JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL LÉVY

Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes de fonctions abéliennes à trois variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 8e série, tome 4 (1921), p. 357-382.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1921_8_4__357_0>

Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes de fonctions abéliennes à trois variables;

PAR PAUL LÉVY.

INTRODUCTION.

1. *Notions générales.* — L'objet du présent travail est l'étude, dans le cas des fonctions abéliennes à trois variables, des relations singulières entre les périodes. Ces relations, déjà étudiées dans le cas de deux variables par M. G. Humbert (*Journal de Mathématiques*, 1899 et 1900), sont nécessaires et suffisantes pour que les fonctions considérées admettent des *transformations* (au sens d'Hermite) autres que celles qui existent quelles que soient les périodes. Elles sont aussi nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des fonctions *intermédiaires*, admettant les périodes considérées, autres que celles qui existent quelles que soient les périodes et qui sont réductibles aux fonctions thêta.

Dans le cas de trois variables, les relations singulières constituent un système de trois équations du second degré.

Notre point de départ est un résultat de M. Humbert, d'après lequel on peut déduire algébriquement d'un système de relations singulières un autre système de même forme, et, par des combinaisons linéaires, une simple infinité de systèmes nouveaux. Quoique équivalents au système initial, ils décèlent l'existence de transformations et de fonctions intermédiaires autres que celles qui semblaient d'abord résulter seules de ce système.

En considérant comme distincts les systèmes dérivés les uns des autres par l'opération indiquée par M. Humbert, que nous appellerons *opération* $\mathcal{J}$, un système de relations singulières dépend d'une manière linéaire et homogène de 14 paramètres, et peut être représenté par un point A de l'espace E_{13} à 13 dimensions. Les systèmes dérivés les uns des autres par l'opération $\mathcal{J}$ et par des combinaisons linéaires sont représentés par des points d'une même droite, que nous appellerons *droite* D.

D'autre part, le système de périodes peut être représenté par un point M de l'espace E_6 à 6 dimensions. Un système de relations singulières est un système de trois relations entre les points A et M.

Le point de vue auquel nous nous placerons est le suivant. De points A, A', A'', ... résultent, par l'opération $\mathcal{J}$ et par des combinaisons linéaires, de nouveaux points. On arrive ainsi à définir une variété linéaire, que nous appelons *variété* L, d'où l'on ne peut pas sortir par l'opération $\mathcal{J}$. Il arrive quelquefois que, des systèmes donnés initialement, résultent algébriquement, mais pas par l'opération $\mathcal{J}$, des systèmes représentés par des points non situés dans cette variété L, mais dans une variété analogue plus étendue. Cette circonstance est exceptionnelle et ne se produit jamais pour les variétés L déduites d'un seul point A (qui sont des droites D); elle ne sera signalée qu'accidentellement dans le dernier Chapitre de cette étude.

Si un point M de l'espace E_6 est lié par les relations singulières aux points A, A', A'', ..., donnés dans l'espace E_{13}, et par suite à tous ceux de la variété L déterminée par ces points, il décrit une variété, que nous appelons *variété* $\mathfrak{s}$ correspondant à la variété L.

L'objet de ce travail est l'étude des variétés L, des variétés $\mathfrak{s}$ et de la correspondance entre ces deux sortes de variétés.

Les relations singulières devant être à coefficients entiers pour être intéressantes au point de vue d'Hermite et de M. Humbert, cette étude peut être entreprise au point de vue algébrique et au point de vue arithmétique. Nous ne nous sommes placés qu'au premier point de vue, de sorte que cette étude peut apparaître comme devant servir d'introduction à d'autres recherches de nature arithmétique. Nous pensons toutefois qu'elle peut présenter en elle-même quelque intérêt.

2. *Résumé des principaux résultats; géométrie de l'espace* E_{13}. — Une notion fondamentale, dans l'étude de l'espace E_{13}, est celle de *point exceptionnel*. Nous appelons ainsi un point confondu avec celui qu'on déduit de lui par l'opération $\mathfrak{F}$. (Les systèmes de relations singulières correspondant à de tels points seront dits *systèmes exceptionnels*.)

L'étude de la substitution résultant de l'opération $\mathfrak{F}$ effectuée sur les points d'une même droite D montre aisément qu'une telle droite contient trois points exceptionnels. Ce résultat a été obtenu par M. Humbert, qui a formé l'équation du troisième degré définissant ces points et qui introduit deux invariants I et J. Si $J^2 - 4I^3 = 0$, deux de ces points sont confondus, en un point *exceptionnel double*.

J'ai complété ces résultats en montrant que les points exceptionnels constituent une *variété* V à 8 dimensions. Par chaque point exceptionnel passent une quadruple infinité de droites D. La propriété d'un point exceptionnel d'être double ne dépend que de ce point, et non de la droite D considérée. Au contraire, la propriété d'être *triple* dépend de la droite D. Tout point exceptionnel double est triple pour une triple infinité de droites D.

L'étude des droites ou plans (variétés linéaires à un nombre quelconque de dimensions), situés sur la variété V, joue un grand rôle. Nous appelons ces *droites* Δ. Elles dépendent de 11 paramètres. Chaque droite Δ peut être considérée d'une manière et d'une seule comme l'intersection de deux variétés linéaires, l'une à 4 dimensions, l'autre à 2 dimensions, situées sur la variété V. On a ainsi sur cette variété deux séries distinctes de plans, dépendant respectivement de 5 et 9 paramètres, que nous appelons *plans* Π_4 et *plans* π_2. Il n'en existe pas d'autre (¹).

Dans ces plans, les points exceptionnels doubles sont définis par une condition linéaire. Dans un plan Π_4, on a ainsi un *plan* Π_3 *double* (l'indice désignant toujours le nombre de dimensions); dans un plan π_2, on a *en général* une *droite* Δ *double*, et sur une droite Δ qui n'est pas double, on a un seul point exceptionnel double. Il peut arriver qu'un *plan* π_2 soit *double*, c'est-à-dire ne contienne que des points excep-

(¹) Par un point A de la variété V passent une quadruple infinité de droites Δ, qui se répartissent en une simple infinité de plans Π_4, et en une triple infinité de plans π_2. Si le point A est double, une infinité simple de ces plans π_2 sont doubles; ils sont situés sur la quadrique Q associée à A (*voir* plus loin dans le texte).

tionnels doubles. Les droites d'un tel plan ne sont pas des droites Δ doubles quelconques; nous les appelons *droites Δ spéciales*. Dans un plans Π_3 double, ces droites constituent un complexe linéaire. Elles jouissent d'une autre propriété caractéristique : ce sont les seules droites Δ qui puissent être considérées comme limites de droites D.

Ces droites Δ, plans π_2 ou Π_1, sont évidemment des variétés L. En dehors de ces variétés dont tous les points sont exceptionnels, une variété L à n dimensions est évidemment un lieu de droites D dépendant de $n-1$ paramètres, dont les points exceptionnels décrivent trois nappes ayant des nombres de dimensions n_1, n_2, n_3 au plus égaux à $n-1$. Il peut arriver que, parmi les droites D qui décrivent la variété L, certaines se réduisent à des droites Δ spéciales qui ne soient situées sur aucune des trois nappes; on a alors une *nappe spéciale*.

On démontre aisément que $n_1+n_2+n_3=2n-2$. On a alors trois cas à distinguer suivant que la valeur maxima $n-1$ est atteinte par 0, 1 ou 2 des nombres n_1, n_2 et n_3.

Premier cas : $n_1=n_2=n-1$, $n_3=0$. — La variété L sera dite dans ce cas un *plan* $\mathfrak{P}$. C'est un lieu de droites D passant par un point exceptionnel fixe A. Le plan $\mathfrak{P}$ le plus étendu est un plan à 5 dimensions, lieu de toutes les droites D passant par A. Les deux nappes autres que celles constituées par le point A constituent une quadrique Q, à discriminant non nul, dite *quadrique* Q *associée à* A; elle contient A ou non suivant que ce point exceptionnel est double ou non. (Si ce point est double, il est alors triple pour les droites D tangentes à la quadrique; celles situées sur la quadrique, en nombre doublement infini, sont des droites Δ spéciales.) Cette quadrique contient deux séries triplement infinies de plans à 2 dimensions; les uns sont des plans π_2; les autres sont des plans Π_2 situés dans des plans Π_1. Sur la quadrique Q, le lieu des points exceptionnels doubles est son intersection avec le plan polaire de A.

Deuxième cas : $n_1=n_2+n_3=n-1$. — La variété L sera dite dans ce cas *variété* $\mathfrak{L}$. La variété $\mathfrak{L}$ la plus étendue est une variété $\mathfrak{L}_5$ à 5 dimensions, définie par deux plans π_2 et π'_2 *associés*, c'est-à-dire tels que toute droite joignant un point de l'un à un point de l'autre soit une droite D; les plans π_2 s'associent tous deux à deux de cette manière. La troisième nappe de points exceptionnels est un plan Π_4, que nous appelons *plan de base* de la variété $\mathfrak{L}_5$. Le lieu des points exceptionnels doubles est le plan Π_3 double dans ce plan; il contient les droites Δ doubles des plans π_2 et π'_2, qui sont conjuguées par rapport au complexe des droites Δ spéciales du plan Π_3 double.

Il peut arriver que π_2 et π'_2 soient confondus en un plan π_2 double. Un tel plan, et un plan Π_4 quelconque le coupant (en un point au moins, et par suite suivant une droite), déterminent une *variété* $\mathfrak{L}_5$ *spéciale*.

Troisième cas : n_1, n_2, n_3 sont inférieurs à $n - 1$. La variété L sera dite dans ce cas *variété* $\mathfrak{M}$. Les variétés de ce type peuvent être plus complexes que celles des deux premiers types. Signalons :

La variété $\mathfrak{M}_9$, à 9 dimensions, lieu des variétés $\mathfrak{L}_5$, ayant même plan de base;

Le plan $\mathfrak{E}_8$, à 8 dimensions, tangent à la variété V en un point exceptionnel double A; la quadrique Q associée à A constitue une nappe de points exceptionnels dans $\mathfrak{E}_8$; les deux autres sont constituées par le cône, lieu des droites Δ passant par A;

La variété $\mathfrak{M}_{10}$, à 10 dimensions, lieu des plans $\mathfrak{E}_8$ tangents à la variété aux différents points d'un plan π_2 double;

La variété $\mathfrak{M}_6$, à 6 dimensions, intersection de deux variétés $\mathfrak{M}_9$ dont les plans de base se coupent en un point exceptionnel double B; les points exceptionnels y constituent deux plans Π_3 se coupant en B et la quadrique Q associée à B;

La variété $\mathfrak{M}_4$, à 4 dimensions, intersection de trois variétés $\mathfrak{M}_9$ dont les plans de base se coupent deux à deux en des points exceptionnels doubles B, B_1, B_2. Les nappes de points exceptionnels sont trois plans Π_2, à 2 dimensions, appartenant respectivement aux trois plans de base; il y a en outre une nappe spéciale, constituée par le plan B, B_1, B_2, qui est un plan Π_2 double.

5. *Géométrie de l'espace* E_6. — D'après les notations adoptées pour les périodes, les coordonnées d'un point de l'espace E_6 sont désignées par G, G', G'', H, H', H''. Nous appellerons *cône* $\mathfrak{S}_3$ le cône

défini paramétriquement par les équations

$$\begin{aligned} G &= t^2, & G' &= t'^2, & G'' &= t''^2, \\ H'' &= t't'', & H' &= t''t, & H'' &= tt'. \end{aligned}$$

La génératrice joignant l'origine au point t, t', t'' sera dite *génératrice* (t, t', t'') *du cône* $\mathfrak{C}_3$. Nous appellerons *cône* $\mathfrak{C}_4$ (ou encore cylindre $\mathfrak{C}_4$), de coefficients t, t', t'', le lieu décrit par le cône $\mathfrak{C}_3$ dans une translation parallèle à la génératrice (t, t', t''). On peut représenter soit la génératrice (t, t', t''), soit le cône $\mathfrak{C}_4$ correspondant, par le point a défini dans un plan par les coordonnées homogènes t, t', t''.

Quand le point a décrit une droite $a_1 a_2$, la génératrice (t, t', t'') décrit un *cône du second degré* $\mathfrak{C}_2$ dans un *plan* P_3 à 3 dimensions. La translation de ce cône parallèlement à n'importe quelle de ses génératrices lui faisant décrire tout le plan P_3, ce plan est situé sur le cône $\mathfrak{C}_4$ représenté par n'importe quel point de la droite $a_1 a_2$. Ces cônes constituent un faisceau linéaire; leur intersection est constituée par le cône $\mathfrak{C}_3$ et le plan P_3. On peut considérer que la droite $a_1 a_2$ représente soit ce faisceau linéaire, soit le plan P_3 commun aux cônes $\mathfrak{C}_4$ de ce faisceau, soit le cône $\mathfrak{C}_2$ intersection de ce plan et du cône $\mathfrak{C}_3$.

Le lieu, soit de tous les cônes $\mathfrak{C}_4$, soit de tous les plans P_3, est un *cône* $\mathfrak{C}_5$ d'équation

$$\begin{vmatrix} G & H'' & H' \\ H'' & G' & H \\ H' & H & G'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nous appellerons *plan* $\mathfrak{E}_3$ la variété linéaire à trois dimensions déterminée par trois génératrices du cône $\mathfrak{C}_3$, représentées par trois points a, a', a'' non en ligne droite (s'ils étaient en ligne droite, ce serait un plan P_3). Le plan $\mathfrak{E}_3$ ne contient pas d'autre génératrice que celles introduites par sa définition. Il est donc représentable d'une manière unique par trois points a, a', a''.

Nous appellerons *plan* $\mathfrak{E}_4$ la variété linéaire à quatre dimensions déterminée par un plan P_3 et une génératrice du cône $\mathfrak{C}_3$. Il ne contient pas d'autre génératrice du cône $\mathfrak{C}_3$ que la génératrice isolée introduite dans sa définition et celles qui, situées dans P_3, y décrivent un cône $\mathfrak{S}_2$. Le plan ϖ_4 est représentable par un point a et une droite $a_1 a_2$.

Un plan ϖ_3 est évidemment situé sur trois plans ϖ_4, représentés chacun par un sommet du triangle $aa'a''$ et le côté opposé. Inversement, chaque plan ϖ_4 contient une double infinité de plans ϖ_3, obtenus en choisissant deux points a' et a'' sur la droite $a_1 a_2$.

Nous avons considéré dans ce qui précède des cônes ayant l'origine pour sommet, ou des plans contenant l'origine. Nous désignerons par les mêmes notations $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, P_3, ϖ_4, ϖ_3 les différentes variétés déduites des précédentes par un changement d'origine.

Un système de relations singulières définit une *variété* s_4 *ou* s_3, à 4 ou 3 dimensions, suivant qu'il est exceptionnel ou non. S'il est exceptionnel double, la variété s_4 est un cône $\mathfrak{S}_4$. S'il est exceptionnel simple, la variété s_4 est un cylindre, dont la section plane est le lieu, d'une part d'une simple infinité de plans à 2 dimensions, d'autre part d'une simple infinité de droites. Le cylindre s_4 lui-même est donc le lieu d'une infinité simple de plans à 3 dimensions, qui sont des plans P_3, représentés par des droites a_1, a_2 pivotant autour d'un point fixe; la génératrice représentée par ce point est parallèle à celles du cylindre. Le cylindre s_4 peut se réduire en particulier à un plan ϖ_4.

Une variété s_3, qui peut en particulier se réduire à un plan ϖ_3, peut se représenter paramétriquement de manière que les trois séries de lignes coordonnées soient des droites ω, génératrices de cônes $\mathfrak{S}_3$. Les trois séries de surfaces coordonnées sont des quadriques, dont chacune est située dans un plan P_3, et a pour cône directeur un cône $\mathfrak{S}_2$; nous appellerons une telle quadrique une *pseudosphère*. Les plans P_3 correspondant à une même série de surfaces coordonnées sont parallèles à une même droite du cône $\mathfrak{S}_3$; par une translation parallèle à cette droite, chaque pseudosphère engendre un plan P_3 et la variété s_3 engendre une variété s_4. On trouve ainsi les trois variétés s_4 contenant une variété s_3, représentant les trois systèmes exceptionnels dérivés par l'opération $\mathcal{J}$ d'un système donné de relations singulières; chacune de ces variétés est liée à une série de génératrices rectilignes sur s_3, et la recherche analytique des génératrices passant par un point de s_3 correspond par suite à une même équation du troisième degré, indépendante du point choisi, qui est celle indiquée au n° **2**.

Il peut d'ailleurs arriver qu'une variété s_3 contienne d'autres génératrices que celles que nous venons de considérer; elles ne sont pas parallèles aux génératrices du cône $\mathfrak{C}_3$. Il peut arriver aussi que les trois systèmes de génératrices parallèles à celles du cône $\mathfrak{C}_3$ se réduisent à deux distincts, ou même un seul, et ne puissent pas être prises comme lignes coordonnées. Ainsi, un plan $\mathfrak{G}_3$ peut se réduire à un plan tangent au cône $\mathfrak{C}_3$; les trois points a, a', a'' qui le représentent sont alors confondus.

Une variété s est évidemment une intersection de variétés s_3 ou s_1. Indiquons la correspondance des principaux types de variétés s avec les types de variétés L définis dans l'espace E_{13}.

Un plan P_3 est situé sur une quadruple infinité de variétés s_1, dont une triple infinité de cônes $\mathfrak{C}_1$. C'est la variété s correspondant à un plan Π_1.

Un cône $\mathfrak{C}_3$ est commun à une double infinité de cônes $\mathfrak{C}_1$ ayant même sommet; c'est la variété s correspondant à un plan Π_2 double. Chaque cône $\mathfrak{C}_1$ a d'ailleurs une infinité de sommets, et contient une infinité de cônes $\mathfrak{C}_3$, ce qui correspond au fait qu'un point exceptionnel double est sur une infinité de plans Π_2 doubles.

Une droite Δ spéciale est l'intersection d'un plan Π_1 et d'un plan Π_2 double. La variété s correspondante comprend le cône $\mathfrak{C}_3$ et le plan P_3 correspondant à ces plans Π_2 et Π_1. Ce cône $\mathfrak{C}_3$ et ce plan P_3 ont pour intersection un cône $\mathfrak{C}_2$, qui est la variété s correspondant à la variété $\mathfrak{L}_3$ spéciale déterminée par le plan π_2 double et le plan Π_1.

A une variété $\mathfrak{L}_3$ non spéciale correspond une pseudosphère, dont le plan P_3 correspond au plan de base de la variété $\mathfrak{L}_3$.

A un *pseudocercle*, intersection de deux pseudosphères d'un même plan P_3, et par suite de toutes celles d'un faisceau linéaire, correspond une variété $\mathfrak{M}_6$, lieu d'une série simplement infinie de variétés $\mathfrak{L}_3$ ayant même plan de base. Si le pseudocercle se réduit à deux droites concourantes (nécessairement génératrices d'un même cône $\mathfrak{C}_3$), les deux nappes de points exceptionnels dans $\mathfrak{M}_6$ autres que ceux du plan de base, qui sont de toute façon des variétés à trois dimensions, sont algébriquement distinctes, et ont en commun le plan Π_2 double qui correspond au cône $\mathcal{C}_3$.

L'ensemble de trois génératrices du cône $\mathcal{C}_3$ correspond à la variété $\mathfrak{M}_1$, intersection des trois variétés $\mathfrak{M}_9$, aux plans de base desquelles correspondent les plans P_3 définis par ces génératrices assemblées deux à deux.

Au plan ϖ_8, tangent à la variété V en un point exceptionnel double B, correspond la droite ω, ligne des points coniques du cône $\mathcal{C}_4$ correspondant à B.

A la variété $\mathfrak{M}_{10}$, lieu des plans ϖ_8 tangents à V aux points d'un plan π_2 double, correspond un point, sommet du cône $\mathcal{C}_3$ correspondant au point π_2 double.

Si le point exceptionnel double B décrit un plan Π_3 double, la droite ω, ligne des points coniques du cône $\mathcal{C}_4$ correspondant, décrit un plan P_3 en restant parallèle au cône $\mathcal{C}_2$ de ce plan. La correspondance entre B et cette droite ω est une transformation de Lie.

4. *Transformation d'Hermite.* — La transformation d'Hermite, qu'on peut envisager soit comme une transformation ponctuelle dans l'espace E_6, soit comme une transformation ponctuelle dans l'espace E_{13}, est utile à considérer dans la géométrie de ces espaces.

Dans l'espace E_{13}, la transformation d'Hermite est une transformation homographique, qui conserve la variété V, et transforme les variétés L des différents types en variétés analogues; elle transforme aussi les complexes de droites spéciales en complexes analogues.

Dans l'espace E_6, c'est une transformation ponctuelle, transforme une droite ω, parallèle à une génératrice du cône ϖ_3 en une droite analogue, une pseudosphère en une pseudosphère et, d'une manière générale, une variété s en une variété analogue. Elle comprend comme cas particulier la translation et aussi une transformation permettant de transformer les variétés s_3 passant par l'origine en variétés s_3 linéaires, c'est-à-dire en plans ϖ_3. Par ces transformations, une variété s_3 peut toujours être transformée en un plan ϖ_3 passant par l'origine. Cette réduction permet d'obtenir aisément les propriétés des génératrices des variétés s_3.

On remarque l'analogie entre le passage d'un espace à l'autre, et la transformation de Lie, qui transforme une transformation homographique conservant un complexe linéaire en une transformation ponctuelle conservant les angles (transformant une droite isotrope en une droite isotrope). D'après le résultat final du n° **3**, il y a plus qu'une simple analogie.

5. Le Chapitre I du présent travail a pour objet la formation des systèmes de relations singulières.

Dans le Chapitre II, nous étudions l'opération $\mathfrak{F}$ de M. Humbert, et introduisons la notion de système exceptionnel. Dans le Chapitre III, nous étudions la géométrie de l'espace E_{13}; dans le Chapitre IV, la géométrie de l'espace E_6 et la correspondance entre les deux espaces.

J'indique maintenant quels sont les principaux résultats dus à M. Humbert : ce sont la formation des systèmes de relations singulières, l'opération $\mathfrak{F}$, la détermination des systèmes exceptionnels dérivés d'un système donné, la formation des invariants I et J et leur invariance par une transformation d'Hermite d'ordre 1 ; l'existence sur les variétés $\mathcal{S}_3$ de trois séries de génératrices rectilignes, dépendant de la même équation du troisième degré que les trois systèmes exceptionnels dérivés du système étudié ; le groupement de ces génératrices en variétés à deux dimensions qui sont de deux manières le lieu d'une série simplement infinie de génératrices.

Même dans l'exposé de ces résultats, il m'est arrivé de m'écarter de la marche suivie par M. Humbert. Pour la formation des relations singulières, l'introduction de notations symétriques m'a permis de simplifier l'écriture des principales formules. Pour le reste, les changements ont été plus importants, notamment en ce qui concerne les propriétés des variétés $\mathcal{S}_3$, que j'ai liées à celles des autres types de variétés $\mathcal{S}$.

Je veux, en terminant cette Introduction, adresser mes remercîments à M. Humbert qui, ayant obtenu les résultats que je viens de rappeler, ayant fait notamment la découverte si féconde de l'opération $\mathfrak{F}$, a bien voulu me confier ses calculs et m'a encouragé à poursuivre l'étude de cette question [1],

Je rappelle que les principaux résultats des Chapitres I et II ont été

---

[1] Ces lignes ont été écrites avant la mort de M. Humbert, enlevé à la Science et à l'affection des siens, alors que l'on pouvait espérer encore la continuation

énoncés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 8 juin 1914 par M. Humbert et moi. J'avais commis quelques erreurs en rédigeant le n° 3 de cette Note. La géométrie de l'espace E_{13}, comme cela résulte du résumé qui précède, est plus complexe que ne l'indique le passage en question.

Les principaux résultats du Chapitre III ont été exposés le 28 avril 1920 à la Société mathématique de France. Ceux du Chapitre IV sont inédits.

CHAPITRE I.

FORMATION DES SYSTÈMES DE RELATIONS SINGULIÈRES.

1. *Notations.* — Soit un *premier système* de fonctions abéliennes à trois variables U, V, W, admettant comme *périodes normales*

$$\begin{array}{lcccccc} U: & 1, & 0, & 0, & G, & H'', & H'; \\ V: & 0, & 1, & 0, & H'', & G', & H; \\ W: & 0, & 0, & 1, & H', & H, & G''. \end{array}$$

Nous désignerons aussi ces périodes par

$$\begin{array}{l} P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_6, \\ P'_1, \quad P'_2, \quad \ldots, \quad P'_6, \\ P''_1, \quad P''_2, \quad \ldots, \quad P''_6, \end{array}$$

et représenterons symboliquement par $(\mathfrak{P}_i)$ le système de périodes simultanées P_i, P'_i, P''_i. Un système quelconque de périodes pourra être représenté par

$$(\mathfrak{P}) = X_1(\mathfrak{P}_1) + X_2(\mathfrak{P}_2) + \ldots + X_6(\mathfrak{P}_6), \tag{1}$$

les X_i étant des entiers positifs, nuls, ou négatifs.

Nous poserons $U = U_1 + iU_2$, et emploierons des notations analogues pour désigner les parties réelles et imaginaires de V, W, G,

---

de ses beaux travaux. Il m'avait manifesté notamment l'intention d'étudier le point de vue arithmétique, que j'ai laissé de côté au cours de ce travail (*voir* dernier alinéa du n° **1**).

G', G'', H, H', H''. Si, dans l'expression (1), on donne aux X_i des valeurs *réelles quelconques*, on trouve, au lieu d'un système de périodes ($\mathfrak{P}$), un système de valeurs complexes des variables

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} U &= U_1 + i\,U_2 = X_1 P_1 + \ldots + X_6 P_6 = X_1 + X_4 G + X_5 H'' + X_6 H', \\ V &= V_1 + i\,V_2 = X_1 P'_1 + \ldots + X_6 P'_6 = X_2 + X_4 H'' + X_5 G' + X_6 H, \\ W &= W_1 + i\,W_2 = X_1 P''_1 + \ldots + X_6 P''_6 = X_3 + X_4 H' + X_5 H + X_6 G''. \end{aligned}\right.$$

Ces valeurs sont d'ailleurs quelconques, puisqu'on sait qu'il n'existe entre les six systèmes de périodes aucune relation linéaire et homogène à coefficients réels. U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2 sont donc six fonctions linéaires indépendantes des X_i. Leur déterminant fonctionnel, qui se réduit à

$$\frac{\partial(U_2, V_2, W_2)}{\partial(X_4, X_5, X_6)} = \begin{vmatrix} G_2 & H''_2 & H'_2 \\ H''_2 & G'_2 & H_2 \\ H'_2 & H_2 & G''_2 \end{vmatrix},$$

n'est donc pas nul. On a ainsi une représentation des trois valeurs complexes U, V, W dans l'espace réel à six dimensions E_6 par le point de coordonnées $X_1, X_2, \ldots, X_6$. L'ensemble des points représentant des systèmes *équivalents* de valeurs de U, V, W [c'est-à-dire ne différant que par les trois composantes d'une période ($\mathfrak{P}$)] constitue un réseau cubique; nous dirons que ces points sont *équivalents*.

Considérons un *deuxième système* de fonctions abéliennes à trois variables u, v, w. Nous désignerons par (ϖ_i) le système de périodes q_i, q'_i, q''_i, et désignerons pour le reste, par des petites lettres, les quantités analogues à celles qui, à propos du premier système, ont été désignées par les majuscules correspondantes.

2. *Le problème de la transformation.* — Le problème de la transformation, au sens d'Hermite, est le suivant :

Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse établir entre les deux groupes de variables des relations de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} U &= l\,u + m\,v + n\,w, \\ V &= l'\,u + m'\,v + n'\,w, \\ W &= l''\,u + m''\,v + n''\,w. \end{aligned}\right.$$

et telles que les fonctions abéliennes du premier système s'expriment rationnellement en fonction de celles du second.

Nous dirons que la transformation (3) fait passer des variables U, V, W aux variables u, v, w; ou du premier système de périodes au second.

5. *Mise en équation du problème.* — Pour que les conditions du problème posé soient vérifiées, il faut et il suffit que, toutes les fois que u, v, w augmentent respectivement des trois composantes d'une période (ϖ), U, V, W augmentent des trois composantes d'une période $(\mathfrak{P})$. A chaque période (ϖ_i) correspond ainsi une période

$$(4)\qquad a_{i,1}(\mathfrak{P}_1) + a_{i,2}(\mathfrak{P}_2) + \ldots + a_{i,6}(\mathfrak{P}_6),$$

les $a_{i,j}$ étant des entiers. A la période

$$(\varpi) = x_1(\varpi_1) + x_2(\varpi_2) + \ldots + x_6(\varpi_6)$$

correspond alors la période

$$(\mathfrak{P}) = X_1(\mathfrak{P}_1) + X_2(\mathfrak{P}_2) + \ldots + X_6(\mathfrak{P}_6),$$

les X_j étant donnés par la formule

$$(5)\qquad X_j = a_{1,j}x_1 + a_{2,j}x_2 + \ldots + a_{6,j}x_6 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Pour avoir les relations entre les coefficients $a_{i,j}$ et les périodes, égalons les composantes de la période (4) aux valeurs fournies par les formules (3). Il vient ainsi, en remplaçant les P, P′, P″ par leurs valeurs,

$$(6)\qquad \begin{cases} l\,q_i + m\,q'_i + n\,q''_i = a_{i,1} + a_{i,4}\,G + a_{i,5}\,H'' + a_{i,6}\,H', \\ l'\,q_i + m'\,q'_i + n'\,q''_i = a_{i,2} + a_{i,4}\,H'' + a_{i,5}\,G' + a_{i,6}\,H, \\ l''\,q_i + m''\,q'_i + n''\,q''_i = a_{i,3} + a_{i,4}\,H' + a_{i,5}\,H + a_{i,6}\,G''. \end{cases}$$

Désignons les seconds membres par b_i, b'_i, b''_i. Pour $i = 1, 2, 3$, il vient

$$\begin{array}{lll} l = b_1, & m = b_2, & n = b_3, \\ l' = b'_1, & m' = b'_2, & n' = b'_3, \\ l'' = b''_1, & m'' = b''_2, & n'' = b''_3. \end{array}$$

Les formules (6), pour $i = 4, 5, 6$, deviennent alors

$$(7)\quad \begin{cases} b_i = b_1 q_i + b_2 q'_i + b_3 q''_i, \\ b'_i = b'_1 q_i + b'_2 q'_i + b'_3 q''_i, \\ b''_i = a''_1 q_i + b''_2 q''_i + b''_3 q''_i, \end{cases}$$

soit neuf relations entre les coefficients $\alpha_{i,j}$ et les périodes des deux systèmes.

4. *La transformation adjointe.* — En développant le système précédent, on vérifie aisément qu'on ne le change pas en effectuant simultanément les opérations suivantes :

1° Sur les périodes : permuter les deux systèmes de périodes;

2° Sur les coefficients : remplacer chaque coefficient d'indices i, j par celui d'indice $j \pm 3$, $i \pm 3$ (le signe $\pm$ ne peut donner lieu à aucune incertitude puisque les indices varient de 1 à 6) et changer en outre de signe les coefficients ayant un indice égal à 1, 2 ou 3 et l'autre à 4, 5, 6.

Si l'on range les coefficients en un tableau carré, divisé en quatre carrés de neuf éléments, l'opération indiquée revient à ceci : remplacer chaque carré partiel par son symétrique par rapport au centre du tableau; remplacer ensuite chaque élément par son symétrique par rapport à la diagonale principale; changer le signe des éléments des carrés partiels traversés par la seconde diagonale.

Si une transformation de coefficients $\alpha_{i,j}$ fait passer du premier système de périodes au second, il lui correspond, par l'opération précédente, une transformation faisant passer du second système de périodes au premier. Ces deux transformations sont dites *adjointes* l'une de l'autre.

Entre les neuf équations (7) nous pouvons éliminer les périodes d'un même système. On obtient ainsi deux nouveaux systèmes de trois équations qui se déduisent l'un de l'autre en permutant les deux systèmes de périodes, en changeant leurs signes, et en remplaçant chaque coefficient par le coefficient correspondant de la transformation adjointe. Il suffit de former l'un d'eux; nous allons par exemple éliminer les périodes du deuxième système.

3. *Élimination des périodes du deuxième système.* — Pour $i=4$, les équations (7) donnent

$$b_4 = b_1 g + b_2 h'' + b_3 h';$$
$$b'_4 = b'_1 g + b'_2 h'' + b'_3 h',$$
$$b''_4 = b''_1 g + b''_2 h'' + b''_3 h'.$$

L'élimination de g donne les équations

$$(8)\quad \begin{cases} (b', b'')_{1,4} = (b', b'')_{1,2} h'' + (b', b'')_{1,3} h', \\ (b'', b)_{1,4} = (b'', b)_{1,2} h'' + (b'', b)_{1,3} h', \\ (b, b')_{1,4} = (b, b')_{1,2} h'' + (b, b')_{1,3} h', \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(b', b'')_{i,j} = b'_i b''_j - b''_i b'_j,$$
$$(b'', b)_{i,j} = b''_i b_j - b_i b''_j,$$
$$(b, b')_{i,j} = b_i b'_j - b'_i b_j.$$

De même, en faisant $i=5$ et $i=6$ dans les équations (7), on trouve

$$(8')\quad \begin{cases} (b', b'')_{2,5} = (b', b'')_{2,3} h + (b', b'')_{2,1} h'', \\ (b'', b)_{2,5} = (b'', b)_{2,3} h + (b'', b)_{2,1} h'', \\ (b, b')_{2,5} = (b, b')_{2,3} h + (b, b')_{2,1} h''. \end{cases}$$

$$(8'')\quad \begin{cases} (b', b'')_{3,6} = (b', b'')_{3,1} h' + (b', b'')_{3,2} h, \\ (b'', b)_{3,6} = (b'', b)_{3,1} h' + (b'', b)_{3,2} h, \\ (b, b')_{3,6} = (b, b')_{3,1} h' + (b, b')_{3,2} h. \end{cases}$$

En ajoutant les équations de même rang des systèmes (8), (8') et (8''), les périodes du deuxième système disparaissent; il vient

$$(9)\quad \begin{cases} (b', b'')_{1,4} + (b', b'')_{2,5} + (b', b'')_{3,6} = 0, \\ (b'', b)_{1,4} + (b'', b)_{2,5} + (b'', b)_{3,6} = 0, \\ (b, b')_{1,4} + (b, b')_{2,5} + (b, b')_{3,6} = 0, \end{cases}$$

équations qui ne contiennent plus que les coefficients $a_{i,j}$ et les périodes du premier système. Ce sont donc les relations cherchées.

Pour les développer, introduisons les notations suivantes :

$$(a)_{i,j}^{h,k} = a_{h,i} a_{k,j} - a_{h,j} a_{k,i},$$
$$(10)\quad A_{i,j} = (a)_{i,j}^{1,4} + (a)_{i,j}^{2,5} + (a)_{i,j}^{3,6}$$

(les $A_{i,j}$ formant un tableau symétrique gauche), et appelons $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$,

$\mathcal{G}''$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ les mineurs correspondant respectivement à G, G', G'', H, H', H'' dans le déterminant

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} \mathrm{G}, & \mathrm{H}'', & \mathrm{H}' \\ \mathrm{H}'', & \mathrm{G}', & \mathrm{H} \\ \mathrm{H}', & \mathrm{H}, & \mathrm{G}'' \end{vmatrix}. \tag{11}$$

En développant $(b', b'')_{1.4}$ on trouve

$$(a)^{1.4}_{2.3} + (a)^{1.4}_{2.6}\mathrm{G}'' - (a)^{1.4}_{3.5}\mathrm{G}' + [(a)^{1.4}_{2.5} - (a)^{1.4}_{3.6}]\mathrm{H} + (a)^{1.4}_{2.4}\mathrm{H}' - (a)^{1.4}_{3.4}\mathrm{H}''$$
$$+ (a)^{1.4}_{5.6}\mathcal{G} + (a)^{1.4}_{6.4}\mathcal{H}'' + (a)^{1.4}_{4.5}\mathcal{H}'.$$

On en déduit aisément l'expression développée de la première équation (9). Calculant de même celle des deux autres équations, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}_{5.6}\mathcal{G} + \mathrm{A}_{6.4}\mathcal{H}'' + \mathrm{A}_{4.5}\mathcal{H}' + \mathrm{A}_{2.6}\mathrm{G}'' - \mathrm{A}_{3.5}\mathrm{G}' + (\mathrm{A}_{2.5} - \mathrm{A}_{3.6})\mathrm{H} + \mathrm{A}_{2.4}\mathrm{H}' - \mathrm{A}_{3.4}\mathrm{H}'' + \mathrm{A}_{2.3} = 0, \\ \mathrm{A}_{5.6}\mathcal{H}'' + \mathrm{A}_{6.4}\mathcal{G}' + \mathrm{A}_{4.5}\mathcal{H} + \mathrm{A}_{3.4}\mathrm{G} - \mathrm{A}_{1.6}\mathrm{G}'' + (\mathrm{A}_{3.6} - \mathrm{A}_{1.4})\mathrm{H}' + \mathrm{A}_{3.5}\mathrm{H}'' - \mathrm{A}_{1.5}\mathrm{H} + \mathrm{A}_{3.1} = 0, \\ \mathrm{A}_{5.6}\mathcal{H}' + \mathrm{A}_{6.4}\mathcal{H} + \mathrm{A}_{4.5}\mathcal{G}'' + \mathrm{A}_{1.5}\mathrm{G}' - \mathrm{A}_{2.4}\mathrm{G} + (\mathrm{A}_{1.4} - \mathrm{A}_{2.5})\mathrm{H}'' + \mathrm{A}_{1.6}\mathrm{H} - \mathrm{A}_{2.6}\mathrm{H}' + \mathrm{A}_{1.2} = 0, \end{array}\right. \tag{12}$$

ces trois équations se déduisant de la première par permutations circulaires des indices ou quantités

$$(1, 2, 3);\quad (4, 5, 6);\quad (\mathrm{G}, \mathrm{G}', \mathrm{G}'');\quad (\mathrm{H}, \mathrm{H}', \mathrm{H}'').$$

Appelons *système de relations singulières entre les périodes* un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{E} \equiv \lambda\mathcal{G} + \lambda'\mathcal{H}'' + \lambda''\mathcal{H}' + \gamma'\mathrm{G}'' - \beta''\mathrm{G}' + (\beta' - \gamma'')\mathrm{H} + \alpha'\mathrm{H}' - \alpha''\mathrm{H}'' + \mu = 0, \\ \mathrm{E}' \equiv \lambda\mathcal{H}'' + \lambda'\mathcal{G}' + \lambda''\mathcal{H} + \alpha''\mathrm{G} - \gamma\mathrm{G}'' + (\gamma'' - \alpha)\mathrm{H}' + \beta''\mathrm{H}'' - \beta\mathrm{H} + \mu' = 0, \\ \mathrm{E}'' \equiv \lambda\mathcal{H}' + \lambda'\mathcal{H} + \lambda''\mathcal{G}'' + \beta\mathrm{G}' - \alpha'\mathrm{G} + (\alpha - \beta')\mathrm{H}'' + \gamma\mathrm{H} - \gamma'\mathrm{H}' + \mu'' = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

On voit que, pour que la transformation de coefficients $a_{i,j}$ puisse faire passer du premier système de périodes au second, il faut que les périodes du premier système vérifient un système de relations singulières de coefficients

$$\left\{\begin{array}{lllll} \alpha = \mathrm{A}_{1.4}, & \beta = \mathrm{A}_{1.5}, & \gamma = \mathrm{A}_{1.6}, & \lambda = \mathrm{A}_{5.6}, & \mu = \mathrm{A}_{2.3}, \\ \alpha' = \mathrm{A}_{2.4}, & \beta' = \mathrm{A}_{2.5}, & \gamma' = \mathrm{A}_{2.6}, & \lambda' = \mathrm{A}_{6.4}, & \mu' = \mathrm{A}_{3.1}, \\ \alpha'' = \mathrm{A}_{3.4}, & \beta'' = \mathrm{A}_{3.5}, & \gamma'' = \mathrm{A}_{3.6}, & \lambda'' = \mathrm{A}_{4.5}, & \mu'' = \mathrm{A}_{1.2}, \end{array}\right. \tag{14}$$

les $\mathrm{A}_{i,j}$ étant définis par la formule (10). De même, en utilisant la notation de transformation adjointe, on voit que les périodes du second système vérifient un système de relations singulières de coefficients

$$(14')\quad \begin{cases} \alpha = B_{1,4}, & \beta = B_{2,4}, & \gamma = B_{3,4}, & \lambda = B_{2,3}, & \mu = B_{5,6}, \\ \alpha' = B_{1,5}, & \beta' = B_{2,5}, & \gamma' = B_{3,5}, & \lambda' = B_{3,1}, & \mu' = B_{6,4}, \\ \alpha'' = B_{1,6}, & \beta'' = B_{2,6}, & \gamma'' = B_{3,6}, & \lambda'' = B_{1,2}, & \mu'' = B_{4,5}, \end{cases}$$

avec

$$B_{i,j} = (a)_{1,4}^{i,j} + (a)_{2,5}^{i,j} + (a)_{3,6}^{i,j}.$$

6. *Transformations ordinaires et singulières.* — Les $a_{i,j}$ étant des entiers, il en est de même des $A_{i,j}$. On voit alors qu'il y a deux cas à distinguer:

Premier cas. — Les coefficients du système (12) sont tous nuls, c'est-à-dire que

$$(15)\qquad \alpha = \beta' = \gamma'',$$

tous les autres coefficients du tableau (14) étant nuls.

Dans ce cas, la transformation (5) aussi bien que la transformation inverse s'applique à tout système de périodes. Le système de relations singulières déduit du tableau (14) est donc identiquement vérifié en même temps que celui déduit du tableau (14′). Une telle transformation est dite *transformation ordinaire* ou *transformation d'Hermite*.

Deuxième cas. — Les coefficients du tableau (14) ne sont pas tous nuls. La transformation définie par les coefficients $a_{i,j}$ est alors dite *transformation singulière*. Elle ne s'applique qu'aux systèmes de périodes vérifiant les relations singulières.

On remarquera que, si les périodes sont quelconques, non seulement elles ne vérifient pas le système formé avec les coefficients considérés, mais elles ne vérifient aucun système analogue à coefficients entiers. Il n'existe alors aucune transformation singulière s'appliquant à ces fonctions.

7. A partir du Chapitre II, nous nous attacherons principalement à l'étude des relations singulières au point de vue algébrique, considérant des systèmes de relations à coefficients quelconques. A chacun de ces systèmes correspondent, par les formules (10), des systèmes de coefficients $a_{i,j}$ (dépendant de 21 paramètres), à chacun desquels correspond une transformation homographique (5); mais une telle transformation, n'étant pas à coefficients entiers, ne correspond pas à une solution du problème de la transformation des fonctions abéliennes.

Remarquons que, même au point de vue algébrique auquel nous nous plaçons, il ne faut considérer que les systèmes de coefficients $a_{i,j}$ dont le déterminant ne soit pas nul. Or ce déterminant, que nous désignerons par Δ, s'exprime en fonction des coefficients $a_{i,j}$. On a, en effet,

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,6} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \ldots & a_{6,6} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & -a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & -a_{6,1} & -a_{6,2} & -a_{6,6} \end{vmatrix},$$

ou, en faisant le produit par lignes,

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,6} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{6,1} & \ldots & A_{6,6} \end{vmatrix}.$$

Il n'y a donc à considérer que les tableaux de coefficients $A_{i,j}$ dont le déterminant ne soit pas nul. Or les coefficients

$$\alpha = A_{1,4} = -A_{4,1}, \qquad \beta' = A_{2,5} = -A_{5,2} \qquad \text{et} \qquad \gamma'' = A_{3,6} = -A_{6,3}$$

n'interviennent dans les relations singulières que par leurs différences; on peut leur ajouter une même constante σ sans changer le système (13).

Le déterminant Δ^2 est de degré 6 en σ, le terme de plus haut degré étant σ^6. Parmi les tableaux de coefficients $A_{i,j}$ correspondant à un même système de relations singulières, il y en a donc six au plus ne convenant pas, même au point de vue algébrique auquel nous nous plaçons.

Dans le cas des transformations d'Hermite, l'expression de Δ^2 se simplifie. Appelons k la valeur commune des coefficients (15). On a

$$A_{1,4} = A_{2,5} = A_{3,6} = -A_{4,1} = -A_{5,2} = -A_{6,3} = k,$$

les autres coefficients $A_{i,j}$ étant nuls, et, par suite,

$$\Delta^2 = k^6, \qquad \Delta = \pm k^3.$$

Comme il s'agit d'une identité entre deux fonctions algébriques entières des coefficients $a_{i,j}$, le signe qui convient ne peut changer, et il suffit d'une vérification sur un exemple numérique pour s'assurer que c'est le signe $+$. On a donc

$$\Delta = k^3.$$

De l'expression de Δ^2 résulte évidemment que les six tableaux de coefficients $A_{i,j}$ que nous avons considérés comme ne convenant pas, sont ici confondus; cela ne peut évidemment pas se produire pour une transformation singulière.

Qu'il s'agisse de transformations ordinaires ou singulières, on peut remarquer que le déterminant Δ ne change pas si l'on remplace une transformation par son adjointe (il en est, par suite, de même de k pour une transformation ordinaire), et qu'on peut toujours le supposer positif en changeant au besoin le signe des périodes G, G', G'', H, H', H''; c'est ce que nous ferons.

Dans le cas où les coefficients $a_{i,j}$ sont entiers, ce déterminant a alors une signification simple. Par les formules (5), à un cube de côté 1 dans l'espace e_6 correspond dans l'espace E_6 un volume égal à Δ, contenant exactement Δ points équivalents à tout point donné. Il leur correspond alors inversement Δ points de l'espace e_6, situés dans un même cube de côté 1 et en général distincts, par suite non équivalents. En raison de la relation entre les espaces E_6 et e_6 et les systèmes de variables U, V, W et u, v, w, on voit que Δ indique le nombre de systèmes de valeurs de u, v, w non équivalents, correspondant à un même système de valeurs de U, V, W. C'est ce qu'on appelle l'*ordre* de la transformation considérée.

8. *Représentation géométrique dans l'espace* E_5 [1]. — Consi-

[1] L'intérêt de cette représentation, ou de la représentation analogue dans le cas des fonctions abéliennes de deux variables, a déjà été signalé par M. G. Humbert (Cours de 1908-1909 au Collège de France; *voir* sur ce sujet la Thèse de G. Cotty).

dérons maintenant les X_i comme des coordonnées homogènes dans l'espace E_5 à cinq dimensions. Les expressions (1), égalées à o, représentent trois plans, dont l'intersection est ce que nous appellerons une *droite*. (Dans la géométrie des espaces à $2n+1$ dimensions, il est souvent commode d'appeler *droite* une variété linéaire à n dimensions.)

Mais ce n'est pas une droite quelconque, puisqu'il existe trois relations entre les périodes Q_i, Q'_i, Q''_i. Les équations d'une droite pouvant être résolues en général par rapport aux coordonnées X_1, X_2, X_3, et écrites sous la forme

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &X_1+X_4G\ \ +X_5H''+X_6H'_1=0,\\ &X_2+X_4H''_1+X_5G'\ +X_6H\ \ =0,\\ &X_3+X_4H'\ +X_5H_1\ +X_6G''=0,\end{aligned}\right.$$

les conditions pour que les premiers membres puissent être identifiés aux expressions (1) sont évidemment

$$(17)\qquad H=H_1,\qquad H'=H'_1,\qquad H''=H''_1.$$

Nous appellerons *complexe* l'ensemble des droites dont les coefficients vérifient *trois* relations linéaires. Les conditions considérées peuvent s'exprimer en disant que les droites appartiennent au complexe C défini par les relations (17).

Considérons maintenant les formules (5), qui définissent les relations entre les X et les x; elles représentent une transformation homographique dans l'espace E_5. Par les formules (3) équivalentes aux formules (5), on voit que la droite D

$$U=V=W=0,$$

qui définit le premier système de périodes et appartient au complexe C, a pour transformée la droite d

$$u=v=w=0.$$

Pour que cette droite corresponde à un système de périodes, il faut qu'elle appartienne au complexe C, c'est-à-dire que les expressions

$$\begin{aligned} u\ &=x_1+x_4g\ \ +x_5h''+x_6h'_1,\\ v\ &=x_2+x_4h''_1+x_5g'\ +x_6h,\\ w&=x_3+x_4h'\ +x_5h_1\ +x_6g''\end{aligned}$$

obtenues en transformant les équations de la droite D par la transformation homographique (5), soient telles que

$$h = h_1, \qquad h' = h'_1, \qquad h'' = h''_1.$$

C'est précisément en écrivant qu'il en est ainsi que nous avons obtenu le système (12). Dans notre interprétation géométrique, *les relations singulières déduites du tableau* (14) *sont donc celles qui expriment que la transformée de la droite* D *par la transformation* (5) *appartient au complexe* C.

De même les relations singulières déduites du tableau (14') *expriment que la droite* D *est la transformée d'une droite de* C.

9. La différence entre les transformations ordinaires et les transformations singulières a alors une signification évidente :

Le complexe C peut se correspondre à lui-même par la transformation homographique considérée. Toute droite de C a alors pour transformée une droite de C, correspondant à un système de périodes. On est (du moins si les coefficients sont entiers) dans le cas des transformations d'Hermite.

Dans le cas contraire, le complexe C se transforme par la transformation (5) en un autre complexe C_1, et par la transformation inverse en un complexe C_{-1}. Les seules droites correspondant à un système de périodes dont les transformées correspondent aussi à un système de périodes sont les droites appartenant à la fois à C et à C_{-1}; leurs transformées appartiennent à la fois à C et à C_1. On est dans le cas des transformations singulières.

Les relations singulières déduites du tableau (14) sont alors celles qui expriment qu'une droite de C appartient à C_{-1}. Celles déduites du Tableau (14') expriment qu'elle appartient à C_1.

On échange évidemment les rôles de C_1 et C_{-1} en remplaçant la transformation (5) par son adjointe.

10. *Transformation des coefficients* $B_{i,j}$. — Il peut être utile de savoir ce que devient le tableau des coefficients (14) lorsqu'on transforme les périodes par une transformation de la forme (5) autre que celle à laquelle il est lié par les formules du n° 5, en particulier lorsque cette transformation est une transformation d'Hermite. Géométriquement cela revient à transformer le complexe C par une transformation homographique

$$(18)\qquad X_j = \alpha_{1,j}x_1 + \alpha_{2,j}x_2 + \ldots + \alpha_{6,j}x_6 \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6),$$

analogue à la transformation (5).

Traitons ce problème en définissant d'abord le complexe C par la transformation corrélative qui lui est liée; elle est de la forme

$$(19)\qquad U_i = \mathcal{B}_{i,1}X_1 + \mathcal{B}_{i,2}X_2 + \ldots + \mathcal{B}_{i,6}X_6 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

les U_i étant des coordonnées tangentielles et les $\mathcal{B}_{i,j}$ constituant un tableau symétrique gauche. D'autre part, la transformation (18) s'écrit, en coordonnées tangentielles,

$$(18')\qquad u_i = \alpha_{i,1}U_1 + \alpha_{i,2}U_2 + \ldots + \alpha_{i,6}U_6 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Des formules (18), (18′) et (19), on déduit

$$u_i = \sum_h \sum_k \sum_j \alpha_{i,h}\mathcal{B}_{h,k}\alpha_{j,k}x_j = \sum \mathcal{B}'_{i,j}x_j,$$

en posant

$$(20)\qquad \mathcal{B}'_{i,j} = \sum_h \sum_k \alpha_{i,h}\alpha_{j,k}\mathcal{B}_{h,k}.$$

Dans ces formules, tous les indices varient de 1 à 6.

Cette formule résout le problème de la transformation des coefficients $\mathcal{B}_{i,j}$. Il reste à établir les relations entre les coefficients $\mathcal{B}_{i,j}$ et $B_{i,j}$ relatifs à un même complexe.

Je dis d'abord que les coefficients $\mathcal{B}_{i,j}$ relatifs au complexe C sont

$$\mathcal{B}_{1,4} = \mathcal{B}_{2,5} = \mathcal{B}_{3,6} = 1, \qquad \mathcal{B}_{4,1} = \mathcal{B}_{5,2} = \mathcal{B}_{3,6} = -1,$$

tous les autres étant nuls. Cela revient à dire que toute droite de C, c'est-à-dire toute droite de la forme

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 + X_4 G + X_5 H'' + X_6 H' = 0, \\ X_2 + X_4 H'' + X_5 G' + X_6 H = 0, \\ X_3 + X_4 H' + X_5 H' + X_6 G'' = 0, \end{array}\right.$$

est transformée en elle-même par la transformation

$$(21)\qquad \begin{cases} U_1 = X_4, & U_2 = X_5, & U_3 = X_6, \\ U_4 = -X_1, & U_5 = -X_2, & U_6 = -X_3. \end{cases}$$

En effet, les trois plans (17) ont pour transformés, par cette transformation, les points de coordonnées

$$\begin{array}{cccccc} G, & H'', & H', & 1, & 0, & 0, \\ H'', & G', & H, & 0, & 1, & 0, \\ H', & H, & G'', & 0, & 0, & 1, \end{array}$$

qui sont situés sur ces plans.

Les coefficients $\mathfrak{B}_{i,j}$ relatifs au complexe C_1, transformé de C par les formules (5), se déduisent des précédents par la formule (20). Il vient ainsi pour ces coefficients

$$\mathfrak{B}_{i,j} = (a)^{i,j}_{1,4} + (a)^{i,j}_{2,5} + (a)^{i,j}_{3,6} = B_{i,j}.$$

Les deux systèmes de coefficients $B_{i,j}$ et $\mathfrak{B}_{i,j}$ relatifs à un même complexe sont donc identiques, et la formule (20) donne

$$(22)\qquad B'_{i,j} = \sum_k \sum_k \alpha_{i,h}\alpha_{j,k} B_{h,k}.$$

Il suffit d'utiliser la notion de transformation adjointe pour avoir la formule analogue relative aux $A_{i,j}$.

De la formule (22) résulte sans difficulté que, si la transformation (18) est une transformation d'Hermite d'ordre 1 :

1° Le déterminant des coefficients $B_{i,j}$ est un invariant;

2° La somme $\alpha + \beta' + \gamma'' = B_{1,4} + B_{2,5} + B_{3,6}$ est un invariant.

Un calcul un peu plus long, mais sans difficulté, montre que l'expression

$$\beta'\gamma'' - \alpha^2 + \gamma''\alpha - \beta'^2 + \alpha\beta' - \gamma''^2 - \lambda\mu - \lambda'\mu' - \lambda''\mu''$$

est aussi un invariant.

11. *Les fonctions intermédiaires singulières.* — Il existe un autre moyen de parvenir aux relations singulières.

On appelle *fonction intermédiaire* toute fonction entière de u, v, w qui se reproduit, multipliée par une exponentielle de la forme $ce^{lu+mv+nw}$, quand u, v, w augmentent d'une période. En désignant par $f(u, v, w)$ une telle fonction, on a ainsi

$$f(u+q_i, v+q'_i, w+q''_i) = c_i e^{l_i u + m_i v + n_i w} f(u, v, w)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 6).$$

En multipliant $f(u, v, w)$ par une exponentielle à exposant du second degré en u, v, w, on peut s'arranger de manière que le produit, que nous désignerons par $\varphi(u, v, w)$, vérifie les relations

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(u+1, v, w) &= \varphi(u, v, w)e^{\theta' w},\\ \varphi(u, v+1, w) &= \varphi(u, v, w)e^{\theta'' u},\\ \varphi(u, v, w+1) &= \varphi(u, v, w)e^{\theta v}.\end{aligned}\right.$$

Les trois autres relations s'écriront

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(u+g, v+h'', w+h') &= c\,e^{lu+mv+nw}\,\varphi(u, v, w),\\ \varphi(u+h'', v+g', w+h) &= c'\,e^{l'u+m'v+n'w}\,\varphi(u, v, w),\\ \varphi(u+h', v+h, w+g'') &= c''\,e^{l''u+m''v+n''w}\,\varphi(u, v, w).\end{aligned}\right.$$

Les coefficients θ, l, m, n ne peuvent d'ailleurs pas être quelconques. Il faut qu'en ajoutant successivement deux périodes, on obtienne un résultat indépendant de l'ordre des périodes.

En combinant deux à deux les équations (23), on trouve ainsi

$$\theta = 2\pi i\lambda, \qquad \theta' = 2\pi i\lambda', \qquad \theta'' = 2\pi i\lambda'',$$

λ, λ', λ'' étant des entiers positifs, nuls ou négatifs.

En combinant chacune des équations (23) avec chacune des équations (24), il vient

$$\begin{aligned} l &= 2\pi i(\alpha+\lambda' H'), & m &= 2\pi i(\beta+\lambda' G), & n &= 2\pi i(\gamma+\lambda H''),\\ l' &= 2\pi i(\alpha'+\lambda' H), & m' &= 2\pi i(\beta'+\lambda'' H''), & n' &= 2\pi i(\gamma'+\lambda G'),\\ l'' &= 2\pi i(\alpha''+\lambda' G''), & m'' &= 2\pi i(\beta''+\lambda'' H'), & n'' &= 2\pi i(\gamma''+\lambda H),\end{aligned}$$

α, β, γ, α', …, γ'' étant 9 entiers.

En combinant enfin deux à deux les équations (24), et appelant

μ, μ', μ'' de nouveaux entiers.

$$\begin{aligned}
l''\mathrm{H}'' + m''\mathrm{G}' + n''\mathrm{H} &= l'\mathrm{H}' + m'\mathrm{H} + n'\mathrm{G}'' + 2\pi i\mu,\\
l\,\mathrm{H}' + m\,\mathrm{H} + n\,\mathrm{G}'' &= l''\mathrm{G} + m''\mathrm{H}'' + n''\mathrm{H}' + 2\pi i\mu',\\
l'\,\mathrm{G} + m'\mathrm{H}'' + n'\mathrm{H}' &= l\,\mathrm{H}'' + m\,\mathrm{G}' + n\,\mathrm{H} + 2\pi i\mu'',
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte des valeurs de l, m, n, ..., n'', et appelant toujours $\mathcal{G}$, ..., $\mathcal{H}''$ les mineurs du déterminant des périodes

$$\begin{aligned}
&\lambda\mathcal{G} + \lambda'\mathcal{H}'' + \lambda''\mathcal{H}' + \gamma'\mathrm{G}'' - \beta''\mathrm{G}' + (\beta' - \gamma'')\mathrm{H} + \alpha'\mathrm{H}' - \alpha''\mathrm{H}'' + \mu = 0,\\
&\lambda\mathcal{H}'' + \lambda'\mathcal{G}' + \lambda''\mathcal{H} + \alpha''\mathrm{G} - \gamma\,\mathrm{G}'' + (\gamma'' - \alpha)\mathrm{H}' + \alpha''\mathrm{H}'' - \alpha\,\mathrm{H} + \mu' = 0,\\
&\lambda\mathcal{H}' + \lambda'\mathcal{H} + \lambda''\mathcal{G}'' + \beta\,\mathrm{G}' - \alpha'\mathrm{G} + (\alpha - \beta')\mathrm{H}' + \alpha\,\mathrm{H} - \alpha''\mathrm{H}'' + \mu'' = 0.
\end{aligned}$$

Ce système n'est autre que notre système de relations singulières, sous la forme (14).

12. Les deux cas distingués au n° 6 sont encore à distinguer ici.

Premier cas. — Tous les coefficients des relations singulières sont nuls, de sorte que les périodes peuvent être quelconques. Posons encore

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = k.$$

Les relations (22) et (23) deviennent

$$\begin{aligned}
&\varphi(\mathrm{U}+1, \mathrm{V}, \mathrm{W}) = \varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), &\quad &\varphi(\mathrm{U}+\mathrm{G}, \mathrm{V}+\mathrm{H}'', \mathrm{W}+\mathrm{H}') = \mathrm{C}\,e^{2\pi i k\mathrm{U}}\,\varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}),\\
&\varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}+1, \mathrm{W}) = \varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), &\quad &\varphi(\mathrm{U}+\mathrm{H}'', \mathrm{V}+\mathrm{G}', \mathrm{W}+\mathrm{H}) = \mathrm{C}'e^{2\pi i k\mathrm{V}}\,\varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}),\\
&\varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}+1) = \varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}), &\quad &\varphi(\mathrm{U}+\mathrm{H}', \mathrm{V}+\mathrm{H}, \mathrm{W}+\mathrm{G}'') = \mathrm{C}''e^{2\pi i k\mathrm{W}}\,\varphi(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}).
\end{aligned}$$

La fonction φ est alors une *fonction thêta*. Ainsi, dans le cas où il n'y a pas de relations singulières entre les périodes, les seules fonctions intermédiaires sont les fonctions thêta et leurs produits par des exponentielles à exposant du second degré en U, V, W.

Deuxième cas. — Les coefficients des relations singulières ne sont pas tous nuls, de sorte que les périodes ne sont pas quelconques. On a un nouveau type de fonctions intermédiaires, qu'on appelle *fonctions intermédiaires singulières*.

L'existence d'un système de relations singulières à coefficients entiers, vérifié par un système de périodes donné, est donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des fonctions intermédiaires, autres que les fonctions thêta, admettant ces périodes.

Il était évident *a priori* que les deux propriétés que nous avons considérées successivement, l'existence de transformations singulières et l'existence des fonctions intermédiaires singulières, sont toutes les deux invariantes lorsqu'on transforme un système de périodes par une transformation d'Hermite. Mais cette remarque ne suffisait pas pour affirmer la simultanéité de ces deux propriétés. Les deux calculs que nous avons faits sont donc bien nécessaires.

(*A suivre.*)