables et aux fonctions des nombres positifs $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$; à la dérivée $u^k_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}$ le monome $\zeta_k \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$; adoptons pour ces monomes les termes mêmes (cotes, classes, etc.) qui ont été adoptés pour les dérivées correspondantes; considérons, pour fixer les idées, le système Σ des monomes de cote

---

(¹) Soient $D_{11}, D_{12}, \ldots, D_{1N}$ les cotes premières des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_N$. Ajoutons à chacune des cotes $\lambda^{\text{ièmes}}$ des variables ($\lambda = 2, 3, \ldots, s$) un même nombre entier a_λ tel que les sommes obtenues soient toutes positives; ajoutons à la cote $\lambda^{\text{ième}}$ de u_k le nombre $D_{1k} a_\lambda$.

Les résultats obtenus forment un système de cotes qui définit le même classement que le classement primitif. Les cotes premières n'ont pas changé; considérons donc deux quantités qui aient mêmes cotes premières :

$$u^i_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}, \quad u^k_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n}.$$

On a

$$D_{1i} + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = D_{1k} + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n.$$

Les cotes $\lambda^{\text{ièmes}}$ de ces deux quantités ont augmenté respectivement de

$$D_{1i} a_\lambda + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) a_\lambda, \quad D_{1k} a_\lambda + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) a_\lambda,$$

c'est-à-dire de valeurs égales.

Il est d'ailleurs évident qu'en ajoutant un même nombre à toutes les cotes de toutes les fonctions, on ne change pas le classement. On pourrait donc sans changer le classement rendre *toutes les cotes* positives.

première P et donnons-nous un nombre positif A; *on peut trouver* [1] *un système de nombres* ξ, ζ, $(\xi > 1)$ *tel que le rapport de chacun des monomes de* Σ *à chacun des monomes antérieurs du même système* Σ *soit supérieur à* A.

Soient $C_{2i}, C_{3i}, \ldots, C_{si}$ les cotes $2^e, 3^e, \ldots, s^{\text{ième}}$ de $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$; $D_{2k}, D_{3k}, \ldots, D_{sk}$ les cotes $2^e, 3^e, \ldots, s^{\text{ième}}$ de $u_k (k = 1, 2, \ldots, N)$ et soient $\theta_2, \theta_3, \ldots, \theta_s$ $s-1$ nouvelles variables.

Posons

$$\xi_i = \theta_2^{C_{2i}} \theta_3^{C_{3i}} \ldots \theta_s^{C_{si}}, \qquad \zeta_k = \theta_2^{D_{2k}} \theta_3^{D_{3k}} \ldots \theta_s^{D_{sk}}.$$

On aura

$$\begin{aligned} \zeta_k \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n} &= \theta_2^{D_{2k} + \alpha_1 C_{21} + \alpha_2 C_{22} + \ldots + \alpha_n C_{2n}} \theta_3^{D_{3k} + \ldots} \ldots \theta_s^{D_{sk} + \alpha_1 C_{s1} + \alpha_2 C_{s2} + \ldots + \alpha_n C_{sn}} \\ &= \theta_2^{C_2} \theta_3^{C_3} \ldots \theta_s^{C_s} \end{aligned}$$

en appelant $C_2, C_3, \ldots, C_s$ les cotes $2^e, 3^e, \ldots, s^{\text{ième}}$ de $\zeta_k \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$.

Les monomes du système Σ se répartissent comme on l'a vu en classes. Nous voyons ici que tous les monomes μ d'une même classe sont égaux au même monome μ en $\theta_2, \ldots, \theta_s$, et que de plus un monome μ est postérieur ou antérieur à μ' suivant que le monome en θ correspondant à μ est plus haut ou plus bas que le monome en θ correspondant à μ' (à condition toutefois de ranger les θ dans l'ordre inverse [2] des indices $\theta_s, \theta_{s-1}, \ldots, \theta_2$).

On choisira successivement $\theta_s, \theta_{s-1}, \ldots, \theta_2$ d'après les indications du *corollaire* précédent. Le rapport de chacun des monomes de Σ à chacun des monomes antérieurs du même système sera supérieur à A; les θ étant supérieurs à 1 et les cotes des variables indépendantes étant positives, les ξ sont aussi supérieurs à 1 puisque l'on a

$$\xi_i = \theta_2^{C_{2i}} \theta_3^{C_{3i}} \ldots \theta_s^{C_{si}}.$$

---

(1) *Cf.* Riquier, *Systèmes*, p. 253.

(2) *Voir* la définition (Chapitre I, n° **10**).

CHAPITRE IV.

EXEMPLES.

EXEMPLE I. — Soit le système aux dérivées partielles à *une* fonction inconnue u de cinq variables indépendantes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 obtenu en égalant à zéro les expressions

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} A \equiv p_{13} - p_{22} \\ B \equiv p_{14} - p_{23} \\ C \equiv p_{15} - p_{24} \\ D \equiv p_{33} - p_{15} \\ E \equiv p_{34} - p_{25} \\ F \equiv p_{44} - p_{35} \end{array}\right. \qquad \left(p_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}\right);$$

nous considérons $p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{33}, p_{34}, p_{44}$ comme tenant le rôle de premiers membres (*voir* II, **5** et **8**).

1° Adoptons pour les variables l'ordre x_2, x_5, x_4, x_3, x_1.

Les variables multiplicatrices sont respectivement :

Pour $x_1 x_3$	x_2, x_5, x_4, x_3, x_1
» $x_1 x_4$	x_2, x_5, x_4, x_1
» $x_1 x_5$	x_2, x_5, x_1
» x_3^2	x_2, x_5, x_4, x_3
» $x_3 x_4$	x_2, x_5, x_4
» x_4^2	x_2, x_5, x_4

Les monomes correspondant aux premiers membres forment un système de monomes complet (I, **8**) (relativement au classement x_2, x_5, x_4, x_3, x_1). On vérifie, en effet, que les produits de x_3^2, $x_3 x_4$, x_4^2 par x_1 sont égaux aux produits de $x_1 x_3$ par x_3, $x_1 x_3$ par x_4, $x_1 x_4$ par x_4. Les identités

$$x_3 x_4 \times x_3 = x_3^2 \times x_4, \qquad x_4^2 \times x_3 = x_3 x_4 \times x_4,$$

puis

$$x_1 x_4 \times x_3 = x_1 x_3 \times x_4, \qquad x_1 x_5 \times x_3 = x_1 x_3 \times x_5;$$

enfin

$$x_1 x_5 \times x_4 = x_1 x_4 \times x_5$$

achèvent de prouver que l'on a bien là un système de monomes complet.

2° Les équations données satisfont à la condition b (II, 5) si l'on adopte les cotes suivantes pour les variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :

	x_1.	x_2.	x_3.	x_4.	x_5.
Cotes premières	1	1	1	1	1
» secondes	2	1	1	1	0
» troisièmes	1	0	1	0	0

qui donnent le classement suivant pour les dérivées du deuxième ordre :

$$p_{55} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{25} \\ p_{45} \end{matrix}} \quad p_{35} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{22} \\ p_{24} \\ p_{44} \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{15} \\ p_{23} \\ p_{34} \end{matrix}} \quad p_{33} \quad \boxed{\begin{matrix} p_{12} \\ p_{14} \end{matrix}} \quad p_{13} \quad p_{11}$$

(la classe croissant lorsqu'on lit la ligne précédente de gauche à droite). C'est ainsi que p_{13} est postérieure à p_{22}, p_{14} à p_{23}, etc.

3° Le système donné est donc un système C_1 (II, 7).

Ce système C_1 *est complètement intégrable*. Pour le reconnaître, nous sommes amené (II, 8) à former les expressions

$$\begin{array}{ll} D_1 - A_3, & F_3 - E_4, \\ E_1 - A_4, & B_3 - A_4, \\ F_1 - B_4, & C_3 - A_5. \\ E_3 - D_4, & C_4 - B_5, \end{array}$$

où l'indice i désigne la dérivation par rapport à x_i.

On constate que ces expressions sont égales identiquement (c'est-à-dire quelle que soit la fonction u) aux expressions suivantes :

$$\begin{array}{ll} -B_2 - C_1, & -D_5 - C_5, \\ -C_2, & -D_2 - C_2, \\ -A_5 + E_2, & -E_2, \\ B_5, & -F_2, \end{array}$$

ce qui suffit, comme nous l'avons vu (n° 8), à prouver que le système proposé a une solution répondant à un système de conditions initiales *arbitraires* du type même de celles qui conviennent au système obtenu en égalant à zéro les premiers membres seuls

$$(p_{12} = p_{14} = p_{15} = p_{33} = p_{34} = p_{44} = 0).$$

Nous précisons ces conditions dans le paragraphe suivant (4°).

4° Les monomes *qui ne font pas partie du module défini par* les M se répartissent en un nombre fini de classes ($\mathfrak{M}$) (*voir* I, n° **9**); chacune de ces classes est engendrée par les produits d'un monome N par tous les monomes formés avec certaines variables (variables multiplicatrices pour ce monome N); en appliquant la méthode générale indiquée au n° **9** (I), on ne trouve dans le cas présent aucun $\mathfrak{M}_0$, ni $\mathfrak{M}_1$. Les $\mathfrak{M}$ sont les produits de :

$x_1^0 x_3^0 x_4^0 = 1$	par les monomes en	x_2, x_5
$x_1^0 x_3^0 x_4 = x_4$	»	x_2, x_5
$x_1^0 x_3 x_4^0 = x_3$	»	x_2, x_5
$x_1 x_3^0 x_4^0 x_5^0 = x_1$	»	x_1, x_2

On pourra se donner arbitrairement (*voir* I, n° **15**) les valeurs de

$$u,\quad \frac{\partial u}{\partial x_4},\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}\qquad \text{sur}\qquad x_1 = x_3 = x_4 = 0,$$

et la valeur de

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}\qquad \text{sur}\qquad x_3 = x_4 = x_5 = 0.$$

Le système proposé aura une solution et une seule répondant à ces conditions (démonstration de convergence : III).

5° Considérons maintenant A, B, C, D, E, F *comme six fonctions quelconques* de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
a &\equiv D_1 - (A_3 - B_2 - C_1),\\
b &\equiv E_1 - (A_4 - C_2),\\
c &\equiv F_1 - (B_4 - A_5 + E_2),\\
d &\equiv E_3 - (D_4 + B_5),\\
e &\equiv F_3 - (E_4 - D_5 - C_5),\\
f &\equiv B_3 - (A_4 - D_2 - C_2),\\
g &\equiv C_3 - (A_5 - E_2),\\
h &\equiv C_4 - (B_5 - F_2).
\end{aligned}\right.$$

(Lorsque A, B, C, D, E, F représentent les expressions (1), a, b, c, d, e, f, g, h sont nulles.)

Considérons le système aux dérivées partielles obtenu en égalant à zéro les expressions a, b, c, d, e, f, g, h; $D_1, E_1, F_1, E_3, F_3, B_3, C_3, C_4$ tenant le rôle de « premiers membres » (II, 5 et **8**).

1° Ces premiers membres forment pour chacune des inconnues un système de monomes complet; 2° chaque second membre ne contient que des quantités *antérieures* au premier membre correspondant si l'on choisit convenablement les cotes des variables et des inconnues (*voir* II, **8**); 3° ce système est complètement intégrable (II, **10**). On le vérifie, d'ailleurs, par le procédé même qui a montré qu'il en était ainsi pour le système primitif obtenu en égalant les (1) à zéro : a, b, c, d, e, f, g, h étant définies par (2), on a, quelles que soient les fonctions A, B, C, D, E, F, les identités suivantes :

$$\begin{aligned} d_1 &= b_3 + h_1 - a_4 - g_2 - c_2, \\ e_1 &= c_3 + f_4 + d_2 + a_5 - b_4, \\ h_3 &= g_4 + e_2 - f_5. \end{aligned}$$

Si maintenant, on égale à zéro les expressions

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &\equiv d_1 - (b_3 + h_1 - a_4 - g_2 - c_2), \\ \beta &\equiv e_1 - (c_3 + f_4 + d_2 + a_5 - b_4), \\ \gamma &\equiv h_3 - (g_4 + e_2 - f_5), \end{aligned} \right.$$

où a, b, c, d, e, f, g, h représentent non plus les expressions (2), mais huit fonctions inconnues quelconques, on obtient un système dont les « premiers membres » d_1, e_1, h_3 sont relatifs à *des inconnues toutes différentes*, chaque équation ne contenant dans son « second membre » que des dérivées antérieures à son « premier membre » : le système est complètement intégrable; mais on ne peut plus écrire d'identité comme dans les deux systèmes envisagés précédemment; la chaîne (II, **12**) est interrompue : on peut dire encore : les trois expressions (3) sont indépendantes.

Remarque. — En remplaçant dans (1) p_{ik} par le produit $x_i x_k$, on obtient un système de formes algébriques; on retrouve par la présente étude les résultats donnés par M. Hilbert au sujet de ce même système de formes (*Math. Ann.*, t. XXXVI, p. 504). On a, de plus, ici : 1° un moyen régulier pour former les systèmes successifs; 2° une explication du fait que ces divers systèmes sont tous du premier ordre.

Exemple II. — Soit le système à une fonction inconnue u de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ obtenu en égalant à zéro les n expressions

$$A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} - u\frac{\partial f}{\partial x_i}, \tag{1}$$

où f est une fonction connue des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1° Les premiers membres $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ correspondent à un système de monomes complet $x_1, x_2, \ldots, x_n$. — 2° Les « seconds membres » ne contiennent nécessairement que des quantités antérieures aux « premiers ». — 3° Le système est complètement intégrable. Les « variables multiplicatrices » de A_n seront $x_1, x_2, \ldots, x_n$; A_{n-1}, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, etc.

Nous supposerons, pour fixer les idées, $n = 4$. Les identités qui expriment que le système est complètement intégrable s'obtiennent sous la forme $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 0$, $a_6 = 0$, en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_6$ les expressions suivantes :

$$a_1 \equiv \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}A_1\right) - \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}A_2\right),$$

$$a_2 \equiv \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}A_1\right) - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}A_3\right),$$

$$a_3 \equiv \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}A_1\right) - \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1}A_4\right),$$

$$a_4 \equiv \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}A_2\right) - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}A_3\right),$$

$$a_5 \equiv \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}A_2\right) - \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}A_4\right),$$

$$a_6 \equiv \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4}A_3\right) - \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3}A_4\right).$$

(Nous gardons à dessein cette forme dissymétrique.)

Considérons maintenant le système aux dérivées partielles obtenu en égalant les a à zéro, les A étant non plus les expressions (1), mais des fonctions inconnues quelconques. Les identités qui expriment que le système ainsi obtenu est complètement intégrable s'obtiennent sous la forme $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$, en désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ les expressions suivantes :

$$\alpha_1 \equiv \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_1\right) - \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_2\right) + \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_4\right),$$
$$\alpha_2 \equiv \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} a_1\right) - \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_3\right) + \left(\frac{\partial a_5}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_5\right),$$
$$\alpha_3 \equiv \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} a_2\right) - \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_3\right) + \left(\frac{\partial a_6}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} a_6\right),$$
$$\alpha_4 \equiv \left(\frac{\partial a_4}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} a_4\right) - \left(\frac{\partial a_5}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} a_5\right) + \left(\frac{\partial a_6}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} a_6\right).$$

Le système aux dérivées partielles obtenu en *regardant maintenant les a comme six fonctions inconnues quelconques dans les équations* $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 0$ est encore complètement intégrable. L'identité unique qui exprime ce fait est

$$\mathcal{A} \equiv \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_4} - \frac{\partial f}{\partial x_4} \alpha_1\right) - \left(\frac{\partial \alpha_4}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \alpha_4\right) + \left(\frac{\partial \alpha_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \alpha_3\right) - \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x_3} - \frac{\partial f}{\partial x_3} \alpha_2\right) = 0.$$

Remarques. — 1° On traiterait exactement de la même manière le cas de n variables $n > 4$.

2° On voit que, dans le présent exemple, il y a effectivement *n systèmes successifs*. (*Cf.* Hilbert, *Math. Ann.*, t. XXXVI, p. 505.)

D'ailleurs le système d'équations obtenu en égalant à zéro les dérivées *premières* et *secondes* d'une fonction inconnue répond à toutes les conditions posées; en le traitant de la même manière, on aura $n + 1$ systèmes successifs.

Exemple III. — Posons :

$$A \equiv p_{11} + (a + a')p_{13} + aa'p_{33},$$
$$B \equiv p_{12} + ap_{23} + bp_{13} + abp_{33},$$
$$C \equiv p_{22} + (b + b')p_{23} + bb'p_{33},$$

où a, b, a', b' sont des fonctions données de x_1, x_2, x_3 et où p_{ik} représente la dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ d'une fonction inconnue u.

Le système (p_{11}, p_{12}, p_{22}) est *complet* si l'on range les variables dans l'ordre x_3, x_2, x_1.

Les dérivées p_{11}, p_{12}, p_{22} sont *postérieures* aux autres dérivées du second ordre de u si l'on attribue à x_1, x_2, x_3 les cotes secondes 1, 1, 0.

Supposons que l'on ait

$$\frac{\partial a}{\partial x_2} + b\,\frac{\partial a}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial x_1} + a\,\frac{\partial b}{\partial x_3} = 0,$$
$$\frac{\partial a}{\partial x_1} + a'\,\frac{\partial a}{\partial x_3} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial x_2} + b'\,\frac{\partial b}{\partial x_3} = 0.$$

On a, quelle que soit $u(x_1, x_2, x_3)$, en se bornant aux cas où 1° ni a ni b n'est une constante, 2° a, b, a', b', sont des constantes,

$$\frac{\partial A}{\partial x_2} + b\,\frac{\partial A}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} + a'\,\frac{\partial B}{\partial x_3}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial x_2} + b'\,\frac{\partial B}{\partial x_3} - \left(\frac{\partial C}{\partial x_1} + a\,\frac{\partial C}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Le système $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ est « complètement intégrable »; donnons-nous *arbitrairement* sur $x_1 = x_2 = 0$ des valeurs (holomorphes) pour u, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$; le système a une solution (holomorphe) et une seule satisfaisant à ces conditions.

Les conditions d'intégrabilité complète sont réalisées en particulier quand $a = b = a' = b' = 0$; dans ce cas le système ne peut par aucun changement de variables indépendantes être ramené à la « forme canonique » donnée comme générale par M. Delassus. Les méthodes présentes n'offrent pas de cas exceptionnels de ce genre.