JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GASTON JULIA

Lignes de discontinuité des solutions de certaines équations de Fredholm

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 4 (1921), p. 195-206.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1921_8_4__195_0>

Lignes de discontinuité des solutions de certaines équations de Fredholm;

PAR GASTON JULIA.

1. On envisage une équation de Fredholm

$$(1)\qquad f(x)+\lambda\int_C N(x,z)f(z)\,dz=\varphi(x),$$

où $\varphi(x)$ est une fonction holomorphe dans une certaine région $\mathcal{R}$ du plan x. C est une ligne intérieure à $\mathcal{R}$ joignant deux points fixes a et b de la région $\mathcal{R}$. Le noyau $N(x, z)$ est supposé analytique lorsque x et z sont intérieurs à la région $\mathcal{R}$. On suppose cependant qu'il puisse s'écrire

$$N(x,z)=\frac{G(x,z)}{H(x,z)},$$

$G(x, z)$ et $H(x, z)$ étant deux fonctions holomorphes dans $\mathcal{R}$ telles que pour certaines valeurs de x et z intérieures à $\mathcal{R}$, la fonction $H(x, z)$ puisse être nulle. Pour préciser, nous supposons que lorsque x décrit une certaine courbe Γ intérieure à $\mathcal{R}$, allant de α à β, une racine simple z de l'équation $H(x, z) = 0$ décrive la courbe C allant de a à b. Il est clair que si x est choisi sur Γ les formules ordinaires pour la résolution de l'équation (1) tombent en défaut, mais elles sont valables si x, sans être sur Γ, est voisin d'un point ξ de Γ, d'un côté ou de l'autre de cette courbe. Le problème qu'on se pose est le suivant : Partons d'un point x_0 voisin de ξ et d'un certain côté de Γ, la solution $f(x)$ est parfaitement déterminée par les formules de Fredholm ; faisons varier x dans la région $\mathcal{R}$, en longeant Γ et de façon que jamais une racine z de $H(x, z) = 0$ ne rencontre C, et de façon que l'on arrive en x'_0 voisin de ξ et de l'autre côté de Γ par rapport à x_0. Y a-t-il une relation simple entre $f(x_0)$ et $f(x'_0)$ lorsque x_0 et x'_0 sont infiniment voisins de ξ ? C'est un problème analogue à celui qui se pose dans l'étude des coupures des intégrales définies sur lesquelles Hermite attira l'attention des géomètres. Le résultat, dans les hypothèses où nous allons nous placer, rappelle tout à fait les résultats d'Hermite. On va montrer que la différence $f(x_0) - f(x'_0)$ a une limite facilement calculable, lorsque x et x' tendent vers ξ.

2. La solution $f(x)$ de l'équation (1) s'obtient par

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_C \mathfrak{N}(x, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz, \tag{2}$$

où $\mathfrak{N}(x, z, \lambda)$ est le noyau résolvant

$$\mathfrak{N}(x, z, \lambda) = \frac{\omega(x, z, \lambda)}{\omega(\lambda)}. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{aligned} \omega(x, z, \lambda) &= N(x, z) + \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \overbrace{\int_C \cdots \int_C}^{n} N\begin{pmatrix} x\, z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n, \\ \omega(\lambda) &= 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \underbrace{\int_C \cdots \int_C}_{n} N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

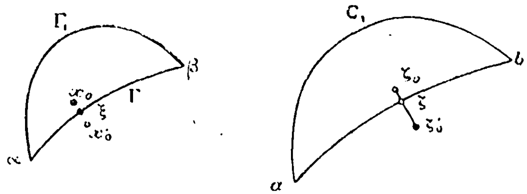
$$N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} N(x, z) & N(x, z_1) & \ldots & N(x, z_n) \\ N(z_1, z) & N(z_1, z_1) & \ldots & N(z_1, z_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ N(z_n, z_1) & N(z_n, z_2) & \ldots & N(z_n, z_n) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Nous supposerons essentiellement que $N(z_i, z_k)$ est holomorphe quels que soient z_i, z_k dans une petite région $\mathcal{R}_1$ contenant à son intérieur la courbe C. Ce qui revient à dire que *lorsque x décrit la région $\mathcal{R}_1$, toutes les racines z de l'équation* $H(x, z) = 0$ *restent extérieures à cette région* $\mathcal{R}_1$. Cette supposition revient en somme à admettre que la solution est donnée, pour x non sur Γ, par les formules même de Fredholm. Elle écarte des noyaux $N(x, z)$ tels que $\frac{1}{x-z}$ pour lesquels la représentation même de la solution par les formules de

Fredholm (2), (3), (4) présente déjà des difficultés considérables, sur lesquelles on n'a pas pour but de s'attarder ici.

Dans les hypothèses faites, la courbe Γ est tout entière extérieure à la région $\mathcal{R}_1$ contenant C, et lorsque x tend vers un point ξ de Γ, on voit que les difficultés naissent de la présence des termes $N(x, z_i)$ dans $\omega(x, z, \lambda)$, ces termes devenant infinis pour une certaine valeur ζ de z_i correspondant à ξ par $H(\xi, \zeta) = 0$. Lorsque ξ décrira une certaine région ρ entourant Γ, le point unique ζ qui lui correspond par hypothèse décrira la région $\mathcal{R}_1$.

5. Pour comparer commodément les valeurs $f(x_0)$ et $f(x'_0)$ de la solution (1), considérons les points ζ_0 et ζ'_0 voisins de ζ que l'équation $H(x, z) = 0$ fait correspondre respectivement à x_0 et x'_0. Ils sont situés de part et d'autre de C comme l'indique la figure. Considérons



un deuxième chemin C_1, allant de a à b, dans la région $\mathcal{R}_1$ déjà citée : C_1 sera suffisamment voisin de C, C et C_1 délimiteront une aire simplement connexe contenant ζ_0 et laissant à l'extérieur ζ'_0. Nous allons *comparer les intégrales des formules* (2) *et* (4) *à des intégrales analogues prises le long de* C_1.

Aucune difficulté pour les intégrales du type

$$\int_C \cdots \int_C N\begin{pmatrix} z_1 z_2 \ldots z_n \\ z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n,$$

z_i et z_k étant quelconques dans $\mathcal{R}_1$: tous les termes $N(z_i, z_k)$ sont holomorphes, par conséquent

$$\int_C \cdots \int_C = \int_{C_1} \cdots \int_{C_1},$$

c'est-à-dire que $\omega(\lambda)$ *ne change pas* si les intégrales qu'il contient sont prises suivant C_1 et non suivant C.

4. Considérons, dans $\mathfrak{D}(x, z, \lambda)$, l'intégrale type

$$I(x, z) = \int_C \cdots \int_C N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n,$$

et comparons-la à

$$I_1(x, z) = \int_{C_1} \cdots \int_{C_1} N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n.$$

On voit d'abord dans

$$\int_{C_1} \begin{vmatrix} N(x\, z) & N(x\, z_1) & \ldots & N(x\, z_n) \\ N(z_1 z) & N(z_1 z_1) & \ldots & N(z_1 z_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ N(z_n z) & N(z_n z_1) & \ldots & N(z_n z_n) \end{vmatrix} dz_n,$$

que seul le terme $N(x z_n)$ du déterminant crée des difficultés. Il admet un pôle simple, qui est ζ_0 ou ζ'_0 selon que x est en x_0 ou en x'_0. Nous allons supposer d'abord qu'on donne à x la valeur x_0. Entre les chemins C et C_1 figure donc un pôle de $N(x_0, z_n)$ qui est $z_n = \zeta_0$; le résidu correspondant est

$$\frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)},$$

il est alors visible que

$$\int_{C_1} \begin{vmatrix} N(x\, z) & N(x\, z_1) & \ldots & N(x\, z_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ N(z_n z) & \ldots\ldots & \ldots & N(z_n z_n) \end{vmatrix} dz_n$$
$$= \int_C N\begin{pmatrix} x\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_n + (-1)^{n+1} \int_{C+C_1} N(x\, z_n)\, N\begin{pmatrix} z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix} dz_n,$$

$C + C_1$ désignant le contour fermé constitué par C et C_1, décrit dans le sens positif (*voir* la figure 1), ou bien

$$\int_{C_1} N\begin{pmatrix} x_0\, z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_n$$
$$= \int_C N\begin{pmatrix} x_0\, z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_n + (-1)^{n+1} . 2 i \pi \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_{n-1}\, \zeta_0 \\ z\, z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix}.$$

D'une façon générale, puisque

$$N\begin{pmatrix} x_0\, z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} = N(x_0 z)\, N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z_1\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} - N(x_0\, z_1)\, N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} + \ldots$$
$$+ (-1)^n N(x_0 z_n)\, N\begin{pmatrix} z_1\, z_2 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix},$$

et puisque le terme

$$(-1)^i \qquad N(x_0 z_i)\, N\begin{pmatrix} z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_i \quad \ldots z_n \\ z\ z_1 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \end{pmatrix}$$
$$= -N(x_0 z_i)\, N\begin{pmatrix} z_i z_1 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \\ z\ z_1 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \end{pmatrix}$$

n'est altéré, dans la substitution du chemin C_1 au chemin C, que par l'intégration relative à z_i, les autres intégrations donnant le même résultat sur C et sur C_1 puisque

$$N\begin{pmatrix} z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_i \quad \ldots z_n \\ z\ z_1 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \end{pmatrix}$$

reste holomorphe quels que soient $z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_i, \ldots, z_n$ dans $\mathcal{R}_1$ il vient immédiatement

$$\overbrace{\int_{C_1} \ldots \int_{C_1}}^{n} N\begin{pmatrix} x_0 z_1 z_2 \ldots z_n \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n$$
$$= \overbrace{\int_{C} \ldots \int_{C}}^{n} N\begin{pmatrix} x_0 z_1 z_2 \ldots z_n \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1 \ldots dz_n + 2i\pi \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} \Sigma,$$

où

$$\Sigma = \overbrace{\int_{C} \ldots \int_{C}}^{n-1} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_2 \ldots z_n \\ z\ z_2 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_2 \ldots dz_n$$
$$+ \overbrace{\int_{C} \ldots \int_{C}}^{n-1} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 z_3 \ldots z_n \\ z\ z_1 z_3 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_3 \ldots dz_n + \ldots$$
$$+ \overbrace{\int_{C} \ldots \int_{C}}^{n-1} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_{i-1} z_{i+1} \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_{i-1}\, dz_{i+1} \ldots dz_n + \ldots$$
$$+ \overbrace{\int_{C} \ldots \int_{C}}^{n-1} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 z_2 \ldots z_{n-1} \\ z\ z_1 z_2 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_{n-1}.$$

Or, il est visible que les n intégrales qui figurent dans Σ ne diffèrent que par la dénomination des *lettres d'intégration*, donc

$$\Sigma = n \overbrace{\int_C \ldots \int_C}^{n} N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 \ldots z_{n-1} \\ z\, z_1 \ldots z_{n-1} \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n \;\text{¹}.$$

Désignons par $\mathfrak{N}_1(x, z, \lambda)$ le noyau (3) calculé à l'aide du chemin d'intégration C_1 et $\mathfrak{N}(x, z, \lambda)$ le même noyau calculé à l'aide de C. On aura évidemment, puisque $\mathfrak{D}(\lambda)$ n'a pas changé,

$$(6) \qquad \mathfrak{N}_1(x_0, z, \lambda) = \mathfrak{N}(x_0, z, \lambda) + 2i\pi\lambda \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda).$$

5. Désignons par $f_1(x)$ ce que devient $f(x)$ si le chemin C_1 est substitué à C,

$$f_1(x) = \varphi(x) - \lambda \int_{C_1} \mathfrak{N}_1(x, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz.$$

Il existe une relation simple entre $f(x_0)$ et $f_1(x_0)$:

$$\begin{aligned} f_1(x_0) &= \varphi(x_0) - \lambda \int_{C_1} \mathfrak{N}_1(x_0, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz \\ &= \varphi(x_0) - \lambda \int_{C_1} \mathfrak{N}(x_0, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz \\ &\quad - 2i\pi\lambda^2 \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} \int_{C_1} \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz. \end{aligned}$$

L'expression de

$$\mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda) = \frac{\mathfrak{D}(\zeta_0, z, \lambda)}{\mathfrak{D}(\lambda)}$$

avec

$$\mathfrak{D}(\zeta_0, z, \lambda) = \mathfrak{N}(\zeta_0, z) + \sum_1^\infty \frac{\lambda^n}{n!} \int_C \ldots \int_C N\begin{pmatrix} \zeta_0 z_1 \ldots z_n \\ z\, z_1 \ldots z_n \end{pmatrix} dz_1\, dz_2 \ldots dz_n$$

prouve, puisque ζ_0 est dans la région $\mathcal{R}_1$, que $\mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda)$ est holomorphe en z dans $\mathcal{R}_1$; par conséquent,

$$\int_{C_1} \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz = \int_C \mathfrak{N}(\zeta_0, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz.$$

Au contraire, considérons dans

$$\int_{C_1} \mathfrak{N}(x_0, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz$$

le terme général

$$\frac{1}{\mathrm{D}(\lambda)}\frac{\lambda^n}{n!}\int_{C_1}\varphi(z)\,dz\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n}\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\ z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz_1\,dz_2\ldots dz_n.$$

Le terme

$$\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\ z_1\ldots z_n\end{pmatrix}$$

admet le pôle simple $z=\zeta_0$ entre C et C_1. Un calcul tout analogue à celui qu'on a fait précédemment prouvera que

$$\begin{aligned}\int_{C_1}\varphi(z)\,dz\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n}\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\ z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz_1\ldots dz_n\\ =\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n+1}\varphi(z)\,\mathrm{N}\begin{pmatrix}x_0 z_1\ldots z_n\\ z\ z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz\,dz_1\ldots dz_n\\ -2i\pi\overbrace{\int_C\cdots\int_C}^{n}\frac{\mathrm{G}(x_0,\zeta_0)}{\mathrm{H}'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\varphi(\zeta_0)\,\mathrm{N}\begin{pmatrix}z_1\ldots z_n\\ z_1\ldots z_n\end{pmatrix}dz_1\ldots dz_n.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_{C_1}\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,\varphi(z)\,dz=\int_C\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,\varphi(z)\,dz-2i\pi\,\varphi(\zeta_0)\frac{\mathrm{G}(x_0,\zeta_0)}{\mathrm{H}'_\zeta(x_0,\zeta_0)}.$$

En définitive

$$\begin{aligned}f_1(x_0)&=\left[\varphi(x_0)-\lambda\int_C\varphi(z)\,\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,dz\right]+2i\pi\lambda\frac{\mathrm{G}(x_0,\zeta_0)}{\mathrm{H}'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\varphi(\zeta_0)\\ &\quad-2i\pi\lambda^2\frac{\mathrm{G}(x_0,\zeta_0)}{\mathrm{H}'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\int_C\mathfrak{N}(\zeta_0,z,\lambda)\,\varphi(z)\,dz\\ &=f(x_0)+2i\pi\lambda\frac{\mathrm{G}(x_0,\zeta_0)}{\mathrm{H}'_\zeta(x_0,\zeta_0)}\varphi(\zeta_0)+2i\pi\lambda\frac{\mathrm{G}(x_0,\zeta_0)}{\mathrm{H}'_\zeta(x_0,\zeta_0)}[f(\zeta_0)-\varphi(\zeta_0)],\end{aligned}$$

car

$$f(x_0)=\varphi(x_0)-\lambda\int_C\varphi(z)\,\mathfrak{N}(x_0,z,\lambda)\,dz$$

et

$$f(\zeta_0)-\varphi(\zeta_0)=-\lambda\int_C\varphi(z)\,\mathfrak{N}(\zeta_0,z,\lambda)\,dz.$$

Toutes réductions faites, il vient

$$(7) \qquad \boxed{f_1(x_0) = f(x_0) + 2i\pi\lambda \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} f(\zeta_0)}$$

6. Envisageons maintenant $f(x'_0)$ et $f_1(x'_0)$. Ils s'expriment tous deux par la formule (2) où x est remplacé par x'_0, mais dans f toutes les intégrales sont prises sur C et dans f_1 elles sont prises sur C_1. Les singularités des fonctions à intégrer proviennent toutes de termes $N(x'_0, z_i)$ qui n'admettent dans $\mathcal{R}_1$ qu'un pôle ζ'_0. Ce pôle est extérieur à l'aire délimitée par C et C_1. Les intégrales prises sur C ou sur C_1 ont les mêmes valeurs

$$(8) \qquad \boxed{f(x'_0) = f_1(x'_0)}$$

7. Il faut maintenant faire tendre x_0 et x'_0 vers le point ξ de Γ, alors ζ_0 tendra vers ζ, point de C. $f(\zeta_0)$ tendra vers une limite $f(\zeta)$ parfaitement définie et donnée par la formule (2) pour $x = \zeta$. [Car les singularités de tous les termes de (2) lorsque $x = \zeta_0$ sont données par la seule équation $H(\zeta_0, z) = 0$, elles sont donc extérieures à la région $\mathcal{R}_1$ où ζ_0 se déplace.]

Envisageons $f_1(x_0)$ et $f_1(x'_0)$; en vertu de leur expression par la formule (2), où les intégrales seraient prises suivant C_1, tous les termes $N\begin{pmatrix} x z_1 \dots z_n \\ z z_1 \dots z_n \end{pmatrix}$ sont holomorphes en x lorsque $z, z_1, z_2, \dots, z_n$ sont sur C_1 et lorsque x est dans un voisinage assez restreint de ξ, par conséquent $f_1(x_0)$ et $f_1(x'_0)$ tendent vers une limite bien déterminée $f_1(\xi)$ donnée par (2) où toutes les intégrales seraient prises suivant C_1. Comparant alors

$$f(x'_0) = f_1(x'_0)$$

et

$$f(x_0) = f_1(x_0) - 2i\pi\lambda \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} f(\zeta_0),$$

on voit que $f(x_0)$ et $f(x'_0)$ ont respectivement les limites

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(x_0) \to \\ f(x'_0) \to \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} f_1(\xi) - 2i\pi\lambda \dfrac{G(\xi, \zeta)}{H'_\zeta(\xi, \zeta)} f(\zeta), \\ f_1(\xi), \end{array} \right.$$

où, rappelons-le,

$$f_1(x) = \varphi(x) - \lambda \int_{C_1} \mathfrak{N}_1(x, z, \lambda)\, \varphi(z)\, dz.$$

Par suite,

$$\boxed{\lim[f(x'_0) - f(x_0)] = 2i\pi\lambda \frac{G(\xi, \zeta)}{H'_\zeta(\xi, \zeta)} f(\zeta)} \tag{10}$$

c'est-à-dire en somme que la *ligne* Γ *est, pour la solution* $f(x)$ *de* (1), *une coupure artificielle du type des coupures des intégrales définies d'Hermite, au delà desquelles* $f(x)$ *est prolongeable analytiquement.*

8. Le résultat précédent est susceptible de vérification directe. Reprenons l'équation (2)

$$f(x) + \lambda \int_C N(x, z) f(z)\, dz = \varphi(x),$$

où nous donnerons à x successivement les valeurs x_0 et x'_0. On aura

$$f(x'_0) - f(x_0) = -\lambda \int_C [N(x'_0, z) - N(x_0, z)] f(z)\, dz + \varphi(x'_0) - \varphi(x_0).$$

Lorsque x_0 et x'_0 tendent vers ξ, $\varphi(x'_0) - \varphi(x_0)$ tend vers zéro car φ est holomorphe dans $\mathfrak{R}$ et l'on peut se borner à étudier l'intégrale

$$I = \int_C \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} \right] f(z)\, dz.$$

On a remarqué antérieurement que, dans la région $\mathfrak{R}_1$ entourant C, $f(z)$ est parfaitement déterminé et n'a pas de singularité. Comparons l'intégrale précédente, prise suivant C, à la même intégrale

$$I_1 = \int_{C_1} \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} \right] f(z)\, dz$$

prise suivant C_1.

La fonction $\dfrac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)}$ n'a pas de pôle entre C et C_1, car son pôle est ζ'_0. Donc

$$\int_C \frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} f(z)\, dz = \int_{C_1} \frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} f(z)\, dz.$$

Au contraire, entre C et C_1 $\frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} f(z)$ a le pôle *simple* $z = \zeta_0$ dont le résidu sera

$$\frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} f(\zeta_0).$$

Donc

$$I = I_1 - 2 i\pi f(\zeta_0) \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x'_0) - f(x_0) = {} & 2 i\pi\lambda f(\zeta_0) \frac{G(x_0, \zeta_0)}{H'_\zeta(x_0, \zeta_0)} \\ & - \lambda \int_{C_1} f(z) \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} \right] dz + \varphi(x'_0) - \varphi(x_0). \end{aligned}$$

Lorsque x est voisin de ξ, en x_0 ou en x'_0, le pôle de $\frac{G(x, z)}{H(x, z)}$ est voisin de ζ, en ζ_0 ou ζ'_0. Il reste donc à distance finie du chemin C_1 si, comme on le suppose, ζ n'est ni en A ni en B.

Donc si x_0 et x'_0 tendent vers ξ,

$$\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)}$$

tend uniformément vers zéro, quel que soit z sur C_1. Par conséquent

$$\int_{C_1} f(z) \left[\frac{G(x'_0, z)}{H(x'_0, z)} - \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} \right] dz,$$

comme $\varphi(x'_0) - \varphi(x_0)$, tend vers zéro.

On obtient donc

$$\lim [f(x'_0) - f(x_0)] = 2 i\pi\lambda f(\zeta) \frac{G(\xi, \zeta)}{H'_\zeta(\xi, \zeta)}, \tag{10}$$

qui est bien le résultat obtenu par étude directe de $f(x)$.

9. Bien entendu, on ne démontre pas ainsi que $f(x_0)$ et $f(x'_0)$ tendent séparément vers des limites. Mais la méthode du n° **8** peut s'appliquer à la somme $f(x_0) + f(x'_0)$ comme à sa différence. Elle donne alors

$$f(x_0) + f(x'_0) = \varphi(x_0) + \varphi(x'_0) - \lambda \int_C [N(x'_0, z) + N(x_0, z)] f(z) \, dz.$$

Lorsque x_0 et x'_0 tendent vers ξ, les considérations du n° **8** prouvent que

$$[f(x_0)+f(x'_0)] = \varphi(x_0)+\varphi(x'_0) - 2i\pi\lambda f(\zeta_0)\frac{G(x_0,\zeta_0)}{H'_\zeta(x_0,\zeta_0)}$$
$$-\lambda\int_{C_1}[N(x'_0,z)+N(x_0,z)]f(z)\,dz.$$

Lorsque x_0 et x'_0 sont voisins de ξ, l'intégrale

$$\int_{C_1}[N(x'_0,z)+N(x_0,z)]f(z)\,dz$$

est parfaitement régulière, et tend vers

$$2\int_{C_1}N(\xi,z)f(z)\,dz$$

lorsque x_0 et x'_0 tendent vers ξ. On a donc

$$\lim[f(x_0)+f(x'_0)] = 2\varphi(\xi) - 2\pi i\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi,\zeta)}{H'_\zeta(\xi,\zeta)} - 2\lambda\int_{C_1}N(\xi,z)f(z)\,dz.$$

Si nous appelons $f_1(x)$ la solution de l'équation de Fredholm

$$f_1(x)+\lambda\int_{C_1}N(x,z)f_1(z)\,dz = \varphi(x),$$

$f_1(x)$ admet la coupure Γ_1 correspondant à C_1 et les formules de Fredholm montrent que, lorsque x est dans la région $\mathcal{R}_1$ qui entoure CC_1, on a

$$f(x) = f_1(x).$$

Par conséquent,

$$\int_{C_1}N(\xi,z)f(z)\,dz = \int_{C_1}N(\xi,z)f_1(z)\,dz$$

et

$$\varphi(\xi) - \lambda\int_{C_1}N(\xi,z)f_1(z)\,dz = f_1(\xi).$$

Donc

$$(11)\qquad \boxed{\lim[f(x_0)+f(x'_0)] = 2f_1(\xi) - 2\pi i\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi,\zeta)}{H'_\zeta(\xi,\zeta)}}$$

Des formules (10) et (11) obtenues directement aux n^{os} **8** et **9** on déduit

$$\lim f(x_0) = f_1(\xi) - 2i\pi\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi, \zeta)}{H'_\zeta(\xi, \zeta)},$$
$$\lim f(x'_0) = f_1(\xi),$$

qui sont les formules (9) déjà obtenues par l'étude des formules de Fredholm.

10. Il serait aisé d'étendre les résultats obtenus au cas où ξ décrivant Γ, c'est une racine *double* ou *multiple* de $H(x, z) = 0$ qui décrirait la courbe C.

Le seul changement à introduire serait un nouveau calcul pour le *résidu* ρ de l'intégrale

$$\int_{C+C_1} \frac{G(x_0, z)}{H(x_0, z)} f(z)\, dz,$$

dont l'élément admettrait dans le contour fermé $C + C_1$ un pôle double ou multiple ζ_0. Le terme

$$2\pi i\lambda f(\zeta)\frac{G(\xi, \zeta)}{H'_\zeta(\xi, \zeta)}$$

des formules précédentes serait remplacé par $2\pi i\lambda\rho$ ou plutôt par la limite de $2\pi i\lambda\rho$ quand x_0 tend vers ξ. L'essentiel du résultat précédent subsiste, à savoir que Γ est une coupure non essentielle pour $f(x)$ au delà de laquelle $f(x)$ est prolongeable analytiquement, et dans les deux sens.