JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL LÉVY

Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes de fonctions abéliennes à trois variables (suite et fin)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 255-334.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__255_0>

Sur les systèmes de relations singulières entre les périodes de fonctions abéliennes à trois variables

(*suite et fin*);

PAR PAUL LÉVY.

CHAPITRE II.

LES RELATIONS SINGULIÈRES DE L'OPÉRATION $\mathcal{J}$.

13. *Les relations singulières et le tableau des coefficients.* — Considérons, d'une part, le tableau $|T|$ formé par les quinze coefficients

$$\begin{array}{ccccc} \alpha, & \beta, & \gamma, & \lambda, & \mu, \\ \alpha', & \beta', & \gamma', & \lambda', & \mu', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \lambda'', & \mu''; \end{array}$$

d'autre part, le système (T) formé par les trois relations singulières

$$\begin{aligned} E &\equiv \lambda \mathcal{G} + \lambda' \mathcal{H}'' + \lambda'' \mathcal{H}' + \gamma' G'' - \beta'' G' + (\beta' - \gamma'') H + \alpha' H' - \alpha'' H'' + \mu = 0, \\ E' &\equiv \lambda \mathcal{H}'' + \lambda' \mathcal{G}' + \lambda'' \mathcal{H} + \alpha'' G - \gamma G'' + (\gamma'' - \alpha) H' + \beta'' H'' - \beta H + \mu' = 0, \\ E'' &\equiv \lambda \mathcal{H}' + \lambda' \mathcal{H} + \lambda'' \mathcal{G}'' + \beta G' - \alpha' G + (\alpha - \beta') H'' + \gamma H - \gamma' H' + \mu'' = 0. \end{aligned}$$

La donnée du tableau $|T|$ définit parfaitement le système (T). Mais l'inverse n'a pas lieu; comme nous l'avons déjà remarqué, on peut, sans changer le système (T), ajouter une même constante aux coefficients α, β', γ'', qui n'interviennent que par leurs différences dans les équations du système (T).

Nous désignerons par $\rho|T| + \rho_1|T_1|$ le tableau déduit des deux tableaux $|T|$ et $|T_1|$ en ajoutant les coefficients correspondants multipliés respectivement par ρ et ρ_1. Nous emploierons dans une acception analogue la notation $\rho(T) + \rho_1(T_1)$ concernant les systèmes. Nous désignerons par $|\tau|$ le tableau pour lequel

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = 1,$$

tous les autres coefficients étant nuls.

Avec ces notations, les tableaux qui correspondent à un même système (T) sont représentés par la formule

$$|T| + \sigma|\tau| \tag{25}$$

et ceux qui correspondent aux systèmes $\rho(T)$ sont représentés par

$$\rho|T| + \sigma|\tau|. \tag{25'}$$

Ces tableaux sont bien *distincts*, en ce sens que les transformations singulières de coefficients $a_{i,j}$ auxquelles ils correspondent par les formules (11) sont différentes, et que de même les fonctions intermédiaires singulières auxquelles ils correspondent par les formules du n° **11** sont différentes.

Parmi les tableaux (25) qui correspondent au système (T), il nous arrivera de considérer spécialement le tableau

$$|T| - \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3}|\tau|, \tag{26}$$

pour lequel la somme remplaçant $\alpha + \beta' + \gamma''$ est nulle. Nous l'appellerons *tableau moyen* du système (T). Son introduction nous permettra de définir des invariants qui ne dépendent que du système et non du tableau correspondant à ce système que l'on considère. Bien que ses coefficients puissent ne pas être entiers, nous introduirons dans les formules des coefficients numériques tels que les invariants soient entiers.

14. L'interprétation géométrique du n° **8** montre bien le sens de la différence entre le tableau $|T|$ et le système (T).

Le tableau $|T|$, ou plus exactement l'ensemble des tableaux $\rho|T|$, ρ étant une constante, correspond à un complexe Γ. Le tableau $|\tau|$ correspond au complexe C. Les tableaux rentrant dans la formule (25) définissent une *famille linéaire* de complexes contenant le complexe C.

Or les relations singulières expriment que la droite correspondant à un système de périodes, c'est-à-dire une droite du complexe C, appartient au complexe Γ. Elles ne changent donc pas si l'on remplace Γ par tout autre complexe du faisceau considéré (à l'exception bien entendu du complexe C lui-même). Le système (T) correspond, non au complexe Γ, mais à la famille linéaire définie par C et Γ.

15. *Formation des tableaux dérivés.* — Nous appellerons *tableau dérivé* d'un tableau |T| tout tableau tel que les transformations qui lui correspondent par la formule (11) s'appliquent à tout système de périodes auquel s'appliquent les transformations correspondant au tableau |T|. En d'autres termes, un tableau sera dérivé de |T| si le système de relations singulières qui lui correspond résulte algébriquement du système (T).

Les tableaux (25′) sont donc des tableaux dérivés du tableau |T|. Nous allons voir qu'il y en a d'autres, dont l'existence a été découverte par M. Humbert.

Pour la mettre en évidence, formons d'abord, entre les équations du système |T|, les combinaisons

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} F &\equiv G\,E + H''E' + H'E'' = 0,\\ F' &\equiv H''E + G'E' + H\,E'' = 0,\\ F'' &\equiv H'E + H\,E' + G''E'' = 0.\end{aligned}\right.$$

En appelant toujours D le déterminant des périodes, il vient

$$\begin{aligned} F &\equiv \lambda\,D + \gamma'\mathcal{G}' - \beta''\mathcal{G}'' - (\beta' - \gamma'')\,\mathcal{H} - \beta\,\mathcal{H}' + \gamma\,\mathcal{H}'' + \mu\,G + \mu' H'' + \mu'' H' = 0,\\ F' &\equiv \lambda' D + \alpha''\mathcal{G}'' - \gamma\,\mathcal{G} - (\gamma'' - \alpha)\,\mathcal{H}' - \gamma'\mathcal{H}'' + \alpha'\mathcal{H} + \mu\,H'' + \mu' G' + \mu'' H = 0,\\ F'' &\equiv \lambda'' D + \beta\,\mathcal{G} - \alpha'\mathcal{G}' - (\alpha - \beta')\,\mathcal{H}'' - \alpha''\mathcal{H} + \beta''\mathcal{H}' + \mu\,H' + \mu' H + \mu'' G'' = 0.\end{aligned}$$

Formons maintenant les combinaisons

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} E_1 &\equiv \lambda' F'' - \lambda'' F' + \alpha E + \alpha' E' + \alpha'' E'' = 0,\\ E'_1 &\equiv \lambda'' F - \lambda\,F'' + \beta\,E + \beta' E' + \beta'' E'' = 0,\\ E''_1 &\equiv \lambda\,F' - \lambda' F + \gamma\,E + \gamma' E' + \gamma'' E'' = 0.\end{aligned}\right.$$

En développant ces expressions, on constate sans peine que ces équations constituent un système (T_1) de relations singulières correspondant au tableau $|T_1|$ de coefficients

$$(29)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \lambda\ \mu - (\alpha), & \beta_1 = \lambda\ \mu' - (\alpha'), & \gamma_1 = \lambda\ \mu'' - (\alpha''), \\ \alpha'_1 = \lambda'\mu - (\beta), & \beta'_1 = \lambda'\mu' - (\beta'), & \gamma'_1 = \lambda'\mu'' - (\beta''), \\ \alpha''_1 = \lambda''\mu - (\gamma), & \beta''_1 = \lambda''\mu' - (\gamma'), & \gamma''_1 = \lambda''\mu'' - (\gamma''); \\ \lambda_1 = \lambda\alpha + \lambda'\beta + \lambda''\gamma, & \mu_1 = \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'', & \\ \lambda'_1 = \lambda\alpha' + \lambda'\beta' + \lambda''\gamma', & \mu'_1 = \mu\beta + \mu'\beta' + \mu''\beta'', & \\ \lambda''_1 = \lambda\alpha'' + \lambda'\beta'' + \lambda''\gamma'', & \mu''_1 = \mu\gamma + \mu'\gamma' + \mu''\gamma''; & \end{cases}$$

en désignant par (α), (β), ..., (γ'') les mineurs du déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

correspondant respectivement aux éléments α, β, ..., γ''.

Le système (T_1), et par suite tous les systèmes $\rho(T) + \rho_1(T_1)$, résultant algébriquement du système (T), tous les tableaux

$$(30)\qquad \rho|T| + \rho_1|T_1| + \sigma|\tau|$$

sont des tableaux dérivés du tableau $|T|$. Nous désignerons le tableau $|T_1|$ par le symbole

$$|T_1| = F(|T|);$$

l'opération $F(.)$ étant la transformation d'un tableau par les formules (29).

16. Il existe une relation linéaire à coefficients constants entre les six équations des systèmes (T) et (T_1). Les formules (28) donnent en effet

$$(31)\qquad \lambda E_1 + \lambda' E'_1 + \lambda'' E''_1 = \lambda_1 E + \lambda'_1 E' + \lambda''_1 E''.$$

17. *Répétition de l'opération* F. — La formule (30) donne-t-elle tous les tableaux dérivés du tableau $|T|$? En particulier, l'opération F effectuée sur le tableau $|T_1|$, ou sur un tableau quelconque rentrant dans la formule (30), en donne-t-elle de nouveaux?

On peut répondre *a priori* en observant qu'il n'est pas possible en général d'éliminer à la fois G, H'', H' entre les équations (T); l'élimination de G donne en effet les équations

$$E = 0, \qquad E'_1 = 0,$$

entre lesquelles l'élimination simultanée de H'' et H' n'est pas possible en général. Or, si l'on pouvait déduire de (T) un nouveau système de relations singulières (T_2) qui ne soit pas de la forme $\rho(T) + \rho_1(T_1)$, on pourrait éliminer G, H'', H' entre les équations de ces systèmes.

Nous ne développerons pas ces calculs; il est plus intéressant d'étudier les substitutions résultant de l'opération F effectuée sur les tableaux de la forme (30).

Commençons par effectuer cette opération sur les tableaux

$$|T'| = |T| + \sigma|\tau|$$

correspondant à un même système (T). Il résulte sans difficulté des formules (29) que

$$(32) \qquad |T'_1| = F(|T'|) = |T_1| + \sigma|T| - [\sigma^2 + \sigma(\alpha + \beta' + \gamma'')]|\tau|.$$

Effectuons maintenant l'opération F sur le tableau $|T_1|$. Un calcul facile donne

$$(33) \qquad F(|T_1|) = F^2(|T|) = K|T|,$$

en posant

$$\begin{aligned} K &= \lambda\mu_1 + \lambda'\mu'_1 + \lambda''\mu''_1 - \delta, \\ &= \lambda_1\mu + \lambda'_1\mu' + \lambda''_1\mu'' - \delta. \end{aligned}$$

Appliquons cette formule en remplaçant $|T|$ par $|T'|$. Tenant compte de la formule (32), il vient

$$(34) \qquad F(|T'_1|) = K'|T'|,$$

K' étant ce que devient K quand on ajoute σ aux coefficients α, β', γ'', c'est-à-dire

$$(35) \qquad K' = K + (\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1)\sigma - (\alpha + \beta' + \gamma'')\sigma^2 - \sigma^3.$$

La combinaison des formules (32), (34) et de la formule évidente

$$F(\rho|T|) = \rho^2 F(|T|)$$

permet de former

$$F(\rho|T| + \rho_1|T_1| + \sigma|\tau|).$$

La substitution considérée est donc parfaitement définie par ces formules.

18. *L'opération* $\mathcal{F}$. — Nous allons mettre en évidence des quantités qui soient des fonctions du système (T). Pour cela nous représenterons ce système par son tableau moyen, pour lequel

$$\alpha + \beta' + \gamma'' = 0, \tag{36}$$

qui se déduit d'un tableau quelconque $|T|$ correspondant au même système en retranchant $\frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3} |\tau|$. Le tableau

$$|\mathfrak{T}_1| = 3\,F\left(|T| - \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3} |\tau|\right) = \mathcal{F}(|T|)$$

correspond à un système, à coefficients entiers, que nous représenterons par

$$(\mathfrak{T}_1) = \mathcal{F}[(T)].$$

Les formules relatives à l'opération $\mathcal{F}$ se déduisent sans difficulté de celles relatives à l'opération F, en supposant que le tableau $|T'|$ vérifie la condition (36). Remarquons d'abord que, dans ce cas, K prend la forme

$$K' = \frac{J}{27} + \frac{1}{3}\sigma - \sigma^3, \tag{37}$$

les coefficients

$$J = 27K, \qquad I = 3(\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1) \tag{38}$$

étant des entiers, toutes les fois que le tableau considéré est dérivé par la formule (26) d'un tableau à coefficients entiers. Si d'ailleurs le système (T) est défini par un tableau $|T|$ ne vérifiant pas la condition (36), on ramène sans difficulté l'expression (35) à la forme (37) par le changement de variable

$$\sigma' = \sigma + \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3},$$

et les expressions de I et J en fonction des coefficients de ce tableau sont

$$(39) \qquad \begin{cases} \mathrm{I} = 3(\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1) + (\alpha + \beta' + \gamma'')^2, \\ \mathrm{J} = 27\mathrm{K} - 9(\alpha + \beta' + \gamma'')(\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1) - 2(\alpha + \beta' + \gamma'')^3. \end{cases}$$

Ayant écrit les expressions de I et de J dans le cas général, revenons au cas où l'on définit le système (T) par son tableau moyen. On a dans ce cas, par définition de l'opération $\mathfrak{F}$,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(|\mathrm{T}_1| + \sigma|\mathrm{T}|) &= 3\,\mathrm{F}\left(|\mathrm{T}_1| + \sigma|\mathrm{T}| - \frac{\alpha_1 + \beta'_1 + \gamma''_1}{3}|\tau|\right), \\ &= 3\,\mathrm{F}\left[|\mathrm{T}_1| + \sigma|\mathrm{T}| - \sigma^2|\tau| + \left(\sigma^2 - \frac{1}{9}\right)|\tau|\right]. \end{aligned}$$

En tenant compte des formules (32) et (34), et négligeant les termes en $|\tau|$, on trouve comme expression de ce tableau

$$3\,\mathrm{K}'|\mathrm{T}| + 3\left(\sigma^2 - \frac{1}{9}\right)(|\mathrm{T}_1| + \sigma|\mathrm{T}|) = 3\left(\sigma^2 - \frac{1}{9}\right)|\mathrm{T}_1| + \left(\frac{\mathrm{J}}{9} + \frac{2}{3}\mathrm{I}\sigma\right)|\mathrm{T}|.$$

Passant de ce tableau au système correspondant, remplaçant (T_1) par $\frac{1}{3}(\mathfrak{T}_1)$ et la lettre σ par la lettre ρ, on trouve

$$\mathfrak{F}\left[\frac{1}{3}(\mathfrak{T}_1) + \rho(\mathrm{T})\right] = \left(\frac{\mathrm{J}}{9} + \frac{2}{3}\mathrm{I}\rho\right)(\mathrm{T}) + \left(\rho^2 - \frac{1}{9}\right)(\mathfrak{T}_1),$$

puis, en tenant compte de l'homogénéité des formules (29) et introduisant un paramètre ρ_1,

$$(40) \qquad \mathfrak{F}[\rho(\mathrm{T}) + \rho_1(\mathfrak{T}_1)] = (2\mathrm{I}\rho\rho_1 + \mathrm{J}\rho_1^2)(\mathrm{T}) + (\rho^2 - \mathrm{I}\rho_1^2)(\mathfrak{T}_1).$$

Cette formule montre bien les substitutions résultant, parmi les systèmes

$$\rho(\mathrm{T}) + \rho_1(\mathfrak{T}_1),$$

de l'opération $\mathfrak{F}$.

19. *Formules concernant les entiers* I *et* J. — Appelons I_1 et J_1 ce que deviennent I et J lorsqu'on remplace le système (T) par son transformé $(\mathfrak{T}_1)$, et I′ et J′ ce qu'ils deviennent lorsqu'on remplace le système (T) par le système

$$(\mathrm{S}) = \rho(\mathrm{T}) + \rho_1(\mathfrak{T}_1).$$

La formule (40) permet de calculer ces quantités.

Pour $\rho = 0$, $\rho_1 = 1$, cette formule devient

$$(41) \qquad (\mathfrak{T}_2) = \mathcal{F}(\mathfrak{T}_1) = \mathrm{J}(\mathrm{T}) - \mathrm{I}(\mathfrak{T}_1).$$

Nous pouvons maintenant avoir deux expressions de $\mathcal{F}(\mathfrak{T}_2)$, l'une en remplaçant ρ et ρ_1 par J et $-$I dans la formule (40), l'autre en remplaçant (T) par $(\mathfrak{T}_1)$ dans la formule (41); il vient ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathfrak{T}_2) &= -\mathrm{I}^2\mathrm{J}(\mathrm{T}) + (\mathrm{J}^2 - \mathrm{I}^3)(\mathfrak{T}_1) \\ &= \mathrm{J}_1(\mathfrak{T}_1) - \mathrm{I}_1(\mathfrak{T}_2) = -\mathrm{I}_1\mathrm{J}(\mathrm{T}) + (\mathrm{J}_1 + \mathrm{I}\mathrm{I}_1)(\mathfrak{T}_1). \end{aligned}$$

Or les systèmes (T) et $(\mathfrak{T}_1)$ sont *distincts*, en ce sens qu'un système ne peut être mis que d'une seule manière sous la forme

$$c(\mathrm{T}) + c_1(\mathfrak{T}_1).$$

(Nous reviendrons plus loin sur ce point; il est évident que dans les cas exceptionnels où il n'en est pas ainsi, l'opération $\mathcal{F}$ n'introduisant pas un nouveau système, toutes les formules écrites deviennent sans intérêt.) En comparant les deux expressions de $\mathcal{F}(\mathfrak{T}_2)$, on a donc

$$(42) \qquad \mathrm{I}_1 = \mathrm{I}^2, \qquad \mathrm{J}_1 = \mathrm{J}^2 - 2\mathrm{I}^3.$$

On peut opérer de même en partant du système $(\mathfrak{S})$. La formule (40) donne son transformé $(\mathfrak{S}_1)$. On peut calculer $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_1)$, soit en remplaçant ρ par ρ_1 dans la formule (40) par $2\mathrm{I}\rho\rho_1 + \mathrm{J}\rho_1^2$ et $\rho^2 - \mathrm{I}\rho_1^2$, soit en remplaçant (T), $(\mathfrak{T}_1)$, I et J dans la formule (41) par $(\mathfrak{S})$ $(\mathfrak{S}_1)$, I' et J. Remplaçant encore dans cette formule $(\mathfrak{S})$ et $(\mathfrak{S}_1)$ par leurs expressions en fonction de (T) et $(\mathfrak{T}_1)$ et identifiant les deux expressions trouvées pour $\mathcal{F}(\mathfrak{S}_1)$, il vient, tous calculs faits,

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{I}' &= \mathrm{I}^2\rho_1^2 + \mathrm{J}\rho\rho_1 + \mathrm{I}\rho^2, \\ \mathrm{J}' &= (\mathrm{J}^2 - 2\mathrm{I}^3)\rho_1^3 + 3\mathrm{I}\mathrm{J}\rho\rho_1^2 + 6\mathrm{I}^2\rho^2\rho_1 + \mathrm{J}\rho^3. \end{aligned} \right.$$

Le discriminant de l'expression (37) est, au facteur numérique 27 près, $\mathrm{J}^2 - 4\mathrm{I}^3$. D'après les formules précédentes, il se transforme par l'opération $\mathcal{F}$ en

$$(44) \qquad (\mathrm{J}'^2 - 4\mathrm{I}'^3) = (\mathrm{J}^2 - 4\mathrm{I}^3)(\mathrm{J}\rho_1^3 + 3\mathrm{I}\rho\rho_1^2 - \rho^3)^2.$$

22. *Les systèmes exceptionnels.* — En général, le système $(\mathfrak{T}_1)$, quoique équivalent algébriquement au système initial (T), est *distinct* de lui, en ce sens que les coefficients de ces deux systèmes ne sont pas proportionnels. Lorsqu'ils le sont, nous dirons que le système (T) est *exceptionnel*.

La formule (32) montre que, parmi les tableaux correspondant à un système exceptionnel, il y en a un et un seul qui, transformé par l'opération F, donne un tableau multiple du tableau $|\tau|$. On démontre aisément qu'il est à coefficients entiers. Il suffit évidemment de le démontrer dans l'hypothèse où les coefficients du système (T) sont premiers entre eux. Dans ce cas, si $|T'|$ est un quelconque des tableaux correspondant à ce système, on a évidemment

$$F(|T'|) = c_1|T'| + c_2|\tau|,$$

c_1 et c_2 étant entiers. Le tableau à coefficients entiers

$$|T| = |T'| - c_1|\tau|,$$

d'après la formule (32), est alors tel que

$$F(|T|) = c|\tau|.$$

La répétition de l'opération F, d'après la formule (33), donne un tableau $K|T|$ multiple de $|T|$; mais le second membre, transformé par cette opération, donne $-c^2|\tau|$, comme on le voit en faisant $|T| = 0$, $\sigma = c$ dans la formule (32). La comparaison de ces deux résultats entraîne $c = K = 0$.

Parmi les tableaux correspondant à un système exceptionnel (T), il y en a donc un et un seul qui, transformé par l'opération F, donne un tableau identiquement nul. Nous l'appellerons *tableau exceptionnel* correspondant au système (T). Il est à coefficients entiers si le système est à coefficients entiers.

Les expressions de I et J, et la formule de définition de l'opération $\mathcal{F}$, en tenant compte toujours de la formule (32), deviennent, dans le cas d'un système exceptionnel,

$$(45) \qquad I = (\alpha + \beta' + \gamma'')^2, \qquad J = -2(\alpha + \beta' + \gamma'')^3,$$

$$(46) \qquad \mathcal{F}(T) = -(\alpha + \beta' + \gamma'')(T),$$

α, β', γ'' étant les coefficients du tableau exceptionnel correspondant au système considéré. On en déduit

$$J^2 - 4I^3 = 0. \tag{47}$$

23. *Les systèmes exceptionnels dérivés d'un système donné.* — Soient (T) un système non exceptionnel, $|T|$ son tableau moyen. Son transformé $(\mathfrak{T}_1)$ par l'opération $\mathcal{F}$ est distinct de lui. La formule (40) montre alors que la condition pour qu'un système dérivé de (T), c'est-à-dire de la forme

$$(S) = \rho(T) + \rho_1(\mathfrak{T}_1),$$

soit exceptionnel, est

$$\frac{2I\rho\rho_1 + J\rho_1^2}{\rho} = \frac{\rho^2 - I\rho_1^2}{\rho_1},$$

c'est-à-dire

$$J\rho_1^3 + 3I\rho\rho_1^2 - \rho^3 = 0. \tag{48}$$

Ce résultat peut se déduire des formules des nos **17** et **18** sans utiliser la formule (40). Le système (s) est en effet, à un facteur constant près, d'après la formule (32), celui qui correspond au tableau

$$|T'_1| = F(|T'|) = F(|T| + \sigma|\tau|), \qquad \left(\sigma = \frac{\rho}{3\rho_1}\right).$$

La répétition de l'opération F, d'après la formule (33), donne le tableau $K'|T'|$, correspond certainement à un système distinct de celui auquel correspond $|T'_1|$, sauf si $K' = 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que le système (s) soit exceptionnel est donc

$$K' = \frac{J}{27} + \frac{I}{3}\sigma - \sigma^3 = 0.$$

En remplaçant σ par sa valeur, on retrouve la condition (48).

Parmi les systèmes dérivés de (T), il y en a donc trois, déterminés chacun à un facteur constant près, qui sont exceptionnels. La condition pour que deux soient confondus est

$$J^2 - 4I^3 = 0. \tag{49}$$

Dans ce cas, le système (s), correspondant à la racine double de l'équation (48), sera dit *système exceptionnel double* dérivé de (T). Les systèmes dérivés de (T) étant les mêmes que ceux dérivés d'un quelconque des systèmes (s) autres que les systèmes exceptionnels, la formule (49) entraîne la formule analogue

$$J'^2 - 4I'^3 = 0. \tag{50}$$

C'est bien ce que montrait d'une manière plus précise la formule (44). Cette formule, ou la formule (47) applicable à tout système exceptionnel, montre de plus que l'égalité (50) est vérifiée, même si l'égalité (49) ne l'est pas, pour les trois systèmes exceptionnels dérivés de (T).

Dans le cas où la condition (49) est vérifiée, on a pour le système exceptionnel double dérivé de (T)

$$I' = J' = 0. \tag{51}$$

Ces formules se déduisent en effet, en tenant compte des expressions (43) de I' et J', du fait que $\frac{\rho}{\rho_1}$ est une racine double de l'équation (48). Inversement, si la condition (51) est vérifiée pour un système *exceptionnel* (s) dérivé de (T) (cela ne fait qu'une condition puisque $J'^2 - 4I'^3$ est nul de toute façon), on vérifie aisément que la valeur de $\frac{\rho}{\rho_1}$ correspondant à (s) est une racine double de l'équation (48). La condition (51) est donc *nécessaire et suffisante* pour qu'un système exceptionnel (s), dérivé de (T), soit double. Il est à remarquer qu'elle ne dépend que du système exceptionnel considéré, et non du système (T) dont il est dérivé, ce qui n'était nullement évident *a priori*. On peut donc employer sans ambiguïté l'expression système *exceptionnel double*.

D'après l'expression (45) des entiers I et J relatifs à un système exceptionnel, la condition (51), qui indique qu'un tel système est double, indique aussi que son tableau exceptionnel est identique à son tableau moyen, c'est-à-dire, d'après la définition même de l'opération $\mathfrak{F}$, que son transformé par cette opération est identiquement nul.

Il peut arriver que les trois systèmes exceptionnels dérivés de (T) soient confondus. Étant donnée la forme de l'équation (48), la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$I = J = 0.$$

Dans ce cas, il y a un système *exceptionnel triple dérivé de* (T), pour lequel la condition (51) est certainement vérifiée. Mais on ne peut pas reconnaître d'après les coefficients de ce système s'il en est ainsi. Nous verrons qu'étant donné un système exceptionnel double quelconque (s), on peut toujours trouver des systèmes (T) tel que (s) soit un système exceptionnel triple dérivé de (T).

24. *Recherche directe des systèmes exceptionnels.* — Chaque système exceptionnel étant représenté d'une manière unique par son tableau exceptionnel, il nous suffit de trouver la forme générale d'un tel tableau. Les conditions pour qu'un tableau $|T|$ soit exceptionnel s'obtiennent, d'après la définition même, en annulant les coefficients de son transformé $|T_1|$, donnés par les formules (29).

Il résulte d'abord des neuf premières de ces formules que le déterminant δ a pour adjoint

$$\delta^2 = \begin{vmatrix} \lambda\mu & \lambda\mu' & \lambda\mu'' \\ \lambda'\mu & \lambda'\mu' & \lambda'\mu'' \\ \lambda''\mu & \lambda''\mu' & \lambda''\mu'' \end{vmatrix} = 0. \tag{52}$$

Il est donc nul. A cette condition près, nous pouvons choisir d'une manière quelconque les coefficients α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''. Choisissons ensuite λ et μ de manière que

$$\lambda\mu = (\alpha).$$

Les autres coefficients λ', λ'', μ', μ'' sont déterminés par les formules

$$\mu\lambda' = (\beta), \qquad \mu\lambda'' = (\gamma),$$
$$\lambda\mu' = (\alpha'), \qquad \lambda\mu'' = (\alpha'').$$

Dans ces conditions, on vérifie aisément que toutes les autres formules obtenues en annulant les coefficients de $|T_1|$ sont vérifiées. Ainsi on a

$$\mu_1 = \mu\alpha + \mu'\alpha' + \mu''\alpha'' = \frac{1}{\lambda}[\alpha(\alpha) + \alpha'(\alpha') + \alpha''(\alpha'')] = \frac{\delta}{\lambda} = 0,$$
$$\beta'_1 = \lambda'\mu' - (\beta') = \frac{\lambda\mu' \times \lambda'\mu}{\lambda\mu} - \frac{(\alpha')(\beta)}{(\alpha)} = 0,$$

puisque $(\alpha)(\beta') - (\beta)(\alpha') = \delta\gamma'' = 0.$

On voit donc que, pour former un tableau exceptionnel, on peut choisir arbitrairement par exemple huit des coefficients du déterminant δ, et le coefficient λ. Les formules qui donnent les six autres coefficients sont d'ailleurs rationnelles et homogènes. Les tableaux exceptionnels dépendent donc d'une manière rationnelle et homogène de neuf paramètres.

Le mode de formation qui précède suppose que (α) ne soit pas nul. Si ce mineur était nul, on pourrait choisir à la place un quelconque des mineurs de δ. Enfin, si le déterminant δ a tous ses mineurs nuls, il est de la forme

$$\begin{vmatrix} lm & lm' & lm'' \\ l'm & l'm' & l'm'' \\ l''m & l''m' & l''m'' \end{vmatrix}.$$

Et des groupes de coefficients λ, λ', λ'' et μ, μ', μ'', l'un est identiquement nul (soit le premier), l'autre vérifiant une relation (soit $m\mu + m'\mu' + m''\mu'' = 0$). Comme on ne restreint rien en supposant par exemple $l = 1$, les tableaux ainsi formés dépendent d'une manière homogène de sept paramètres, soit deux de moins que dans le cas général. On vérifie d'ailleurs sans peine que tous les tableaux pour lesquels (α) est nul s'obtiennent comme limite du cas général. Il en résulte que, si nous considérons les coefficients d'un tableau comme des coordonnées homogènes dans un espace E_{14} à 14 dimensions, les points correspondant à des tableaux exceptionnels constituent une variété unicursale V' à 8 dimensions.

Les coefficients d'un système peuvent de même être considérés comme les coordonnées homogènes dans un espace E_{13} à 13 dimensions, dont chaque point correspond à une droite de l'espace E_{14}. Comme deux tableaux exceptionnels distincts donnent nécessairement deux systèmes exceptionnels distincts, les points de l'espace E_{13} correspondant à des systèmes exceptionnels, que nous appellerons *points exceptionnels*, constituent également une variété V unicursale à 8 dimensions [1], qu'on peut considérer comme la projection de V', si l'on considère l'espace E_{13} comme un plan dans l'espace E_{14}. Tandis

---

[1] Les calculs qui précèdent ne sont d'ailleurs pas nécessaires pour trouver ce nombre de dimensions (*voir* la note du n° **27**).

que la variété V' a toutes ses équations du second degré, celles de la variété V sont du troisième degré. Pour le voir, représentons chaque point A de l'espace E_{12} par le tableau moyen correspondant, soit $|T|$. A sera exceptionnel si l'on peut déterminer σ de manière que le tableau $F(|T| + \sigma|T|)$ ait ses coefficients α, β', γ'' égaux et les autres nuls (car alors il sera de la forme $c|\tau|$, avec $c = 0$, d'après le n° **22**). Les équations ainsi obtenues sont du second degré par rapport à l'ensemble des coefficients et de σ, et *linéaires en* σ; l'élimination de σ donne bien des équations du troisième degré.

Au point de vue arithmétique, nous devons chercher les tableaux exceptionnels à coefficients entiers. Lorsqu'on a choisi les neuf premiers coefficients entiers et annulant le déterminant δ, tous les éléments du déterminant (52) sont connus. S'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, les six derniers coefficients λ, λ', λ'', μ, μ', μ'' sont déterminés au signe près; s'ils admettent un plus grand commun diviseur ayant n diviseurs, il y a (en tenant compte du signe) $2n$ systèmes de déterminations.

23. *Nombre de relations distinctes d'un système exceptionnel.* — Soit un système exceptionnel (S), représenté par son tableau exceptionnel $|S|$. L'opération F, consistant à combiner les équations de ce système d'après les formules (27) et (28), donne des équations identiquement vérifiées. On a donc

$$(53)\quad \begin{cases} (\lambda' H' - \lambda'' H'' + \alpha) E + (\lambda' H - \lambda'' G' + \alpha') E' + (\lambda' G'' + \lambda'' H + \alpha'') E'' \equiv 0, \\ (\lambda'' G - \lambda H' + \beta) E + (\lambda'' H'' - \lambda H + \beta') E' + (\lambda'' H' - \lambda G'' + \beta'') E'' \equiv 0, \\ (\lambda H'' - \lambda' G + \gamma) E + (\lambda G' - \lambda' H'' + \gamma') E' + (\lambda H - \lambda' H' + \gamma'') E'' \equiv 0. \end{cases}$$

Les équations du système (S) ne sont donc pas indépendantes. Cela ne veut pas dire d'ailleurs que deux de ces équations, par exemple

$$(54)\qquad E = E' = 0,$$

entraînent la troisième. En effet, d'après les identités (53), on peut conclure que l'on a, soit $E'' = 0$, soit

$$(55)\qquad \lambda' G'' - \lambda'' H + \alpha'' = \lambda'' H' - \lambda G'' + \beta'' = \lambda H - \lambda' H' + \gamma'' = 0.$$

Ces dernières équations se réduisent à deux distinctes, en vertu de

$$\lambda''_1 = \lambda\alpha'' + \lambda'\beta'' + \lambda''\gamma'' = 0,$$

et l'on vérifie aisément, en tenant compte de ce que le tableau $|S|$ est exceptionnel, qu'elles entraînent les équations (54).

En utilisant la représentation des périodes dans l'espace à 6 dimensions, on énonce le résultat obtenu en disant que l'intersection des quadriques (54) se décompose. Une partie est la variété linéaire à 4 dimensions définie par les équations (55). L'autre est située sur la quadrique $E'' = 0$, de sorte que ses points correspondent à des systèmes de périodes vérifiant le système (S). Ces systèmes de périodes dépendent donc de 4 paramètres, et non de 3, comme ce serait le cas pour un système non exceptionnel.

CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE E_{13}.

26. *Définition des droites* D *dans l'espace* E_{13}. — Considérons de nouveau l'espace E_{13} défini au nº **24**, dans lequel nous avons défini la variété V, lieu des points exceptionnels. Les systèmes de périodes dérivés d'un système donné non exceptionnel sont évidemment représentés par tous les points d'une droite. Nous dirons qu'une telle droite est une *droite* D. On peut dire encore qu'une droite D est une droite joignant un point non exceptionnel à son dérivé par l'opération $\mathcal{T}$.

On retrouve la même droite si l'on part d'un quelconque de ses points qui ne soit pas exceptionnel. Donc par tout point non exceptionnel passe une droite D et une seule; ces droites dépendent évidemment de 12 paramètres.

Sur une droite D sont situés trois points exceptionnels, distincts ou non. Une droite joignant deux points exceptionnels n'est pas en général une droite D. Un couple de points exceptionnels dépend en effet de 16 paramètres; il y a donc quatre conditions à vérifier pour que la droite qui les joint soit une droite D. Nous dirons dans ce cas que les deux points considérés sont *associables* (¹), et que les systèmes (ou les tableaux) exceptionnels qui leur correspondent sont associables. Sur la droite qui les joint est alors situé un troisième point exceptionnel associable aux deux précédents.

Il est évident que deux systèmes exceptionnels associables ne constituent que trois relations distinctes entre les périodes, puisqu'ils sont dérivés d'un même système non exceptionnel. Au contraire, deux systèmes exceptionnels non associables constituent *en général* 4 relations distinctes (nous verrons plus loin un autre cas d'exception où elles se réduisent à 3).

27. *Définition et classification des variétés* L. — Considérons un système de périodes, vérifiant certains systèmes de relations singulières, représentés dans l'espace E_{13} par des points A, A′, ... Par l'opération $\mathcal{S}$ et par des combinaisons linéaires, ces opérations pouvant être répétées, on peut obtenir de nouveaux systèmes de relations singulières vérifiées par les périodes données. Géométriquement, les points correspondant à ces systèmes s'obtiennent en considérant les droites D passant par les points A, A′, ..., puis la variété linéaire à 2, 3, ..., dimensions définies par les droites ainsi obtenues, et recommençant ces opérations. On augmente ainsi le nombre de dimensions de la variété obtenue, jusqu'à ce qu'on arrive à une variété jouissant des deux propriétés suivantes : 1° être linéaire; 2° contenir toutes les droites D dont elle contient au moins un point non exceptionnel; en d'autres termes, si B est un point non exceptionnel de la variété obtenue, la droite D passant par ce point est contenue dans cette variété. Nous appellerons cette variété *variété* L (linéaire) *déterminée par les points donnés* A, A′, ...

En posant le problème sous forme géométrique, on est conduit à élargir un peu les termes du problème initial, et chercher à étudier la variété L définie par des points en nombre quelconque, sans se demander si les systèmes de relations singulières correspondants sont compatibles ou non, c'est-à-dire sans se demander s'il existe une

(¹) Nous dirons d'une manière générale que deux points, *exceptionnels ou non*, sont *associables*, si la droite qui les joint est une droite D.

variété s qui lui corresponde dans l'espace E_6. C'est à ce point de vue que nous nous placerons dans le présent Chapitre.

Nous diviserons ces variétés en plusieurs catégories.

Une première catégorie comprendra les *variétés* L *dont tous les points sont exceptionnels;* ces variétés peuvent être définies aussi comme variétés linéaires situées sur la variété V. Elles jouent un rôle tout à fait particulier, étant déterminées en partant de certains de leurs points sans faire intervenir l'opération $\mathcal{T}$. Nous les appellerons des plans II. Nous appellerons droites Δ celles qui n'ont qu'une dimension, et pour les autres nous indiquerons le nombre de dimensions par un indice (qui pourra être 2, 3 ou 4).

Si une variété L à n dimensions contient des points non exceptionnels, elle est un lieu de droites D dépendant de $n-1$ paramètres et contenant chacune trois points exceptionnels. Le lieu des points exceptionnels se compose alors de trois nappes (¹); chaque point exceptionnel pouvant être obtenu une infinité de fois, ces nappes peuvent avoir moins de $n-1$ dimensions; appelons n_1, n_2, n_3 leurs nombres de dimensions respectifs.

En admettant, ce qui sera démontré plus loin (nº **28**), que toute droite qui coupe les trois nappes (et a par suite au moins trois points exceptionnels) est une droite D, on obtient aisément la relation (²)

$$n_1+n_2+n_3=2n-2.$$

Nous diviserons les variétés considérées en trois nouvelles catégories suivant que 1, 2 ou 3 des nombres n_1, n_2, n_3 sont inférieurs

(¹) Certaines droites Δ peuvent, comme nous le verrons, être obtenues comme limites de droites D. Il peut arriver que des droites de cette nature constituent une nappe *spéciale*, en plus des trois nappes qui existent toujours dans une variété L.

(²) Les droites qui joignent un point de la première nappe à un point de la seconde dépendent de n_1+n_2 paramètres; il y a $n-1-n_3$ conditions à remplir pour qu'une telle droite coupe la troisième nappe, et le nombre de paramètres restants est évidemment égal à $n-1$. La formule obtenue est applicable en particulier à l'espace E_{13} tout entier, qui est une variété L, et montre, la variété V ne pouvant se décomposer en nappes algébriquement distinctes, que cette variété est bien à 8 dimensions.

à $n-1$, c'est-à-dire suivant que 1, 2, ou 3 des nappes formées par les points exceptionnels sont composées de points obtenus chacun une infinité de fois.

Dans le premier cas, on a

$$n_1 = 0, \qquad n_2 = n_3 = n-1;$$

la variété L est alors composée de droites D passant par un point fixe. Nous appellerons une telle variété un *plan* $\mathcal{P}$.

Dans le deuxième cas, on a

$$n_1 + n_2 = n_3 = n-1;$$

toute droite joignant un point de la première nappe à un point de la seconde est alors une droite D; en d'autres termes, chaque point de la première nappe est associable à tous les points de la seconde; nous dirons que ces deux nappes constituent deux variétés *associables*. (Nous dirons aussi qu'une variété est *associée* à une autre si elle est, soit le *lieu de tous les points* associables à tous ceux de l'autre, soit *le lieu de tous les points exceptionnels* jouissant de ladite propriété. La variété L considérée, lieu de droites s'appuyant sur deux variétés associables, sera appelée *variété* $\mathcal{L}$.

Dans le troisième cas, la variété L sera appelée *variété* $\mathfrak{M}$. On a dans ce cas

$$n_1 + n_2 + n_3 = 2n - 2 \leq 3n - 6;$$

n est donc au moins égal à 4.

Nous indiquerons toujours le nombre de dimensions de ces variétés en affectant les lettres $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathfrak{M}$ d'un indice.

Nous définirons d'une manière complète tous les types de variétés II, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$. Pour les variétés $\mathfrak{M}$, qui sont plus complexes, nous nous contenterons d'indiquer des exemples.

Nous utiliserons autant que possible des raisonnements géométriques, ne faisant appel au calcul que pour donner au raisonnement géométrique le point de départ indispensable. Les calculs deviennent d'ailleurs rapidement compliqués, et il nous arrivera de prendre des exemples numériques pour savoir, entre plusieurs éventualités, que le raisonnement géométrique aura montré comme logiquement possibles à l'exclusion de toutes autres, laquelle est réalisée.

28. *Variété L déterminée par deux points exceptionnels.* — Considérons d'abord deux tableaux quelconques $|S|$ et $|S'|$ correspondant à des systèmes représentés par des points distincts A et A'. Les tableaux $\rho|S| + \rho'|S'|$ correspondent de même aux points de la droite AA'. Les coefficients du tableau transformé par l'opération F sont des fonctions homogènes et du second degré des coefficients de ce tableau, de sorte que

$$F(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho^2|S_1| + \rho\rho' F(|S|, |S'|) + \rho'^2|S'_1|,$$

F(...) désignant une nouvelle opération définie par cette formule même. Le tableau obtenu par cette opération a évidemment ses coefficients linéaires et homogènes par rapport à ceux des tableaux composants. S'il est identiquement nul, nous dirons que les tableaux composants sont *conjugués*. Les tableaux conjugués d'un tableau donné sont représentés par les points d'un plan dans l'espace E_{14}, et par suite aussi les points d'un plan dans l'espace E_{13} (plan désignant une variété linéaire à un nombre quelconque de dimensions). Mais les tableaux conjugués des différents tableaux correspondant à un même point de l'espace E_{13} ont pour lieu, non un plan, mais des plans différents.

Supposons maintenant les tableaux $|S|$ et $|S'|$ exceptionnels. La formule précédente devient

$$F(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho\rho'|T|, \tag{56}$$

en posant $|T| = F(|S|, |S'|)$. Montrons que ce tableau est exceptionnel. En effet, la répétition de l'opération $|F|$ conduit, étant donnée la formule (33), à un tableau de la forme

$$K(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho^2\rho'^2 F(|T|).$$

Le second membre représente un tableau correspondant à un point indépendant du rapport $\frac{\rho}{\rho'}$. Il en est donc de même du premier, ce qui n'est possible que si $K = 0$. Le second membre est alors nul aussi, c'est-à-dire que $|T|$ est exceptionnel.

Trois cas sont alors possibles, exclusifs l'un de l'autre.

Premier cas. — Le tableau $|T|$ *est identiquement nul;* en d'autres termes, $|S|$ et $|S'|$ sont conjugués. La formule (56) montre alors que tous les tableaux $\rho|S| + \rho'|S'|$ sont exceptionnels, c'est-à-dire que tous les points de la droite AA' sont exceptionnels. Cette droite est une droite Δ.

Deuxième cas. — Le tableau $|T|$ n'étant pas nul, et n'étant pas non plus multiple du tableau $|\tau|$ puisque ce dernier n'est pas exceptionnel, correspond à un point B *situé sur la droite* AA'. Ce point, d'après la formule (56), peut être obtenu par l'opération F en partant de n'importe quel point M de la droite AA' autre que A et A'. La droite MB, c'est-à-dire la droite AA', est donc une droite D dont les points exceptionnels sont A, A' et B.

Troisième cas. — C'est le cas général; les points A et A' ne sont ni associables ni conjugués. Le tableau $|T|$ correspond alors à un point exceptionnel B *non situé sur* AA'. Comme dans le cas précédent, M étant un point de AA' autre que A et A', on voit que la droite MB est une droite D.

Remarquons d'abord que le point B, déduit de M par l'opération F, étant distinct de lui, le point M ne peut être exceptionnel. La droite AA' ne contient pas d'autres points exceptionnels que A et A'. *Une droite qui n'est ni une droite* D *ni une droite* Δ *contient donc au plus deux points exceptionnels.*

Le plan (à 2 dimensions) défini par les points A, A' et B est un lieu de droites D passant par B (toutefois il ne résulte pas encore de ce qui précède que les deux droites AB et A'B sont des droites D). Il constitue donc la variété L cherchée, ou plan $\mathfrak{P}_2$, dont on ne peut sortir par l'opération $(\mathfrak{F})$; cela est évident lorsqu'on part d'un point non situé sur AB et A'B, et vrai à la limite pour les points de ces deux droites, qui sont des droites D ou dans certains cas des droites Δ. Ce plan, dont tous les points sont associables à B, est *associable* à B.

Quel est, dans ce plan $\mathfrak{P}_2$, le lieu des points exceptionnels? Nous savons qu'une droite passant par B le coupe en B et en deux autres points; une droite ne passant pas par B le coupe en deux points au plus, ou bien fait partie du lieu. Il en résulte que le lieu se compose du point B, point isolé, et d'une conique C. Cette conique peut d'ailleurs, comme nous le verrons plus loin, soit se décomposer en deux droites, soit passer par le point B.

On retrouve évidemment le même plan $\mathfrak{P}_2$ en remplaçant A et A′ par deux points non associables sur cette conique; rien ne distingue ceux choisis initialement. Le choix des points A et A′ introduisant 16 paramètres, et chaque plan $\mathfrak{P}_2$ étant obtenu une double infinité de fois, ces plans dépendent de 14 paramètres. Ceux associables à B dépendent donc de $14 - 8 = 6$ paramètres.

29. *Nouvelles formules relatives à l'opération* $\mathfrak{F}$. — Avant de continuer l'étude des variétés L, indiquons quelques conséquences de la formule (56), dans le cas où les tableaux $|S|$ et $|S'|$ sont associables, de sorte que le tableau $|T|$, que nous désignerons ici par $|S''|$, correspond au troisième point exceptionnel A″ de la droite AA′. Supposons ces trois points exceptionnels distincts. Les sommes $\alpha + \beta' + \gamma''$ relatives aux tableaux $|S|$, $|S'|$, $|S''|$ ne sont pas nulles; on peut les supposer égales à 1, à condition de multiplier ces tableaux par des facteurs constants, de sorte que la formule (56) et les formules analogues obtenues en échangeant les points A, A′ et A″ s'écrivent

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} &F(|S'|, |S''|) = c|S|,\\ &F(|S''|, |S|) = c'|S'|,\\ &F(|S|, |S'|) = c''|S''|,\end{aligned}\right.$$

c, c', c'' étant des facteurs constants.

On déduit de ces formules et de la formule (32)

$$F(|S|, \rho'|S'| + \rho''|S''|) = \rho''c'|S'| + \rho'c''|S''|,$$
$$F(|S|, -\rho|S| + |\tau|) = |S| - |\tau|.$$

Or, pour des valeurs convenables de ρ, ρ', ρ'', on a

$$(58)\qquad \rho|S| + \rho'|S'| + \rho''|S''| = |\tau|.$$

L'identification des deux formules précédentes donne alors

$$\rho = 1, \qquad \rho''c' = -\rho', \qquad \rho'c'' = -\rho,$$

d'où, en permutant les indices,

$$\rho = \rho' = \rho'' = 1, \qquad c = c' = c'' = -1.$$

Les formules (57) et (58) s'écrivent donc

$$
(59)\qquad \left\{\begin{aligned}
&F(|S'|,\ |S''|) = -|S|,\\
&F(|S''|,\ |S|\ ) = -|S'|,\\
&F(|S|,\ |S'|) = -|S''|,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(60)\qquad |S| + |S'| + |S''| = |\tau|.
$$

Introduisons maintenant l'opération $\mathfrak{F}$. On a, d'après la définition de cette opération, la formule (32) et les formules (59) :

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F}[\rho'|S'| + \rho''|S''|] &= 3F\left[\rho'|S'| + \rho''|S''| - \tfrac{1}{3}(\rho'+\rho'')|\tau|\right]\\
&= 3F(\rho'|S'| - \rho''|S''|) - (\rho'+\rho'')(\rho'|S'| + \rho''|S''|) + C|\tau|\\
&= -3\rho'\rho''|S| - (\rho'+\rho'')(\rho'|S'| + \rho''|S''|) + C|\tau|,
\end{aligned}
$$

et par suite, en tenant compte de la formule (60),

$$
(61)\qquad \mathfrak{F}[\rho'(S') + \rho''(S'')] = \rho'(2\rho'' - \rho')(S') + \rho''(2\rho' - \rho'')(S''),
$$

formule qui comprend comme cas particulier les suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{F}(S)\ = -(S), &\qquad &\mathfrak{F}[(S') - (S'')] = 3(S),\\
&\mathfrak{F}(S') = -(S'), &\qquad &\mathfrak{F}[(S'') - (S)\ ] = 3(S'),\\
&\mathfrak{F}(S'') = -(S''), &\qquad &\mathfrak{F}[(S)\ - (S')] = 3(S'').
\end{aligned}
$$

Ces formules montrent bien la substitution résultant de l'opération ($\mathfrak{F}$) pour les points d'une droite D dont les trois points exceptionnels sont distincts. On voit en particulier qu'un de ces trois points peut être obtenu par l'opération ($\mathfrak{F}$), soit, ainsi qu'il est évident, en partant de ce point lui-même, soit en partant de son conjugué harmonique par rapport aux deux autres.

Les quantités I et J relatives aux systèmes (S), (S'), (S'') sont, d'après les formules (45), égales à 1 et 2. Par suite, celles relatives au système $\rho'(S') + \rho''(S'')$ sont

$$
\begin{aligned}
I &= \rho'^2 + \rho''^2 - \rho'\rho'',\\
J &= -2\rho'^3 - 2\rho''^3 + 3\rho'\rho''(\rho'+\rho'') + a\rho'\rho''(\rho'-\rho''),
\end{aligned}
$$

a étant un coefficient convenable. Pour le déterminer, il suffit d'appliquer la formule (42), qui donne les relations entre les quantités I et J relatives à un système et son transformé par l'opération $\mathfrak{F}$, au système $(S')-(S'')$ par exemple. Il vient $a=0$ et, par suite,

$$(62)\qquad \begin{cases} I=\rho'^2+\rho''^2-\rho'\rho'', \\ J=-2\rho'^3-2\rho''^3+3\rho'\rho''(\rho'+\rho''). \end{cases}$$

Il est à remarquer que les formules (61) et (62) n'ont que des coefficients numériques bien déterminés. Aucun coefficient ne dépend de la droite D considérée.

30. Si l'on transforme des systèmes de relations singulières par une transformation d'Hermite d'ordre 1, il est bien évident que les systèmes (S), (S'), (S'') correspondant aux trois points exceptionnels d'une droite D auront pour transformés les systèmes (T), (T'), (T'') correspondant aux trois points exceptionnels d'une autre droite D.

Nous avons vu au n° **10** qu'au tableau $|S|$ correspond, par une telle transformation, un tableau $|T|$ qui s'en déduit par une formule linéaire et homogène, et pour lequel $\alpha+\beta'+\gamma''$ a la même valeur, soit 1; on déduit de plus aisément des formules du n° **10** que $|T|$, qui correspond évidemment au système exceptionnel (T), est le tableau exceptionnel de ce système.

Dans ces conditions, il résulte évidemment des formules (61) et (62):

1° Que l'opération $\mathcal{F}$ et la transformation considérée sont permutables;

2° Que les quantités I et J sont des invariants.

La somme $\alpha+\beta'+\gamma''$ étant invariante dans la transformation des coefficients par la formule (22), nous voyons de plus :

1° Que l'opération F et la transformation considérée sont permutables;

2° Que les quantités $\alpha_1+\beta'_1+\gamma''_1$ et K sont des invariants.

Si la transformation d'Hermite considérée n'était pas d'ordre 1, au lieu d'invariants absolus on aurait des invariants relatifs, et de même le produit de cette transformation et des opérations F ou $\mathcal{F}$ donnerait un résultat indépendant, à un facteur constant près, de l'ordre des opérations.

31. *Lieu des points associables à un point exceptionnel* B. — Nous avons montré au n° **28** l'existence de plans $\mathfrak{P}_2$, formés de droites D passant par un point B. Cela nous conduit à chercher d'une manière générale le lieu de toutes les droites D passant par un point exceptionnel donné B, ou en d'autres termes le lieu des points associables à B.

Nous savons déjà que ces droites D dépendent de $12 - 8 = 4$ paramètres. D'autre part, les plans $\mathfrak{P}_2$ associables à B dépendent de 6 paramètres. En faisant la section de la figure par un plan ne passant pas par B, les traces des droites D passant par B constituent donc une variété à 4 dimensions, comprenant des droites dépendant de 6 paramètres; ce ne peut être qu'une variété linéaire ou se décomposant en plusieurs parties, dont une plane. Le lieu des droites D passant par B est donc un plan $\mathfrak{P}_5$, à moins qu'il ne se décompose en plusieurs parties, dont l'une serait un tel plan.

Nous allons montrer qu'une pareille décomposition est impossible.

Soit P le plan $\mathfrak{P}_5$ qui fait en tout cas partie du lieu. Lorsque le point B se déplace infiniment peu sur la variété V, ce déplacement dépendant de 8 paramètres, les points du plan P voisins de B dépendent linéairement de $8 + 5 = 13$ paramètres. Ils sont tous distincts, puisque par chaque point (autres que ceux de la variété V) ne passe qu'une droite D. Ils constituent donc toute la portion d'espace voisine de B. Dans cette portion d'espace, il ne peut évidemment exister d'autres droites D que celles obtenues (puisqu'il n'en passe qu'une par chaque point). Par le point B ne passe donc aucune autre droite que celles dont le lieu constitue le plan $\mathfrak{P}_5$.

Ce plan sera dit *plan* $\mathfrak{P}_5$ *associé à* B. Dans ce plan sont situés évidemment des plans $\mathfrak{P}_3$ et $\mathfrak{P}_4$, dépendant respectivement de 6 et 4 paramètres, associables à B.

De ce qui précède, résulte qu'il existe un point exceptionnel B et un seul associable à deux points exceptionnels donnés A et A', *qui ne soient pas conjugués*. Les points A et A', et par suite deux points non exceptionnels quelconques M et M' de la droite AA', sont en effet dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé au point cherché B; ce point est alors bien défini, si A et A' ne sont pas associables, comme intersection des deux droites D déterminées respectivement par les points M et M'; si A et A' sont associables, ces deux droites D sont confondues avec AA′, et B est le troisième point exceptionnel de cette droite.

32. *Quadrique* Q *associée au point exceptionnel* B. — Le lieu des points exceptionnels associables à B est la même chose que le lieu des points exceptionnels autres que B dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B. Nous savons que sa section par un plan $\mathfrak{P}_2$ associable à B est une conique. C'est donc une *quadrique* (variété à 4 dimensions définie à l'intérieur du plan $\mathfrak{P}_5$ par une équation du second degré). Nous l'appellerons *quadrique* Q *associée à* B.

Il est important pour la suite de savoir si le discriminant de cette quadrique est nul. Nous allons montrer qu'il ne l'est pas en général; il suffit pour cela de former un exemple numérique dans lequel il ne le soit pas.

Partons du tableau $|T|$ de coefficients

$$\begin{array}{lllll} \alpha = 1, & \beta = 0, & \gamma = -1, & \lambda = 0, & \mu = 2, \\ \alpha' = -1, & \beta' = 3, & \gamma' = 5, & \lambda' = 1, & \mu' = -3, \\ \alpha'' = 2, & \beta'' = 1, & \gamma'' = 2, & \lambda'' = -1, & \mu'' = 0, \end{array}$$

qui n'est pas exceptionnel, puisque $\delta = 8 \neq 0$, mais dont le transformé $|T_1| = F(|T|)$ est exceptionnel, puisque $K = 0$. Appelons A et B les points de l'espace E_{13} correspondant aux tableaux $|T|$ et $|T_1|$, et cherchons à définir le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B, qui comprend évidemment le point A.

A chaque point non exceptionnel de ce plan correspondent des tableaux dépendant d'une manière linéaire et homogène de 2 paramètres, tableaux dont un (ou plutôt deux, égaux et de signe contraire), transformé par l'opération F, donne le tableau $|T_1|$. Au plan $\mathfrak{P}_5$ correspondent ainsi des tableaux dépendant d'une manière linéaire et homogène de 7 paramètres, que nous regarderons comme des coordonnées cartésiennes dans un espace à 7 dimensions. Dans cet espace, les tableaux qui, transformés par l'opération F, donnent le tableau $|T_1|$, constituent une variété à 5 dimensions; ces tableaux sont définis par les formules (29), si l'on remplace dans ces formules les seconds membres $\alpha_1, \ldots, \mu_1''$ par les coefficients de $|T_1|$. Le plan tangent à cette variété au point qui représente le tableau $|T|$ s'obtient aisément par différentiation, et l'on peut exprimer les tableaux correspondant aux différents points de ce plan en fonction de 5 paramètres, soit par exemple les coefficients λ, λ', λ'' et deux autres paramètres t et t'. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned} &\alpha = t, && \alpha' = -3\lambda' - 4\lambda'' - 2t, \\ &\beta = t', && \beta' = 3\lambda - 3\lambda'' - 2t', \\ &\gamma = \lambda - \lambda'' + t' - 2, && \gamma' = 2\lambda + 3\lambda' + 2\lambda'' - 2t' + 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha'' &= -4\lambda' - 7\lambda'' - t, \\ \beta'' &= 4\lambda - \lambda'' - t', \\ \gamma'' &= 6\lambda + \lambda' + \lambda'' - t' + 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu &= 10\lambda - 9\lambda' - 22\lambda'' - t - 5t' - 10, \\ \mu' &= 4\lambda - 4\lambda'' + t - 3t' - 8, \\ \mu'' &= -3\lambda + 3\lambda'' - 3t + t' + 6, \end{aligned}$$

Ces tableaux correspondent dans l'espace E_{13} à des points du plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B. En rendant les formules homogènes par l'introduction d'un nouveau paramètre $\frac{u}{2}$, et ajoutant un septième paramètre u' aux expressions de α, β', γ'', on a l'expression générale des tableaux qui correspondent aux points du plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B.

En écrivant que ces tableaux sont exceptionnels, on a des équations du second degré. Pour avoir des équations ne faisant intervenir que les coefficients du système, il suffit d'éliminer u'; les six autres paramètres peuvent être considérés comme des coordonnées homogènes dans l'espace E_{13}. Les équations obtenues, comme il fallait s'y attendre, ont un facteur commun du second degré qui, égalé à zéro, donne l'équation de la quadrique Q; les autres facteurs ne donnent aucun autre point que le point B. On trouve ainsi, comme équation de la quadrique Q,

$$\lambda t + \lambda' t' + \lambda''(\lambda - \lambda'' + t' - u) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une somme ou différence de 6 carrés indépendants, ce qui établit le résultat énoncé.

Chaque quadrique Q contient alors :

1° Des droites Δ, dépendant de 5 paramètres; celles qui passent par un point donné dépendent de 2 paramètres; on peut se représenter leur disposition en remarquant que le cône qu'elles forment, coupé par une variété linéaire à 3 dimensions, donne une quadrique (donc une quadrique d'un espace ordinaire);

2° Des plans Π_2, constituant deux séries simplement infinies; ceux qui passent par un point donné constituent deux séries simplement infinies; il y en a deux qui contiennent une droite donnée.

33. *Propriétés spéciales aux points exceptionnels doubles.* — Nous savons qu'il y a une condition à vérifier pour qu'un système exceptionnel soit double. Les *points exceptionnels doubles*, correspondant aux systèmes exceptionnels doubles, forment donc sur la variété V une variété W à 7 dimensions. Les droites Δ ou plans Π situés sur cette variété seront appelés *droites Δ doubles*, *plans Π doubles*. Les points exceptionnels, droites Δ, plans Π qui ne sont pas doubles, seront dits *simples*.

En général, la quadrique Q associée à un point B ne contient pas ce point, qui est alors un point exceptionnel *simple* sur les droites D passant par ce point. Les deux autres points sont alors en général distincts et viennent se confondre pour les droites touchant la quadrique Q. Le lieu des points exceptionnels doubles sur cette quadrique est donc son intersection avec le plan polaire de B. Une droite Δ simple située sur Q ne contient donc qu'un tel point; de même un plan Π_2 contient une droite de points exceptionnels doubles. Il existe un nombre fini de plans Π_2 de chaque système dont tous les points sont exceptionnels doubles.

Il peut arriver que la quadrique Q contienne le point B. Le plan tangent à Q est alors un lieu de points M, en général non exceptionnels, et tels par suite que la droite MB soit une droite D ayant ses trois points exceptionnels confondus en B qui est alors un point exceptionnel *double*. D'après le n° **23**, on a dans ce plan $I = J = 0$, et par suite son intersection avec la quadrique Q a tous ses points exceptionnels doubles; c'est le lieu d'une double infinité de droites Δ doubles ou de deux séries simplement infinies de plans Π_2 doubles. Les autres points de la quadrique Q sont simples.

Donc, dans les deux cas, le lieu des points exceptionnels doubles situés sur cette quadrique est son intersection avec le plan polaire de B.

Dans le premier cas, où B est un point exceptionnel simple, les droites D passant par ce point ne peuvent y toucher la variété V (qui est d'ordre 3; or une telle droite ne peut être située sur la variété V et la coupe déjà en trois points dont deux, situés sur Q, ne peuvent venir en B). Donc le plan $\mathfrak{P}_5$ qui contient la quadrique Q n'a aucune droite commune avec le plan tangent en B à la variété V. Au contraire, si B est un point exceptionnel double, le plan $\mathfrak{P}_5$ est tout entier dans ce plan tangent. En effet, toute droite de ce plan passant par B est une droite D admettant ce point comme point exceptionnel double et un autre point exceptionnel A; elle touche en B la quadrique Q associée à A, et par suite la variété V, qui contient cette quadrique.

On peut se demander si les droites Δ sont des cas particuliers des droites D (d'une manière précise : si chaque droite Δ est une position limite de droites D). Si une droite Δ passant par un point B est une position limite de droites D, elle doit être dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B (puisque le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à un point exceptionnel varie d'une manière continue avec ce point); elle est évidemment dans le plan tangent en B à la variété V. D'après ce qui précède, ces deux conditions ne sont compatibles que si B est un point exceptionnel double, c'est-à-dire, puisque c'est un point quelconque de la droite considérée, si cette droite est une droite Δ double.

Par contre, une droite Δ passant par un point exceptionnel double B et située sur la quadrique Q associée à ce point est évidemment une position limite de droites D (il en résulte une nouvelle démonstration du fait que tous ses points sont exceptionnels doubles). Les autres droites Δ passant par B ne sont pas dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B et ne peuvent pas, par suite, être obtenues comme limites de droites D *dont un point exceptionnel tende vers* B.

Nous verrons plus loin que les droites Δ doubles que l'on peut obtenir ainsi comme limites de droites D ne constituent pas toutes les droites Δ doubles, mais dépendent d'un paramètre de moins. Elles sont alors sur la quadrique Q associée à n'importe lequel de leurs points.

34. *Relations entre l'espace* E_{13} *et l'espace* E_{14}. — Si l'on passe de l'espace E_{13} à l'espace E_{14}, au plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B correspond un plan P_6 à 6 dimensions, et à la quadrique Q une quadrique Q′, à 5 dimensions, de ce plan. Si l'on représente chaque point de Q, non par un tableau quelconque qui lui corresponde, mais par son tableau exceptionnel, on obtient sur Q' un lieu de points dépendant de 4 paramètres; nous allons montrer que c'est une section plane.

Soit en effet une droite D passant par B et ayant ses points exceptionnels A, A' et B distincts; soient $|S|$, $|S'|$, $|S''|$ les tableaux exceptionnels correspondant à ces trois points multipliés par un facteur tel que $\alpha + \beta' + \gamma''$ devienne égal à 1, de manière à pouvoir appliquer les formules du n° **29**. Le tableau

$$|S| + |S'| = |\tau| - |S''|$$

étant un tableau qui correspond à B, le tableau $|S| - |S'|$ est le tableau moyen correspondant au point B' conjugué de B par rapport à AA'. Les tableaux moyens correspondant à tous les points du plan polaire de B dans la quadrique Q, et le tableau $|\tau| - |S''|$, qui est indépendant de la droite AA'B choisie, définissent alors dans le plan P_6 une variété linéaire P_5 à 5 dimensions qui contient tous les tableaux $|S| + |S'|$ et $|S| - |S'|$, et par suite tous les tableaux $|S|$ et $|S'|$, ce qui démontre le résultat annoncé.

Le raisonnement précédent suppose que le point exceptionnel B soit simple; le résultat est évidemment vrai à la limite si ce point est double.

Le plan P_6 contient, en dehors du plan P_5, un seul point b représentant un tableau exceptionnel, celui qui correspond à B. Si ce point est double, le point b lui-même est situé dans le plan P_5.

Le résultat obtenu n'était nullement évident *a priori*. Si l'on représente certains tableaux exceptionnels d'une part dans l'espace E_{13}, d'autre part dans l'espace E_{14}, la première figure, qu'on peut considérer comme la perspective de la seconde, n'en donne l'image exacte que si celle-ci est dans un plan ne contenant pas les projetantes. C'est le cas pour les quadriques Q; c'est aussi le cas pour les droites Δ (qui sont sur les quadriques Q; on le déduit aussi aisément du n° **28**, les tableaux exceptionnels correspondant aux points d'une telle droite, étant de la forme $\rho|S| + \rho'|S'|$), et par suite pour tous les plans Π. La condition $\alpha + \beta' + \gamma'' = 0$, qui exprime qu'un tableau exceptionnel est double, étant linéaire, on s'explique que les points doubles d'une quadrique Q constituent une section plane et que ceux d'un plan Π soient donnés par une équation linéaire. Mais sur l'ensemble de la variété V, les points exceptionnels sont définis par l'équation $I = 0$, qui est du second degré.

35. *Détermination directe des droites* Δ. — L'étude des variétés L nous a conduit, dès le n° **27**, à prévoir l'existence possible de droites Δ, situées tout entières sur la variété V. Les résultats du n° **32** nous montrent que ces droites existent effectivement, et que l'ensemble d'une quadrique Q et d'une droite Δ située sur elle dépend de $8 + 5 = 13$ paramètres. Mais nous ne savons pas encore de combien de paramètres dépendent les droites Δ. Nous allons montrer qu'elles dépendent de 11 paramètres, et il en résultera que chacune d'elles est située sur une double infinité de quadriques Q.

Pour obtenir une droite Δ, il suffit, d'après le n° **28**, de prendre les tableaux exceptionnels $|S|$ et $|S'|$ correspondant à deux de ses points, et d'écrire que

$$F(\rho|S| + \rho'|S'|) = \rho\rho' F(|S|, |S'|) = 0. \tag{63}$$

Le tableau $|S|$ étant un tableau exceptionnel donné, et ne tenant pas compte d'abord de ce que $|S'|$ est exceptionnel, cela impose à première vue aux coefficients du tableau $|S'|$ quinze relations, qui se déduisent aisément des formules (29); mais elles ne sont évidemment pas distinctes. En effet, ces relations indiquent que le point représentant le tableau $\rho|S| + \rho|S'|$ dans l'espace E_{14} décrit, lorsque ρ varie, une droite tangente pour $\rho' = 0$ à la variété V' lieu des points exceptionnels; en d'autres termes, elles indiquent que le point représentant le tableau $|S'|$ est dans une variété linéaire tangente à la variété V' et ayant par suite comme celle-ci 8 dimensions; elles ne constituent donc que six relations distinctes. (Nous supposons que le point considéré est un point ordinaire de la variété V. Nous verrons au n° **40** que des circonstances différentes se présentent si le tableau $|S|$ est exceptionnel double.)

Nous allons montrer que, en tenant compte des six relations qui expriment que $|S'|$ est exceptionnel, elles se réduisent à trois relations seulement.

Désignons par $a, b, c, l, m, \ldots, m''$ les coefficients du tableau (S), par α, β, γ, μ, ..., μ'' ceux du tableau $|S'|$. Parmi les équations déduites des formules (29) qui expriment que le système $\rho|S|+\rho'|S'|$ est exceptionnel, prenons par exemple les six équations obtenues en annulant les coefficients α_1, β_1, γ_1, μ_1, μ'_1, μ''_1 relatifs à ce système. En les développant, il vient

$$\tag{64}\left\{\begin{aligned}
&(\rho m+\rho'\mu)(\rho a+\rho'\alpha)+(\rho m'+\rho'\mu')(\rho a'+\rho'\alpha')+(\rho m''+\rho'\mu'')(\rho a''+\rho'\alpha'')=0,\\
&(\rho m+\rho'\mu)(\rho b+\rho'\beta)+(\rho m'+\rho'\mu')(\rho b'+\rho'\beta')+(\rho m''+\rho'\mu'')(\rho b''+\rho'\beta'')=0,\\
&(\rho m+\rho'\mu)(\rho c+\rho'\gamma)+(\rho m'+\rho'\mu')(\rho c'+\rho'\gamma')+(\rho m''+\rho'\mu'')(\rho c''+\rho'\gamma'')=0;\\
&(\rho l+\rho'\lambda)(\rho m+\rho'\mu)=(\rho b'+\rho'\beta')(\rho c''+\rho'\gamma'')-(\rho b''+\rho'\beta'')(\rho c'+\rho'\gamma'),\\
&(\rho l+\rho'\lambda)(\rho m'+\rho'\mu')=(\rho b''+\rho'\beta'')(\rho c+\rho'\gamma)-(\rho b+\rho'\beta)(\rho c''+\rho'\gamma''),\\
&(\rho l+\rho'\lambda)(\rho m''+\rho'\mu'')=(\rho b+\rho'\beta)(\rho c'+\rho'\gamma')-(\rho b'+\rho'\beta')(\rho c+\rho'\gamma).
\end{aligned}\right.$$

En tenant compte de ce que $|S|$ et $|S_1|$ sont exceptionnels, les termes en ρ^2 et ρ'^2 disparaissent, et $\rho\rho'$ vient en facteur, comme le montre d'ailleurs la formule (63). Ces équations sont donc en réalité indépendantes de ρ et ρ' et nous pouvons en profiter pour choisir les valeurs de ρ et ρ' qui simplifient le plus les formules, soient $\rho=\lambda$, $\rho'=-l$; nous pouvons d'ailleurs, en raison de l'homogénéité des formules, supposer $l=\lambda=1$ sans diminuer la généralité du résultat. Il vient ainsi

$$\tag{65}\left\{\begin{aligned}
&(m-\mu)(a-\alpha)+(m'-\mu')(a'-\alpha')+(m''-\mu'')(a''-\alpha'')=0,\\
&(m-\mu)(b-\beta)+(m'-\mu')(b'-\beta')+(m''-\mu'')(b''-\beta'')=0,\\
&(m-\mu)(c-\gamma)+(m'-\mu')(c'-\gamma')+(m''-\mu'')(c''-\gamma'')=0;
\end{aligned}\right.$$

$$\tag{65'}\frac{b-\beta}{c-\gamma}=\frac{b'-\beta'}{c'-\gamma'}=\frac{b''-\beta''}{c''-\gamma''}.$$

Il s'agit de montrer que ces équations, réduites déjà à cinq distinctes, se réduisent à trois en tenant compte de celles qui expriment que $|S|$ et $|S'|$ sont exceptionnels, notamment des relations

$$\begin{aligned}
m&=b'c''-b''c', &\quad \mu&=\beta'\gamma''-\beta''\gamma',\\
m'&=b''c-b\,c'', &\quad \mu'&=\beta''\gamma-\beta\,\gamma'',\\
m''&=b\,c'-b'c, &\quad \mu''&=\beta\,\gamma'-\beta'\gamma.
\end{aligned}$$

Soient $\overline{OB}$ dans l'espace ordinaire le vecteur de composantes b,

b', b''; $\overline{OC}$ celui de composantes c, c', c''; $\overline{OM}$ celui de composantes m, m', m'', produit vectoriel des précédents. Désignons par $\overline{OB}'$, $\overline{OC}'$, $\overline{OM}'$ les vecteurs analogues relatifs au tableau $|S'|$. Les relations (65′) expriment que $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$ sont parallèles. On a alors géométriquement

$$\overline{OM}' = \overline{OB}'.\overline{OC}' = (\overline{OB} + \overline{BB}')(\overline{OC} + \overline{CC}') = \overline{OM} + \overline{BB}'.\overline{OC} + \overline{CC}'.\overline{OB}.$$

De cette formule résulte que $\overline{MM'}$ est perpendiculaire à la direction commune de $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$, c'est-à-dire que les deux dernières formules (65) sont vérifiées. Les formules (65) et (65′) se réduisent bien à trois formules distinctes seulement.

Les tableaux exceptionnels conjugués à $|S|$ dépendent donc de $8 - 3 = 5$ paramètres. Ils représentent dans l'espace E_{14} une variété à 5 dimensions, évidemment non décomposable, située comme nous l'avons vu dans une variété linéaire à 8 dimensions (représentant tous les tableaux conjugués à $|S|$), et définie dans celle-ci par des équations du second degré. Il en est de même dans l'espace E_{13} pour les points correspondants, puisque le passage de l'espace E_{14} à l'espace E_{13} peut ici être considéré comme la perspective d'une variété linéaire à 8 dimensions sur une autre.

Le choix du point A′, tel que AA′ soit une droite Δ, dépend donc de $8 - 3 = 5$ paramètres. Le choix de deux points exceptionnels AA′ tels que AA′ soit une droite Δ, en d'autres termes le choix d'une droite Δ et de deux points situés sur elles, dépend donc de $8 + 5 = 13$ paramètres.

Les droites Δ dépendent alors de $13 - 2 = 11$ paramètres, comme nous l'avions annoncé. Celles qui passent par un point donné A dépendent de 4 paramètres. Chacune est située sur une infinité de quadriques Q dépendant de $13 - 11 = 2$ paramètres.

36. *Détermination générale des tableaux conjugués.* — Ce qui précède résout la question de la recherche de deux tableaux conjugués, dont un au moins est exceptionnel. Il reste à traiter le cas où aucun des tableaux considérés $|T|$ et $|T'|$ (¹) n'est exceptionnel. Le raisonnement que nous allons faire est d'ailleurs applicable lorsqu'un des tableaux est exceptionnel, mais non lorsqu'ils le sont tous les deux. $|T|$ et $|T'|$ étant conjugués, on a

$$(66) \qquad F(\rho|T|+\rho'|T'|)=F(\rho|T|-\rho'|T'|)=\rho^2|T_1|+\rho'^2|T'_1|.$$

Le tableau ainsi obtenu, résultant par l'opération F de deux tableaux *distincts*, et n'étant pas nul, est exceptionnel (puisque la répétition de l'opération F doit donner un tableau multiple à la fois des tableaux $\rho|T|+\rho'|T'|$ et $\rho|T|-\rho'|T'|$, et par suite nul). Soit B le point de l'espace E_{13} correspondant à ce tableau. Les tableaux $\rho|T|+\rho'|T'|$ et $\rho|T|-\rho'|T'|$, qui conduisent au point B par l'opération F, correspondent donc à des points du plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B; les tableaux $|T|$ et $|T'|$ correspondent donc à deux points M et M' de ce plan, qui est alors ainsi que B indépendant de ρ et de ρ'.

La droite MM' contient alors deux points exceptionnels A et A', autres que B. Supposons-les distincts, le résultat obtenu étant vrai à la limite s'ils sont confondus (²). Désignons par $|S|$ et $|S'|$ les tableaux exceptionnels correspondants. Le tableau $F(|S|,|S'|)$ est, d'après le nº **28**, un tableau exceptionnel correspondant à B, et les tableaux $|T|$ et $|T'|$ sont de la forme

$$\rho|S|+\rho'|S'|+\rho''|\tau|, \qquad \sigma|S|+\sigma'|S'|+\sigma''|\tau|.$$

D'après la formule (66) ces tableaux, transformés par l'opération F, donnent un tableau correspondant à B, ce qui entraîne $\rho''=\sigma''=0$. La condition pour qu'ils soient conjugués est ensuite

$$F(\rho|S|+\rho'|S'|,\ \sigma|S|+\sigma'|S'|)=(\rho\sigma'+\rho'\sigma)F(|S|,|S'|)=0,$$

c'est-à-dire que M et M' sont conjugués par rapport à A et A', c'est-à-dire par rapport à la quadrique Q associée à B.

(¹) Nous réservons les lettres S et S' pour les tableaux ou systèmes exceptionnels.

(²) Remarquons qu'une droite ayant deux points exceptionnels confondus se distingue d'une droite n'ayant qu'un point exceptionnel parce qu'elle touche la variété V et parce que les droites D passant par ses différents points sont concourantes, de sorte qu'elle est dans un plan $\mathfrak{P}_2$.

On a alors la règle suivante, qui donne la manière la plus générale de former deux tableaux conjugués : *prendre dans un même plan* $\mathfrak{P}_5$ *associé à un point* B *deux points* A *et* A′ *conjugués par rapport à la quadrique* Q *située dans ce plan, et choisir, parmi les tableaux correspondant à ces points, ceux qui conduisent au point* B *par l'opération* F.

Il est à remarquer qu'une droite D est située dans les trois plans $\mathfrak{P}_5$ associés respectivement à ses trois points exceptionnels B, B′, B″. En prenant deux points de cette droite conjugués par rapport à BB″ ou à BB′, on aura deux points *conjugués* (c'est-à-dire auxquels on pourra faire correspondre des tableaux conjugués); mais, bien qu'ils soient dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B, on ne pourra les obtenir par application de la règle précédente qu'en remplaçant B par B′ et B″.

On peut déduire de la règle précédente le lieu des points conjugués d'un point donné A.

Si A est exceptionnel, ce lieu comprend deux parties : d'une part, le plan (à 8 dimensions) tangent en A à la variété V; à chaque point de ce plan correspond un tableau conjugué du tableau exceptionnel $|T|$ qui correspond à A; d'autre part, le plan polaire de A dans la quadrique Q associée à A; à chacun de ses points correspond un tableau conjugué du tableau $|T| - |\tau|$ (d'après le n° **29**, $|T|$ étant déterminé, comme à ce numéro, par la condition $\alpha + \beta' + \gamma'' = 1$).

Si A n'est pas exceptionnel, il y a trois points exceptionnels, distincts ou non, dérivés de A. A chacun de ces points correspond une partie du lieu cherché, qui est le plan polaire de A dans la quadrique associée à ce point. Pour obtenir ces trois plans, il suffit de représenter A par les trois tableaux correspondant à ce point et conduisant par l'opération F aux trois points exceptionnels; les tableaux conjugués de ces trois tableaux correspondent respectivement à ces trois plans.

37. *Détermination générale des variétés associables; plans* π_2 *et* π'_2. — Soient A et A′ deux points exceptionnels donnés. S'ils ne sont pas conjugués, qu'ils soient associables ou non, nous avons vu (n° **31**) qu'il n'existe qu'un point qui leur soit associable. Supposons-les maintenant conjugués, c'est-à-dire que AA′ est une droite Δ, et cherchons le lieu des points exceptionnels B associables à A et A′.

Remarquons d'abord que, A et A′ étant dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à un point du lieu, la droite AA′ y est située tout entière, et les points cherchés sont associables à tous ceux de cette droite. De même, si B et B′ sont deux points du lieu, ils sont conjugués (sinon il ne pourrait exister deux points A et A′ associables à ces deux points), et la droite BB′, située tout entière dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à n'importe quel point de AA′, a tous ses points associables à ceux de AA′ et appartient au lieu. Le lieu est donc une variété linéaire associable à AA′.

Or nous avons vu, n° **35**, qu'une droite Δ est située sur une double infinité de quadriques Q, ce qui revient à dire que le choix d'un point du lieu dépend de 2 paramètres. Ce lieu est donc un plan Π_2, *associé* à la droite AA′, évidemment situé sur la quadrique Q associée à n'importe quel point de AA′.

On peut être tenté de penser, d'après cela, qu'il existe une correspondance biunivoque entre les droites Δ et les plans Π_2 associés à ces droites. Ce n'est pas le cas. De cette hypothèse résulterait en effet que le choix d'un plan Π_2 et d'un point A de la droite associée, ou, ce qui revient au même, d'un plan Π_2 et d'une quadrique Q le contenant, dépendrait de $11 + 1 = 12$ paramètres. Or, chaque quadrique Q ne contenant qu'une triple infinité de plans Π_2, ce choix ne peut dépendre que de 11 paramètres.

Cette circonstance nous oblige à conclure qu'un plan Π_2, associé à une droite Δ, l'est à une infinité; le lieu de ces droites, associé à n'importe quelle droite du plan considéré, est un plan analogue. Nous voyons ainsi que les plans en question s'associent deux à deux, de manière que chaque point de l'un soit associable à chaque point de l'autre. Nous appellerons deux tels plans *plans* π_2 *et* π'_2 ***associés***, et nous réserverons désormais la désignation de *plans* Π_2 aux plans qui ne peuvent être ainsi obtenus comme associés d'une droite Δ et ont, par suite, un seul point qui leur soit associable et sont sur une seule quadrique Q.

Un couple de plans π_2 et π'_2 associés, évidemment bien déterminé par n'importe quelle droite d'un des deux plans, et contenant une double infinité de telles droites, dépend de $11 - 2 = 9$ paramètres.

Ce qui précède résout complètement le problème de la détermination des variétés associables. A moins que l'une d'elles ne se réduise à un point, deux variétés associables sont situées respectivement dans deux plans π_2 et π'_2 associés.

38. *Plans* π_2 *et plans* Π_2. — Il existe des plans Π_2, au sens restreint que nous venons de donner à cette désignation. En effet, chaque droite Δ est située sur un seul plan π_2 associé à un plan π'_2; d'autre part elle est sur une double infinité de quadriques Q, celles associées aux points de π'_2, qui contiennent évidemment π_2. Chacune de ces quadriques contient un plan, autre que π_2, passant par la droite Δ. C'est donc un plan Π_2, et, comme un tel plan n'est situé que sur une quadrique Q, la droite Δ est sur une double infinité de plans Π_2, tous distincts.

Ces plans dépendent de 11 paramètres (chaque quadrique Q en contenant une triple infinité).

Sur chaque quadrique Q, les plans π_2 et les plans Π_2 sont évidemment les plans des deux systèmes différents. Donc le plan $\mathcal{P}_3$, déterminé par un point B et un plan de la quadrique Q associée à ce point, coupe cette quadrique suivant ce plan, et un autre appartenant à l'autre catégorie. On remarque également que, sur une quadrique Q associée à un point exceptionnel B, il existe deux séries de plans passant par ce point; les uns sont des plans π_2 doubles; les autres des plans Π_2 doubles.

On peut se demander si, outre les plans Π_2 dont nous venons d'établir l'existence, il en existe qui ne soient sur aucune quadrique Q. La réponse est négative. Remarquons d'abord que si deux droites d'un tel plan étaient sur une quadrique Q, le plan tout entier, composé de points exceptionnels du plan $\mathcal{P}_5$ contenant cette quadrique, serait aussi sur elle. Il suffit donc de montrer que deux droites Δ, qui se coupent, sont sur une même quadrique Q.

Or, d'après le n° **35**, les droites Δ passant par un point donné dépendent de 4 paramètres et constituent un cône non décomposable. Si donc, par un procédé quelconque, on trouve des couples de droites Δ passant par B et dépendant de 8 paramètres, on est sûr de les obtenir tous. Or B est situé sur une quadruple infinité de quadriques Q (associées aux points de la quadrique associée à B), et sur chacune d'elles, le choix de deux génératrices se coupant en B dépend de 4 paramètres;

ces deux génératrices, n'étant pas en général dans un même plan π_2, ne sont que sur une quadrique Q et ne peuvent être obtenues qu'une fois. On a donc des couples distincts de droites Δ se coupant en B, dépendant de 8 paramètres; ce sont tous ceux existant, et chacun d'eux est bien sur une quadrique Q.

39. *Variétés $\mathcal{L}_5$ déterminées par deux plans π_2 et π'_2 associés.* — Les droites qui coupent ces deux plans sont des droites D et dépendent de 4 paramètres si ces deux plans sont distincts. Elles contiennent des points non exceptionnels, tous distincts (puisque par un tel point ne passe qu'une droite D), qui dépendent de 5 paramètres. Les plans π_2 et π'_2 sont donc deux plans qui ne se coupent pas dans une même variété $\mathcal{L}_5$ à 5 dimensions. Par chaque point non exceptionnel de cette variété passe une droite D et une seule, celle qui coupe les plans π_2 et π'_2.

Quelle est, dans la variété $\mathcal{L}_5$, la troisième nappe du lieu des points exceptionnels? C'est (d'après le n° **27**) une variété à 4 dimensions. Toute droite qui n'est ni une droite D ni une droite Δ ayant au plus deux points exceptionnels, cette variété n'est coupée qu'en un point par une droite rencontrant l'un au moins des plans π_2 et π'_2, ou bien la contient tout entière. C'est donc un plan Π_4, que nous appellerons *plan de base* de la variété $\mathcal{L}_5$.

On a vu que le lieu des points exceptionnels doubles dans un plan Π est défini par une équation du premier degré. Il en résulte évidemment que le lieu des points exceptionnels doubles dans la variété $\mathcal{L}_5$ est un plan Π_3 contenu dans le plan de base et déterminé par les intersections de ce plan avec les plans π_2 et π'_2 (¹).

Nous savons qu'une droite qui coupe π_2 et π'_2 est en général une

---

(¹) Ce résultat est en défaut dans un cas particulier. Si les plans π_2 et π'_2 sont confondus, il existe une variété $\mathcal{L}_5$ lieu de droites D joignant le plan double ainsi obtenu aux points d'un certain plan de base Π_4. Il en passe naturellement toujours une seule de ces droites par les points du plan de base, et une double infinité par les points du plan π_2. Le lieu des points exceptionnels doubles comprend alors ce plan π_2 et un plan Π_3 dans le plan de base. Nous dirons que la variété $\mathcal{L}_5$ ainsi définie est *spéciale*. L'existence de ces variétés sera établie n° **43**.

droite D. Il y a évidemment exception pour celles qui sont situées dans le plan de base, et par suite dans le plan Π_3 lieu des points exceptionnels doubles. Nous retrouvons alors ce résultat, déjà obtenu n° **35**, que certaines droites Δ doubles sont des limites de droites D.

40. *Les variétés $\mathfrak{L}_3$ et $\mathfrak{L}_4$.* — D'après le n° **37**, deux variétés associables, dont aucune ne se réduit à un point, appartiennent d'une manière unique à deux plans π_2 et π'_2 associés; ce sont soit ces deux plans eux-mêmes, soit l'un de ces plans et une droite de l'autre, soit deux droites. L'étude de la variété $\mathfrak{L}$ définie par les deux variétés associables s'effectue dans les deux derniers cas comme nous l'avons fait au numéro précédent pour le premier cas. On trouve des variétés $\mathfrak{L}_4$ ou $\mathfrak{L}_3$, ayant comme *plans de base* des plans Π_3 ou Π_2. Chacune est située dans une variété $\mathfrak{L}_5$ et une seule. Il n'y a pas d'autre type de variété $\mathfrak{L}$.

Il n'y a pas non plus évidemment d'autre sous-variété L dans une variété $\mathfrak{L}_5$ que les sections planes des plans π_2, π'_2 et Π_4, les variétés $\mathfrak{L}_3$ et $\mathfrak{L}_4$ que nous venons de définir, les droites D et les plans $\mathfrak{P}_2$ ou $\mathfrak{P}_3$ définis par un point d'un des plans π_2 et π'_2 et par une droite de l'autre ou ce plan lui-même.

Toutes ces variétés ont pour *base* une section du plan de base Π_4. Il est important de remarquer que, pour les variétés contenant au moins un point non exceptionnel, et par suite au moins une droite D passant par chaque point exceptionnel simple, cette base n'est pas une section quelconque du plan Π_4.

Choisissons en effet dans ce plan deux points exceptionnels simples B et B_1. Par chacun de ces points, dans la variété $\mathfrak{L}_5$, passe une droite D bien déterminée, que la variété cherchée doit contenir. Soient $AA'B$ et $A_1A'_1B_1$ ces deux droites, les points A, A', A_1, A'_1 étant ceux où elles coupent les plans π_2 et π'_2. En général A et A_1 sont distincts, B et B_1 de même, et la variété L cherchée, appartenant à $\mathfrak{L}_5$, et contenant B, B_1 et au moins un point non exceptionnel, contient toute la variété $\mathfrak{L}_3$ déterminée par les droites AA_1 et $A_1A'_1$. Elle contient donc aussi le plan Π_2 qui en est la base, et pas seulement la droite BB_1.

De même, si l'on se donne trois points B, B_1, B_2 dans le plan Π_4, et s'ils ne vérifient pas certaines conditions particulières, il n'y aura en général aucune sous-variété de la variété $\mathfrak{L}_5$ qui contienne ce point et au moins un point non exceptionnel. Si l'on veut par exemple qu'il y ait une variété $\mathfrak{L}_3$, comme la donnée de B et B_1 suffit pour déterminer cette variété et, par suite, son plan de base Π_2, il faudra que B_2 soit dans ce plan, ce qui constitue deux conditions.

41. *Lieu des droites* Δ *passant par un point exceptionnel* B. — Nous appellerons ce lieu *cône* Γ *de sommet* B. Nous savons déjà que c'est une variété à cinq dimensions, non décomposable, située dans le plan tangent en B à la variété V, que nous appellerons plan ϖ_8. Ses génératrices passant par B, étant chacune dans un plan π_2 et un seul, se groupent en une triple infinité de plans π_2. Nous allons montrer que le cône Γ est aussi le lieu d'une simple infinité de plans Π_4.

Soit une droite D passant par B; appelons A et A' ses autres points exceptionnels. Il existe une simple infinité de plans π_2, passant par A, sur la quadrique Q associée à A', et par suite une infinité de couples de plans π_2 et π'_2 associés contenant respectivement A et A'. Chacun de ces couples détermine une variété $\mathfrak{L}_5$, dont le plan de base contient B. Ces plans sont bien distincts, car inversement, chacun d'eux, avec le point A, détermine la variété $\mathfrak{L}_5$, et par suite les plans π_2 et π'_2. On a donc une infinité de plans Π_4, passant par B. Le cône Γ, qui n'est pas décomposable, est décrit tout entier par ces plans.

Chaque droite Δ est donc dans un plan Π_4; inversement, elle est dans un seul plan Π_4. Il résulte en effet du n° **38** qu'elle ne peut être sur d'autres variétés linéaires à deux dimensions qu'un plan π_2 unique associé à un plan π'_2, et une double infinité de plans Π_2 (situés respectivement sur chacune des quadriques Q associées aux points de π'_2) dont le lieu est évidemment le plan Π_4 déjà trouvé. La droite Δ n'est donc située dans aucun autre plan Π_2, et par suite dans aucun autre plan Π_4.

Une droite Δ peut donc être considérée, d'une manière et d'une seule, comme l'intersection d'un plan π_2 et d'un plan Π_4. Il en résulte une définition très précise du cône Γ, décrit par ses deux sortes de plans comme une quadrique par ses deux séries de génératrices : deux plans de systèmes différents, sur ce cône, ont une droite commune; deux plans d'un même système n'ont qu'un point commun, le sommet du cône.

Deux remarques résultent aisément de ce qui précède :

1° Une droite D et un plan Π_4 se coupant en un point B déterminent toujours une variété $\mathcal{L}_5$. En effet, en considérant des variétés $\mathcal{L}_5$ contenant cette droite, nous avons trouvé pour leurs plans de base tous les plans Π_4 contenant B.

2° Les plans Π_4 constituent une famille non décomposable dépendant de cinq paramètres (le choix d'un point de la variété V, et d'un plan Π_4 le contenant dépend en effet de 9 paramètres). Deux de ces plans ont un point commun et un seul. Nous savons déjà en effet qu'ils ne se coupent qu'en un point; les plans Π_4 coupant un plan Π_4 déterminé dépendent alors de cinq paramètres et sont bien tous distincts; ils constituent donc tous les plans Π_4 existants.

42. *Cas où* B *est un point exceptionnel double. Plan* ϖ_8 *tangent en* B *à la variété* V. — Les raisonnements précédents subsistent si le point B est exceptionnel double. Sur une droite D passant par B, un seul point exceptionnel est distinct de B. Prenons ce point pour le point A du raisonnement précédent. Par ce point, sur la quadrique Q associée à B, sont situés une simple infinité de plans π_2; chacun d'eux a pour associé un plan π'_2 contenant B et un plan Π_4 contenant également ce point. Si le plan π_2 varie, A restant fixe, le plan π'_2 décrit le cône intersection de la quadrique associée à A et de son plan tangent en B, et le plan Π_4 décrit tout le cône Γ.

Dans les variétés $\mathcal{L}_5$ définies par ces plans Π_4 et le point A sont situées une triple infinité de droites D contenant A. Chacune de ces droites est obtenue deux fois et deux seulement. Elle admet en effet deux points exceptionnels A′ et A″, autres que A, situés sur le cône Γ. Le plan π'_2 doit comprendre un de ces points; on a alors le choix entre les plans π'_2 définis, l'un par BA′, l'autre par BA″, et chacun d'eux détermine un plan π_2 associé contenant A et situé sur la quadrique Q et une variété $\mathcal{L}_5$ répondant aux conditions du problème.

Faisons maintenant décrire à A la quadrique Q; le plan π_2 est alors un plan π_2 quelconque sur cette quadrique; le plan associé π'_2 est un plan π'_2 quelconque passant par B. Les variétés $\mathcal{V}_5$ déterminées par ces plans dépendent de trois paramètres. Leur lieu est une variété à huit dimensions, lieu de droites D dépendant de sept paramètres (chacune de ces droites, qui a un seul point exceptionnel A situé sur la quadrique Q et non sur le cône Γ, n'étant obtenue que deux fois). Or nous savons que le plan $\mathcal{P}_8$ tangent en B à la variété B contient la quadrique Q; il contient évidemment le cône Γ, et par suite toutes ces droites D (puisqu'il contient leurs points exceptionnels). C'est donc le lieu des droites D considérées; c'est par suite une variété L, du type $\mathfrak{M}_8$.

Dans cette variété, les trois nappes de points exceptionnels sont évidemment constituées, l'une par la quadrique Q, les deux autres par le cône Γ qui est, d'une part le lieu des plans π'_2 des variétés $\mathcal{V}_5$, d'autre part le lieu de leurs plans de base.

45. Étudions la répartition des droites Δ doubles sur le cône Γ. Remarquons d'abord que chaque plan π_2 simple contient une droite Δ double et que, d'autre part, il existe des plans π_2 doubles; il en existe en effet une simple infinité passant par B et situés sur la quadrique Q associée à ce point. Les droites Δ doubles se répartissent donc en deux catégories, suivant que le plan π_2 contenant la droite considérée est simple ou double. La première catégorie est évidemment la plus générale; les droites de la seconde catégorie seront dites *droites Δ spéciales*.

Un plan π'_2 passant par B ne peut être double que s'il est confondu avec le plan π_2 associé, qui est nécessairement sur la quadrique Q. Les plans π_2 doubles passant par B sont donc ceux situés sur cette quadrique; il ne peut en exister d'autres. Les droites spéciales passant par B sont donc de même celles situées sur la quadrique Q associée à ce point; il en existe une double infinité.

Il existe d'autre part évidemment sur le cône Γ une triple infinité de droites Δ doubles non spéciales, passant par B; il en existe une dans chaque plan π_2 simple et celles situées dans chaque plan Π_4 y décrivent un plan Π_3 double. Chacun de ces plans Π_4, et par suite chacun de ces plans Π_3 doubles, contient évidemment un plan Π_2 double situé sur la quadrique Q, lieu des droites spéciales situées dans ce plan et passant par B.

44. *Propriétés des droites Δ spéciales.* — Une propriété *caractéristique* des droites Δ spéciales est que ce sont des cas particuliers, ou plus exactement des positions limites, de droites D. Si en effet une droite D tend vers une droite Δ, ses points exceptionnels ont au moins un point limite B sur cette droite, qui apparaît à la limite comme une droite D passant par B, par suite située dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à ce point. Or les droites Δ situées dans ce plan et passant par B sont des droites spéciales.

Inversement, une telle droite est évidemment limite de droite D passant par n'importe quel B choisi sur elle.

Étudions maintenant la répartition des droites spéciales dans un plan Π_4. Elles sont évidemment dans son plan Π_3 double.

Choisissons d'abord dans ce plan une droite non spéciale, soit Δ. Elle définit un plan π_2 la contenant. La variété $\mathfrak{L}_5$ déterminée par ce plan et le plan π'_2 associé a pour plan de base un plan coupant π_2 suivant une droite double; c'est donc le plan Π_4 contenant la droite Δ. Il coupe de même π'_2 suivant une droite double Δ'. Les droites Δ et Δ' sont donc deux droites du plan Π_3 double, liées par une correspondance biunivoque et évidemment réciproque. Toute droite les coupant est évidemment position limite de droites D coupant π_2 et π'_2; c'est donc une droite spéciale.

De ce qui précède résulte que les droites spéciales forment un complexe dans chaque plan Π_3 double. Les droites Δ et Δ' doubles de deux plans π_2 et π'_2 associés sont conjuguées dans ce complexe. En chaque point B, le plan du complexe est le plan commun au plan Π_4 et à la quadrique associée à B.

Lorsque π_2 et π'_2 sont confondus, la variété $\mathfrak{L}_5$ devient une variété spéciale. On voit qu'il existe de telles variétés; celles qui ont un plan de base donné dépendent de trois paramètres. On peut en définir une en choisissant par exemple la droite du complexe, intersection du plan π_2 double et du plan de base; la donnée de cette droite définit le plan π_2 double.

On remarque qu'un plan Π_4 et un plan π_2 double se coupant, se coupent toujours suivant une droite spéciale, et déterminent une variété $\mathfrak{L}_5$. Chaque plan π_2 double est donc dans une double infinité de variétés $\mathfrak{L}_5$ (dont les plans de base sont ceux passant par n'importe quelle droite de ce plan) tandis qu'un plan π_2 simple n'est que dans une seule variété $\mathfrak{L}_5$.

Les résultats précédents nous permettent de préciser la propriété des droites spéciales d'être limites de droites D. Sur une telle droite, choisissons arbitrairement trois points A, A$'$, A$''$. Je dis qu'on peut choisir les droites D de manière que leurs trois points exceptionnels tendent respectivement vers A, A$'$ et A$''$. En effet, dans le plan Π_3 double contenant la droite donnée, on peut choisir, et même d'une infinité de manières, deux droites Δ et Δ', contenant respectivement A et A$'$, et conjuguées dans le complexe des droites spéciales; elles déterminent deux plans π_2 et π'_2 associés, et une variété $\mathfrak{L}_5$. Dans son plan de base, choisissons un point exceptionnel *simple*, tendant vers A$''$. La droite D bien déterminée, passant par ce point et coupant π_2 et π'_2, tend vers AA$'$A$''$, et ses points exceptionnels tendent bien vers les trois points A, A$'$ et A$''$.

45. *Variété $\mathfrak{M}_9$, lieu des variétés $\mathfrak{L}_5$ ayant même plan de base.* — Faisons tout d'abord trois remarques évidentes, qu'il est utile pour la suite d'avoir présentes à l'esprit :

1° Une variété linéaire, lieu de variétés L, est une variété L;

2° L'intersection de deux variétés L est une variété L;

3° Si deux variétés linéaires ayant respectivement N et N$'$ dimensions ont pour intersection une variété à n dimensions (prendre $n = -1$ s'il n'y a pas de point commun, $n = 0$ s'il n'y en a qu'un), la variété linéaire qu'elle détermine est à $N + N' - n$ dimensions.

Considérons maintenant le lieu des variétés $\mathfrak{L}_5$ ayant même plan de base Π_4. On est sûr d'obtenir toutes ces variétés en choisissant dans ce plan un point exceptionnel simple A, et faisant décrire à une droite D le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B; chacune de ces droites détermine avec le plan Π_4 une variété $\mathfrak{L}_5$, et toutes ces variétés sont distinctes (chaque variété $\mathfrak{L}_5$ ayant le plan de base donné contenant une droite D et une seule passant par A. Le lieu cherché est donc la variété linéaire déterminée par le plan de base et le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à ce point. C'est alors une variété L, du type $\mathfrak{M}_9$. Le plan de base constitue une nappe du lieu des points exceptionnels dans cette variété.

Remarquons que pour un point exceptionnel double B du plan Π_4, ce plan et le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B ont un plan Π_2 commun et ne déterminent par suite qu'une variété linéaire à sept dimensions. C'est le lieu d'une double infinité de plans Π_4 ayant même plan de base, et par suite une variété $\mathfrak{M}_7$ contenue dans la variété $\mathfrak{M}_9$. Elle est évidemment aussi contenue dans le plan $\mathfrak{T}_8$ tangent à B à la variété B, qui apparaît comme décrit par les différentes variétés $\mathfrak{M}_7$ obtenues en laissant B fixe et faisant varier le plan Π_4. De plus, elle constitue toute l'intersection du plan $\mathfrak{T}_8$ et de la variété $\mathfrak{M}_9$; dans ce plan T_8, en effet, d'après le n° **42**, les droites D qui ont un point exceptionnel dans le plan Π_4 considéré, et par suite peuvent appartenir à la variété $\mathfrak{M}_9$, ne dépendent que de six paramètres.

46. *Intersections de plusieurs variétés* $\mathfrak{M}_9$. — Étudions d'abord l'intersection de deux variétés $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$, dont nous appellerons les plans de base Π_4 et Π'_4. Deux cas sont à distinguer, suivant que le point exceptionnel B commun à ces deux plans est simple ou double.

Supposons-le d'abord simple. La variété linéaire déterminée par Π_4 et Π'_4, qui n'ont qu'un point commun, est le plan $\mathfrak{T}_8$ à 8 dimensions tangent à la variété V qui n'a lui-même qu'un point commun avec le plan P_5 associé à B. La variété linéaire déterminée par $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$ contient alors ces plans $\mathfrak{T}_8$ et $\mathfrak{P}_5$, et par suite comprend tout l'espace E_{13}, et l'intersection de $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$ a cinq dimensions, et ne comprend que le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B. Ce cas ne nous conduit donc à définir aucun nouveau type de variété $\mathfrak{M}$.

Supposons maintenant le point B double. Les variétés $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$ contiennent alors respectivement des variétés $\mathfrak{M}_7$ et $\mathfrak{M}'_7$ situées dans le plan $\mathfrak{T}_8$ tangent en B à la variété V, qui se coupent donc suivant une variété $\mathfrak{M}_6$. Chacune des variétés $\mathfrak{M}_7$ et $\mathfrak{M}'_7$, définie dans $\mathfrak{T}_8$ par une seule équation linéaire, coupe le plan de base suivant un plan (Π_3 et Π'_3) appartenant à la variété $\mathfrak{M}_6$. Le lieu des points exceptionnels de cette variété est donc constitué par les plans Π_3 et Π'_3 et la quadrique associée à B.

D'ailleurs la variété $\mathfrak{M}_6$ constitue bien toute l'intersection de $\mathfrak{M}_9$ et $\mathfrak{M}'_9$. En effet, cette intersection est un lieu de droites D ayant un point exceptionnel sur l'intersection de Π_4 et $\mathfrak{M}_9$, point dont le lieu est le plan Π_3; de même un deuxième point exceptionnel de ces droites a pour lieu le plan Π'_3; les droites D de l'intersection, coupant Π_3 et Π'_3, sont dans la variété $\mathfrak{M}_6$ (même si elles les coupent en leur point commun B, car $\mathfrak{M}_6$ comprend le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B).

Remarquons qu'une telle variété $\mathfrak{M}_6$ est parfaitement déterminée par la donnée d'un des plans Π_3 ou Π'_3, par exemple Π_3. Ce plan est d'abord dans un plan Π_4 bien déterminé, ayant un plan Π_3 double déterminé. Le plan Π_3 donné coupe la quadrique Q associée à B, suivant un plan qui est conjugué de B dans le complexe des droites spéciales de Π_4; ce plan étant déterminé comme lieu des points doubles du plan Π_3 donné, cette condition détermine B. La variété $\mathfrak{M}_6$ est alors déterminée par Π_3 et le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à B.

Le plan Π_3 donné doit bien entendu ne pas être un plan Π_3 double.

Si le plan Π_3 varie en contenant le même plan Π_2 double (il reste un paramètre), le point B reste fixe, et le plan Π'_4 est mobile autour de ce point. Donc les variétés $\mathfrak{M}'_9$, dont les plans de base Π'_4 décrivent le cône Γ de sommet B, coupent le plan Π_4 suivant un faisceau de plans Π_3 ayant en commun le plan Π_2 intersection de Π_4 et de la quadrique associée à B.

47. Étudions maintenant l'intersection de trois variétés $\mathfrak{M}_9$, $\mathfrak{M}'_9$, $\mathfrak{M}''_9$. Le seul cas intéressant est celui où leurs plans de base se coupent deux à deux en des points exceptionnels doubles B, B′, B″ (B situé sur Π'_4 et Π''_4, B′ sur Π''_4 et Π_4). Dans les autres cas, en effet, l'intersection, appartenant à un plan $\mathfrak{P}_5$, serait d'un type déjà connu.

Le triangle BB′B″, dont les trois côtés sont des droites Δ doubles, est un plan π_2 double ou un plan Π_2 double. Comme il coupe le plan Π_4 suivant une droite, c'est un plan π_2 double. C'est alors un triangle quelconque dans un plan π_2 double quelconque, car les côtés d'un tel triangle déterminent trois plans Π_4, Π'_4, Π''_4 qui remplissent la condition indiquée.

Le plan Π_4 coupe les variétés $\mathfrak{M}'_9$ et $\mathfrak{M}''_9$ suivant deux plans Π_3 distincts, et contenant des plans Π_2 doubles distincts, puisque les points B′ et B″ qui sont leurs conjugués dans le complexe sont distincts. Ces deux plans Π_3 se coupent donc suivant un plan Π_2 qui n'est pas double, et qui n'est pas non plus un plan Π_2 quelconque, puisque la droite $B'B''$, lieu des points doubles de ce plan, est spéciale. Ce plan Π_2, intersection de Π_4 par $\mathcal{M}'_9$ et $\mathcal{M}''_9$, constitue une nappe du lieu des points exceptionnels de la variété L intersection de $\mathcal{M}_9$, $\mathcal{M}'_9$ et $\mathcal{M}''_9$. Les deux autres nappes sont de même des plans Π'_2 et Π''_2, situés respectivement dans Π'_4 et Π''_4, contenant $B''B$ et BB'. La variété étudiée est alors une variété $\mathcal{M}_4$. Outre ces trois nappes de points exceptionnels, elle contient le plan $BB'B''$, qui constitue une nappe spéciale.

On voit comment une nappe spéciale peut apparaître lorsqu'on coupe par $\mathcal{M}_9$ la variété $\mathcal{M}_6$, intersection de $\mathcal{M}'_9$ et $\mathcal{M}''_9$, qui n'en contenait pas. Dans cette variété $\mathcal{M}_6$, une nappe était constituée par la quadrique Q associée à B, et contenait le plan $BB'B''$; la section considérée, contenant $BB'B''$, coupe Q suivant ce plan et le plan Π_2, et ne contient aucune droite D ne se réduisant pas à une droite spéciale et ayant un point exceptionnel dans ce plan $BB'B''$.

Remarquons que $\mathcal{M}_4$ est aussi l'intersection des trois plans ϖ_8, ϖ'_8, ϖ''_8, tangents en B, B', B'' à la variété V. Elle appartient en effet à trois variétés $\mathcal{M}_6$, $\mathcal{M}'_6$, $\mathcal{M}''_6$, situées respectivement dans ces trois plans.

48. *Lieu des points exceptionnels dans la variété* $\mathcal{M}_9$. — Revenons à la variété $\mathcal{M}_9$ pour y étudier le lieu de ses points exceptionnels. Les deux nappes autres que son plan de base sont évidemment constituées par une variété unique à 6 dimensions que nous appellerons *surface* Σ.

Si l'on définit $\mathcal{M}_9$ comme lieu d'une quadruple infinité de variétés $\mathcal{L}_5$ ayant même plan de base, Σ apparaît comme le lieu d'une quadruple infinité de plans π_2 et π'_2 associés, dont une triple infinité de plans π_2 doubles. Les seuls points doubles sur Σ sont d'ailleurs ceux de ces plans doubles; ceux situés sur les autres plans π_2 et π'_2 considérés sont en effet dans le plan de base, et par chacun d'eux passent une simple infinité de plans π_2 doubles situés sur Σ.

Mais il existe d'autres plans π_2 et π'_2 sur cette surface. On le voit aisément en considérant $\mathcal{M}_9$ comme lieu des plans $\mathfrak{P}_5$ associés aux points B de son plan de base, et par suite Σ comme le lieu des quadriques Q associées à ces points. Dans cette génération, chaque point A de Σ est obtenu une double infinité de fois; il est en effet situé sur la quadrique Q associée à au moins un point B du plan de base, c'est-à-dire que la quadrique qui lui est associée à lui-même contient au moins un tel point B; elle en contient alors une double infinité (les différents plans Π_2 passant par B et situés sur cette quadrique appartenant aux différents plans Π_4 passant par B; l'un d'eux est dans le plan de base considéré).

Les plans π_2 situés sur les quadriques associées aux points B sont associés à des plans π'_2 coupant le plan de base suivant une droite; chacun d'eux est donc obtenu une infinité de fois, pour tous les points B de cette droite. Les plans π_2 situés sur les quadriques considérées et par suite sur Σ dépendent donc de $4 + 3 - 1 = 6$ paramètres. Par chaque point M de Σ, il en passe une double infinité. Il ne peut y en avoir d'autres, car si c'était le cas Σ contiendrait tout le cône Γ de sommet M, et contiendrait des plans Π_4; ce n'est pas le cas.

En dehors de ces plans, il peut y avoir sur Σ des plans Π'_2 ou Π'_3 situés sur des plans Π'_4. Les plans Π'_4 qui coupent Π_4 en un point simple B ne coupent $\mathfrak{M}_9$ en aucun autre point, et par suite ne coupent pas Σ. Les plans Π'_4 qui coupent Π_4 en un autre point double coupent $\mathfrak{M}_9$, et par suite Σ, en un plan Π'_3 non double. Il y a donc sur Σ une quadruple infinité de ces plans Π'_3. Par chaque point M il en passe une simple infinité.

L'intersection de Σ avec son plan tangent en M comprend donc une triple infinité de droites Δ passant par M; elles se répartissent en une simple infinité de plans Π_3 et une double infinité de plans π_2. Si M est double, il y a évidemment par ce point une double infinité de droites Δ doubles, dont une simple infinité de droites spéciales, constituant un seul plan π_2 double.

49. *Sous-variétés de la variété* $\mathfrak{M}_9$. — Il est facile de déterminer systématiquement toutes les sous-variétés L d'une variété $\mathfrak{M}_9$. En dehors des plans π_2 ou Π_3 que nous venons de déterminer, ce sont des lieux de droites D, dont un point exceptionnel décrit une section du plan Π_4 de base, que nous appellerons *base* de la sous-variété L.

Il peut arriver que la base soit constituée par le plan Π_4 tout entier. Une section quelconque de $\mathfrak{M}_9$ contenant ce plan, et au moins un autre plan, est évidemment soit une variété $\mathfrak{C}_5$, soit une variété $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}_7$ ou

$\mathfrak{M}_8$ lieux des variétés $\mathfrak{L}_5$. Ces variétés coupent Σ suivant des variétés à 3, 4 ou 5 dimensions.

Si la base ne comprend pas tout le plan Π_4, on ne peut pas prendre n'importe quelle section ayant cette base. Ce ne serait pas en général une variété L. On trouve sans peine que :

1° Si la base se réduit à un point, simple ou double, on ne peut prendre comme section que le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à ce point et ayant cette base, ou une de ses sections;

2° Si la droite se réduit à une droite Δ' simple ou double, mais non spéciale, on ne peut prendre comme section que la variété $\mathfrak{L}_4$ déterminée par Δ' et le plan π_2 associé, ou une section de cette variété. Le plan π'_2 coupe Π_4 et par suite $\mathfrak{M}_9$, suivant cette droite Δ', et le plan de base de cette variété $\mathfrak{L}_4$ est un des plans dont nous venons de voir l'existence sur Σ;

3° Si la base se réduit à une droite Δ spéciale, on ne peut définir aucune sous-variété L, autre que le plan double la contenant, et ayant cette base, ou le plan $\mathfrak{P}_2$ déterminé par cette droite et une autre droite spéciale la coupant (plan associé à leur point d'intersection, et tangent à la quadrique associée à ce point.

Il reste à traiter le cas où la base est un plan Π_2 ou Π_3. Commençons par ce dernier cas, en supposant que ce ne soit pas le plan Π_3 double du plan Π_4.

Nous savons déjà qu'il existe une variété $\mathfrak{M}_6$, et par suite une double infinité de variétés $\mathfrak{M}_5$ et autant de variétés $\mathfrak{L}_5$, section de la précédente, ayant ce plan Π_3 pour base. Or dans chaque variété $\mathfrak{L}_5$ n'existent qu'une double infinité de variétés $\mathfrak{L}_4$, déterminées chacune par un des plans π_2 ou π'_2 et une droite de l'autre. Les variétés $\mathfrak{L}_4$ obtenues en faisant varier $\mathfrak{L}_5$ dépendent seulement de 6 paramètres. Nous venons de les trouver toutes, puisque le choix de Π_3 dans Π_4 dépend de 4 paramètres. Comme une variété $\mathfrak{M}_5$ ou $\mathfrak{M}_6$ de base Π_3 est nécessairement un lieu de telles variétés, il ne saurait en exister d'autres que celles déjà connues.

Remarquons que les variétés $\mathfrak{M}_5$ déduites de ce qui précède contiennent des points exceptionnels constituant un plan Π_3 dans Π_4, un plan Π'_2 dans un plan Π'_4, et une variété à trois dimensions, section plane d'une quadrique Q.

En intervertissant les rôles des plans Π_4 et Π'_4, on obtient des variétés $\mathfrak{M}_5$ dont chacune a pour base, dans Π_4, un plan Π_2 simple contenant une droite spéciale. Un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus dans le cas où la base est un plan Π_3 montre qu'à cette base ne correspond aucune autre sous-variété L que les variétés $\mathfrak{M}_5$ que nous venons de trouver ou leurs sections $\mathfrak{M}_4$ ou $\mathfrak{L}_3$. Les sections $\mathfrak{M}_4$ peuvent être du type étudié n° **47** ou non, suivant que la section de la quadrique constituant dans $\mathfrak{M}_5$ une nappe de points exceptionnels se décompose ou non; la nappe spéciale obtenue au n° **47** n'existe bien entendu que dans le premier cas.

Enfin, si l'on prend pour base un plan Π_2 simple dont la droite double n'est pas spéciale, on n'obtient aucune autre sous-variété que le plan $\mathfrak{P}_3$ contenant ce plan, et si l'on prend un plan Π_2 double, on n'obtient que les plans $\mathfrak{P}_3$ déterminés chacun par ce plan et une droite spéciale, non située dans Π_4 le coupant au point B qui est son conjugué dans le complexe des droites spéciales de Π_4. Un tel plan, tangent à la quadrique Q associée à B, est bien un plan $\mathfrak{P}_3$.

50. *Autres exemples de variétés* $\mathfrak{M}$. — Nous n'avons défini jusqu'ici que des types de variétés L dans lesquelles au moins une nappe du lieu des points exceptionnels était algébriquement séparée des autres. Les trois nappes ne peuvent évidemment constituer une même surface algébrique que pour les variétés $\mathfrak{M}_6$, $\mathfrak{M}_7$ ou $\mathfrak{M}_{10}$, et cette surface est alors une variété à 2, 4 ou 6 dimensions.

Ces variétés à 10, 7 ou 4 dimensions sont précisément celles que l'on obtient en imposant aux relations singulières d'être vérifiées pour 1, 2 ou 3 systèmes de périodes. Il est évident que l'on doit s'attendre, si les systèmes de périodes considérés sont quelconques, à ce que dans la variété obtenue les trois nappes ne puissent être distinguées algébriquement; mais pour certains choix particuliers de ces systèmes, elles pourront l'être, et il pourra même arriver que les systèmes correspondants de relations singulières dépendent d'un plus grand nombre de paramètres que dans le cas général.

Il est facile de définir géométriquement, dans l'espace E_{13}, des variétés de la nature considérée.

Pour former une variété $\mathfrak{M}_4$, considérons un pentagone dont les côtés soient des droites D; on peut former un tel pentagone en choisissant d'abord quatre sommets, A_1, A_2, A_3 et A_4, de manière que A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 soient des droites D. Le sommet A_5 est alors bien déterminé par la condition d'être associable à A_1 et A_4.

Le plan des deux côtés consécutifs est un plan $\mathcal{P}_2$. Ainsi $A_1A_2A_3$ est un plan $\mathcal{P}_2$, associable à A_2. Le cas général est évidemment celui où dans chacun de ces plans la conique de points exceptionnels ne se décompose pas. En considérant le plan $A_1A_2A_3$, on voit ainsi que seule la nappe contenant A_2 peut être distincte des deux autres; mais en considérant de même le plan $A_2A_3A_4$, on voit qu'elle n'est pas distincte.

Cela suffit pour affirmer que la variété L déterminée par les cinq points considérés est une variété $\mathfrak{M}$ à 4, 7 ou 10 dimensions. Il est facile de voir qu'elle est à 4 dimensions, c'est-à-dire qu'elle n'est autre que la variété linéaire déterminée par ces cinq points.

Un point quelconque de cette variété est représentable en effet par un tableau de la forme

$$|T| = \lambda_1|T_1| + \lambda_2|T_2| + \ldots + \lambda_5|T_5|,$$

$|T_1|$, ..., $|T_5|$ représentant les tableaux exceptionnels correspondant aux points A_1, ..., A_5. Il suffit de montrer que l'opération F, effectuée sur ce tableau, conduit à un tableau de même forme. On a en effet

$$F(|T|) = \Sigma\lambda_i\lambda_j F(|T_i|, |T_j|),$$

et nous savons que $F(|T_i|, |T_j|)$ représente le point exceptionnel associable à la fois de A_i et A_j (nº **28**), c'est-à-dire un point de la droite A_i et A_j si ce sont deux sommets consécutifs, et le sommet intermédiaire dans le cas contraire. De toute façon, il est dans la variété considérée, et il en est de même du point représenté par $F(|T|)$. La variété considérée est donc bien une variété $\mathfrak{M}_4$.

31. Pour obtenir une variété $\mathfrak{M}_7$, nous n'avons qu'à chercher la variété L déterminée par deux points quelconques A et B. Le lieu des points exceptionnels ne saurait évidemment se décomposer dans le cas général en nappes distinctes, puisqu'on ne peut obtenir par des opérations rationnelles aucun des points exceptionnels de la droite D déterminée par A.

Désignons ces points par A_1, A_2, A_3, ceux dérivés de B par B_1, B_2, B_3, le point associable à A_1 et B_1 par C_1, celui associable à A_1 et B_2 par C_2. Le pentagone $A_1 C_1 B_1 B_2 C_2$ détermine une variété $\mathfrak{M}_4$ du type que nous venons de définir. La droite $A_1 A_2 A_3$, droite D quelconque dans le plan $\mathfrak{P}_5$ associé à A_1, n'est pas en général dans cette variété. La variété déterminée par A et B, contenant d'une part le pentagone considéré, d'autre part la droite $A_1 A_2 A_3$, est donc au moins une variété $\mathfrak{M}_7$.

D'autre part, les systèmes de relations singulières représentés par A et B constituent 6 équations non linéaires, et sont vérifiées pour deux systèmes de périodes au moins [1]. Or les systèmes de relations singulières vérifiés pour un système de périodes dépendent de 10 paramètres, et ne sont tous vérifiés pour aucun autre système de périodes. Ceux vérifiés pour deux systèmes de périodes ne peuvent dépendre de 10 paramètres.

La variété étudiée est donc une variété $\mathfrak{M}_7$. Le choix de deux droites D dans cette variété dépendant de 12 paramètres, et celui de deux droites D dans l'espace dépendant de 24 paramètres, ces variétés dépendent de 24 — 12 paramètres. Elles constituent bien toutes celles représentant les systèmes de relations singulières vérifiées pour deux systèmes de périodes donnés, à l'exception des cas particuliers où les systèmes de relations en question dépendraient de plus de 7 paramètres.

52. Nous verrons au Chapitre suivant que la variété $\mathfrak{M}_{10}$ correspondant à un seul système de périodes peut être définie comme lieu

---

[1] On peut d'ailleurs dire exactement deux. Dans la variété $\mathfrak{M}_7$, les points représentant des systèmes de relations singulières linéaires $(\lambda = \lambda' = \lambda'') = 0$ dépendent de 4 paramètres. Ils ne sont pas tous exceptionnels, au moins en général, comme on le voit par exemple en supposant linéaire le système représenté par le point A (d'ailleurs si ces systèmes étaient exceptionnels, la condition $\lambda = 0$ définirait un plan Π_4 qui serait une des nappes du lieu des points exceptionnels; or ce lieu ne se décompose pas en général). Ces systèmes linéaires constituent alors cinq relations distinctes, et la sixième constituant les systèmes donnés est du second degré.

des plans ϖ_8 tangents à la variété V aux points B d'un même plan π_2 double. Observons seulement ici qu'il est bien évident que dans le lieu ainsi défini les points exceptionnels constituent une surface unique, décrite une fois par la quadrique Q associée à B (première nappe dans chaque plan ϖ_8) et une infinité de fois par le cône Γ du sommet B (qui constitue les deux autres nappes) dans chaque plan ϖ_8.

En effet,. deux des quadriques Q associées à deux des points B_1 et B_2, c'est-à-dire le plan π_2 double donné. Les autres points de ces quadriques Q sont tous distincts et décrivent une variété Σ à 6 dimensions.

Chaque quadrique Q est entièrement décrite par les plans Π_2 situés sur elle et coupant le plan π_2 double. La variété Σ appartient donc au lieu des plans Π_4 coupant ce plan, qui est aussi évidemment le lieu des cônes Γ de sommet B. D'ailleurs, chacun de ces plans Π_4 et le plan π_2 double déterminent une variété $\mathfrak{L}_5$ spéciale; par chacun des points de ces plans passe donc une droite D et une seule coupant le plan π_2 double, c'est-à-dire que chacun de ces points est sur la quadrique associée à un point B et un seul. Ce lieu coïncide bien avec la surface Σ.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES PÉRIODES VÉRIFIANT UN OU PLUSIEURS SYSTÈMES DE RELATIONS SINGULIÈRES.

53. *Définition des variétés* $\mathfrak{s}$. — Un système de périodes peut être représenté par le point de l'espace E_6 de coordonnées G, G′, G″, H, H′, H″. Un système de relations singulières, suivant qu'il est exceptionnel ou non, définit dans cet espace une variété à 4 ou 3 dimensions; nous désignerons une telle variété par la notation $\mathfrak{s}_4$ dans le premier cas, $\mathfrak{s}_3$ dans le second. Ces deux sortes de variétés correspondent évidemment aux points exceptionnels de l'espace E_{13} et aux droites D.

Une variété L, qu'on peut considérer comme un lieu de droites D si elle contient des points non exceptionnels, un lieu de points exceptionnels dans le cas contraire, correspond à un faisceau linéaire de variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$. Les points communs à ces variétés constituent ce que nous appellerons la variété $\mathcal{S}$ correspondant à la variété L considérée.

L'objet de ce Chapitre est l'étude des variétés $\mathcal{S}$. Nous commencerons naturellement par l'étude des variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$.

Les variétés $\mathcal{S}_3$ ont déjà été étudiées par M. Humbert qui a montré notamment l'existence sur ces variétés de trois séries de génératrices liées aux racines de l'équation en σ (n° **23**), qui se conservent par une transformation d'Hermite, et qui jouissent de cette propriété que toutes les génératrices d'un système qui coupent une génératrice donnée d'un autre système en coupent une infinité.

54. *Cônes* $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ *et* $\mathcal{C}_5$. — Les variétés $\mathcal{S}_4$ sont définies par les trois relations d'un système exceptionnel. Rappelons que, d'après le n° **25**, les « quadriques » définies par deux de ces relations ont pour intersection la variété $\mathcal{S}_4$, et en outre une variété linéaire. La variété $\mathcal{S}_4$ est donc d'ordre 3. Si on la coupe par une variété linéaire à 3 dimensions, c'est-à-dire par un « espace ordinaire », la section est une cubique gauche, intersection d'une double infinité de quadriques. De même, la variété $\mathcal{S}_4$ est l'intersection d'une double infinité de quadriques, dont les équations s'obtiennent en combinant linéairement les trois relations singulières.

Les cubiques gauches de l'espace ordinaire étant unicursales, les coordonnées d'un point de $\mathcal{S}_4$ s'expriment en fonction rationnelle de quatre paramètres.

Si, dans un système de relations singulières, exceptionnel ou non, on ne conserve que les termes du second degré, c'est-à-dire si l'on annule les coefficients autres que λ, λ', λ'', le système obtenu

$$(67)\qquad \begin{cases} \lambda\mathcal{G} + \lambda'\mathcal{H}'' + \lambda''\mathcal{H}' = 0, \\ \lambda\mathcal{H}'' + \lambda'\mathcal{G}' + \lambda''\mathcal{H} = 0, \\ \lambda\mathcal{H}' + \lambda'\mathcal{H} + \lambda''\mathcal{G}'' = 0 \end{cases}$$

est exceptionnel. Les résultats obtenus pour les variétés $\mathcal{S}_4$ s'appliquent donc au cône défini par les équations précédentes, que nous appellerons *cône* $\mathcal{C}_4$. C'est un cône d'ordre 3, lieu d'une triple infinité de génératrices, et situé sur une triple infinité de cônes de dimension 5 et du second degré (définis chacun par une seule équation du second degré, combinaison linéaire des précédentes). Les variétés s_4 ont évidemment pour cônes asymptotes des cônes $\mathcal{C}_4$

On remarque que :

1° Tous les cônes $\mathcal{C}_4$, obtenus en faisant varier les valeurs relatives de λ, λ', λ'', sont situés sur le cône $\mathcal{C}_5$ d'équation

$$D = \begin{vmatrix} G & H'' & H' \\ H'' & G' & H \\ H' & H & G'' \end{vmatrix} = 0. \tag{68}$$

En effet, le déterminant des équations (67), nécessairement nul pour les points des cônes $\mathcal{C}_4$, n'est autre que l'adjoint du déterminant D et s'annule en même temps que lui.

2° Tous les cônes $\mathcal{C}_4$ ont en commun les points d'un cône $\mathcal{C}_3$ d'équations

$$G = \frac{H'H''}{H}, \qquad G' = \frac{H''H}{H'}, \qquad G'' = \frac{HH'}{H''}. \tag{69}$$

En effet, ces équations entraînent

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' = \mathcal{G}'' = \mathcal{H} = \mathcal{H}' = \mathcal{H}'' = 0.$$

Le cône $\mathcal{C}_3$ peut se représenter paramétriquement par les formules

$$\begin{cases} G = t^2, & G' = t'^2, & G'' = t''^2, \\ H = t't'', & H' = t''t, & H'' = tt'; \end{cases} \tag{70}$$

nous appellerons *génératrice* (t, t', t'') la génératrice contenant le point t, t', t''.

55. Cherchons l'intersection de deux cônes $\mathcal{C}_4$, de coefficients λ, λ', λ'' pour l'un, et λ_1, λ'_1, λ''_1 pour l'autre. La première équation (67) donne

$$\begin{cases} \lambda\mathcal{G} + \lambda'\mathcal{H}'' + \lambda''\mathcal{H}' = 0, \\ \lambda_1\mathcal{G} + \lambda'_1\mathcal{H}'' + \lambda''_2\mathcal{H}' = 0. \end{cases} \tag{71}$$

D'autre part, le déterminant (68) étant nul, on a

$$\begin{cases} G\mathcal{G} + H''\mathcal{H}'' + H'\mathcal{H}' = 0, \\ H''\mathcal{H}'' + G'\mathcal{G}' + H\mathcal{H} = 0, \\ H'\mathcal{H}' + H\mathcal{H} + G''\mathcal{G}'' = 0. \end{cases} \tag{72}$$

Ces cinq équations peuvent être vérifiées de deux manières :

1° Il peut arriver que tous les déterminants d'ordre trois déduits du tableau

$$\begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & G & H'' & H' \\ \lambda' & \lambda'_1 & H'' & G' & H \\ \lambda'' & \lambda''_1 & H' & H & G'' \end{vmatrix}$$

soient nuls. On a ainsi une première partie de l'intersection, qui est un plan P_3 à trois dimensions.

2° Pour les points n'appartenant pas à cette intersection, on a évidemment

$$\mathcal{G} = \mathcal{H}'' = \mathcal{H}' = 0,$$

et en raisonnant sur les deux dernières équations (67) comme nous venons de le faire pour la première, on trouve

$$\mathcal{G}' = \mathcal{H} = 0, \qquad \mathcal{G}'' = 0.$$

La deuxième partie de l'intersection est donc constituée par le cône $\mathcal{C}_3$.

Les deux parties de cette intersection ont d'ailleurs un cône commun $\mathcal{C}_2$. En écrivant en effet que la génératrice (t, t', t'') du cône $\mathcal{C}_3$ est dans le plan P_3, on a l'équation

$$(73) \qquad \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_1 & t \\ \lambda' & \lambda'_1 & t' \\ \lambda'' & \lambda''_1 & t'' \end{vmatrix} = ut + u't' + u''t'' = 0,$$

linéaire en t, t', t'', qui définit un cône du second degré situé dans le plan P_3. Il contient en particulier les génératrices $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ et $(\lambda_1, \lambda'_1, \lambda''_1)$.

D'après la forme des équations (67), la donnée d'une génératrice n'appartenant pas au cône $\mathcal{C}_3$ détermine un faisceau linéaire de cônes $\mathcal{C}_4$, et par suite détermine parfaitement le plan P_3 qui leur est commun; les coefficients u, u', u'' relatifs à ce plan sont proportionnels aux mineurs d'une même ligne du déterminant D. La donnée d'une seconde génératrice détermine parfaitement le cône $\mathcal{C}_4$.

En faisant varier λ_1, λ'_1, λ''_1, on voit que le cône $\mathcal{C}_4$ est le lieu d'une infinité de plans P_3 contenant la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$. C'est donc, non seulement un cône, mais un cylindre, décrit par la translation du cône $\mathfrak{S}_3$ parallèlement à cette génératrice; dans cette translation chaque cône $\mathfrak{S}_2$, se déplaçant parallèlement à une de ses génératrices, décrit complètement le plan P_2 qui le contient. La génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$, axe de symétrie, et lieu de points singuliers, sera dite *axe* du cône $\mathfrak{S}_4$.

56. *Représentation géométrique.* — Il nous sera commode de représenter, soit la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ du cône $\mathfrak{S}_3$, soit le cône $\mathfrak{S}_4$ dont elle est l'axe, par un point A, de coordonnées homogènes λ, λ', λ'', dans un plan (à deux dimensions). La droite AA_1 joignant deux points représente alors un plan P_3, intersection des cônes $\mathfrak{S}_4$ représentés par ses différents points, et contenant le cône $\mathfrak{S}_2$, lieu des génératrices représentées par ces mêmes points.

57. *Transformation des relations singulières par un changement d'origine.* — Nous allons montrer qu'une variété s_3 ou s_4 se transforme, par une translation, en une variété analogue. De plus, les invariants I et J ne sont pas modifiés par cette opération.

Il suffit évidemment de vérifier ces résultats pour le changement de G en $G + c$ et pour celui de H en $H + c$. Indiquons par exemple le premier de ces calculs.

Par le changement considéré, les équations singulières

$$E = E' = E'' = 0$$

deviennent

$$\begin{aligned}
&E = 0,\\
&E' + c\lambda' G'' - c\lambda'' H + c\alpha'' = 0,\\
&E'' - c\lambda' H + c\lambda'' G' - c\alpha' = 0.
\end{aligned}$$

C'est bien un système de même forme, formé avec les coefficients

$$\begin{array}{lllll}
\alpha, & \beta + c\lambda'', & \gamma - c\lambda', & \lambda, & \mu,\\
\alpha', & \beta', & \gamma', & \lambda', & \mu' + c\alpha'',\\
\alpha'', & \beta'', & \gamma'', & \lambda'', & \mu'' - c\alpha'.
\end{array}$$

De ces valeurs, on déduit sans peine que les quantités α_1, β'_1, γ''_1, k, et par suite I et J, ne sont pas modifiées.

Il est, de plus, évident qu'une variété s_4 ne pouvant se transformer par une translation en une variété s_3, un système exceptionnel le reste par le changement d'origine considéré.

Considérons en particulier les variétés s_4 obtenues par translation du cône $\mathfrak{S}_4$. Les systèmes correspondants sont des systèmes exceptionnels doubles, puisque $I = J = 0$. On sait que les systèmes exceptionnels doubles dépendent de 7 paramètres. On les obtient tous par le procédé indiqué (le cône $\mathfrak{S}_4$ dépend de 2 paramètres; la translation en introduit 6; mais d'après le n° **54** chaque cône obtenu l'est une infinité simple de fois, de sorte qu'on a bien des cônes dépendant de 7 paramètres). Un système exceptionnel double définit donc toujours une variété s_4 déduite de $\mathfrak{S}_4$ par translation.

La forme générale d'un tel système est alors

$$\begin{vmatrix} \lambda & H''-h'' & H'-h' \\ \lambda' & G'-h' & H-h \\ \lambda'' & H-h & G''-g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G-g & \lambda & H'-h' \\ H''-h'' & \lambda' & H-h \\ H'-h' & \lambda'' & G''-g'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G-g & H''-h'' & \lambda \\ H''-h'' & G'-g' & \lambda' \\ H'-h' & H-h & \lambda'' \end{vmatrix} = 0.$$

En dehors de ces cônes, les seules variétés s_3 ou s_4 admettant des centres de symétrie s'obtiennent évidemment en égalant les déterminants précédents à trois constantes μ, μ', μ''. Ces variétés dépendent de 10 paramètres. Sauf les cônes qu'on vient de définir, ce sont toutes des variétés s_3. Il suffit de le vérifier dans le cas où le centre est à l'origine, et dans ce cas les formules qui expriment qu'un système est exceptionnel donnent $\mu = \mu' = \mu'' = 0$.

Remarquons qu'il peut arriver que le centre de ces variétés s'éloigne à l'infini. On a alors comme variété limite de celle étudiée, soit une variété linéaire à 4 dimensions représentant un système exceptionnel double, soit une variété linéaire à 3 dimensions représentant un système non exceptionnel.

58. *Plans tangents aux variétés* s_3. — Soit $\mathfrak{E}_3$ un tel plan. On ne restreint rien d'après le numéro précédent, en supposant le point de contact à l'origine, c'est-à-dire en supposant

$$\mu = \mu' = \mu'' = 0.$$

Les équations du plan $\mathfrak{E}_3$ s'obtiennent alors en ne conservant dans les relations singulières que les termes du premier degré. Il vient

$$(74)\qquad \begin{cases} \gamma' G'' - \beta'' G' + (\beta' - \gamma'') H + \alpha' H' - \alpha'' H'' = 0, \\ \alpha'' G - \gamma\ G'' + (\gamma'' - \alpha) H' + \beta'' H'' - \beta\ H = 0, \\ \beta\ G' - \alpha' G + (\alpha - \beta') H'' + \gamma\ H - \gamma' H' = 0. \end{cases}$$

De ces équations, on déduirait celles de la variété $\mathfrak{S}_3$ en ajoutant aux premiers membres les termes du second degré, c'est-à-dire les premiers membres des équations du cône $\mathcal{C}_4$.

En remarquant, d'une part que les coefficients α, β', γ'' n'interviennent que par leurs différences, d'autre part que les systèmes de la forme (74) se groupent par séries simplement infinies représentant un même plan, on voit que les plans $\mathfrak{E}_3$ dépendent de 6 paramètres. Leur orientation n'est donc pas quelconque.

Nous allons obtenir aisément une propriété géométrique qui les caractérise en cherchant leur intersection avec le cône $\mathcal{C}_3$. Prenons à cet effet les coordonnées d'un point de ce cône sous la forme (70) et écrivons qu'elles vérifient les équations (74). Il vient

$$\begin{aligned} &\gamma' t''^2 - \beta'' t'^2 + (\beta' - \gamma'') t' t'' + \alpha' t'' t - \alpha'' t\, t' = 0, \\ &\alpha'' t^2 - \gamma\ t''^2 + (\gamma'' - \alpha) t'' t + \beta'' t\, t' - \beta\ t' t'' = 0, \\ &\beta\ t'^2 - \alpha' t^2 + (\alpha - \beta') t\, t' + \gamma\ t' t'' - \gamma' t'' t = 0. \end{aligned}$$

équations qu'on peut écrire

$$(75)\qquad \frac{\alpha t + \beta t' + \gamma t''}{t} = \frac{\alpha' t + \beta'' t' + \gamma' t''}{t'} = \frac{\alpha'' t + \beta'' t' + \gamma'' t''}{t''},$$

ou encore, en appelant $-s$ la valeur commune de ces rapports,

$$\begin{aligned} (\alpha + s) t + \beta t' + \gamma t'' &= 0, \\ \alpha' t + (\beta' + s) t' + \gamma' t'' &= 0, \\ \alpha'' t + \beta'' t' + (\gamma'' + s) t'' &= 0. \end{aligned}$$

On voit alors qu'à chaque valeur de s racines de l'équation

$$(76)\qquad \begin{vmatrix} \alpha + s & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' + s & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' + s \end{vmatrix} = 0$$

correspondent des valeurs de t, t', t'' définies à un facteur commun près, et par suite des points décrivant une génératrice du cône $\mathfrak{C}_3$. On a ainsi trois génératrices, en général distinctes, constituant l'intersection cherchée.

Le choix de ces trois génératrices sur le cône $\mathfrak{C}_3$ définit parfaitement le plan ϖ_3, et introduit bien 6 paramètres. Il en résulte qu'un plan ϖ_3 peut être défini géométriquement comme étant une variété linéaire à trois dimensions déterminée par trois génératrices quelconques du cône $\mathfrak{C}_3$.

L'équation (76) développée s'écrit, en reprenant les notations du n° **15**,

$$s^3 + (\alpha + \beta' + \gamma'')s^2 + [(\alpha) + (\beta') + (\gamma'')s] + \delta = 0.$$

On remarque que, μ, μ', μ'' étant nuls, c'est à cette forme que se réduit l'équation étudiée Chapitre II dont dépend la recherche des systèmes exceptionnels dérivés du système étudié (le système étudié étant, soit celui qui définit le plan ϖ_3, soit celui qui définit n'importe quelle variété tangente à ce plan ; cela revient au même, puisque, μ, μ', μ'' étant nuls, λ, λ', λ'' disparaissent de l'équation). Rappelons qu'en posant

$$s + \frac{\alpha + \beta' + \gamma''}{3} = \sigma,$$

cette équation s'écrit

$$\sigma^3 - \frac{1}{3} \mathrm{I}\sigma - \frac{1}{27} \mathrm{J} = 0. \tag{77}$$

59. *Cas particulier divers.* — Il peut arriver qu'à une même valeur de s correspondent une infinité de génératrices. Comme on ne change rien en ajoutant une même constante à α, β', γ'', on peut supposer cette valeur nulle. On voit alors que la circonstance indiquée se produit lorsque le déterminant δ a tous ses mineurs nuls, c'est-à-dire ses éléments représentables par les formules

$$\begin{cases} \alpha = uv, & \beta = u'v, & \gamma = u''v, \\ \alpha' = uv', & \beta' = u'v', & \gamma' = u''v', \\ \alpha'' = uv'', & \beta'' = u'v'', & \gamma'' = u''v''. \end{cases} \tag{78}$$

Ces conditions sont précisément nécessaires et suffisantes pour que le système (74) soit exceptionnel et représente, non un plan ϖ_3, mais un plan ϖ_4. Donc un plan ϖ_3 contient bien trois génératrices du cône $\mathfrak{S}_3$ (distinctes ou confondues) et ne saurait en contenir une infinité.

Dans le cas d'un plan $\mathfrak{T}_4$, les équations (75) prennent la forme

$$\frac{v}{t}(u't + u't' + u''t'') = \frac{v'}{t'}(ut + u't' + u''t'') = \frac{v''}{t''}(ut + u't' + u''t''),$$

de sorte que l'on a, ou bien

$$ut + u't' + u''t'' = 0, \tag{79}$$

ou bien

$$\frac{t}{v} = \frac{t'}{v'} = \frac{t''}{v''}. \tag{80}$$

Dans la représentation considérée n° **56** de la génératrice (t, t', t'') du cône $\mathfrak{S}_3$ par le point de coordonnées homogènes t, t', t'', on voit que les génératrices situées dans un plan $\mathfrak{T}_4$ sont représentées par le point v, v', v'' et ceux de la droite (79). Le plan $\mathfrak{T}_4$ est représenté par ce point et cette droite. Ce plan est la variété linéaire déterminée par un plan P_3 quelconque et une génératrice (v, v', v'') quelconque du cône $\mathfrak{S}_3$.

Un plan $\mathfrak{T}_3$ est défini par les trois points qui représentent ses génératrices. Si ces trois points tendent vers trois points en ligne droite, le plan $\mathfrak{T}_3$ tend évidemment vers le plan P_3 représenté par cette droite. Mais chacun des systèmes de relations singulières correspondant au plan P_3 se réduit à la limite à deux relations distinctes, définissant, non le plan P_3, mais un des plan $\mathfrak{T}_4$ (en nombre doublement infini) qui le contient.

Nous savons que, parmi les systèmes de relations singulières dérivés d'un système donné, trois sont exceptionnels. Cela revient à dire que toute variété $\mathcal{S}_3$ est sur trois variétés $\mathcal{S}_4$. On le vérifie immédiatement, par ce qui précède, pour les plans $\mathfrak{T}_3$. Chacun de ces plans étant représenté par trois points est, sur les plans $\mathfrak{T}_4$, représenté par un des points et la droite joignant les deux autres. On voit de cette manière comment chacun de ces points, représentant une génératrice de l'intersection du cône $\mathfrak{S}_3$ et du plan $\mathfrak{T}_3$, est lié à l'un des systèmes exceptionnels dérivés du système (74); on s'explique que la recherche de ces génératrices et celle de ces systèmes exceptionnels ait conduit à la même équation du troisième degré.

Inversement, chaque variété $\mathcal{S}_4$, et en particulier chaque plan ϖ_4, contient une quadruple infinité de variétés $\mathcal{S}_3$ (cela revient à dire que, dans l'espace E_{13}, chaque point exceptionnel est sur une quadruple infinité de droites D). Mais toutes les variétés $\mathcal{S}_3$ situées dans ϖ_4 ne sont pas linéaires; on ne trouve en effet qu'une triple infinité de plans ϖ_3 dans un plan ϖ_4, ou ce qui revient au même une double infinité passant par l'origine [représentées par le point ρ, ρ', ρ'' et deux points arbitraires de la droite (79)].

60. Le fait que les équations (74) représentent un plan ϖ_4 ne suffit pas pour que le système non homogène dont ces équations sont déduites soit exceptionnel. Pour qu'il le soit, il faut de plus, comme cela se déduit immédiatement des formules (29) et (78), que

$$\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'' = 0. \tag{81}$$

Or λ, λ', λ'' sont les valeurs de t, t', t'' définissant la génératrice du cône $\mathcal{C}_3$, lignes des centres du cône $\mathcal{C}_4$. Cette condition exprime donc que la relation (79) est vérifiée pour cette droite, c'est-à-dire qu'elle est dans le plan P_3.

Pour définir une variété $\mathcal{S}_4$ passant par l'origine, il faut donc prendre des termes du second degré, définissant un cône $\mathcal{C}_4$ d'axe $\mathfrak{D}$, puis des termes du premier degré représentant un plan ϖ_4 dont le plan P_3 contienne cette génératrice $\mathfrak{D}$. Une translation parallèle à $\mathfrak{D}$ ne modifie donc ni les termes du premier, ni ceux du second degré. Les variétés $\mathcal{S}_4$ passant par l'origine, et par suite toutes les variétés $\mathcal{S}_4$, sont donc des surfaces de translation, c'est-à-dire des cylindres.

D'après cette génération, on voit que l'intersection du plan ϖ_4 et du cône $\mathcal{C}_4$ est décrite dans cette translation par l'intersection du même plan et du cône $\mathcal{C}_3$. Cette dernière contenant le cône $\mathcal{C}_2$ et une génératrice isolée, l'intersection de ϖ_4 et de $\mathcal{C}_4$, lorsque la relation (81) est vérifiée, comprend le plan P_3 situé dans ϖ_4, lieu du cône $\mathcal{C}_2$, et le plan P_2, lieu de cette génératrice, c'est-à-dire la variété linéaire à 2 dimensions déterminée par les génératrices du cône $\mathcal{C}_3$ définies, l'une par λ, λ', λ'', l'autre par ρ, ρ', ρ''.

61. Plaçons-nous maintenant dans le cas où, le système (74) étant exceptionnel, la condition (81) n'est pas vérifiée. La variété étudiée est une variété $\mathcal{S}_3$, et son plan tangent en un point quelconque est un plan $\mathcal{T}_3$. Mais, à l'origine, les termes du premier degré égalés à zéro définissent un plan $\mathcal{T}_4$. L'origine est donc un point singulier.

Pour obtenir l'équation du cône tangent, il suffit de combiner les équations singulières de manière à éliminer les termes du premier degré. Il suffit de les ajouter, après les avoir multipliées respectivement par v, v', v''. On obtient une équation homogène du second degré qui définit, dans le plan $\mathcal{T}_4$, le cône cherché.

Les variétés $\mathcal{S}_3$ ayant ainsi l'origine pour point singulier dépendent de 6 paramètres (chacune est représentée par une infinité de systèmes, et ces systèmes introduisent 7 paramètres). Par une translation, on obtient des variétés $\mathcal{S}_3$ à points singuliers dépendant de 12 paramètres. Donc *toutes les variétés* $\mathcal{S}_3$ (non linéaires) *ont un point singulier*.

Il en existe qui sont des cylindres et ont par suite une ligne de points singuliers. Pour qu'il en soit ainsi, l'origine étant un de ces points de sorte que $\alpha, \ldots, \gamma''$ sont de la forme (78), il faut et il suffit que la génératrice du cône $\mathcal{C}_3$, qui définit la direction de la translation engendrant le cône $\mathcal{C}_4$, soit située dans le plan $\mathcal{T}_4$, et cela sans être sur son cône $\mathcal{C}_2$ (car alors on serait dans le cas des variétés $\mathcal{S}_4$). Il faut donc que ce soit sa génératrice isolée, c'est-à-dire que λ, λ', λ'' soient proportionnels à v, v', v''. Les variétés remplissant ces conditions dépendent de 10 paramètres.

62. *Intersection d'un plan* $\mathcal{T}_3$ *et des cônes* $\mathcal{C}_4$ *et* $\mathcal{C}_5$. — Considérons un plan $\mathcal{T}_3$, et désignons par $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ les génératrices du cône $\mathcal{C}_3$ situées dans ce plan. Le plan à 2 dimensions défini par deux de ces droites, par exemple $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, appartient au cône $\mathcal{C}_4$ décrit par la translation du cône $\mathcal{C}_3$ parallèlement à $\mathcal{D}$, et par suite au cône $\mathcal{C}_5$. Ce cône contient donc les trois plans $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, $(\mathcal{D}'', \mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ définis par les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ assemblées deux à deux. Comme il est d'ordre 3, ces plans constituent toute son intersection avec le plan $\mathcal{T}_3$.

Considérons maintenant un cône $\mathcal{C}_4$. Il est situé sur $\mathcal{C}_5$ et contient $\mathcal{C}_3$. Donc son intersection avec $\mathcal{T}_3$ comprend certainement les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ et est tout entière située sur les trois plans définis par ces droites deux à deux. Le cône $\mathcal{C}_4$ étant d'ordre 3, cette intersection ne peut comprendre une droite autre que $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ sans en comprendre une infinité, et par suite un des plans en question.

On voit alors qu'il y a trois cas possibles :

1° L'axe de translation du cône $\mathcal{C}_4$ est une des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$; par exemple $\mathcal{D}$. L'intersection comprend les deux plans $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ et $(\mathcal{D}, \mathcal{D}'')$.

2° L'axe de translation du cône $\mathcal{C}_4$ est sur l'un des cônes $\mathcal{C}_2$ déterminés par deux des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$; par exemple $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$. Le cône $\mathcal{C}_4$ contient alors le plan P_3 contenant $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$. L'intersection de ce cône et de $\mathcal{E}_3$ comprend alors la droite $\mathcal{D}$ et le plan $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$.

3° L'axe de translation du cône $\mathcal{C}_4$ n'est sur aucun des cônes $\mathcal{C}_2$ considérés. Autrement dit, dans la représentation du n° **56**, les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ étant représentées par trois points A, A', A'', le point λ, λ', λ'' qui représente le cône $\mathcal{C}_4$ n'est sur aucun côté du triangle AA'A''. Alors l'intersection ne contient que les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$.

Ce dernier cas est évidemment le cas général.

63. *Génératrices des variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$.* — Nous savons déjà qu'un cône $\mathcal{C}_4$ contient une infinité simple de plans P_3 ayant une droite commune. Il n'existe pas d'autres droites situées sur ce cône que celles situées en entier dans un de ces plans.

Pour les autres types de variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$, nous emploierons la méthode qui consiste à chercher leur intersection avec leurs plans tangents. Plaçant l'origine au point de contact, nous avons donc à annuler séparément les termes du premier degré et ceux du second dans leurs équations, c'est-à-dire à chercher l'intersection du cône $\mathcal{C}_4$ défini par les équations (67) et du plan $\mathcal{E}_3$ ou $\mathcal{E}_4$ défini par les équations (74). Nous sommes sûrs d'obtenir ainsi, non seulement toutes les génératrices, mais même toutes les variétés linéaires situées en entier sur la variété $\mathcal{S}_4$ étudiée.

1° *Cas d'une variété $\mathcal{S}_4$.* — Nous supposerons qu'elle représente un système exceptionnel simple (sans quoi elle se réduirait à un cône $\mathcal{C}_4$ ou à un plan $\mathcal{E}_4$).

Nous savons que c'est un cylindre. Soit $\mathcal{D}$ la direction de ses génératrices. L'intersection cherchée du cône $\mathcal{C}_4$ et du plan $\mathfrak{T}_4$ peut sûrement se déduire par une translation parallèlement à ces génératrices de l'intersection du cône $\mathcal{C}_3$ et du plan $\mathfrak{T}_4$. D'après le n° **54**, cette intersection se compose d'une génératrice isolée $\mathcal{D}'$ et d'un cône $\mathcal{C}_2$ contenant la droite $\mathcal{D}$. Dans une translation parallèle à $\mathcal{D}$, la droite $\mathcal{D}'$ décrit un plan P_2, et le cône $\mathcal{C}_2$ décrit le plan P_3 qui le contient. On obtient donc un plan P_2 et un plan P_3 se coupant suivant la droite $\mathcal{D}$.

Le cylindre $\mathcal{S}_4$ est bien défini par une section plane par un plan ne contenant pas $\mathcal{D}$. Cette section apparaît, d'après ce qui précède, comme le lieu d'une simple infinité de plans à 2 dimensions ou d'une double infinité de droites. On peut la définir, soit comme lieu des droites coupant trois plans donnés à 2 dimensions, soit comme lieu des plans à 2 dimensions coupant quatre droites.

2° *Cas d'une variété* $\mathcal{S}_3$. — D'après le n° **62**, l'intersection du plan $\mathfrak{T}_3$ et du cône $\mathcal{C}_4$ comprend de toute façon trois droites, $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, situées sur le cône $\mathcal{C}_3$. Elles sont liées aux trois racines de l'équation (77), et les coefficients I et J de cette équation sont indépendants du point choisi sur la variété $\mathcal{S}_3$. On a donc sur cette variété trois systèmes bien distincts de génératrices, dont chacun peut être défini rationnellement quand on connaît la racine correspondante de l'équation (77).

Soit $\mathcal{S}_4$ la variété représentant le système exceptionnel, dérivé de celui étudié, et correspondant à la même racine de l'équation (77) que les génératrices $\mathcal{D}$. Il est facile de définir géométriquement la relation entre $\mathcal{S}_4$ et ce système de génératrices. Soit $\mathfrak{T}_4$ le plan tangent à cette variété à l'origine; il coupe le cône $\mathcal{C}_3$ suivant $\mathcal{D}$, génératrice isolée, et le cône $\mathcal{C}_2$ déterminé par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$. Par suite, d'après le n° **60**, son intersection avec $\mathcal{C}_4$ comprend le plan P_3 déterminé par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$, et un plan P_2 contenant $\mathcal{D}$. L'origine étant prise d'une manière quelconque sur $\mathcal{S}_3$, on voit qu'en chaque point de $\mathcal{S}_3$, la variété $\mathcal{S}_4$ correspondant au système de génératrices $\mathcal{D}$ contient le plan P_3 déterminé par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$, tandis que $\mathcal{D}$ appartient au plan P_2 situé sur $\mathcal{S}_4$.

64. *Premier type de variétés* $\mathcal{S}_3$: *cylindres*. — L'intersection du plan ϖ_3 et du cône $\mathfrak{S}_4$ peut comprendre d'autres génératrices que ω, ω', ω'', de sorte qu'il peut exister sur s_3 d'autres génératrices que celles des trois systèmes obtenus.

La question se pose de savoir si le choix entre les trois cas distingués n° **62** dépend du point considéré sur la variété s_3 ou seulement du choix de cette variété. La résolution de cette question est immédiate en ce qui concerne le premier cas.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que s_3 soit un cylindre, c'est-à-dire puisse être engendrée par une translation, est que l'axe de translation du cône $\mathfrak{S}_4$ appartienne au plan ϖ_3, coïncidant ainsi avec ω, ω', ou ω'', c'est-à-dire qu'on soit dans le premier cas considéré. Cette condition ne dépend pas du point choisi sur s_3. Donc, dans ce cas, par chaque point de s_3, passent deux plans P_2 à 2 dimensions situés sur cette variété. Dans le cas contraire, il est impossible que deux tels plans aient un point commun.

Cette propriété est liée à une autre propriété des surfaces s_3 qui sont des cylindres. La direction de translation est définie par λ, λ', λ''. Ces coefficients ont donc des valeurs relatives bien déterminées, les mêmes pour tous les systèmes dérivés par l'opération F du système de relations singulières considéré initialement. Il existe un de ces systèmes pour lequel $\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0$; il est linéaire. Comme il ne saurait être équivalent au système proposé, il est exceptionnel. Le cas considéré est donc caractérisé par cette circonstance qu'une des trois variétés s_4 à laquelle appartient la variété s_3 étudiée est linéaire.

Cela est facile à vérifier analytiquement. En ajoutant au besoin une constante à α, β', γ'', ce qui ne change pas la variété s_3, on peut rendre nulle la racine de l'équation (76) qui conduit à celle des droites ω, ω', ω'' qui est axe de translation de $\mathfrak{S}_4$, c'est-à-dire à des valeurs de t, t', t'' proportionnelles à λ, λ', λ''. Les rapports (75) sont alors nuls pour ces valeurs, c'est-à-dire, d'après les formules (29), que l'opération F conduit à un système linéaire (λ_1, λ'_1, λ''_1 étant nuls).

Appartenant à un plan ϖ_4, la variété s_3 y est déterminée par une seule des relations singulières. C'est un cylindre du second degré dans un plan ϖ_4. La section plane est une quadrique (Q), dans une variété linéaire à 3 dimensions; elle contient deux séries simplement infinies de génératrices rectilignes, qui donnent dans la translation les deux séries de plans P_2 dont nous avons déjà établi l'existence.

Si $\mathcal{D}$ est la droite d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{E}_3$ qui est axe de translation de $\mathcal{C}_4$, prenons comme plan de section le plan P_3 défini par $\mathcal{D}'$ et $\overline{\mathcal{D}}''$ [qui est bien dans $\mathcal{E}_4$ et ne contient pas $\mathcal{D}$, dans le cas général où l'équation (76) a ses racines distinctes]. La quadrique (Q) a alors évidemment comme cône asymptote le cône $\mathcal{C}_2$ de ce plan. Le cône asymptote de $\mathcal{S}_3$ est alors défini par la translation du cône $\mathcal{C}_2$ contenant $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

65. *Remarque.* — Le fait que l'équation (77) ait ses racines distinctes ou non ne dépend que des coefficients du plan tangent $\mathcal{E}_3$, c'est-à-dire, dans le cas considéré où l'origine est au point de contact, de α, α', ..., γ'', et non de λ, λ', λ''. La distinction entre les trois cas considérés n° **62** dépend de λ, λ' et λ''. Ces deux distinctions sont donc indépendantes. En particulier, dans le premier cas du n° **62**, que nous venons d'étudier, il peut arriver que l'équation (77) ait deux ou trois racines égales, ce qui donne lieu aux trois cas suivants, en appelant toujours $\mathcal{D}$ celle des directions $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ qui est axe de translation de $\mathcal{C}_4$.

Premier cas. — Les directions $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont confondues, mais distinctes de $\mathcal{D}$. Dans ce cas la quadrique Q est développable. C'est un cône $\mathcal{C}_2$. La variété $\mathcal{S}_3$ est décrite par la translation d'un tel cône parallèlement à une droite $\mathcal{D}$ non située sur lui.

Deuxième cas. — Les directions $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues, mais distinctes de $\mathcal{D}''$. Dans ce cas le plan $\mathcal{E}_4$ contenant $\mathcal{S}_3$ n'est pas un plan $\mathcal{E}_4$ quelconque, mais il est tangent au cône $\mathcal{C}_3$ suivant la droite $\mathcal{D}$; son intersection avec $\mathcal{C}_3$ comprend un cône $\mathcal{C}_2$, et la génératrice isolée qui existe en général est ici la droite $\mathcal{D}$ située sur ce cône.

Dans ce plan $\mathcal{E}_4$, le cône asymptote de $\mathcal{S}_3$ se décompose en deux plans; l'un est le plan P_3 qui contient le cône $\mathcal{C}_2$; l'autre est le plan tangent à $\mathcal{C}_3$ le long de $\mathcal{D}$. La variété $\mathcal{S}_3$ est du type paraboloïde.

Troisième cas. — Les directions $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont confondues. Les deux plans précédents sont alors confondus; la variété $\mathcal{S}_3$ est un cylindre parabolique.

66. *Variétés $\mathcal{S}_3$ qui ne sont pas des cylindres.* — Dans ce cas, le premier cas de la discussion du n° **62** n'est réalisé en aucun point, et la variété $\mathcal{S}_3$ n'est située dans aucune variété $\mathcal{T}_4$.

Par suite, parmi les systèmes de relations singulières dérivés les uns des autres qui représentent cette variété $\mathcal{S}_3$, aucun n'est linéaire. Si donc nous en considérons deux distincts, les valeurs de λ, λ', λ'' correspondant à ces deux systèmes ne sont pas proportionnelles; les termes du second degré de ces deux systèmes, égalés à o, définissent deux cônes $\mathcal{C}_4$ distincts. Les directions asymptotiques de $\mathcal{S}_3$, évidemment situées sur ces cônes, sont sur leur intersection, composée du cône $\mathcal{C}_3$ et d'un plan P_3 (ce qui ne veut pas dire que toutes les directions de $\mathcal{C}_3$ et P_3 soient certainement des directions asymptotiques de $\mathcal{S}_3$).

Le cône $\mathcal{C}_3$ ne contenant aucune variété linéaire à 2 dimensions, les variétés de cette nature situées sur $\mathcal{S}_3$ sont certainement toutes parallèles au plan P_3 considéré.

Supposons qu'il existe une telle variété, soit par exemple un plan $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$. La variété $\mathcal{S}_3$ est alors le lieu des droites $\mathcal{D}$ coupant ce plan. Il ne peut alors exister sur $\mathcal{S}_3$ aucun plan $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ ou $(\mathcal{D}, \mathcal{D}'')$. Si en effet un tel plan existait, il couperait le plan $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ suivant une droite et, pour les points de cette droite, le premier cas du n° **62** serait réalisé; cela n'est pas possible. On voit donc que si le deuxième cas du n° **62** est réalisé en certains points de la variété $\mathcal{S}_3$, c'est-à-dire s'il existe sur cette variété des plans $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, $(\mathcal{D}'', \mathcal{D})$ ou $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$, il ne peut en exister que d'un seul de ces trois systèmes.

67. Le cas général est évidemment fourni par le troisième cas du n° **62**. Nous allons préciser ce point, en montrant que le cas général est celui de variétés $\mathcal{S}_3$ ne contenant aucun plan $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, $(\mathcal{D}'', \mathcal{D})$ ou $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$.

En effet, s'il en existait, ils appartiendraient à un même système, soit par exemple $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, et la racine de l'équation (77) correspondant aux droites $\mathcal{D}$ pourrait être distinguée des autres par des opérations rationnelles; il n'en est pas ainsi en général.

On a ainsi des variétés, du *troisième type* (correspondant au troisième cas du n° **62**), ne contenant pas d'autres génératrices que les droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$.

Si une variété $\mathcal{S}_3$ contient deux plans $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, elle est décrite tout entière par des droites $\mathcal{D}$ coupant ces deux plans; elle est donc tout entière dans la variété linéaire à 5 dimensions contenant ces deux plans. Si elle contient un troisième plan $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, elle peut être définie dans cette variété comme lieu des droites coupant ces trois plans; elle contient alors une infinité de tels plans et peut être définie comme lieu des plans à 2 dimensions coupant quatre droites. Pour qu'une telle variété soit une variété $\mathcal{S}_3$, il faut évidemment que tous ses plans $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ soient parallèles à un même plan P_3 et que toutes ses génératrices $\mathcal{D}$ soient parallèles à des génératrices du cône $\mathcal{C}_3$. On a alors des variétés $\mathcal{S}_3$ du *second type* (correspondant au second cas du n° **62**).

On peut se demander s'il existe, en outre des types énumérés, des variétés $\mathcal{S}_3$ contenant un ou deux plans $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$, sans en contenir une infinité. Cela ne paraît pas probable.

Il résulte évidemment du n° **62**, indiquant les conditions pour qu'on soit dans l'un ou l'autre cas, que les variétés $\mathcal{S}_3$ des trois types dépendent respectivement de 10, 11 et 12 paramètres.

68. *Propriétés des transformations d'Hermite*. — Il est possible de simplifier la variété $\mathcal{S}_3$ à étudier par une translation, ou par une transformation d'Hermite.

On peut d'ailleurs remarquer que la translation n'est qu'un cas particulier de la transformation d'Hermite. Ainsi, considérons la translation ayant pour effet de remplacer G, G′, G″ respectivement par $G + c$, $G' + c'$, $G'' + c''$, sans changer H, H′, H″, qui suffit pour amener l'origine sur $\mathcal{S}_3$. On vérifie sans peine, par les formules (14′) et (22), qu'elle n'est autre chose que la transformation d'Hermite de coefficients tels que

$$a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} = a_{4,4} = a_{5,5} = \alpha_{6,6} = 1,$$
$$a_{1,4} = c, \qquad a_{2,5} = c', \qquad a_{3,6} = c'',$$

tous les autres coefficients étant nuls.

Considérons d'autre part la transformation de coefficients tels que

$$a_{1,4} = a_{2,5} = a_{3,6} = 1,$$
$$a_{4,1} = a_{5,2} = a_{6,3} = 1,$$

tous les autres coefficients étant nuls. On constate immédiatement qu'elle échange les coefficients $B_{i,j}$ et $B_{i\pm3,j\pm3}$, c'est-à-dire en particulier les coefficients λ, λ', λ'' d'une part, et μ, μ', μ'' d'autre part. Elle transforme donc une variété $\mathcal{S}_3$ passant par l'origine en une variété $\mathcal{S}_3$ linéaire et réciproquement.

L'emploi successif de ces deux transformations permet évidemment de transformer une variété $\mathcal{S}_3$ quelconque en une variété linéaire $\mathfrak{E}_3$, et même, si l'on veut, en une variété $\mathfrak{E}_3$ passant par l'origine.

On peut montrer que la même réduction est possible au point de vue arithmétique, c'est-à-dire qu'une variété $\mathcal{S}_3$ à coefficients entiers peut être réduite par une transformation d'Hermite d'ordre 1 en une variété linéaire à coefficients entiers (ayant mêmes invariants I et J, comme nous l'avons vu au n° **50**). Nous n'insisterons pas sur ce point de vue.

69. La transformation d'Hermite est une transformation ponctuelle, et par suite de contact. A l'ensemble des surfaces $\mathcal{S}_3$ tangentes en un point M à un plan $\mathfrak{E}_3$ correspond donc un ensemble analogue. Or ces surfaces ont en commun les génératrices rectilignes $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ intersection du plan $\mathfrak{E}_3$ et du cône $\mathfrak{C}_3$ du sommet M. Il en résulte immédiatement que les droites $\mathfrak{D}$, parallèles aux génératrices du cône $\mathfrak{C}_3$, sont transformées en droites analogues.

Appelons *pseudo-sphère* une quadrique située dans un plan P_3 et ayant pour cône directeur le cône $\mathfrak{C}_2$ de ce plan. Ces pseudo-sphères sont les seules quadriques ayant toutes leurs génératrices parallèles au cône $\mathfrak{C}_3$. Une telle pseudo-sphère est transformée par une transformation d'Hermite en une surface doublement réglée dont les génératrices sont aussi des droites $\mathfrak{D}$; c'est donc aussi une pseudo-sphère.

Une droite AB, située sur le cône $\mathfrak{C}_5$ sans l'être sur le cône $\mathfrak{C}_3$, appartient, comme nous l'avons vu, à un plan P_3 et un seul. Il en résulte aisément que le plan P_3 qui contient une pseudo-sphère peut être défini comme lieu des points d'où l'on peut mener plus d'une droite $\mathfrak{D}$ rencontrant cette pseudo-sphère. Il résulte immédiatement de cette définition qu'un plan P_3 est transformé par une transformation d'Hermite en un plan P_3.

Des cônes $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$ et $\mathfrak{C}_5$ de même sommet M sont alors évidemment transformés en cônes analogues ayant un même sommet M'. Si l'on représente, comme nous l'avons fait à plusieurs reprises, une droite $\mathfrak{D}$ passant par M par un point de m de coordonnées homogènes t, t', t'', et la droite $\mathfrak{D}$ correspondante passant par M' un point analogue m', la correspondance entre m et m' est homographique. En effet, des points m décrivant une ligne droite représentent des droites $\mathfrak{D}$ décrivant un cône $\mathcal{C}_2$, et cette circonstance se conserve dans la transformation d'Hermite.

Mais il est essentiel de remarquer que la correspondance homographique entre m et m' dépend du point M, deux droites $\mathfrak{D}$ parallèles n'ayant pas en général pour transformées dans la transformation d'Hermite deux droites parallèles (de même que dans l'inversion à deux droites isotropes parallèles correspondent en général deux droites isotropes non parallèles).

Il est enfin évident que la transformation d'Hermite transforme les variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ en variétés analogues, et qu'il en est de même pour tous les types de variétés $\mathcal{S}$, correspondant au sens du n° **55** aux différents types de variétés $\mathcal{L}$ définis dans l'espace E_{13}.

70. *Conséquences relatives aux variétés* $\mathcal{S}_3$. — Considérons une variété $\mathfrak{S}_3$, pour laquelle l'équation (77) ait ses racines distinctes. Son intersection avec le cône $\mathcal{S}_3$ définit trois droites $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ qu'on peut prendre comme axes de coordonnées obliques. Nous désignerons les coordonnées correspondantes par u, v, w.

Par une transformation d'Hermite, une variété $\mathcal{S}_3$ quelconque (sous la seule condition que $J^2 - 4I^3$ ne soit pas nul; ce cas d'exception peut ensuite s'étudier comme cas limite) peut se ramener à une telle variété $\mathfrak{S}_3$. Il en résulte immédiatement que :

1° Les coordonnées d'un point M de $\mathcal{S}_3$ s'expriment rationnellement en fonction de u, v, w;

2° Les courbes obtenues en laissant deux des coordonnées constantes et faisant varier la troisième sont des droites $\mathfrak{D}$ des trois systèmes $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$;

3° Les droites $\mathfrak{D}'$ de la variété $\mathcal{S}_3$ coupant une même droite $\mathfrak{D}$ en coupent une infinité; elles définissent une surface $w = \text{const.}$, qui peut être définie d'une manière analogue en échangeant les rôles des droites $\mathcal{D}$ et des droites $\mathcal{D}'$. Cette surface est une pseudo-sphère;

4° Toute variété s_3 est, de trois manières différentes, le lieu d'une série simplement infinie de pseudo-sphères.

En tous les points d'une pseudo-sphère $w =$ const., le plan P_3 déterminé par les génératrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ est évidemment le même; c'est celui qui contient cette pseudo-sphère. Lorsque w varie, ce plan P_3 reste évidemment parallèle à une droite fixe, qui est la direction des génératrices du cylindre s_4 contenant la variété s_3 correspondant à la même racine de l'équation (77) que les génératrices du système $\mathcal{D}''$ (d'après la correspondance indiquée à la fin du n° **65**).

Dans la représentation géométrique du n° **56**, les trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ passant par un même point M de la variété s_3 sont représentées dans un plan par trois points A, A′, A″. Les résultats précédents s'expriment en disant que le côté AA′ de ce triangle ne dépend que de w, et passe par un point fixe. De même A′A″ et A″A ne dépendent respectivement que de u et v et passent par des points fixes.

Dans la suite, lorsque nous parlerons de génératrices d'une variété s_3 ou s_4, nous parlerons de celles qui sont parallèles à une génératrice de $\mathcal{S}_3$ ou $\mathcal{S}_4$, particulièrement intéressantes à cause de leur invariance par une transformation d'Hermite, et non des autres génératrices rectilignes pouvant exister sur ces variétés, qui se transforment en pseudo-cercles (intersections de deux pseudo-sphères). De même il n'y a pas intérêt à distinguer les plans P_2 des autres pseudo-sphères.

71. *Variétés s autres que s_3 et s_4. Correspondance entre les plans P_3 et les plans Π_4.* — Proposons-nous maintenant d'étudier les autres types de variétés s.

Aux différents points communs d'une des variétés L étudiées dans l'espace E_{13} correspondent des systèmes de relations singulières qui représentent des variétés s_3 ou s_4 constituant un faisceau linéaire; les points communs à ces variétés constituent la variété s correspondant à la variété L considérée. Cette variété s peut être composée de points dépendant de 1, 2 ou 3 paramètres, ou réduite à un point; elle peut aussi être composée de plusieurs parties algébriquement distinctes.

Il peut être intéressant d'énumérer tous les types de variétés $\mathcal{S}$, intersection de variétés $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$, et d'examiner leurs correspondances avec les différents types de variétés L. Nous nous contenterons d'indiquer les cas les plus simples.

Considérons d'abord un plan P_3, qu'on peut supposer passer par l'origine. Ce plan P_3 est situé sur une infinité de plans $\mathfrak{C}_4$; d'après le n° **59**, en effet, les coefficients du plan $\mathfrak{C}_4$ étant définis par les formules (78), si u, u', u'' sont donnés, on a une double infinité de plans contenant un même plan P_3. Si nous tenons compte maintenant des termes du second degré, en introduisant les coefficients λ, λ', λ'', on obtient une variété $\mathcal{S}_4$ contenant le même plan P_3, pourvu que

$$\lambda u + \lambda' u' + \lambda'' u'' = 0.$$

On obtient donc des variétés $\mathcal{S}_4$, dépendant linéairement de 4 paramètres, contenant un même plan P_3. Les points correspondants de l'espace E_{13} forment donc un plan à 4 dimensions, lieu de points exceptionnels; c'est un plan Π_4. Le plan P_3 est donc la variété $\mathcal{S}$ correspondant à un plan Π_4.

Les plans Π_4 dépendent de 5 paramètres. Il doit donc en être de même des plans P_3. En effet, ceux passant par l'origine dépendent de 2 paramètres $\left(\frac{u'}{u} \text{ et } \frac{u''}{u}\right)$, et les plans parallèles dépendent évidemment de 3 constantes de plus, (μ, μ' et μ'').

Nous savons que, dans un plan Π_4, les points exceptionnels doubles dépendent de 3 paramètres. Le plan P_3 doit donc être sur une triple infinité de cônes $\mathfrak{S}_4$. En effet, il existe une simple infinité de cônes $\mathfrak{S}_4$ ayant un sommet donné et contenant P_3; le choix du sommet introduit trois paramètres. Mais chaque cône $\mathfrak{S}_4$, ayant une ligne de sommets, est obtenu une infinité de fois, de sorte que les cônes $\mathfrak{S}_4$ contenant P_3 dépendent bien de $1 + 3 - 1 = 3$ paramètres.

72. *Correspondance entre les cônes $\mathfrak{S}_3$ et les plans π_2 doubles.* — Chaque cône $\mathfrak{S}_3$ est situé sur une double infinité de cônes $\mathfrak{S}_4$ ayant même sommet que lui. Les points correspondants dans l'espace E_{13} constituent des points exceptionnels doubles, dépendant linéairement de 2 paramètres, et non situés dans un même plan Π_4 (puisque les cônes $\mathcal{C}_4$ considérés n'ont aucun plan P_3 commun). Leur lieu est donc un plan π_2 double.

Les plans π_2 doubles, comme les cônes $\mathcal{C}_3$, dépendent de 6 paramètres. La variété s correspondant à un plan π_2 double est donc toujours un cône $\mathcal{C}_3$.

73. *Variétés s correspondant à une variété $\mathcal{L}_5$ spéciale, ou à une droite spéciale.* — Considérons un cône $\mathcal{C}_2$, intersection d'un cône $\mathcal{C}_3$ par un plan P_3 contenant son sommet. Il est situé sur une infinité de variétés s_3 dont on obtient les équations en prenant des valeurs quelconques pour les coefficients λ, λ', λ'' des termes du second degré, ceux du premier degré devant représenter un plan $\mathcal{E}_4$ contenant P_3. On a ainsi des systèmes de relations singulières dépendant de 5 paramètres, représentant des variétés s_3 dépendant de 4 paramètres. Le cône $\mathcal{C}_2$ est donc la variété s correspondant à une variété L_5.

D'autre part, ce cône appartenant au plan P_3 et au cône $\mathcal{C}_3$, la variété L_5 considérée comprend le plan Π_4 et le plan π_2 double qui leur correspondent. C'est donc une variété $\mathcal{L}_5$ spéciale.

A la droite spéciale, intersection du plan Π_4 et du plan π_2 double, correspond une variété s comprenant évidemment le plan P_3 et le cône $\mathcal{C}_3$.

Les droites spéciales d'un même plan π_2 double, dépendant de 2 paramètres, correspondent bien toutes à des variétés s constituées par un même cône $\mathcal{C}_3$, et un quelconque des plans P_3 contenant son sommet. De même, la variété s, correspondant à une variable $\mathcal{L}_5$ spéciale, est toujours un cône $\mathcal{C}_2$.

74. *Variétés s correspondant à une variété $\mathcal{L}_5$ non spéciale, ou à une droite Δ non spéciale.* — Considérons une pseudo-sphère, dans un plan P_3, et prenons pour origine un point de la pseudo-sphère. Le plan tangent à l'origine à une variété s_3 la contenant, devant contenir ses deux génératrices, ne dépend plus que de 2 paramètres, et les systèmes correspondant dépendent de 3 paramètres. En prenant quelconques les coefficients λ, λ', λ'' des termes du second degré, on obtient une variété s_3 coupant P_3 suivant une pseudo-sphère tangente à l'origine à celle donnée. Il y a une condition à vérifier pour que ce soit la même. La pseudo-sphère est donc la variété $\mathcal{S}$ correspondant à une variété L_5. Comme elle est dans un plan P_3, la variété correspondante comprend un plan Π_4. C'est une variété $\mathcal{L}_5$.

Les points des plans π_2 et π'_2 correspondent à deux séries de variétés $\mathcal{S}_4$ contenant la pseudo-sphère sans contenir son plan P_3. En chaque point M de la pseudo-sphère passent deux génératrices $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Sur les variétés $\mathcal{S}_4$ d'une des séries considérées sont situées la droite $\mathcal{D}$, génératrice isolée, et un cône $\mathcal{C}_2$ contenant $\mathcal{D}'$. L'autre série s'obtient en intervertissant les rôles de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Considérons une droite Δ, intersection d'un plan Π_4 et d'un plan π_2 non double, et par suite intersection du plan Π_4, et de la variété $\mathcal{L}_5$ déterminée par le plan π_2 et le plan π'_2 associé. La variété $\mathcal{S}$ correspondant à cette droite comprend un plan P_3 et une pseudo-sphère qui ont, comme nous le verrons, une génératrice commune.

Si la droite Δ est double, sans être spéciale, le plan Π_4 qui la contient est dans la variété $\mathcal{L}_5$ considérée. La pseudo-sphère est donc dans le plan P_3. Les cônes $\mathcal{C}_4$ correspondant aux points de cette droite ont alors en commun le plan P_3 et se touchent suivant une pseudo-sphère de ce plan. On voit par cet exemple que la variété $\mathcal{S}$ correspondant à une droite Δ double non spéciale ne contient aucun point de plus que celle qui correspond à son plan Π_4 ; mais en considérant la variété $\mathcal{S}$ comme l'intersection des variétés $\mathcal{S}_3$ ou $\mathcal{S}_4$ d'une famille linéaire, la distinction entre ces deux types de variétés $\mathcal{S}$ devient très nette.

75. *Relation avec la transformation de Lie.* — Ce qui précède montre l'existence d'une relation entre les points exceptionnels doubles de l'espace E_{13} et les parallèles aux génératrices du cône $\mathcal{C}_3$, dans l'espace E_6. La variété $\mathcal{S}$ correspondant à un point exceptionnel double A est, en effet, un cône $\mathcal{C}_4$, bien déterminé par son axe $\mathcal{D}$. Si l'on ne considère que les points A d'un plan Π_3 double, les droites $\mathcal{D}$ correspondantes sont, dans un plan P_3 déterminé, les droites qui coupent une conique située à l'infini. Nous allons voir que cette correspondance entre les points A et les droites $\mathcal{D}$ est une transformation de Lie.

Si, en effet, on considère les points A d'une droite Δ du plan Π_3

double, les cônes $\mathcal{C}_4$ correspondants se touchent (d'après le n° **74**), suivant une pseudo-sphère du plan P_3. Or, les points singuliers de certains d'entre eux, puisqu'il s'agit d'un faisceau linéaire, sont certainement des points de contact de tous les cônes $\mathcal{C}_4$ considérés. Les axes $\mathcal{D}$ de ces cônes décrivent donc la pseudo-sphère. Si A décrit une droite Δ, la droite $\mathcal{D}$ correspondante dans la transformation étudiée décrit donc une pseudo-sphère, qui est, d'après le n° **74**, la variété $\mathcal{S}$ correspondant à la variété $\mathcal{L}_5$ dont le plan π_2 contient Δ. Si A décrit la droite Δ' conjuguée de Δ par rapport au complexe des droites spéciales, la variété $\mathcal{L}_5$ est la même, et l'on trouve pour les droites $\mathcal{D}$ les génératrices de l'autre système de la même pseudo-sphère. Si enfin la droite Δ appartient au complexe des droites spéciales, la pseudo-sphère correspondante est de rayon nul.

Ces propriétés sont caractéristiques de la transformation de Lie. La correspondance entre les points A d'un plan Π_3 double et les axes $\mathcal{D}$ des cônes $\mathcal{C}_4$ correspondants est bien une transformation de Lie.

Une transformation d'Hermite conservant Π_4 définit, dans le plan Π_3 double, une transformation homographique conservant le complexe des droites spéciales, et dans le plan P_3, une transformation ponctuelle transformant les droites $\mathcal{D}$ en droites analogues. Ces deux transformations sont évidemment celles qui se correspondent dans la transformation de Lie considérée.

76. *Variétés $\mathcal{S}$ contenant un plan* P_3 *donné*. — Elles correspondent évidemment aux sections d'un même plan Π_4. Nous connaissons déjà celles qui correspondent à un point, simple ou double, et à une droite, simple, double, ou spéciale.

Considérons maintenant un plan Π_2 non double, contenant une droite spéciale. A ses points correspondent les variétés $\mathcal{S}_4$ d'un *réseau* (famille linéaire doublement infinie); ce réseau est bien déterminé par le faisceau linéaire de cônes $\mathcal{C}_4$ correspondant aux points de la droite spéciale, et une autre variété $\mathcal{S}_4$. Ces cônes $\mathcal{C}_4$ ont en commun le plan P_3 et un cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M situé dans P_3; cette variété $\mathcal{S}_4$ contient P_3 et M, et coupe par suite le cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M suivant un cône $\mathcal{C}_2$ situé dans P_3 et une génératrice isolée $\mathcal{D}$. L'intersection de toutes les variétés s_4 du réseau comprend donc le plan P_3 et la droite $\mathfrak{D}$ qui le coupe en M; leur ensemble constitue la variété s correspondant au plan Π_2 considéré.

Le cas d'un plan Π_2 double se traite d'une manière analogue, ou comme cas limite du précédent. La variété s correspondante comprend le plan P_3, et une droite $\mathfrak{D}$ de ce plan considérée comme droite double; cette droite est celle qui correspond par la transformation de Lie au plan Π_2 double, ou au point A commun aux droites spéciales de ce plan.

Considérons maintenant un plan Π_3. Il contient une double infinité de plans Π_2 contenant des droites spéciales qui ont un point commun A; à ces plans correspondent des variétés s constituées par le plan P_3 et des droites $\mathfrak{D}'$, dont on ne peut rien dire, si ce n'est qu'elles coupent une même droite $\mathfrak{D}$ de P_3, celle qui correspond à A. La variété s cherchée représente donc l'intersection d'une famille triplement infinie de variétés s_4, sans autre point commun que ceux de P_3, et sans point de contact fixe; mais deux variétés de cette famille, correspondant à deux points A_1 et A_2, se touchent en un point mobile de la droite $\mathfrak{D}$, celui qui correspond par la transformation de Lie à la droite spéciale du plan AA_1A_2.

Parmi les plans Π_2 contenant des droites spéciales passant par A, considérons ceux qui contiennent une droite Δ simple contenant A. Il leur correspond des droites $\mathfrak{D}'$ coupant la droite $\mathfrak{D}$ du plan P_3. Leur lieu est évidemment la pseudo-sphère qui, avec le plan P_3, constitue la variété s correspondant à la droite Δ. Nous voyons que, comme nous l'avons énoncé au n° **74**, cette pseudo-sphère et le plan P_3 ont une génératrice commune.

77. *Variété s constituée par une droite $\mathfrak{D}$ et une pseudo-sphère ayant un point commun.* — Par une transformation d'Hermite, on peut ramener la pseudo-sphère à être un plan P_2. La variété s étudiée est alors dans un plan $\mathfrak{E}_3$ bien déterminé, représenté d'une infinité de manières par un système de relations singulières, c'est-à-dire que les coefficients du premier degré, dans les équations d'une variété s_3 contenant s, dépendent d'un paramètre. Les coefficients λ, λ', λ'' vérifient une relation, puisque le cône $\mathfrak{S}_4$ qu'ils définissent doit contenir le plan P_2 (et par suite le plan P_3 contenant P_2). La variété $\mathcal{S}$, contenue dans des variétés $\mathcal{S}_3$ représentées par des systèmes dépendant de 3 paramètres, correspond à un plan $\mathcal{P}_3$ ou $\mathcal{L}_3$.

Cherchons les variétés $\mathcal{S}_4$ contenant $\mathcal{S}$, qui correspondent aux points exceptionnels de ce plan. Le plan tangent $\mathcal{E}_4$ à une telle variété, au point M commun à $\mathcal{D}$ et P_2, peut être celui déterminé par $\mathcal{D}$, et le plan P_3 contenant P_2; les coefficients λ, λ', λ'' doivent être alors tels que la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ soit dans P_3 (sinon on aurait une variété $\mathcal{S}_3$, et non $\mathcal{S}_4$); cela leur impose une condition, et l'on a une double infinité de variétés $\mathcal{S}_4$. On peut, d'autre part, pour déterminer $\mathcal{E}_4$, prendre comme génératrice isolée une génératrice $\mathcal{D}'$ du plan P_2, et comme plan P_3 celui déterminé par $\mathcal{D}$ et l'autre génératrice $\mathcal{D}''$ du plan P_2; il faut alors que la génératrice $(\lambda, \lambda', \lambda'')$ soit la droite $\mathcal{D}''$, et l'on n'a qu'une simple infinité de variétés $\mathcal{S}_4$; on obtient une autre famille analogue en intervertissant $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$.

Cela montre que la variété $\mathcal{S}$ étudiée correspond à un plan $\mathcal{L}_3$, dans lequel les points exceptionnels constituent un plan Π_2 et deux droites Δ et Δ'. La pseudo-sphère contenue dans cette variété correspond à la variété $\mathcal{L}_5$ contenant $\mathcal{L}_3$.

78. *Variété $\mathcal{S}$ constituée par trois droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ se coupant en un point* M *et non situées dans un même plan* P_3. — Pour une variété $\mathcal{S}_3$ contenant $\mathcal{S}$, le plan tangent en M est bien déterminé; les coefficients λ, λ', λ'' sont quelconques. On a ainsi une triple infinité de variétés $\mathcal{S}_3$, correspondant aux droites D d'une variété L_4.

La variété $\mathcal{S}$ est située sur le cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M; la variété L_4 comprend donc un plan π_2 double.

En dehors des cônes $\mathcal{C}_4$ contenant ce cône $\mathcal{C}_3$, les variétés $\mathcal{S}_4$ contenant $\mathcal{S}$ sont obtenues de la manière suivante : le plan $\mathcal{E}_4$ tangent en M est défini par une des droites $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$ et le plan P_3 des deux autres; les coefficients λ, λ', λ'' sont ceux d'une génératrice de ce plan P_3. On a ainsi trois séries doublement infinies de variétés $\mathcal{S}_4$.

La variété L_4 à laquelle correspond $\mathcal{S}$ comprend donc un plan π_2 double, nappe spéciale, et trois plans Π_2. C'est la variété $\mathcal{M}_4$ étudiée n° **47**.

79. *Variété $\mathcal{S}$ constituée par un pseudo-cercle.* — Le pseudo-cercle est l'intersection d'une simple infinité de pseudo-sphères dans un même plan P_3. Il correspond donc à la variété $\mathfrak{M}_6$, lieu d'une simple infinité de pseudo-sphères ayant même plan de base.

Le pseudo-cercle peut se réduire en particulier, soit à une droite qui ne soit pas une droite $\mathcal{D}$, mais qui soit dans un plan P_3 et, par suite, parallèle à une génératrice du cône $\mathcal{C}_5$, soit à deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ qui se coupent. Dans ce dernier cas, il y a décomposition entre les deux séries de variétés $\mathcal{S}_4$ qui le contiennent sans contenir le plan P_3; les unes admettent $\mathcal{D}$, les autres $\mathcal{D}'$, comme génératrice isolée. La variété $\mathfrak{M}_6$, à laquelle correspond le couple de droites $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$, contient alors, en dehors du plan de base, des points exceptionnels constituant deux nappes à trois dimensions algébriquement distinctes; elles ont en commun le plan π_2 double auquel correspond le cône $\mathcal{C}_3$ de sommet M.

En dehors de ce cas, un pseudo-cercle est situé sur deux cônes $\mathcal{C}_3$; la variété à trois dimensions, qui constitue avec le plan de base le lieu des points exceptionnels dans la variété $\mathfrak{M}_6$, contient donc deux plans π_2 doubles.

80. *Variété $\mathcal{S}$ constituée par une droite $\mathcal{D}$.* — Les variétés $\mathcal{S}_3$ contenant $\mathcal{S}$ sont assujetties à cinq conditions (trois pour écrire qu'elles contiennent un point choisi sur $\mathcal{D}$, deux pour que le plan tangent en ce point contienne $\mathcal{D}$); elles correspondent donc à des droites D décrivant une variété $\mathfrak{M}_8$.

Chacune de ces variétés contient deux pseudo-sphères contenant $\mathcal{D}$. La variété $\mathfrak{M}_8$ est alors le lieu des variétés $\mathcal{L}_5$, auxquelles correspondent ces pseudo-sphères. Or, la droite $\mathcal{D}$ est dans une simple infinité de plans P_3, appartenant au cône $\mathcal{C}_4$ d'axe $\mathcal{D}$, et dans chacun de ces plans P_3 est située une double infinité de pseudo-sphères contenant $\mathcal{D}$. Les variétés $\mathcal{L}_5$ considérées ont une infinité de plans de base distincts, contenant un même point exceptionnel double A (celui auquel correspond le cône $\mathcal{C}_4$ d'axe $\mathcal{D}$, celui par conséquent que la transformation de Lie transforme en la droite $\mathcal{D}$); à chacun de ces plans de base correspond une double infinité de variétés $\mathcal{L}_5$.

La variété $\mathfrak{M}_8$, contenant une infinité de plans Π_4 contenant A, et, par suite, le cône Γ de sommet A, n'est autre que le plan $\mathfrak{T}_8$ tangent en A à la variété V. Aux points du cône Γ correspondent des variétés $\mathcal{S}_4$ dans lesquelles $\mathfrak{D}$ appartient à un cône $\mathfrak{C}_2$ situé dans $\mathcal{S}_4$, tandis qu'aux points de la quadrique Q associée à A correspondent des variétés $\mathcal{S}_4$ ayant $\mathfrak{D}$ comme génératrice isolée.

Aux points de la variété $\mathfrak{M}_7$, lieu des droites $\mathfrak{D}$ situées dans $\mathfrak{T}_8$ et coupant un plan Π_4 bien déterminé du cône Γ, correspondent évidemment des variétés $\mathcal{S}_3$ contenant $\mathfrak{D}$, et pour lesquelles une des pseudosphères contenant $\mathfrak{D}$ est dans un plan P_3 bien déterminé.

On remarque que les variétés $\mathcal{S}$ correspondant, d'une part, au point exceptionnel double A, d'autre part, au plan $\mathfrak{T}_8$ tangent en A à la variété V, sont l'une le cône $\mathfrak{C}_4$ d'axe $\mathfrak{D}$, l'autre la droite $\mathfrak{D}$. Du premier de ces résultats, on peut aisément déduire le second. La droite $\mathfrak{D}$, lieu des points doubles de $\mathfrak{C}_4$, est évidemment l'intersection de $\mathfrak{C}_4$ et de toutes les variétés $\mathcal{S}_4$ qui en diffèrent infiniment peu. La variété $\mathfrak{M}$ correspondante comprend donc A et tous les points infiniment voisins sur la variété V, et, comme elle est linéaire, tous ceux du plan $\mathfrak{T}_8$ tangent à cette variété.

81. *Variété $\mathcal{S}$ constituée par un point* M. — Elle correspond évidemment à une variété $\mathfrak{M}_{10}$. Or, toutes les variétés $\mathcal{S}_3$ ou $\mathcal{S}_4$ contenant M contiennent des droites $\mathfrak{D}$ passant par ce point, et M est l'intersection d'une double infinité de droites $\mathfrak{D}$, dont le lieu est un cône $\mathfrak{C}_3$. La variété $\mathfrak{M}_{10}$ est donc le lieu d'une double infinité de plans $\mathfrak{T}_8$, dont les points de contact décrivent un plan π_2 double. On voit ainsi que ce lieu, étudié n° **52**, est bien une variété $\mathfrak{M}$.

Aux points du plan π_2 double correspondent les cônes d'axes $\mathfrak{D}$ passant par M. Par suite, à l'intersection de deux ou trois plans tangents $\mathfrak{T}_8$ dont les points de contact sont sur un même plan π_2 double correspondent donc l'ensemble de deux ou trois génératrices d'un même cône $\mathfrak{C}_3$. On retrouve ainsi aisément des résultats obtenus n^{os} **78** et **79**.

82. *Variété $\mathcal{S}$ constituée par deux points* M *et* M'. — Elle correspond à l'intersection des variétés $\mathcal{M}_{10}$ et $\mathcal{M}'_{10}$ auxquelles correspondent M et M'. Trois cas sont à distinguer.

Premier cas. — La droite MM' est une droite $\mathcal{D}$. Les plans π_2 doubles dont les variétés $\mathcal{M}_{10}$ et $\mathcal{M}'_{10}$ sont déduites ont un point commun A, celui auquel correspond le cône $\mathcal{C}_4$ d'axe $\mathcal{D}$. Les variétés $\mathcal{M}_{10}$ et $\mathcal{M}'_{10}$ ont alors en commun le plan $\mathcal{E}_8$ tangent en A à la variété V, et la variété $\mathcal{S}$ comprend, non seulement M et M', mais toute la droite MM'.

Deuxième cas. — La droite MM' est parallèle à une génératrice du cône $\mathcal{C}_5$; elle est alors dans un plan P_3. Les variétés $\mathcal{M}_{10}$ et $\mathcal{M}'_{10}$ ont alors un plan Π_3 commun. Leur intersection est une variété $\mathcal{M}_7$ ayant ce plan pour plan de base; les deux autres nappes de points exceptionnels y constituent une surface unique à 4 dimensions, contenant une simple infinité de plans π_2 doubles (puisque l'ensemble des points M et M' d'un même plan P_3 est dans une simple infinité de cônes $\mathcal{C}_2$, et, par suite, de cônes $\mathcal{C}_3$, dont les sommets décrivent un pseudo-cercle).

Troisième cas. — La droite MM' est quelconque. Les variétés $\mathcal{M}_{10}$ et $\mathcal{M}'_{10}$ ont pour intersection une variété $\mathcal{M}_7$ dans laquelle le lieu des points exceptionnels n'est pas décomposable.