JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURO PICONE

Nuove osservazioni su alcuni metodi d'approssimazione dell'analisi

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 335-391.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__335_0>

Nuove osservazioni su alcuni metodi d'approssimazione dell'analisi;

PER MAURO **PICONE**.

PREFAZIONE.

Considerando, per esempio, i problemi nel campo delle equazioni lineari alle derivate parziali del tipo ellittico, dei quali la fisica ha chiesto la soluzione all'analisi matematica, si può ben dire che, se le trattazioni fino ad oggi date di quei problemi possono essere, alla fine, ritenute del tutto esaurienti dal matematico, esse tuttavia non contengono metodi per l'effettivo calcolo approssimato della soluzione che riescano, in ogni caso, di facile e di utile applicazione al fisico.

Il potente ausilio delle equazioni integrali ha permesso oggi di conseguire, con una grande generalità, i teoremi d'esistenza per molti e per i più importanti di quei problemi, ma si deve, pur troppo, convenire che, nelle successive approssimazioni della soluzione, date con le dimostrazioni di questi teoremi, non si può vedere un pratico metodo di calcolo.

Mi sono proposto di indagare se non sia possibile, in alcuni casi, di realizzare tali metodi di calcolo. L'indagine mi ha per intanto condotto ad un nuovo metodo di calcolo approssimato per la soluzione del problema di Dirichlet, metodo che, dal punto di vista accennato, mi sembra possedere i desiderati requisiti. L'esposizione di tale metodo sarà l'oggetto di una memoria che, in questo stesso Giornale, seguirà la presente.

Nella presente memoria sottopongo ad una diffusa trattazione il problema generale *dell'approssimazione di un'assegnata funzione per combinazione lineare di assegnate altre funzioni*. Sui risultati di tale trattazione si fonda l'indicato metodo d'approssimazione per la soluzione del problema di Dirichlet, ma è sperabile che questi risultati forniranno le basi per ulteriori proficue applicazioni all'integrazione approssimata di equazioni alle derivate parziali, dei varii tipi, della fisica-matematica.

I metodi classici prescrivono, quasi, lo sviluppo della soluzione in serie di note funzioni, senza domandare se, anche ottenuta una serie uniformemente ed assolutamente convergente, derivabile termine a termine quante volte si vuole, essa serie, arrestata ai primi n termini, fornisca poi, fra tutte le combinazioni lineari delle stesse n funzioni, la migliore approssimazione possibile della soluzione, *in tutto il dominio* Γ *di sua esistenza nel quale deve essere considerata*. Quasi sempre, invece, avviene che delle medesime funzioni che compaiono in quei primi n termini della serie si può trovare una diversa combinazione lineare che assai meglio approssima la soluzione *in tutto l'indicato dominio* Γ. Nelle scienze sperimentali si constata che tanto meglio si approssima quanto più piccolo è l'errore quadratico medio che si commette e che la migliore approssimazione è quella che rende minimo tale errore. A questo concetto si informa il *metodo dei minimi quadrati* di Gauss che ha dato e dà così cospicui frutti nella scienza della misura.

Orbene, concependo anche in analisi l'errore d'approssimazione al modo delle scienze sperimentali, io riprendo il metodo dei minimi quadrati e oso pensarne l'applicazione sistematica all'integrazione approssimata di intiere classi di equazioni alle derivate parziali.

L'idea di introdurre tale metodo nell'analisi, non è nuova. Essa già si trova in Tchebychef (1) e fu anche, nello stesso indirizzo, successivamente elaborata da Heine (2), da Gram (3) e da altri. Loddove, assai

(1) *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (Journal de Liouville), 2e série, t. III, p. 319.

(2) HEINE, *Handbuch Kugelfunction*, Bd I, Kap. V.

(3) GRAM, *Ueber die Entwickelung reeller Function in Reihen mittelst der Methode der kleinsten Quadrate* (*Journal für die reine und angewandte Mathematick*, Bd 94, 1883, p. 41).

più recentemente, l'applicazione del metodo a determinati problemi di fisica, dipendenti appunto dall'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u = 0$, è stata anche effettuata o proposta da Somigliana e Vercelli ([1]) e poscia da Brillouin ([2]), non ostante che del metodo non si possedesse alcuna nozione sulla sua convergenza.

Oggi però, dopo la scoperta di Lebesgue delle funzioni sommabili, dopo l'introduzione, dovuta al Fischer, della convergenza in media, il metodo dei minimi quadrati acquista una nuova, inesperata potenza, anche nel campo della pura analisi matematica, e là ove esso non arrivava che per una congettura, vi arriva, come qui ho dimostrato (al n° **20**, § V), con matematica certezza.

Ai metodi classici di integrazione per serie rimane il grave compito, di interesse prevalentemente teorico, di provare l'esistenza e di trovare il numero delle soluzioni dei problemi sull'integrazione delle equazioni alle derivate parziali; ed io sarei pago se questo mio lavoro ed i successivi nei quali applicherò i risultati di questo, riuscissero, almeno, a stabilire che *al metodo dei minimi quadrati spetta*, *invece*, *il compito di* calcolare *la soluzione*.

Nell'esposizione del presente lavoro, per comodità del lettore e allo scopo di fare un tutto organico, non ho trascurato di trattare rapidamente alcuni risultati noti fondamentali.

Degna di relievo mi pare che sia la nuova semplicissima trattazione che qui ricevono (ai §§ VI et VII) i sistemi di infinite equazioni lineari in infinite quantità incognite, la cui soluzione si riconnette appunto alle nostre ricerche d'approssimazione. Al § VII si ritrovano i bei risultati di E. Schmidt su tali sistemi.

([1]) Somigliana e Vercelli, *Sulla provisione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini* (*Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, t. LXIII, 1913, p. 327).

([2]) Brillouin, *La méthode des moindres carrés et les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique* (*Annales de Physique*, t. VI, 1916, p. 137).

I. — Sulla convergenza in media.

1. Definizioni e teorema Fischer-Weyl. — Indicheremo sempre con la lettera E un insieme di punti, limitato, misurabile (al senso di Lebesgue) e di misura non nulla, di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni. Sia P un punto variabile in E e $f(P)$ una funzione di P definita in E ([1]) ivi di quadrato sommabile (al senso di Lebesgue), la $f(P)$ risulterà sommabile in E. Se $g(P)$ è un'altra funzione definita in E, ivi pur essa di quadrato sommabile, le funzioni fg, $(f-g)^2$, $(f+g)^2$ risulteranno sommabili in E.

Ciò posto, consideriamo il fecondo concetto di *convergenza in media* introdotto da E. Fischer ([2]).

La successione di funzioni

$$F_0(P), \quad F_1(P), \quad F_2(P), \quad \ldots, \quad F_n(P), \quad \ldots, \tag{1}$$

sia costituita di funzioni definite in E ed ivi di quadrato sommabile, si dice che *la successione converge su* E *in media* se :

$$\lim_{r,s=\infty} \int_E [F_r(P) - F_s(P)]^2 \, dP = 0.$$

Si dice che la stessa successione (1) *converge su* E *in media verso la funzione* $f(P)$ e scriveremo

$$\underline{\lim}_{n=\infty} F_n(P) = f(P),$$

se

$$\lim_{n=\infty} \int_E [f(P) - F_n(P)]^2 \, dP = 0.$$

Evidentemente : se una successione converge su E in media, essa converge in media su ogni insieme misurabile contenuto in E; se una successione converge su E in media verso una funzione f, essa con-

---

([1]) Sottintenderemo sempre (salvo a dichiarare espressamente il contrario) reale e finito il valore assegnato ad una funzione in ogni punto.

([2]) E. Fischer, *Sur la convergence ou moyenne* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 1er semestre 1907, p. 1022).

verge in media verso la stessa funzione su ogni insieme misurabile contenuto in E; se una successione converge su E in media verso una funzione f, ogni altra funzione verso la quale la stessa successione converga su E in media sarà equivalente alla f (1); condizione necessaria affinchè una successione converga su E in media verso una funzione f è che la successione converga su E in media; condizione sufficiente affinchè una successione converga su E in media è che esista un insieme E', avente la misura di E e contenuto in E, nel quale la successione converge uniformemente.

La convergenza in media per una serie

$$(2) \qquad u_0(P) + u_1(P) + \ldots + u_n(P) + \ldots,$$

di funzioni definite in E ed ivi di quadrato sommabile, si riporta a quella della successione

$$(1) \quad F_0(P) = u_0(P), \quad F_1(P) = u_0(P) + u_1(P), \quad \ldots, \quad F_n(P) = \sum_{k=0}^{n} u_k(P), \quad \ldots.$$

Se

$$f(P) = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k(P),$$

si scriverà

$$f(P) \sim u_0(P) + u_1(P) + \ldots + u_n(P) + \ldots.$$

Sussiste il

TEOREMA FISCHER-WEYL (2). — *Se una successione di funzioni converge su E in media, esiste una funzione, determinata quasi ovunque in E, verso la quale la successione converge su E in media.*

Questo fondamentale teorema è stato scoperto dal Fischer, e dimostrato, dal Fischer ed in seguito di nuovo dal Weyl, nel caso che l'insieme E si riduca ad un intervallo lineare. Alla denominazione del

---

(1) Due funzioni f e g definite, in E, saranno dette fra di loro equivalenti in E se si ha $f(P) = g(P)$ quasi ovunque in E, cioè fatta, al più, eccezione per i punti di un insieme di misura nulla. Si scriverà allora $f(P) \doteq g(P)$.

(2) FISCHER, *loc. cit.* — H. WEYL, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunctionen fortschreiten* (*Mathematische Annalen*, Bd 68, 1909, p. 225).

teorema da noi enunciato è giusto però aggiungere il nome di Weyl, poichè soltanto la dimostrazione di questo autore è suscettibile d'essere immediatamente estesa ad un qualsiasi insieme limitato e misurabile di uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni.

2. Alcune proprietà della convergenza in media. — Esporremo ora alcune notevoli proprietà della convergenza in media, sostanzialmente già osservate.

I. *Sia* A *un insieme misurabile contenuto in* E, *se la successione* (1) *converge su* E *in media, esisterà un numero positivo* K *tale che, per ogni indice n, qualunque sia* A, *risulta*

$$\int_A [F_n(P)]^2\, dP \leqq K.$$

Ed invero, dato ε positivo e arbitrario, è possibile trovare un indice n_ε tale che, se $n \geqq n_\varepsilon$, si ha

$$\int_E (F_n - F_{n_\varepsilon})^2\, dP \leqq \varepsilon,$$

ma è

$$\int_A F_n^2\, dP \leqq \int_E F_n^2\, dP \leqq 2\int_E (F_n - F_{n_\varepsilon})^2\, dP + 2\int_E F_{n_\varepsilon}^2\, dP,$$

ne segue, che il numero K, di cui abbiamo asserito l'esistênza, è il più grande fra i seguenti $n_\varepsilon + 1$ numeri :

$$2\left(\varepsilon + \int_E F_k^2\, dP\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n_\varepsilon).$$

II. *Le successioni* $[F_n]$ *e* $[G_n]$ *convergano su* E *in media, rispettivamente, verso le funzioni* f *e* g, *dico che allora*

$$\lim_{n=\infty} \int_A F_n G_n\, dP = \int_A fg\, dP,$$

uniformemente per A *variabile in* E.

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{A}(fg - F_nG_n)\,dP\right| \\
&= \left|\int_{A}(f - F_n)g\,dP + \int_{A}(g - G_n)F_n\,dP\right| \\
&\leqq \sqrt{\int_{A}(f - F_n)^2\,dP\int_{A}g^2\,dP} + \sqrt{\int_{A}(g - G_n)^2\,dP\int_{A}F_n^2\,dP} \\
&\leqq \sqrt{\int_{E}g^2\,dP}\sqrt{\int_{E}(f - F_n)^2\,dP} + \sqrt{K}\sqrt{\int_{E}(g - G_n)^2\,dP}.
\end{aligned}
$$

In particolare : per $G_n \equiv 1$, si ha :

$$\lim_{n=\infty}\int_{A}F_n\,dP = \int_{A}f\,dP,$$

uniformemente in E; per $G_n \equiv F_n$, si ha :

$$\lim_{n=\infty}\int_{A}F_n^2\,dP = \int_{A}f^2\,dP,$$

uniformemente in E.

II. — Sulla convergenza uniforme in generale.

5. Definizione e teorema di Weyl. — Si deve al Weyl (*loc. cit.*, p. 339) uno studio approfondito della convergenza in media con il quale si consegue una più adeguata conoscenza del modo di comportarsi della differenza $f(P) - F_n(P)$ nei punti dell'insieme. Per enunciare questo importante risultato occorre introdurre il concetto di *convergenza uniforme in generale*, del pari dovuto al Weyl.

Nell'insieme E, limitato, misurabile e di misura non nulla, siano definite, nel modo più arbitrario, le funzioni

$$
(1)\qquad \begin{cases} G_0(P) = c_0(P), \qquad G_1(P) = c_0(P) + c_1(P), \qquad \dots, \\ \qquad G_n(P) = \sum_{k=0}^{n} c_k(P), \qquad \dots. \end{cases}
$$

costituenti una successione; si dirà, con Weyl, che tale successione, oppure che la serie

$$(2) \qquad v_0(P) + v_1(P) + \ldots + v_n(P) + \ldots$$

converge su E *uniformemente in generale*, se, comunque s[illegible]i un numero positivo $\varepsilon < mE$ (¹), è possibile costruire un in[illegible], contenuto in E e di misura $mE - \varepsilon$, nel quale la successio[illegible] ci[illegible] serie, converge uniformemente.

Evidentemente : se la successione (1) converge su E uni[illegible]e in generale, essa converge quasi ovunque in E, esiste [illegible] un insieme E′, avente la misura di E ed in questo contenut[illegible] la successione (1), cioè la serie (2), converge. Ogni fu[illegible]P), definita in tutto E, che in E′ coincide col limite della s[illegible]one (1), cioè con la somma della serie (2), si dirà *rappres*[illegible] quella successione o da quella serie.

Ciò posto, siamo in grado di enunciare l'acce[illegible]to risult[illegible] o di Weyl col seguente.

Teorema di Weyl. — *Se la successione*

$$(3) \quad \begin{cases} F_0(P) = u_0(P), \qquad F_1(P) = u_0(P) + u_1(P), \qquad \ldots, \\ \qquad F_n(P) = \sum_{k=0}^{n} u_k(P), \qquad \ldots, \end{cases}$$

di funzioni definite in E, *ivi ciascuna di quadrato sommabile, converge su* E *in media, è possibile costruire quante si vogliano successioni* $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ *di indici crescenti, tali che la successione di funzioni*

$$(4) \qquad F_{n_1}(P), \quad F_{n_2}(P), \quad \ldots, \quad F_{n_s}(P), \quad \ldots,$$

cioè la serie,

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{n_1} u_k(P) + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} u_k(P) + \ldots + \sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}} u_k(P) + \ldots,$$

converge su E *uniformemente in generale. La successione* (3)

(¹) Se con una determinata lettera designamo un insieme misurabile, con la stessa lettera preceduta dalla lettera m designeremo la misura dell'insieme.

converge su E *in media verso ogni funzione* $f(\mathrm{P})$ *rappresentata dalla successione* (4), *cioè dalla serie* (5).

Ecco poi come il Weyl costruisce le indicate successioni di indici $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$.

Sia ε_n l'estremo superiore dell'insieme di numeri descritto da

$$(6) \qquad \int_{\mathrm{E}} [\mathrm{F}_{n+\nu}(\mathrm{P}) - \mathrm{F}_n(\mathrm{P})]^2 d\mathrm{P},$$

al variare di ν da o a ∞. Per la supposta convergenza in media della successione (3), si avrà $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. È possibile per ciò costruire quante si vogliano successioni crescenti di indici $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$, tali che la serie $\varepsilon_{n_1} + \varepsilon_{n_2} + \ldots + \varepsilon_{n_s} + \ldots$ converga; orbene, *per ogni tale successione di indici la successione* (4) *converge su* E *uniformemente in generale*.

4. Osservazione sulla costruzione di Weyl. — La costruzione del Weyl, dianzi esposta, appare in generale difficile per la ricerca, che essa richiede, per ogni valore dell'indice n, dell'estremo superiore (o di un numero a questo non inferiore) dell'insieme numerico descritto dall'integrale (6) al variare di ν da o a ∞ (1). Vi è un caso però, molto importante per le nostre future applicazioni, in cui quella ricerca è immediatamente compiuta. È il caso in cui già si conosce una funzione $f(\mathrm{P})$ verso la quale la successione (3) converge su E in media, e questa convergenza è tale che, posto

$$(7) \qquad \sigma_n = \int_{\mathrm{E}} (f - \mathrm{F}_n)^2 d\mathrm{P},$$

la successione $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ (che ha per limite zero) non è mai

(1) *Cf.* C. Severini, *Sulla teoria di chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 2e semestre 1913). In questo lavoro già si trova (al n° 6) la critica del testo alla costruzione del Weyl, però anche nel caso contemplato dal Severini si verifica la circostanza semplificatrice osservata più oltre nel testo.

crescente. In tale ipotesi risulta invero :

$$\int_E (F_{n+\nu} - F_n)^2 dP \leqq 2\int_E (f - F_n)^2 dP + 2\int_E (f - F_{n+\nu})^2 dP \leqq 4\sigma_n.$$

Si ha pertanto :

Se la successione (3) *converge su* E *in media verso la funzione* $f(P)$, *in maniera che l'integrale* (7) *non cresca mai al crescere di* n, *e se, ad esempio, per la successione di indici* $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ *si ha :*

$$\int_E (f - F_{n_s})^2 dP \leqq \frac{1}{s^2} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

la successione (4) *converge su* E *uniformemente in generale e vi rappresenta la funzione* $f(P)$.

III. — Posizione del problema d'approssimazione.

5. Considerazioni preliminari. — Nell'insieme limitato e misurabile E, di misura non nulla, di uno spazio lineare S_r ad un numero qualunque r di dimensioni, siano assegnate le funzioni

$$(1) \qquad f_0(P), \quad f_1(P), \quad \ldots, \quad f_n(P), \quad \ldots,$$

ciascuna di quadrato sommabile, costituenti una successione. Come ben si sa, un problema di capitale importanza nell'analisi è il seguente :

Data, arbitrariamente, una funzione $f(P)$ *in* E, *ivi di quadrato sommabile, approssimare la funzione, in tutto* E, *per mezzo di combinazioni lineari, a coefficienti costanti, di funzioni della successione* (1).

È nella natura stessa del problema il fare l'ipotesi che, per ogni valore di n, le funzioni $f_0, f_1, \ldots, f_n$, siano, in E, *linearmente indipendenti*, siano cioè tali che non esistano $n + 1$ costanti $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$, non tutte nulle, per le quali si abbia, quasi ovunque in E,

$$c_0 f_0(P) + c_1 f_1(P) + \ldots + c_n f_n(P) = 0.$$

Poniamo

$$\int_E f_i(P) f_j(P)\, dP = f_{ij},$$

l'ipotesi ora detta, che noi appunto facciamo, equivale ad ammettere, com' è noto, che per ogni valore di n si ha :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & \dots & f_{0n} \\ f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0 \quad (^1).$$

Diremo in tal caso, semplicemente, che il sistema $[f_n]$ di funzioni è *di funzioni linearmente indipendenti*.

Il generale problema d'approssimazione, testè sommariamente indicato, contiene, evidentemente, come caso particolare, il classico problema dello sviluppo di una funzione, arbitrariamente data, in serie di assegnate altre funzioni. Supposto, in particolare, che in E sia :

$$f_0 = 1, \quad f_1 = x_1, \quad f_2 = x_2, \quad \dots, \quad f_r = x_r, \quad f_{r+1} = x_1^2, \quad f_{r+2} = x_1 x_2, \quad \dots,$$

ove $x_1, x_2, \dots, x_r$ designano coordinate di un punto di E, si ha il problema dell'approssimazione di una funzione per mezzo di polinomii.

6. Caso in cui le funzioni d'approssimazione sono in numero limitato. — Rispondiamo, in primo luogo, al quesito seguente : *Come si può approssimare in* E *un' assegnata funzione* $f(P)$, *di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni della successione limitata* $f_0, f_1, \dots, f_\nu$? A tale questione si risponde subito al modo seguente :

O è possibile determinare $\nu + 1$ costanti $a_0, a_1, \dots, a_\nu$ per modo che, quasi ovunque in E, sia $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_\nu f_\nu$, oppure la richiesta approssimazione non può scendere al disottoto di un termine assegnabile δ, si può cioè determinare una quantità positiva δ, tale che,

(1) In ogni caso, qualisisiano le funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n$ di quadrato sommabile, il determinante al primo membro della diseguaglianza del testo non è mai negativo. Il suo annularsi è condizione necessaria e sufficiente affinchè le funzioni $f_0, f_1, \dots, f_n$ siano in E linearmente dipendenti.

comunque si scelgano le costanti $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$, quella porzione di E nei punti della quale risulta

$$|f-(a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_\nu f_\nu)| \geqq \delta$$

è di misura non nulla.

Consideriamo invero l'integrale

$$\mathrm{I}(a_0, a_1, \ldots, a_\nu) = \int_{\mathrm{E}} (f - a_0 f_0 - a_1 f_1 - \ldots - a_\nu f_\nu)^2 \, d\mathrm{P},$$

dipendente dai parametri $a_0, a_1, \ldots, a_\nu$. Esso ha un minimo determinato che raggiunge per i valori delle a verificanti il sistema di equazioni lineari

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\nu} a_k \int_{\mathrm{E}} f_i f_k \, d\mathrm{P} = \int_{\mathrm{E}} f f_i \, d\mathrm{P} \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu),$$

il determinante delle quali, in virtù della supposta indipendenza lineare delle funzioni $[f_n]$, riesce positivo. Designamo con σ_ν questo minimo. Se $\sigma_\nu = 0$, per il sistema delle a verificanti le (3) si avrà, quasi ovunque in E, $f = \sum_{k=0}^{\nu} a_k f_k$; se $\sigma_\nu > 0$, l'approssimazione della f, per combinazioni lineari di funzioni della successione limitata $f_0, f_1, \ldots, f_\nu$, non può scendere al disotto del termine

$$\delta = \sqrt{\frac{\sigma_\nu}{m\mathrm{E}}}.$$

Adunque : *Al problema dell'approssimazione in* E *di una funzione f, di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni della successione limitata $f_0, f_1, \ldots, f_\nu$, si risponde al modo seguente : Se il determinante*

$$\begin{vmatrix} \int_{\mathrm{E}} f^2 \, d\mathrm{P} & \int_{\mathrm{E}} f_0 f \, d\mathrm{P} & \ldots & \int_{\mathrm{E}} f_\nu f \, d\mathrm{P} \\ \int_{\mathrm{E}} f_0 f \, d\mathrm{P} & f_{00} & \ldots & f_{0\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_{\mathrm{E}} f_\nu f \, d\mathrm{P} & f_{\nu 0} & \ldots & f_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

è nullo, le equazioni (3) *determinano* ν *costanti tali che, quasi ovunque in* E, *risulta* $f = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_\nu f_\nu$; *se lo stesso determinante è positivo, le stesse equazioni* (3) *determinano* ν *costanti tali che, detto* σ_ν *il valore dell'integrale* $I(a_0, a_1, \ldots, a_\nu)$ *che ad esse corrisponde, la richiesta approssimazione, non può scendere al disotto del termine* $\sqrt{\sigma_\nu : m\mathrm{E}}$.

7. Posizione precisa del problema generale d'approssimazione. — Consideriamo ora il generale problema, di vero interesse, dell' approssimazione dell'assegnata funzione f, di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni della successione *illimitata* (1).

Il problema deve ancora essere precisato. Cominciamo a far ciò dicendo : *Si richiede la determinazione delle constanti, in infinità numerabile, del seguente quadro*

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} a_0^{(0)}, & & & & \\ a_0^{(1)}, & a_1^{(1)}, & & & \\ a_0^{(2)}, & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & & & & \\ a_0^{(n)}, & a_1^{(n)}, & a_2^{(n)}, & \ldots, & a_n^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots, \end{array}\right.$$

per modo che la combinazione lineare

$$F_n(P) = a_0^{(n)} f_0(P) + a_1^{(n)} f_1(P) + \ldots + a_n^{(n)} f_n(P),$$

al divergere di n, approssimi in E *l'assegnata funzione* $f(\mathrm{P})$ *di quadrato sommabile.*

Occorre ancora precisare il significato della frase : « La combinazione lineare $F_n(P)$, al divergere di n, approssima in E l'assegnata funzione $f(P)$. » Per far ciò, prendendo una proprietà comune a tutti gli sviluppi in serie e a tutte le approssimazioni, fin ad oggi conosciuti, porremo la seguente.

Definizione. — *Diremo che la combinazione lineare* $F_n(P)$, *al divergere di n, approssima in* E *la funzione* $f(P)$ *di quadrato sommabile, se, comunque si definisca in* E *la funzione* $g(P)$, *di qua-*

drato sommabile, si ha :

$$\lim_{n=\infty} \int_E [f(P) - F_n(P)] g(P) dP = 0. \tag{5}$$

Evidentemente : Se la combinazione lineare $F_n(P)$ approssima in E la funzione $f(P)$, l'approssima anche in qualunque insieme misurabile contenuto in E; se la combinazione lineare $F_n(P)$ approssima in E due funzioni, queste dovranno ivi essere equivalenti; se le due combinazioni lineari $F'_n(P)$ e $F''_n(P)$ approssimano in E, rispettivamente, le due funzioni f' e f'', indicando con a' e a'' due costanti arbitrarie, la combinazione lineare $a'F'_n + a''F''_n$ approssima in E la funzione $a'f' + a''f''$ (¹).

Se, valendo la (5), le quantità $a_i^{(k)}$ del quadro (4) risultano, per ogni valore dell'indice i, indipendenti dal secondo indice k, diremo che *la funzione $f(P)$ è approssimabile in E per serie di funzioni $f_0, f_1, \ldots$.* Posto $a_i^{(k)} = a_i$, si avrà $F_n = a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n$, si dirà perciò anche che *la serie $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \ldots$ approssima in E la funzione f.* In tal caso dunque la serie

$$a_0 \int_E f_0 g\, dP + a_1 \int_E f_1 g\, dP + \ldots,$$

qualunque sia la funzione $g(P)$, di quadrato sommabile, è convergente ed ha par somma $\int_E f g\, dP$.

8. Esempii notevoli d'approssimazione. — Vediamo ora dei casi notevoli d'approssimazione nei quali è soddisfatta la condizione (5).

(¹) Nella sola ipotesi che la combinazione lineare F_n, al divergere di n, approssimi in E la funzione f, nel senso ora precisato, interesserebbe studiare il modo di comportarsi della differenza $f - F_n$, nei punti di E, nel mentre che n diverge. A questo riguardo si dimostra, per esempio, facilmente che, indicando con δ una qualsiasi quantità positiva, con $E'_n(\delta)$ e $E''_n(\delta)$ le due porzioni di E nei punti delle quali è, rispettivamente, $f - F_n \geq \delta$ e $f - F_n \leq -\delta$, si ha :

$$\text{misura} \overset{*}{\lim_{n=\infty}} E'_n(\delta) = \text{misura} \overset{*}{\lim_{n=\infty}} E''_n(\delta) = 0,$$

ove $\overset{*}{\lim} E'_n(\delta)$ e $\overset{*}{\lim} E''_n(\delta)$ designano gli insiemi *più piccoli limiti* rispettivamente di $E'_n(\delta)$ e di $E''_n(\delta)$ per n crescente all'infinito.

I. Nelle scienze sperimentali, come misura dell' errore d'approssimazione commesso sostituendo, in tutto E, alla funzione $f(\mathrm{P})$, la combinazione lineare $\mathrm{F}_n(\mathrm{P})$, si prende l'integrale

$$\int_{\mathrm{E}} [f(\mathrm{P}) - \mathrm{F}_n(\mathrm{P})]^2 d\mathrm{P}; \tag{6}$$

e, fissato il numero n, si ritiene anzi che, quella combinazione lineare $\mathrm{F}_n(\mathrm{P})$, i cui coefficienti dànno all' integrale (6) il suo minimo valore, fornisca, in tutto E, la migliore approssimazione *relativa alle combinazioni lineari di quel prefissato numero n di funzioni del sistema* $[f_k]$. Uniformandoci a questo concetto, vogliamo vedere se, risultando :

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathrm{E}} [f(\mathrm{P}) - \mathrm{F}_n(\mathrm{P})]^2 d\mathrm{P} = 0, \tag{7}$$

si possa dire, nel senso precisato al numero precedente, che la combinazione lineare F_n, al divergere di n, approssima in E la funzione f. Ciò si può effettivamente dire, poichè, nell'ipotesi (7), la successione $[\mathrm{F}_n]$ converge su E in media verso la funzione f, e la proprietà II della convergenza in media, osservata al n° **2**, dà allora che, qualunque sia la funzione $g(\mathrm{P})$, di quadrato sommabile, riesce verificata la (5). Adunque :

La combinazione lineare $\mathrm{F}_n(\mathrm{P})$, *al divergere di n, approssima in* E *la funzione* $f(\mathrm{P})$, *se*

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{F}_n(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}),$$

in particolare, e ovviamente, se in un insieme E′, *avente la misura di* E *e contenuto in* E, *la successione* $[\mathrm{F}_n]$ *converge uniformemente verso la funzione f.*

II. In virtù del noto teorema di Lebesgue del passaggio al limite sotto il segno integrale, si ha anche :

La combinazione lineare $\mathrm{F}_n(\mathrm{P})$, *al divergere di n, approssima in* E *la funzione* $f(\mathrm{P})$, *se in un insieme* E′, *avente la misura di* E *e contenuto in* E, *si ha* $\lim_{n=\infty} \mathrm{F}_n(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P})$, *ed inoltre la differenza*

$f(P) - F_n(P)$ si mantiene in E', in valore assoluto, non superiore ad una funzione, indipendente da n, di quadrato sommabile.

9. Condizione alla quale deve soddisfare un sistema d'approssimazione. Sistemi completi di funzioni. — Domandiamo ora : Ogni successione illimitata $[f_k(P)]$ è forse suscettibile, mediante combinazioni lineari dei suoi termini e al divergere del numero di questi termini, di approssimare in E ogni assegnata funzione di quadrato sommabile? A tale importante questione daremo una risposta negativa; stabiliremo anzi una condizione necessaria e sufficiente, che deve essere soddisfatta dalle funzioni del sistema $[f_k(P)]$, affinchè esse siano in grado, mediante loro combinazioni lineari, di approssimare in E ogni funzione assegnata, di quadrato sommabile.

Si dice che la successione illimitata $f_0(P), f_1(P), \ldots, f_n(P), \ldots$, di funzioni di quadrato sommabile in E, costituisce *un sistema completo in un dato insieme misurabile* E', di misura non nulla, contenuto in E, se dalle due ipotesi :

I^a^ La funzione $g(P)$ è di quadrato sommabile in E';

II^a^ Riescono simultaneamente soddisfatte le infinite equazioni :

$$\int_{E} f_k(P)g(P)\,dP = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{8}$$

si trae come necessaria conseguenza

$$\int_{E} [g(P)]^2 dP = 0,$$

si trae cioè l'equivalenza a zero in E' della funzione $g(P)$.

Osserviamo che : *Se un sistemo di funzioni è completo in un insieme* E, *esso è altresì completo in ogni insieme misurabile* E' *contenuto in* E *di misura non nulla* (¹).

Ed invero, se per una funzione $g'(P)$, di quadrato sommabile in E',

(¹) Come farò vedere, con un esempio, nella memoria (annunziata nella prefazione) a questa successiva, la proposizione reciproca, se si suppone inoltre $mE' < mE$, è falsa.

si avesse

$$\int_{E'} [g'(P)]^2 \, dP > 0, \qquad \int_{E'} f_k(P) g'(P) \, dP = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

la funzione $g(P)$ definita in E dalle eguaglianze :

$$g(P) \left\{ \begin{array}{ll} = g'(P) & \text{se P è in } E', \\ = 0 & \text{se P è in } E - E', \end{array} \right.$$

sarebbe in E di quadrato sommabile e non equivalente a zero, mentre verificherebbe le (8).

Ad esempio, si sa (*cf.* n° **22**) che il sistema di funzioni

$$(9) \qquad \begin{array}{l} H_0(P) = 1, \quad H_1(P) = x_1, \quad \ldots, \quad H_r(P) = x_r, \\ H_{r+1}(P) = x_1^2, \quad H_{r+2}(P) = x_1 x_2, \quad \ldots, \quad H_k(P) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}, \quad \ldots, \end{array}$$

ove l'indice k è una certa nota funzione degli esponenti $k_1, k_2, \ldots, k_r$, è completo in ogni dominio limitato dello spazio S_r, definito dalle limitazioni $a_i \leqq x_i \leqq a'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, il sistema è pertanto completo anche in ogni insieme limitato e misurabile di S_r.

Ciò posto, si dimostra facilmente il

Teorema I. — *Condizione necessaria affinchè con una combinazione lineare di funzioni della successione* (1), *si possa, al divergere del numere dei termini della combinazione, approssimare in* E *ogni assegnata funzione di quadrato sommabile è che la successione costituisca un sistema completo in* E.

Siano invero $g(P)$ una funzione di quadrato sommabile per la quale risultino verificate le (8) e $F_n(P)$ quella combinazione lineare delle f_k che, al divergere di n, approssima in E la funzione g. In forza della (5), ove si ponga g in luogo di f, e in forza delle (8), si avrà :

$$\lim_{n=\infty} \int_E F_n(P) g(P) \, dP = \int_E [g(P)]^2 \, dP,$$

$$\int_E F_n(P) g(P) \, dP = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e quindi, ciò che dimostra la completezza del sistema $[f_k]$,

$$\int_E [g(P)]^2 \, dP = 0.$$

Il teorema è suscettibile della seguente seconda dimostrazione di maggiore significato.

Nell'ipotesi del teorema potremo, per ogni valore dell'indice i, trovare una combinazione lineare :

$$F_{in}(P) = a_{i0}^{(n)} f_0(P) + a_{i1}^{(n)} f_1(P) + \ldots + a_{in}^{(n)} f_n(P),$$

tale che, al divergere di n, approssimi in E il monomio H_i (P), introdotto in (9), tale cioè che, per ogni funzione $g(P)$ definita in E ed ivi di quadrato sommabile, si abbia

$$(10) \quad \int_E H_i(P) g(P) \, dP = \lim_{n=\infty} \int_E F_{in}(P) g(P) \, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Se per una funzione $g(P)$ di quadrato sommabile riescono soddisfatte le (8), si avrà

$$\int_E F_{in}(P) g(P) \, dP = 0 \qquad (i, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

e quindi anche, per le (10),

$$\int_E H_i(P) g(P) \, dP = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

il che, per la nota completezza del sistema $[H_i]$, ha di conseguenza l'equivalenza a zero della $g(P)$ in E. Il sistema $[f_k]$ è dunque, come si voleva dimostrare, completo in E.

Se si osserva questa seconda dimostrazione si vede subito che si può altresì enunciare il

Teorema II. — *La completezza in* E *del sistema* $[f_k]$ *è anche necessaria se si vuole, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, approssimare in* E *ogni funzione di una determinata classe di funzioni di quadrato sommabile, nella quale sia contenuto un sistema di funzioni completo. In particolare, l'indicata completezza è necessaria se, soltanto, si vuole approssimare in* E *ogni monomio.*

10. Esempii. — L'insieme E sia ad una dimensione e costituito dall'intervalle (a, b) dell'asse delle x. Si sa bene, dalla più elementare teoria delle serie trigonometriche, che, posto

$$(11) \quad f_0(x) = 1, \qquad f_{2n-1}(x) = \operatorname{sen} nx, \qquad f_{2n} = \cos nx \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ogni potenza $x^i (i = 0, 1, 2, \ldots)$ si può approssimare in (a, b) in serie di funzioni (11), anche da ciò dunque segue già la completezza del sistema (11) nell'intervallo (a, b) (*cf.* n° **22**).

Viceversa, dalla completezza del sistema (11) si deduce quella del sistema $[x^i]$. Ed invero, ogni funzione del sistema (11) si può approssimare per serie di potenze.

Dalla completezza in un insieme E, del sistema $[x^k]$ si deduce *immediatamente* la nota completezza ivi di ogni sistema $[P_k(x)]$ di polinomii, i cui gradi coincidono con i rispettivi indici. Le relazioni

$$P_0 = a_{00}, \quad P_1 = a_{10} + a_{11}x, \quad \ldots, \quad P_k = a_{k0} + a_{k1}x + \ldots + a_{kk}x^k, \quad \ldots,$$

avendo supposto $a_{kk} \neq 0$, dànno invero ciascuna potenza x^k come combinazione lineare dei polinomii $P_0, P_1, \ldots, P_k$.

Allo stesso modo, dalla completezza in un insieme E dei monomii (9) si deduce la completezza ivi di ogni sistema di polinomii, nelle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_r$, tale che :

I° Per ogni numero intiero e non negativo n vi sono $\binom{r+n-1}{n}$ polinomii di grade n; II° è diverso da zero il determinante formato con i coefficienti dei monomii di grado n di questi polinomii (in ogni linea del determinante disponendo i coefficienti di uno stesso polinomio, ed in ogni colonna i coefficienti di uno stesso monomio).

Esempii di sistemi non completi se ne hanno, assai facilmente, quanti se ne vuole. Il sistema $f_k(x) = x^{2k} (k = 0, 1, 2, \ldots)$ è incompleto in ogni intervallo (a, b) dell'asse delle x che contenga l'origine come punto interno (è invece completo in ogni intervallo al quale l'origine sia esterna).

IV. — Approssimazione per combinazioni lineari di funzioni di un sistema ortogonale e completo.

11. Sistemi ortogonali di funzioni. Ortogonalizzazione. — La completezza nell'insieme E del sistema $[f_k(P)]$, che abbiamo trovato essere condizione necessaria, affinchè, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, si possa approssimare, in E, ogni funzione di quadrato sommabile, *è anche sufficiente*. Per giungere a tale importante risultato faremo uso dei sistemi ortogonali di funzioni e ci appoggeremo sulla teoria dell'approssimazione per serie di funzioni di tali sistemi, sostanzialmente dovuta al Riesz e al Fischer, teoria che rapidamente esporremo, aggiungendo ad essa taluni risultati nuovi.

Un sistema di funzioni

$$\varphi_0(P), \quad \varphi_1(P), \quad \ldots, \quad \varphi_n(P), \quad \ldots,$$

di quadrato sommabile in E, dicesi ortogonale in E, se sono soddisfatte le relazioni

$$(1) \qquad \int_E [\varphi_i(P)]^2 dP = 1, \qquad \int_E \varphi_i(P)\varphi_j(P)\, dP = 0, \quad \text{per } i \neq j$$
$$(i, j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Per ogni valore di n, le funzioni ortogonali $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sono certo linearmente indipendenti in E, poichè, in forza delle (1), l'eguaglianza

$$\int_E (c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n)^2\, dP = 0,$$

si scrive $c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2 = 0$. Del resto, il determinante al primo membro della (2) del n° **5** ha, per queste funzioni, il valore *uno*.

Dato il sistema $[f_k(P)]$ di funzioni di quadrato sommabile in E — per le quali si suppone solamente l'indipendenza lineare in E — esso si può sempre ivi *ortogonolizzare*: Si può [1], ad ogni funzione f_n del sistema far corrispondere una funzione φ_n, combinazione lineare delle

[1] *Cf.* E. Schmidt, *Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen*, I. Teil (*Mathematische Annalen*, Bd 63, 1907, p. 442).

funzioni $f_0, f_1, \ldots, f_n$, in modo che il sistema delle φ_n riesca ortogonale in E. Si abbia

$$(2) \qquad \varphi_n = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} f_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Per la già notata indipendenza lineare delle φ_n, dovrà risultare $c_{nn} \neq 0$, qualunque sia n, e perciò le (2) si possono invertire, si abbia

$$(3) \qquad f_n = \sum_{k=0}^{n} \gamma_{nk} \varphi_k.$$

Dalle (2), (3), segue, evidentemente, che la completezza del sistema $[f_k]$ ha di conseguenza la completezza del sistema ortogonalizzato $[\varphi_k]$ e viceversa.

12. Primi risultati generali. — Volendo, con la combinazione lineare

$$\Phi_n(P) = \alpha_0^{(n)} \varphi_0(P) + \alpha_1^{(n)} \varphi_1(P) + \ldots + \alpha_n^{(n)} \varphi_n(P),$$

di funzioni del sistema ortogonale e completo $[\varphi_k]$, approssimare in E l'assegnata funzione $f(P)$, di quadrato sommabile, si debbono determinare le costanti $\alpha_k^{(n)}$ in modo che si abbia sempre

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \int_E \Phi_n(P) g(P)\, dP = \int_E f(P) g(P)\, dP,$$

qualunque sia la funzione $g(P)$, di quadrato sommabile in E. In particolare, per $g(P) \equiv \varphi_k(P)$, si dovrà avere

$$(5) \qquad \lim_{n=\infty} \alpha_k^{(n)} = \int_E f(P) \varphi_k(P)\, dP \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Adunque : *Per i coefficienti della più generale combinazione lineare* $\Phi_n(P)$, *di funzioni di un sistema* $[\varphi_k(P)]$, *ortogonale in* E, *atto ad approssimare ivi ogni data funzione* $f(P)$ *di quadrato sommabile, devono essere soddisfatte le condizioni* (5).

Soddisfatte queste condizioni, data la completezza in E del sistema $[\varphi_k]$, vediamo subito che, se la combinazione $\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k$ approssima in E una funzione f', ivi di quadrato sommabile, questa sarà equivalente alla f, vediamo cioè che la Φ_n approssimerà in E anche la f. Ed invero, dalla (4), ponendovi f' in luogo di f e φ_k in luogo di g, si ricava in virtù delle (5),

$$\int_E f \varphi_k \, dP = \int_E f' \varphi_k \, dP, \qquad \int_E (f' - f) \varphi_k \, dP = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

e quindi, per la completezza del sistema $[\varphi_k]$, se ne deduce l'equivalenza a zero in E della differenza $f' - f$. Si ha pertanto il

Teorema. — *Per approssimare in* E *una funzione* $f(P)$, *di quadrato sommabile, mediante una combinazione lineare*

$$\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k(P),$$

di funzioni di un sistema $[\varphi_k]$ *ortogonale e completo in* E, *è necessario e sufficiente determinare i coefficienti della combinazione in modo che siano soddisfatte le condizioni* (5) *e che la combinazione* Φ_n, *al divergere di* n, *approssimi in* E *una funzione. In particolare, è sufficiente determinare le costanti* $\alpha_k^{(n)}$ *in modo che siano soddisfatte le* (5) *e che la combinazione* Φ_n, *al divergere di* n *converga su* E *in media.*

13. Approssimazione per serie. – Alle (5) si può, per esempio, soddisfare ponendo, senz'altro,

$$\alpha_k^{(n)} = \alpha_k = \int_E f(P) \varphi_k(P) \, dP \qquad (n \geqq k, \ k = 0, 1, 2, \dots),$$

con che si approssimerebbe in E la $f(P)$ mediante la serie di Fourier:

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(P), \qquad \alpha_k = \int_E f(P) \varphi_k(P) \, dP.$$

Tale serie approssima in E effettivamente la $f(P)$, poichè essa vi converge in media. Ed invero, anche nella sola ipotesi dell'ortogonalità del sistema $[\varphi_k]$, avendosi (diseguaglianza di Bessel),

$$(7)\qquad \int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)^2 dP = \int_E f^2(P) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \geqq 0,$$

si può asserire le convergenza della serie $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots$, e quindi che

$$\lim_{n=\infty} \int_E \left(\sum_{k=0}^{n+p} \alpha_k \varphi_k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)^2 dP = \lim_{n=\infty} (\alpha_{n+1}^2 + \alpha_{n+2}^2 + \ldots + \alpha_{n+p}^2) = 0,$$

uniformemente al variare di p per valori intieri e positivi. Ciò esprime appunto la convergenza in media su E della serie (6). Si ha pertanto il

TEOREMA. — *La completezza, in* E, *del sistema ivi ortogonale* $[\varphi_k]$ *è non soltanto condizione necessaria, ma anche sufficiente affinchè si possa, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, approssimare in* E *ogni data funzione* f *di quadrato sommabile. L'approssimazione può essere fornita dalla serie* (6), *la quale, anzi, converge su* E *in medio verso la* f.

Si ha inoltre che (*cf.* n° **20**) :

Per ogni prefissato valore di n, *la combinazione lineare* $\alpha_0\varphi_0 + \alpha_1\varphi_1 + \ldots + \alpha_n\varphi_n$, *fornisce la migliore approssimazione possibile, in* E, *della* f, *per combinazione lineare delle funzioni* φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Osserviamo ancora che, come si deduce dalla (7), l'integrale

$$\int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k\right)^2 dP,$$

infinitesimo al divergere di n, non cresce mai al crescere di n e quindi che (*cf.* n° **4**) :

Data la completezza e l'ortogonalità del sistema $[\varphi_k]$, *se, ad* *esempio, per la successione di indici $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ si ha*

$$\int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n_s} \alpha_k \varphi_k \right)^2 dP = \int_E f^2 \, dP - \sum_{k=0}^{n_s} \alpha_k^2 \leq \frac{1}{s^2} \qquad (s = 1, 2, \ldots),$$

la serie

$$\sum_{k=0}^{n_1} \alpha_k \varphi_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \alpha_k \varphi_k + \ldots + \sum_{k=n_s+1}^{n_{s+1}} \alpha_k \varphi_k + \ldots,$$

converge su E *uniformemente in generale e vi rappresenta la funzione f; essa dunque converge, quasi ovunque in* E, *veroo la funzione f.*

14. Determinazione di tutte le combinazioni d'approssimazione convergenti in media. — Passiamo ora a dare tutte le possibili combinazioni lineari $\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k(P)$, atte ad approssimare in E un'assegnata funzione $f(P)$ di quadrato sommabile, in modo però che la combinazione converga su E in media.

Occorre e basta perciò determinare le costanti $\alpha_k^{(n)}$ in modo che siano soddisfatte le (5) ed inoltre che si abbia :

$$(8) \qquad \lim_{n=\infty} \int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k \right)^2 dP$$
$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \left(\int_E f^2 \, dP - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \right) + \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 \right\} = 0.$$

Ma, data la completezza del sistema $[\varphi_k]$, è, come abbiamo visto,

$$\lim_{n=\infty} \left(\int_E f^2 \, dP - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 \right) = 0,$$

e pertanto si ha il

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la combinazione lineare $\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k(P)$, di funzioni di un sis-*

tema $[\varphi_k]$ *ortogonale e completo in* E, *possa, al divergere di* n, *approssimare in* E *una funzione* $f(P)$ *di quadrato sommabile, convergendo su* E *in media, è che si abbia*

$$(9) \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 = 0, \qquad \alpha_k = \int_E f(P)\, \varphi_k(P)\, dP.$$

Ed invero, in tale ipotesi, riescono soddisfatte le (5) e la (8).

La relazione di limite (9) è già stata, con molto profitto, considerata da Schmidt [1], e precisamente nel modo che andiamo ad esporre. Si abbia il sistema infinito di quantità reali o complesse

$$(10) \qquad X_0^{(n)}, \quad X_1^{(n)}, \quad \ldots, \quad X_k^{(n)}, \quad \ldots,$$

i cui elementi dipendono altresi dall'indice n che puo prendere i valori 0, 1, 2, ..., ∞. Secondo Schmidt, *si dice che il sistema* (10), *al diverge di* n, *convergere fortemente verso il sistema*

$$X_0, \quad X_1, \quad \ldots, \quad X_k, \quad \ldots,$$

se si hà

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} | X - X_k^{(n)} |^2 = 0.$$

Ritornando al nostro risultato, volendolo enunciare alla maniera di Schmidt, estenderemo la definizione delle quantità $\alpha_k^{(n)}$, ponendo $\alpha_k^{(n)} = 0$ se $n < k$; potremo allora scrivere :

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k)^2 - \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2,$$

e per la convergenza della serie $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \ldots$, la (9) ha di conseguenza la convergenza forte del sistema $[\alpha_k^{(n)}]$ verso il sistema $[\alpha_k]$, e viceversa, tale convergenza ha di conseguenza la (9). Pertanto potremo enunciare il nostro ultimo teorema al modo seguente :

---

(1) E. Schmidt, *Ueber die auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvilen unbekannten* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXV, 1908, p. 53).

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la combinazione lineare $\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} \varphi_k(P)$, *di funzioni di un sistema* $[\varphi_k]$, *ortogonale e completo in* E, *possa, al divergere di* n, *approssimare in* E *una funzione* $f(P)$ *di quadrato sommabile, convergendo su* E *in media, è che il sistema* $[\alpha_k^{(n)}]$, *per il quale si ha* $\alpha_k^{(n)} = 0$ *se* $n < k$, *converga fortemente verso il sistema* $[\alpha_k]$, *ove*

$$\alpha_k = \int_E f(P)\,\varphi_k(P)\,dP.$$

15. Metodo d'approssimazione di Fejér. — Come caso particolarissimo troviamo il metodo d'approssimazione di Fejér. Ponendo infatti

$$\alpha_k^{(n)} = \frac{n+1-k}{n+1}\alpha_k,$$

si ha

$$\Phi_n(P) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\varphi_i(P),$$

ed è subito visto che

$$\lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k - \alpha_k^{(n)})^2 = \lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2\alpha_k^2}{(n+1)^2} = 0.$$

16. Alcune notevoli relazioni. — Siano $f_1(P)$ e $f_2(P)$ due funzioni arbitrarie definite in E, ivi di quadrato sommabile, e si ponga

$$\alpha_{1k} = \int_E f_1(P)\,\varphi_k(P)\,dP, \qquad \alpha_{2k} = \int_E f_2(P)\,\varphi_k(P)\,dP \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Siano poi $[\alpha_{1k}^{(n)}]$ e $[\alpha_{2k}^{(n)}]$ due arbitrarii sistemi che, verificando la condizione $\alpha_{1k}^{(n)} = \alpha_{2k}^{(n)} = 0$ per $k > n$, al divergere dell'indice n, convergano in modo forte rispettivamente verso i sistemi $[\alpha_{1k}]$ e $[\alpha_{2k}]$. Si ponga

$$\Phi_{1n} = \sum_{k=0}^{n}\alpha_{1k}^{(n)}\varphi_k, \qquad \Phi_{2n} = \sum_{k=0}^{n}\alpha_{2k}^{(n)}\varphi_k;$$

data, sempre, la completezza del sistema ortogonale $[\varphi_k]$, si avrà:

$$\lim_{n=\infty} \Phi_{1n} = f_1, \qquad \lim_{n=\infty} \Phi_{2n} = f_2,$$

e quindi (*cf.* n° **2**)

$$\lim_{n=\infty} \int_E \Phi_{1n} \Phi_{2n}\, dP = \int_E f_1 f_2\, dP,$$

ma

$$\int_E \Phi_{1n} \Phi_{2n}\, dP = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{1k}^{(n)} \alpha_{2k}^{(n)},$$

ne segne

$$(11) \qquad \int_E f_1 f_2\, dP = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{1k}^{(n)} \alpha_{2k}^{(n)}.$$

In particolare, per $\alpha_{1k}^{(n)} = \alpha_{1k}$, $\alpha_{2k}^{(n)} = \alpha_{2k}$, si ha la nota relazione

$$(12) \qquad \int_E f_1 f_2\, dP = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k} \alpha_{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_E f_1 \varphi_k\, dP \int_E f_2 \varphi_k\, dP.$$

Siano ora A_1 et A_2 due arbitrarii insiemi misurabili contenuti in E e siano g_1 et g_2 due funzioni arbitrarie definite, rispettivamente, in A_1 e in A_2, ciascuna di quadrato sommabile. Si ponga

$$f_1(P) \begin{cases} = g_1(P) & \text{se P è in } A_1, \\ = 0 & \text{se P è in } E - A_1, \end{cases}$$
$$f_2(P) \begin{cases} = g_2(P) & \text{se P è in } A_2, \\ = 0 & \text{se P è in } E - A_2. \end{cases}$$

Per queste funzioni f_1 e f_2 sussistono le (11) e (12), mentre, indicando con $A_1 A_2$ l'insieme comune ai due insiemi A_1 e A_2, si ha

$$\int_E f_1 f_2\, dP = \int_{A_1 A_2} g_1 g_2\, dP,$$

$$\alpha_{1k} = \int_E f_1 \varphi_k\, dP = \int_{A_1} g_1 \varphi_k\, dP, \qquad \alpha_{2k} = \int_E f_2 \varphi_k\, dP = \int_{A_2} g_2 \varphi_k\, dP,$$

ne segne:

Se il sistema $[\varphi_k]$ è in E *ortogonale e completo, per due arbitrarii insiemi misurabili* A_1 *et* A_2, *contenuti in* E, *e per due arbitrarie* *funzioni f_1 e f_2, definite in E ed ivi di quadrato sommabile, sussiste la relazione*

$$(13)\qquad \int_{A_1 A_2} f_1(P) f_2(P)\, dP = \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{1k}^{(n)} \alpha_{2k}^{(n)},$$

ove $[\alpha_{1k}^{(n)}]$ e $[\alpha_{2k}^{(n)}]$ sono due arbitrarii sistemi che, verificando la condizione $\alpha_{1k}^{(n)} = \alpha_{2k}^{(n)} = 0$ se $k > n$, convergono in modo forte, rispettivamente, verso i sistemi

$$\left[\alpha_{1k} = \int_{A_1} f_1 \varphi_k\, dP\right] \quad \text{e} \quad \left[\alpha_{2k} = \int_{A_2} f_2 \varphi_k\, dP\right],$$

in particolare, si ha

$$(14)\qquad \int_{A_1 A_2} f_1(P) f_2(P)\, dP = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_1} f_1(P) \varphi_k(P) \int_{A_2} f_2(P) \varphi_k(P)\, dP \quad (^1).$$

(¹) Si osservino le curiose conseguenze di questa proposizione.

Per due arbitrarii insiemi misurabili A_1 e A_2, contenuti in E, *si ha*

$$(a)\qquad m(A_1 A_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{A_1} \varphi_k\, dP \int_{A_2} \varphi_k\, dP.$$

Per due arbitrarii insiemi misurabili A_1 e A_2 contenuti in E, *i cui punti comuni costituiscono, al più, un insieme di misura nulla e per due arbitrarie funzioni f_1 e f_2 definite in* E *e ivi di quadrato sommabile, sussiste la relazione*

$$\sum_{k=0} \int_{A_1} f_1(P) \varphi_k(P)\, dP \int_{A_2} f_2(P) \varphi_k(P)\, dP = 0.$$

Se ne ricava un modo assai semplice di dedurre da un sistema di funzioni $[\varphi_k]$, ortogonale e completo in **E**, un'infinità numerabile di sistemi schmidtiani di quantità $[X_k^{(i)}]$ ($i = 0, 1, 2, \ldots$) a due a due ortogonali, di sistemi cioè (*cf.* Schmidt, *loc. cit.*, p. 359, § 1) per i quali le serie $\sum_{k=0}^{\infty} (X_k^{(i)})^2$ convergono e si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(i)} X_k^{(j)} = 0 \qquad \text{per} \qquad i \neq j.$$

Basta perciò prendere in E un'infinità numerabile $A_0, A_1, \ldots$ di insiemi misu-

17. Generalizzazioni. — Per il sistema $[\alpha_k^{(n)}]$ togliamo la condizione $\alpha_k^{(n)} = o$ se $k > n$. Nella definizione di convergenza forte del sistema $[\alpha_k^{(n)}]$ verso il sistema $[\alpha_k]$, è insita la convergenza della

---

rabili, aventi a due a due in comune, al più, insiemi di misura nulla, e porre

$$(b) \qquad X_k^{(i)} = \int_{\Lambda_i} \varphi_k(P)\, dP \qquad (i, k = o, 1, 2, \ldots).$$

Le relazioni trovate possono essere utilizzate per ottenere degli sviluppi notevoli. Sia, ad esempio, E l'intervallo $(o, 2\pi)$ dell'asse delle x, e si ponga

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \varphi_{2n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n x, \quad \varphi_{2n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n x \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Se $o \leqq a' \leqq b' \leqq a'' \leqq b'' \leqq 2\pi$, dalla (a), facendo coincidere Λ_1 e Λ_2 rispettivamente con gli intervalli (a', b') e (a'', b''), si trae lo sviluppo:

$$\frac{(a'-b')(b''-a'')}{8} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \operatorname{sen}\left(k \frac{b'-a'}{2}\right) \operatorname{sen}\left(k \frac{b''-a''}{2}\right) \cos\left(k \frac{b''+a''-b'-a'}{2}\right),$$

in particolare, per $a' = o$, $a'' = b' = \pi$, $b'' = 2\pi$, si trova il noto sviluppo

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Prendendo, ad esempio, per Λ_i l'intervallo $\left(\frac{\pi}{2^i}, \frac{\pi}{2^{i-1}}\right)$ dell'asse delle x, per l'attuale sistema ortogonale, le (b) dànno

$$X_0^{(i)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \frac{1}{2^i},$$

$$X_{2n-1}^{(i)} = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2^{i+1}} \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{2^{i+1}}, \qquad X_{2n}^{(i)} = \frac{2}{n\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2^{i+1}} \cos \frac{3n\pi}{2^{i+1}}$$

$$(i = o, 1, 2, \ldots), \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Si osservi, infine, che, convergendo le serie $\sum\limits_{k=0} \alpha_{1k}^2$ e $\sum\limits_{k=0} \alpha_{2k}^2$, la serie $\sum\limits_{k=0} \alpha_{1k}\alpha_{2k}$, al secondo membro della (14), converge assolutamente. Il quadrato della somma della serie dei valori assoluti non supera la quantità $\int_{\Lambda_1} f_1^2\, dP \int_{\Lambda_2} f_2^2\, dP$.

serie $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k - \alpha_k^{(n)})^2$, per valori di n abbastanza grandi. Dalla convergenza di questa serie e della serie $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^2$, si deduce la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k^{(n)})^2$. Noi supporremo — senza perciò che si introduca restrizione alcuna — che quest'ultima serie converga per ogni valore di n. Allora, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\varphi_k(\mathrm{P})$$

converge, per ogni valore di n, su E in media verso una funzione $\Phi_n(\mathrm{P})$ di quadrato sommabile. E, data la completezza del sistema ortogonale $[\varphi_k]$, si ha

$$\int_{\mathrm{E}}[f(\mathrm{P})-\Phi_n(\mathrm{P})]^2\,d\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k-\alpha_k^{(n)})^2.$$

Se ne deducono i seguenti teoremi che generalizzano quelli dei n$^{\mathrm{i}}$ **14** e **16**.

Dato il sistema di funzioni $[\varphi_k]$, *ortogonale e completo in* E, *siano* $f(\mathrm{P})$ *una funzione ivi di quadrato sommabile e* $[\alpha_k^{(n)}]$ *il più arbitrario sistema di quantità, per il quale la serie* $\sum_{k=0}^{\infty}(\alpha_k^{(n)})^2$ *converga, qualunque sia* n. *Si ponga*

$$\Phi_n(\mathrm{P})\sim\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k^{(n)}\varphi_k(\mathrm{P}),$$

condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia in E :

$$\lim_{n=\infty}\Phi_n(\mathrm{P})=f(\mathrm{P}),$$

è che il sistema $[\alpha_k^{(n)}]$, *al divergere di* n, *converga fortemente verso il sistema* $\left[\alpha_k=\int_{\mathrm{E}}f(\mathrm{P})\varphi_k(\mathrm{P})\,d\mathrm{P}\right]$. *Siano* $f_1(\mathrm{P})$ *e* $f_2(\mathrm{P})$ *due arbitrarie funzioni definite in* E, *ivi di quadrato sommabile,* Λ_1 *e* Λ_2

due arbitrarii insiemi misurabili contenuti in E. ***Allora, per i più arbitrarii sistemi*** $[\alpha_{1k}^{(n)}]$ *e* $[\alpha_{2k}^{(n)}]$ *che, al divergere di n, convergano fortemente verso i sistemi* $\left[\alpha_{1k}=\int_{A_1} f_1\,\varphi_k\,dP\right]$ *e* $\left[\alpha_{2k}=\int_{A_2} f_2\,\varphi_k\,dP\right]$, *si ha*

$$\int_{A_1 A_2} f_1(P) f_2(P)\,dP=\lim_{n=\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{1k}^{(n)}\alpha_{2k}^{(n)}.$$

18. Criterii di completezza per i sistemi ortogonali. — Poniamo, nella (14), $A_1\equiv E$, il risultare verificata, per due quali si vogliano funzioni f_1 e f_2, di quadrato sommabile in E, e per ogni insieme misurabile A contenuto in E, la relazione

$$\int_A f_1 f_2\,dP=\sum_{k=0}^{\infty}\int_E f_1\varphi_k\,dP\int_A f_2\,\varphi_k\,dP, \tag{15}$$

alla quale si riduce la (14), è come abbiamo visto, condizione necessaria per la completezza in E del sistema ivi ortogonale $[\varphi_k]$, ma questa condizione, evidentemente, è altresì sufficiente. Poniamo nella (15), una prima volta, $f_2\equiv 1$, $f_1\equiv f$, ed una seconda volta, $f_1\equiv f_2\equiv f$, $A\equiv E$; se ne deduce:

I. Condizione necessaria e (evidentemente) sufficiente per la completezza in E del sistema ivi ortogonale $[\varphi_k]$, è che, per ogni insieme misurabile A contenuto in E e per ogni funzione ivi di quadrato sommabile, si abbia

$$\int_A f(P)\,dP=\sum_{k=0}^{\infty}\int_E f(P)\,\varphi_k(P)\,dP\int_A \varphi_k(P)\,dP. \tag{16}$$

II. Condizione necessaria e (evidentemente) sufficiente per la completezza in E del sistema ivi ortogonale $[\varphi_k]$ è che, per ogni funzione di quadrato sommabile in E, si abbia

$$\int_E [f(P)]^2 dP=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\int_E f(P)\,\varphi_k(P)\,dP\right]^2. \tag{17}$$

Stekloff, Lauricella e Severini [1] hanno in definitiva stabilito che l'equazione (17) oppure (Severini) la (16) sarà verificata per ogni funzione f di quadrato sommabile in E, se, solamente, essa è verificata per tutte le funzioni di un particolare sistema completo in E. Questo risultato si ottiene immediatamente della nostra analisi. Dimostriamo che :

Condizione necessaria e sufficiente per la completezza in E *del sistema ivi ortogonale* $[\varphi_k]$ *è che, per ogni funzione* $g_\nu(\mathrm{P})$ *di un particolare sistema* $[g_\nu]$, *completo in* E, *si abbia*

$$(18)\qquad \int_{\mathrm{E}} [g_\nu(\mathrm{P})]^2\, d\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int_{\mathrm{E}} g_\nu(\mathrm{P})\, \varphi_k(\mathrm{P})\, d\mathrm{P} \right]^2 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

La necessità di tale condizione è stata dimostrata. La sufficienza deriva da quanto si è stabilito col teorema II del n° **9**, poichè, il verificarsi della (18), esprime che ogni funzione g_ν del sistema $[g_\nu]$, completo in E, è approssimabile per serie di funzioni del sistema ortogonale $[\varphi_k]$, precisamente, dalla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\mathrm{P}) \int_{\mathrm{E}} g_\nu \varphi_k\, d\mathrm{P};$$

anzi la (18) esprime che questa serie converge su E in media verso la g_ν.

Quest' ultimo teorema (in modo speciale) si suole considerare come *un criterio di completezza* per il sistema ortogonale $[\varphi_k]$. Le equazioni (16) et (17) [entrambe contenute nella (15)] si chiamano *le equazioni di completezza* per il sistema ortogonale $[\varphi_k]$. Si osservi che (*cf.* n° **2**) la serie nel secondo membro della (15) converge *uni-*

---

[1] W. STEKLOFF, *Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables* (*Mémoires de l'Acad. Imp. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, vol. XXX). — G. LAURICELLA, *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali* (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, vol. XXI, 1° semestre 1911, p. 675). — C. SEVERINI, *loc. cit.*, p. 343.

formemente (in ogni caso) al variare in E dell' insieme A. Essa converge anche assolutamente [*cf.* nota (¹), p. 362].

V. — Approssimazione per combinazioni lineari di funzioni del più generale sistema completo.

19. Prima soluzione del problema generale d'approssimazione. — Ritorniamo ora al problema generale dell' approssimazione in E di una funzione ivi assegnata, di quadrato sommabile, mediante combinazioni lineari di funzioni di un sistema

$$(1) \qquad f_0(P),\ f_1(P),\ \ldots,\ f_n(P),\ \ldots$$

per il quale si suppone soltanto l'indipendenza lineare e la completezza in E.

Al problema si può dare immediatamente una prima soluzione. Ortogonalizziamo, invero, il sistema (1) e sia $[\varphi_k]_k$ il sistema, ortogonale e completo, che se ne deduce, risultando $\varphi_k = \sum_{i=0}^{k} c_{ki} f_i$. Per quanto si è ottenuto al n° **15**, posto

$$\alpha_k = \int_E \varphi_k f \, dP = \sum_{i=0}^{k} c_{ki} \int_E f_i f \, dP,$$

$$\Phi_n(P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \sum_{k=0}^{i} c_{ik} f_k(P) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=k}^{n} \alpha_i c_{ik} \right) f_k(P),$$

$$\alpha_k^{(n)} = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i c_{ik},$$

la combinazione lineare

$$\Phi_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f_k(P) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varphi_i(P),$$

al divergere di n, approssima in E l'assegnata funzione $f(P)$, anzi, essa converge su E in media verso quella funzione, ed in maniera che l'integrale

$$(2) \qquad \int_E (f - \Phi_n)^2 \, dP = \int_E \left(f - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f_k \right)^2 dP,$$

infinitesimo con n divergente, non cresce mai al crescere di n. Si ha dunque il

Teorema. — *La completezza in* E *del sistema* $[f_k]$, *di funzioni linearmente indipendenti, è non soltanto condizione necessaria, ma anche sufficiente affinchè si possa, mediante combinazioni lineari dei suoi termini, approssimare in* E *ogni funzione* f *ivi di quadrato sommabile. Si può anzi trovare una combinazione lineare* $\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^{(n)} f_k$ *che, al divergere di* n, *converge su* E *in media verso la funzione* f, *ed in maniera che l'integrale* (2) *non cresca mai al crescere di* n. *Per modo che, se, ad esempio, per la successione di indici* $[n_s]$, *il detto integrale non sapera la frazione* $1 : s^2$, *la successione* Φ_{n_s} *converge su* E *uniformemente in generale e vi rappresenta la* f. *Si deduce adunque immediatamente dalla successione* $[\Phi_n]$ *una successione* $[\Phi_{n_s}]$ *di combinazioni lineari delle* f_k *che converge, quasi ovunque in* E, *verso la funzione* f.

20. Metodo d'approssimazione dei minimi quadrati. — Passiamo ora ad esporre un più pratico metodo d'approssimazione, per combinazioni lineari di funzioni del sistema completo (1), che — pur potendo coincidere, nel resultato, col precedente — non richiede la preliminare ortogonalizzazione del sistema e che, inoltre (e sta in ciò il suo principale vantaggio), per ogni fissato numero n di funzioni del sistema, partecipanti alla combinazione, fornisce la migliore approssimazione possibile.

Fissato un valore di n, si consideri l'integrale

$$I(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_E (f - a_0 f_0 - a_1 f_1 - \ldots - a_n f_n)^2 \, dP,$$

e si diano alle costanti a_0, a_1, ..., a_n quei valori per i quali l'integrale assume il suo minimo valore. Questi valori sono determinati univocamente dal seguente sistema di equazioni lineari al quale devono soddisfare

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \int_E f_i f_k \, dP = \int_E f f_i \, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

il cui determinante risulta positivo per la supposta indipendenza lineare delle funzioni del sistema $[f_k]$. Indichiamo con

$$a_0^{(n)}, \quad a_1^{(n)}, \quad \ldots, \quad a_n^{(n)}$$

i valori in discorso e poniamo

$$F_n(P) = a_0^{(n)} f_0(P) + a_1^{(n)} f_1(P) + \ldots + a_n^{(n)} f_n(P), \tag{4}$$

$$\sigma_n = \int_E [f(P) - F_n(P)]^2 dP. \tag{5}$$

Facciamo orva variare n. In ogni caso, la quantità σ_n, evidentemente, non crescerà mai al crescere di n, sia o no completo il sistema $[f_k]$. Esisterà pertanto, in ogni caso, determinato e finito e non negativo il limite σ di σ_n, al divergere di n. Se il sistema $[f_k]$ è completo, poichè σ_n non supera certo il valore dell' integrale (2), che riesce allora, come abbiamo visto, infinitesimo con n divergente, si avrà $\sigma = \lim_{n=\infty} \sigma_n = 0$. Si ha dunque il seguente.

METODO GENERALE D'APPROSSIMAZIONE (DEI MINIMI QUADRATI). — *Dato il sistema completo $[f_k]$, di funzioni linearmente indipendenti, volendo, mediante combinazioni lineari di queste funzioni, approssimare in* E *un' assegnata funzione f, ivi di quadrato sommabile, si determinino, per ogni valore dell' indice n, le costanti $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$, soluzioni del sistema* (3) *di equazioni lineari; la combinazione lineare* $F_n(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f_k(P)$, *al divergere di n, approssima allora in* E *l'assegnata funzione $f(P)$. Anzi, al divergere di n, l'indicata combinazione converge su* E *in media verso la f, ed in maniera che l'integrale* (5) *non cresce mai al crescere di n. Inoltre, per ogni prefissato valore di n, la stessa combinazione, fra tutte quelle delle medesime funzioni $f_0, f_1, \ldots, f_n$, approssima, in tutto* E, *la f nel miglior modo possibile, cioè col minimo errore quadratico medio possibile.*

Nel caso particolare che il sistema $[f_k]$ sia ortogonale, le (3) si scrivono

$$a_i = \int_E f f_i \, dP,$$

e l'esposto metodo d'approssimazione si riduce a quello già dato al n° **13**.

21. Criterio di completezza per il più generale sisemta di funzioni. — Siamo ora in grado di stabilire un semplice criterio di completezza per il più generale sistema di funzioni linearmente indipendenti. Siano $[f_k]$ un sistema de funzioni, di quadrato sommabile in E, ivi linearmente indipendenti, e $[g_\nu]$ un particolare sistema di funzioni, completo in E. Per ogni funzione g_ν del sistema $[g_\nu]$ e per ogni valore dell' indice n si determinino le costanti $a_{\nu k}^{(n)}(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ soluzioni del sistema (3) di equazioni lineari, ove si è sostituita la f con la g_ν; indi si calcoli l'integrale

$$\sigma_{\nu n} = \int_E (g_\nu - a_{\nu 0}^{(n)} f_0 - a_{\nu 1}^{(n)} f_1 - \ldots - a_{\nu n}^{(n)} f_n)^2 \, dP.$$

Esiste, in ogni caso, il limite di tale integrale al divergere di n, al quale esso integrale tende non crescendo mai; orbene, *condizione necessaria e sufficiente per la completezza in* E *del sistema* $[f_k]$ *è che per ogni valore dell'indice* ν, *si abbia*

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} \sigma_{\nu n} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

La condizione è già stata dimostrata necessaria. La sua sufficienza deriva dal teorema del n° **9**, poichè il verificarsi di essa esprime che ogni funzione g_ν del sistema $[g_\nu]$, completo in E, è ivi approssimabile per combinazioni lineari di funzioni del sistema $[f_k]$.

Per il calcolo di $\sigma_{\nu n}$, poniamo

$$(7) \qquad \int_E f_i f_j \, dP = f_{ij}, \qquad \int_E f_i g_\nu \, dP = \gamma_{\nu i}, \qquad \int_E g_\nu^2 \, dP = \gamma_\nu,$$

indichiamo con Δ_n il determinante d'ordine n che ha f_{ij} per elemento della riga orizzontale i^{ma} e della colonna j^{ma} ed indichiamo con $F_{ij}^{(n)}$ il complemento algebrico di f_{ij} in Δ_n. Il sistema di equazioni (3) si scrive allora

$$\sum_{k=0}^{n} f_{ik} \, a_{\nu k}^{(n)} = \gamma_{\nu i} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Ciò posto, si ha

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad \sigma_{\nu n} &= \gamma_\nu - 2\sum_{k=0}^{n} a_{\nu k}^{(n)}\gamma_{\nu k} + \sum_{i=0}^{n} a_{\nu i}^{(n)} \sum_{k=0}^{n} f_{ik} a_{\nu k}^{(n)} \\
&= \gamma_\nu - \sum_{k=0}^{n} a_{\nu k}^{(n)}\gamma_{\nu k} \\
&= \frac{1}{\Delta_n}\left(\gamma_\nu \Delta_n - \sum_{r,s=0}^{n} \gamma_{\nu r}\gamma_{\nu s} F_{rs}^{(n)}\right) \\
&= \frac{\begin{vmatrix} \gamma_\nu & \gamma_{\nu 0} & \gamma_{\nu 1} & \dots & \gamma_{\nu n} \\ \gamma_{\nu 0} & f_{00} & f_{01} & \dots & f_{0n} \\ \gamma_{\nu 1} & f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{\nu n} & f_{n0} & f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{00} & f_{01} & \dots & f_{0n} \\ f_{10} & f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n0} & f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}}.
\end{aligned}
$$

Enunceremo pertanto al modo seguente il

Criterio di completezza per un sistema di funzioni. — *Dato il sistema* $[f_k]$ *di funzioni, di quadrato sommabile in* E *ed ivi linearmente indipendenti, condizione necessaria e sufficiente per la completezza in* E *del sistema è che, per qualunque valore dell'indice* ν, *si abbia* $\lim_{n=\infty} \sigma_{\nu n} = 0$, $\sigma_{\nu n}$ *essendo dato dal membro finale delle eguaglianze* (8), *col concorso delle* (7), *mentre* $[g_\nu(P)]$ *è un particolare sistema di funzioni, completo in* E. *In ogni caso, la quantità* $\sigma_{\nu n}$ *non è mai negativa, ed essendo sempre positivo il determinante a denominatore, non sarà mai negativo il determinante a numeratore* ([1]), *per ogni fissato valore di* ν, *al crescere di* n, *essa non cresce mai.*

([1]) Ciò che segue del resto anche dalla considerazione che tale determinante è il discriminante della seguente forma quadratica nei parametri $\lambda, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$:

$$\int_E (\lambda g_\nu + \mu_0 f_0 + \mu_1 f_1 + \dots + \mu_n f_n)^2\, dP.$$

In particolare, nell' ipotesi che il sistema $[f_k]$ sia ortogonale in E, si ritrova il criterio Lauricella-Severini dato al n° **18**:

Se il sistema $[f_k]$ non è completo in E, non tutte le funzioni possono ivi essere approssimate per combinazioni lineari delle f_k. In proposito, è facile dimostrare il teorema seguente.

Supposto che le funzioni del sistema $[f_k]$, *non completo in* E, *siano ivi linearmente indipendenti, tutte e sole le funzioni* f, *di quadrato sommabile in* E, *che ivi non possono essere approssimate per combinazioni lineari delle* f_k, *sono quelle per le quali, calcolata la quantità* σ_n *mediante le* (3) *e* (5) *del n° precedente, si ha*

$$\lim_{n=\infty} \sigma_n = \sigma > 0.$$

Per ciascuna di tali funzioni, l'errore quadratico medio che si commette nel sostituirla, in tutto E, *con una qualsiasi combinazione lineare delle* f_k, *non è mai inferiore a* σ, *e quindi* (*cf.* n° **6**), *posto* $\delta = \sqrt{\sigma : m\mathrm{E}}$, *l'approssimazione di* f *per combinazione lineare delle* f_k, *non può scendere al disotto di* δ, *cioè comunque si prenda una combinazione lineare* G_n *delle* f_k, *vi è sempre una porzione di* E, **di misura non nulla,** *nei punti della quale riesce* $|f - G_n| \geqq \delta$.

22. Sistemi completi fondamentali. — Per la generale pratica applicazione degli esposti criterii di completezza, nel campo delle funzioni a r variabili, occorre anzitutto conoscere un sistema di funzioni $[g_\nu(P)]$ tale che : I, ogni suo elemento g_ν risulti di quadrato sommabile in ogui insieme limitato e misurabile della spazia S_r a r dimensioni; II, il sistema riesca completo in ogni tale insieme. Un sistema di funzioni cosi fatto sarà da noi chiamato *un sistema completo fondamentale delle spazio* S_r.

Per la costruzione di sistemi completi fondamentali è utile il séguente teorema che subito discende dal teorema di Fubini [1] sugli integrali multipli di Lebesgue.

---

[1] G. Fubini, *Sugli integrali multipli* (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1° semestre 1907).

Siano $[g'_i(\mathrm{P}')]$ *e* $[g''_k(\mathrm{P}'')]$ *due sistemi completi fondamentali, rispettivamente, degli spazii* $\mathrm{S}_{r'}$ *e* $\mathrm{S}_{r''}$, *allora la funzione* $g'_i(\mathrm{P}')g''_k(\mathrm{P}'')$, *al variare di i e di k, indipendentemente l'uno dall'altro, nell'insieme dei numeri* o, 1, 2, ..., *descrive un sistema completo fondamentale dello spazio* $\mathrm{S}_{r'+r''}$.

Detta x l'ascissa di un punto di un S_1, il sistema $[x^k]$ è completo fondamentale di S_1 [1]. Ne segue che, *dette* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ *le coordi-*

---

[1] *Cf.* C. Severini, *Sulle equazioni integrali* $\int_a^b \theta(x)x^n\,dx = 0$ (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, seduta del 2 gennaio 1921). In questa elegante nota il Severini dà una semplicissima dimostrazione della completezza del sistema $[x^k]$ in un intervallo (a, b) qualsiasi dell'asse delle x. Se ne deduce (*cf.* n° **9** del testo) la completezza dello stesso sistema in un qualunque insieme limitato e misurabile di S_1.

La dimostrazione del S. è divisa in due parti. Nella I^a parte, semplificando assai un procedimento già seguito dallo Stieltjes, si dimostra che, fra le funzioni $\Theta(x)$, continue in (a, b), solamente lo zero può simultaneamente soddisfare alle equazioni

$$(a) \qquad \int_a^b \theta(x)x^k\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dopo ciò, nella II^a parte, si fa il segrente ragionamento: Se per una funzione $\theta(x)$ sommabile in (a, b) [veramente, l'a suppone anche la sommabilità del quadrato di $\theta(x)$, ma ciò non è necessario] riescono soddisfatte le (a), ponendo $\Theta(x) = \int_a^x \theta(x)\,dx$, si trova, integrando per parti, che la funzione continua, anzi assolutamente continua, $\Theta(x)$ soddisfa alle stesse (a), e quindi, per quanto si è ottenuto con la I^a parte della dimostrazione, si deduce che $\Theta(x)$ è identicamente nulla in (a, b) e pertanto che è ivi $\theta(x) \doteq 0$.

Con la dimostrazione del S., non soltanto si prova la completezza del sistema $[x^k]$, non soltanto cioè, supposta $\theta(x)$ di quadrato sommabile, dal simultaneo verificarsi delle (a) si deduce $\theta(x) \doteq 0$, ma, di più, supposta, semplicemente, $\theta(x)$ sommabile, dal simultaneo verificarsi delle (a) si deduce ancora $\theta(x) \doteq 0$.

L'elegante artificio — che rammenta quello di Du Bois-Reymond per il calcolo della variazione prima di un integrale (nel calcolo delle variazioni) — escogitato dal S. nella II^a parte della sua dimostrazione, parmi assai fecondo; esso è stato da me ripetuto con successo in una dimostrazione di completezza per un sistema di funzioni, particolarmente interessante, che si presenta nel nuovo metodo *nate di un punto di un* S_r, *il sistema*

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r} \qquad (k_1, k_2, \dots, k_r = 0, 1, 2, \dots)$$

è completo fondamentale dello spazio S_r. Così pure il sistema $[\cos kx, \operatorname{sen} kx]$ è completo fondamentale di S_1 (*cf.* nota, p. 373), e pertanto, *il sistema*

$$\cos(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r), \quad \operatorname{sen}(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_r x_r)$$
$$(k_1, k_2, \dots, k_r = 0, 1, 2, \dots),$$

è completo fondamentale dello spazio S_r.

---

d'approssimazione da me trovato per la soluzione del problema di Dirichlet (*cf.* la Prefazione).

Ma c'è da osservare che, considerando bene la II^a parte della dimostrazione del S., si vede che essa permette di enunciare il seguente

TEOREMA. — *Sia* $g_1(x)$, $g_2(x)$, ... *una successione di funzioni sommabili in* (a, b), *tale che, fra le funzioni* $\Theta(x)$, *assolutamente continue in* (a, b), *verificanti simultaneamente le equazioni*

$$\int_a^b g_\nu(x)\,\Theta(x)\,dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots),$$

e nulle in a e in b, non esista che lo zero; allora, indicando con $c_0, c_1, c_2, \dots$ *una successione arbitraria di costanti, delle quali la prima non nulla, il sistema di funzioni:*

$$f_0(x) = c_0, \qquad f_1(x) = c_1 + \int_a^x g_1(x)\,dx, \qquad \dots,$$
$$f_n(x) = c_n + \int_a^x g_n(x)\,dx, \qquad \dots,$$

è non soltanto completo in (a, b), *ma, di più, è tale che, supposta* $\theta(x)$, *semplicemente, sommabile, dal simultaneo verificarsi delle equazioni*

$$\int_a^b f_k(x)\,\theta(x)\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

si deduce l'equivalenza a zero di $\theta(x)$ *in* (a, b).

ESEMPIO. — Dalla teoria elementare (Jordan) delle serie trigonometriche si deduce subito che, fra le funzioni $\Theta(x)$, continue e a variazione limitata in un

VI. — Approssimazione per serie.

23. Connessione fra il problema d'approssimazione per serie e quello della risoluzione dei sistemi di infinite equazioni lineari in infinite quantità incognite. — Come abbiamo rilevato nella Prefazione, le approssimazioni per serie, hanno in generale — dal pratico punto di vista colà accennato — un interesse prevalentemente teorico, però, l'esame, che ci accingiamo a fare, della loro possibilità si riconnette a questioni d'analisi assai interessanti da parecchi lati.

Assegnato il sistema

$$f_0(P), \quad f_1(P), \quad \ldots, \quad f_n(P), \quad \ldots, \tag{1}$$

completo in E, di funzioni ivi linearmente indipendenti, si tratta di determinare un'infinità numerabile di costanti :

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots, \tag{2}$$

in modo che la serie

$$a_0 f_0(P) + a_1 f_1(P) + \ldots + a_n f_n(P) + \ldots, \tag{3}$$

---

intervallo (a, b) — fra le quali si trovano le funzioni assolutamente continue in (a, b) — verificanti simultaneamente le equazioni

$$\int_a^b \Theta(x) \operatorname{sen} \nu x \, dx = \int_a^b \Theta(x) \cos \nu x \, dx = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

e nulle in a, non esiste che lo *zero*. Da ciò segue allora, in virtù del teorema ora enunciato, che il sistema di funzioni

$$\operatorname{sen} kx, \quad \cos kx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

è tale che, supposta la sommabilità di $\theta(x)$ in (a, b), il simultaneo verificarsi delle equazioni

$$\int_a^b \theta(x) \operatorname{sen} kx \, dx = \int_a^b \theta(x) \cos kx \, dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

ha di conseguenza che in (a, b) è $\theta(x) \doteq 0$. In particolare, segue la completezza in (a, b) del sistema $[\operatorname{sen} kx, \cos kx]$.

approssimi in E la funzione $f(P)$, ivi di quadrato sommabile, arbitrariamente data; in modo cioè che, comunque si scelga una funzione $g(P)$ di quadrato sommabile in E, risulti sempre :

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g\, dP = \int_E f g\, dP.$$

Poniamo nella (4), in luogo di g, successivamente, le funzioni della successione (1), troviamo allora che le costanti (2) dovranno simultaneamente soddisfare alla seguente infinità numerabile di equazioni lineari :

$$(5)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_i f_k\, dP = \int_E f f_i\, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Adunque : *Il problema dell'approssimazione di una funzioni f, di quadrato sommabile, per serie di funzioni, pur esse di quadrato sommabile, di un sistema $|f_k|$, si riconnette al problema della risoluzione del sistema* (5) *di un'infinità numerabile di equazioni lineari e ad un'infinità numerabile di quantità incognite* (1).

24. Prime condizioni d'approssimabilità per serie. — Per quanto precede, si ha intanto : *Condizione necessaria affinchè la funzione f, di quadrato sommabile in* E, *sia ivi approssimabile per serie di funzioni, pur esse di quadrato sommabile, del sistema $|f_k|$, è che, il sistema* (5) *di infinite equazioni lineari, nelle infinite quantità incognite a_k, sia risolubile, sia cioè possibile determinare le costanti*

---

(1) Una trattazione a fondo di tali sistemi ha fatto F. Riesz, nel suo ammirevole libro : *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (*Collection Borel*, Paris, Gauthier-Villars, 1913). Qui sono esposti in forma brillante e spesso nuova i fondamentali risultati sull'argomento conseguiti da Poincaré, da von Koch, da Hilbert e dai suoi scolari e dal Riesz medesimo. Vi si trovano criterii di risolubilità degli indicati sistemi, interessanti casi di ri solubilità, metodi di risoluzione, nonchè utilissime indicazioni per gli ulteriori sviluppi di cui è suscettibile la bella teoria trattata.

della successione (2) *in modo che :* I° *le infinite serie nei primi membri delle* (5) *siano convergenti;* II° *esse abbiano per somma i secondi membri.*

Dimostriamo facilmante il

TEOREMA. — *Condizione sufficiente affinchè la funzione f, di quadrato sommabile in* E, *sia ivi approssimabile per serie di funzioni del sistema* $[f_k]$, *supposto completo in* E, *è che il sistema di equazioni* (5) *ammetta una tale soluzione che la corrispondente serie* (3) *approssimi in* E *una funzione ivi di quadrato sommabile; in particolare, sia tale che la serie converga su* E *in media, si abbia cioè, uniformemente al variare di p per valori intieri e positivi,*

$$\lim_{\nu=\infty}\int_E\left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k f_k\right)^2 dP = \lim_{\nu=\infty}\sum_{i,k=\nu}^{\nu+p} a_i a_k \int_E f_i f_k \, dP = 0,$$

o, più particolarmente ancora, sia tale che la serie converga uniformamente in un insieme E′ *contenuto in* E *e avente la misura di* E.

Ed invero, se le costanti della successione (2) sono tali che la serie (3) approssima in E una funzione f' ivi di quadrato sommabile, si avrà :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_i f_k \, dP = \int_E f' f_i \, dP \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

e se, inoltre, quelle costanti verificano il sistema (5), ne seguirà

$$\int_E (f' - f) f_i \, dP = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

il che, per la completezza, in E, del sistema $[f_k]$, ha di conseguenza l'equivalenza ivi delle due funzioni f' e f, ha di conseguenza cioé che proprio la serie (3) approssima in E anche l'assegnata funzione f.

25. METODO DELLE RIDOTTE PER LA RISOLUZIONE DEL SISTEMA (5). — La condizione sufficiente ora data per l'approssimabilità di un'assegnata funzione f per serie di funzioni del sistema $[f_k]$, presuppone già la conoscenza di una soluzione del sistema di equazioni (5); noi daremo, in ciò che segue, altre condizioni sufficienti, le quali, al contrario, contengono nuovi criterii di risolubilità del sistema di equazioni (5). Vedremo anzi, ciò che è di un certo interesse, che in tali condizioni, per la risoluzione del sistema (5) è applicabile *il metodo delle ridotte* (*cf.* Riesz, *loc. cit.*, p. 376, capitoli I e II). Tale classico metodo consiste semplicemente in ciò: Delle equazioni (5) si conservano le sole prime $n+1$ e delle incognite a_k si cancellano tutte le successive alla a_n. Si ottiene così un sistema di $n+1$ equazioni lineari in $n+1$ incognite — il così detto *sistema ridotto d'ordine* $n+1$ — che coincide col sistema (3) del nº **20**. Tale sistema di equazioni, per la supposta indipendenza lineare delle funzioni del sistema $[f_k]$, è a determinante positivo; ne sia $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$ la soluzione. Si fa ora variare n e, per ogni fissato valore dell'indice k, si esamina se, al divergere di n, esiste, determinato e finito, il limite di $a_k^{(n)}$. Il metodo riesce se: Iº esiste, determinato e finito, tale limite; IIº se, posto

$$\lim_{n=\infty} a_k^{(n)} = a_k \qquad (k=0, 1, 2, \ldots),$$

le quantità a_k così definite verificano il sistema (5).

26. Una condizione sufficiente d'approssimabilità per serie. — Ai casi osservati — nella teoria dei determinanti infiniti — da Poincaré e da von Kock in cui riesce il metodo, testè esposto, delle ridotte, ne aggiungeremo due nuovi, specialmente interessanti per le nostre applicazioni. Un primo caso si verifica nelle condizioni espresse dal seguente

Teorema. — *Il sistema $[f_k]$, di funzioni linearmente indipendenti in E, sia ivi completo. Sia $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$ la soluzione del sistema ridotto*

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k \int_E f_i f_k \, dP = \int_E f f_i \, dP \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n),$$

e si abbia

(7) $$\lim_{n=\infty} a_k^{(n)} = a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

(8) $$\lim_{\nu=\infty} \sum_{i,k=\nu}^{\nu+p} a_i a_k \int_E f_i f_k \, dP = 0,$$

(9) $$\lim_{\nu=\infty} \sum_{i,k=\nu}^{\nu+p} a_i^{(\nu+p)} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_i f_k \, dP = 0,$$

uniformemente al variare di p per valori intieri e positivi. Allora, la serie (3), *convergendo su* E *in media, approssima ivi la funzione f di quadrato sommabile, arbitravriamente data, ed in particolare, dunque, le* a_k *verificano il sistema* (5).

Ed invero, posto

$$F_n = a_0^{(n)} f_0 + a_1^{(n)} f_1 + \ldots + a_n^{(n)} f_n,$$

al divergere di n, la F_n, come abbiamo visto al n° **20**, converge su E in media verso la funzione f, e perciò, comunque si scelga la funzione g in E, ivi di quadrato sommabile, si avrà :

(10) $$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_E f_k g \, dP = \int_E f g \, dP.$$

La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP,$$

risulta convergente, in virtù della (8). Si ha infatti

$$\left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k \int_E f_k g \, dP \right)^2 = \left[\int_E g \left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k f_k \right) dP \right]^2 \leq \left(\int_E g^2 \, dP \right) \sum_{i,k=\nu}^{\nu+p} a_i a_k \int_E f_i f_k \, dP,$$

e quindi uniformemente al variare di p,

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k \int_E f_k g \, dP = 0.$$

Si trae poi dalla (9), allo stesso modo, che, uniformemente al variare di p,

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_k g \, dP = 0, \tag{11}$$

poichè

$$\left(\sum_{k=\nu}^{\nu+p} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_k g \, dP \right)^2 \leq \left(\int_E g^2 \, dP \right) \sum_{i,k=\nu}^{\nu+p} a_i^{(\nu+p)} a_k^{(\nu+p)} \int_E f_i f_k \, dP.$$

Ma, valendo la (11), è facile dimostrare che

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_E f_k g \, dP = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP,$$

e pertanto, segue dalla (10),

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP = \int_E f g \, dP,$$

ciò che appunto si voleva dimostrare. La (8) esprime inoltre la convergenza su E in media della serie (3).

27. Una seconda condizione sufficiente d'approssimabilità per serie. — Un secondo caso in cui, per la risoluzione del sistema (5), è applicabile il metodo delle ridotte, si trova appoggiandosi sulla seguente proposizione della teoria der limiti [*cf.* Riesz, *loc. cit.*, n° **40**] :

I sistemi di quantità finite (reali o complesse)

$$\begin{array}{llllll} a_0^{(n)}, & a_1^{(n)}, & \ldots, & a_k^{(n)}, & \ldots & (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ X_0, & X_1, & \ldots, & X_k, & \ldots, & \end{array}$$

siano tali che esistano due numeri reali e positivi q e L, il primo maggiore di uno, per i quali le due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(n)}|^q, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |X_k|^{\frac{q}{q-1}},$$

convergano, mentre la somma della prima non supera, qualunque *sia n, il numero* L. *Allora se esistono, determinati e finiti, i limiti*

$$\lim a_k^{(n)} = a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

si avrà

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \leq L, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{\infty} X_k a_k^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k a_k,$$

risultando convergente l'ultima serie scritta.

In base a questa proposizione è facile dimostrare il

Teorema. — *Il sistema* $|f_k|$ *di funzioni linearmente indipendenti in* E, *sia ivi completo. Sia* $(a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)})$ *la soluzione del sistema ridotto* (6) *e si abbia :*

I° *esiste un numero reale p maggiori di* $\frac{1}{2}$ *per cui converge la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_E f_k^2 \, dP \right)^p ;$$

II° $$\lim_{n=\infty} a_k^{(n)} = a_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) ;$$

III° *esiste un numero positivo* L, *tale che, qualunque sia n, risulta :*

$$\sum_{k=0}^{n} | a_k^{(n)} |^{\frac{2p}{2p-1}} \leq L.$$

Allora la serie (3) *approssima in* E *la funzione f di quadrato sommabile arbitrariamento data, ed in particolare, dunque, le* a_k *verificano il sistema* (5).

Si ha, invero, comunque si scelga la funzione g in E, ivi di quadrato sommabile,

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_E f_k g \, dP = \int_E f g \, dP,$$

basterà perciò demostrare che :

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \int_E f_k g \, dP = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_E f_k g \, dP.$$

In virtù delle ipotesi del teorema, ciò è un' immediata conseguenza della proposizione di limite ultimamente enunciata, poichè, posto :

$$\frac{2p}{2p-1}=q, \qquad \int_E f_k g \, dP = X_k,$$

si ha :

$$q>1, \qquad p=\frac{q}{2(q-1)}, \qquad \sum_{k=0}^{n} |a_k^{(n)}|^q \leq L,$$

$$|X_k|^{\frac{q}{q-1}} \leq \left(\int_E f_k^2 \, dP\right)^p \left(\int_E g^2 \, dP\right)^p,$$

e l'ultima diseguaglianza, in forza dell' ipotesi I^a, conduce alla convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} |X_k|^{\frac{q}{q-1}}$.

VII. — Sui sistemi schmidtiani.

28. Preliminari. — Assegnate le quantità finite e reali

$$a_{ik}, \quad b_i \qquad (i, k=0, 1, 2, \ldots),$$

prendiamo a considerare il sistema di infinite equazioni lineari

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k = b_i \qquad (i=0, 1, 2, \ldots),$$

nelle infinite quantità reali incognite x_0, x_1, x_2, ... Schmidt (*loc. cit.*, p. 359) ha studiato il sistema (1) nell' ipotesi che le serie

$$(2) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}^2 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots)$$

convergano per ogni valore dell' indice i. In tale ipotesi noi diremo il sistema (1) *un sistema schmidtiano*. Diremo poi, con Schmidt, che il sistema di quantità $[x_k]$ è *una soluzione del sistema* (1) se :

I^o la série $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$ è convergente, ciò che, per la convergenza delle serie (2), ha di conseguenza l'assoluta convergenza delle serie ai primi membri delle (1);

II° per il sistema $[x_k]$ di valori, le serie ai primi membri delle (1) hanno por somma i secondi membri.

In questo paragrafo finale vogliamo brevemente trattare i sistemi schmidtiani e ciò allo scopo, principalmente, di conseguire una nuova interpretazione del difficile problema di vedere se un dato sistema di funzioni è completo o pur no, interpretazione che può talvolta giovare alla risoluzione di quel problema. Vedremo di più che, in alcuni risultati dei §§ IV et V sono contenuti i principali risultati di Schmidt (*loc. cit.*) concernenti i sistemi (1).

29. Connessione fra i sistemi schmidtiani e certi sistemi di infinite equazioni integrali. — Dato il sistema $[f_k(P)]$ di funzioni di quadrato sommabile in un insieme E, per deciderne la completezza ivi, occorre considerare il seguente sistema di infinite equazioni integrali lineari ed omogenee :

$$(3) \qquad \int_E f_i(P)\, g(P)\, dP = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

nella funzione incognita $g(P)$, supposta pur essa di quadrato sommabile in E. Il sistema (3) rientra, come caso particulare, nel seguente

$$(4) \qquad \int_E f_i(P)\, g(P)\, dP = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

ove le b_i sono quantità reali, arbitrariamente assegnate. Diremo, brevemente, che la $g(P)$ è *una soluzione del sistema* (4) se : I° essa è in E di quadrato sommabile; II° essa soddisfa alle equazioni del sistema.

Un criterio di risolubilità del sistema (4) è già contenuto nei risultati del n° **15**. Ortogonalizzando, invero, il sistema $[f_k]$, supposto di funzioni linearmente indipendenti — al quale caso ci si può sempre ridurre — si abbia $\varphi_k = \sum_{\nu=0}^{k} c_{k\nu} f_\nu$. Il sistema (4), poichè $c_{ii} \neq 0$, equivale al seguente

$$\sum_{\nu=0}^{i} c_{i\nu}\int_E f_\nu(P)\,g(P)\,dP=\int_E \varphi_i(P)\,g(P)\,dP=\sum_{\nu=0}^{i} c_{i\nu}\,b_\nu,$$

onde (*cf.* n° **13**), in virtù dell' ortogonalità del sistema $[\varphi_i(P)]$ si ha :

Teorema Riesz-Fischer ([1]). — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (4) *possieda una soluzione è che risulti convergente la serie*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{i} c_{i\nu}\,b_\nu\right)^2 :$$

soddisfatta questa condizione, una soluzione del sistema è data da :

$$g(P)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(P)\sum_{\nu=0}^{k} c_{k\nu}\,b_\nu.$$

Ora noi vogliamo mostrare che ([2]) la ricerca di tutte le soluzioni del sistema (4) equivale alla ricerca di tutte le soluzioni del più generale sistema schmidtiano.

Sia $[\varphi_k(P)]$ un particolare sistema di funzioni, ortogonale e completo in E, che riteniamo fissato una volta per tutte. Ponendo

$$(5)\qquad a_{ik}=\int_E f_i(P)\,\varphi_k(P)\,dP \qquad (i,\,k=0,1,2,\ldots),$$

si avrà (*cf.* n^i^ **13**, **16**, **18**)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}^2=\int_E [f_i(P)]^2\,dP \qquad (i=0,1,2,\ldots),$$

e pertanto, il sistema (1) di infinite equazioni lineari, i cui coefficienti

([1]) F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Paris, 15 mars 1907). — E. Fischer, *loc. cit.*, p. 338.

([2]) *Cf.* F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (*Mathematische Annalen*, Bd **69**, 1910, p. 449).

sono dati dalle (5) è un sistema schmidtiano. Esso si dirà *il sistema schmidtiano associato al sistema* (4) *di equazioni integrali.*

Viceversa dato il sistema schmidtiano (1), poniamo

$$f_i(P) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\,\varphi_k(P) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

il sistema di equazioni integrali (4), per il quale le $f_i(P)$ son date dalle (6), si dirà *il sistema di equazioni integrali associato al dato sistema schmidtiano.*

Evidentemente : Si il sistema (4) di equazioni integrali è associato al sistema schmidtiano (1), reciprocamente, questo sistema è associato a quello.

I due sistemi (1) e (4) siano associati l'uno all'altro. Sia $g(P)$ una soluzione del sistema (4) di equazioni integrali, ponendo :

$$x_k = \int_E g(P)\,\varphi_k(P) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

si avrà

$$b_i = \int_E f_i(P)\,g(P)\,dP = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}\,x_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = \int_E [g(P)]^2\,dP,$$

e quindi le (7) forniscono una soluzione del sistema schmidtiano (1). Viceversa, sia $[x_k]$ una soluzione del sistema schmidtiano (1), ponendo allora

$$g(P) \sim \sum_{k=0}^{\infty} x_k\,\varphi_k(P), \tag{8}$$

si avrà una soluzione del sistema (4) di equazioni integrali. Onde il

TEOREMA. — *Dato il sistema* (4) *di equazioni integrali, ad esso, mediante le formole* (5), *è associato un sistema schmidtiano* (1). *Viceversa, dato il sistema schmidtiano* (1), *ad esso, mediante le formole* (6), *è associato un sistema* (4) *di equazioni integrali. Vi è corrispondenza biunivoca fra le soluzioni di due sistemi associati. Le* (7) *fanno passare da una soluzione del sistema* (4) *di equazioni integrali ad una soluzione dell'associato sistema schmidtiano; viceversa, la* (8) *fa passare da una soluzione del sistema schmid-*

tiano (1) *ad una soluzione dell'associato sistema di equazioni integrali.*

Al sistema (3) di equazioni integrali è associato il sistema schmidtiano omogeneo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \dots), \tag{9}$$

e dal teorema ora ennunciato si deduce il

COROLLARIO. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema di funzioni* $[f_k]$ *sia completo in* E, *è che il sistema schmidtiano omogeneo* (9), *associato al sistema* (3) *di equazioni integrali, non abbia che la soluzione nulla, cioè la soluzione*

$$x_k = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

30. UN ESEMPIO. — Con quest'ultima proposizione il problema di decidere se un dato sistema di funzioni è o no completo, viene trasformato in quello di vedere se il sistema schmidtiano omogeneo corrispondente possiede soltanto la soluzione nulla o ne possiede altre. Ora tale trasformazione può talvolta riuscire utile per la risoluzione di quel problema. Convinciamocene con un esempio.

Sia α una costante reale, si tratta di vedere se il sistema di funzioni della variabile θ :

$$\left\{\begin{array}{ll} f_0(\theta) = 1, & f_{2n-1}(\theta) = (1 + \alpha\cos\theta)^n \operatorname{sen} n\theta \\ f_{2n}(\theta) = (1 + \alpha\cos\theta)^n \cos n\theta & \end{array}\right. \qquad (n = 1, 2, \dots), \tag{10}$$

è, nell' intervalle $(0, 2\pi)$, completo o pur no.

Come sistema $[\varphi_k]$, ortogonale e completo in $(0, 2\pi)$, prendiamo quello definito dalle eguaglianze

$$\varphi_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \varphi_{2n-1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} n\theta, \qquad \varphi_{2n}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos n\theta$$
$$(n = 1, 2, \dots).$$

Il sistema schmidtiano associato al sistema (3) di equazioni integrali, si scrive, nel caso attuale, dopo facili trasformazioni,

$$x_0 = 0,$$
$$\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k x_{2(i+k)} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k x_{2(i+k)-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Se $|\alpha| > 2$, una soluzione evidente di tale sistema si ottiene ponendo

$$x_0 = 0, \qquad x_{2\nu-1} = x_{2\nu} = (-1)^\nu\left(\frac{2}{\alpha}\right)^\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Pertanto, per $|\alpha| > 2$, il sistema di funzioni (10) non è completo in $(0, 2\pi)$, ed una funzione $g(\theta)$ che verifica simultaneamente le (3) è data da,

$$g(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2}{\alpha}\right)^k(\cos k\theta + \operatorname{sen} k\theta) \quad (^1).$$

51. I RISULTATI DI SCHMIDT. — Nella citata memoria (*loc. cit.*, p. 359) lo Schmidt ha formulato varii criterii di risolubilità per i sistemi schmidtiani e ha dato inoltre una condizione necessaria e suffi-

---

(1) L'interesse per questo esempio è suscitato vieppiù dal fatto che il considerato sistema (10) di funzioni è, al contrario, completo in $(0, 2\pi)$ se $|\alpha| < 1$: per $\alpha = 0$ il sistema si riduce a quello solito di Fourier. L'asserita completezza, per $|\alpha| < 1$, del sistema (10) si troverà dimostrata, come caso particolarissimo, nella memoria a questa successiva trattante il problema di Dirichlet, annunziata nella Prefazione. (L'indicato sistema si presenta appunto nel problema esterno di Dirichlet per l'ellisse.) Ne seguirà che il sistema schmidtiano omogeneo

$$\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\beta^k \xi_{i+k} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

al quale — ponendo $\frac{\alpha}{2} = \beta$, $x_{2\nu} = \xi_\nu$, ovvero $x_{2\nu-1} = \xi_\nu$ — si riduce quello ottenuto nel testo, non possiede, per $|\beta| < \frac{1}{2}$, che la soluzione nulla. Di ciò non sono riuscito a dare una dimostrazione diretta, per quanto, a prima vista, essa sembri facilmente conseguibile.

ciente affinchè un sistema schmidtiano omogeneo non abbia che la soluzione nulla. Orbene, tali risultati sono contenuti nei nostri, in virtù del teorema enunciato al n° **29**.

Il criterio, enunciato al n° **29**, di risolubilità per il sistema di equazioni integrali (4), associato al sistema schmidtiano (1), dà per quest'-ultimo un criterio che coincide con quello dato dallo Schmidt al § 14 della sua memoria.

Il criterio di completezza, enunciato al n° **21**, applicato al sistema $[f_k]$ di funzioni definite dalle (6), dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema schmidtiano omogeneo (9) non abbia che la soluzione nulla. Tale condizione contiene come caso particolare quella trovata dallo Schmidt al § 11 della sua memoria. Per avere il *preciso* enunciato di Schmidt, premettiamo la seguente osservazione : Indicando con μ_0, μ_1, ..., μ_n dei parametri indeterminati, condizione necessaria e sufficiente affinchè, qualunque sia n, i primi membri delle prime $n+1$ equazioni del sistema schmidtiano (9), siano linearmente indipendenti è che la seguente forma quadratica negli indicati parametri,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_{ik}\mu_i\right)^2 = \sum_{i,j=0}^{n}\mu_i\mu_j\sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}a_{jk} \quad (^1),$$

sia definita positiva. Adunque, osservando che

$$\int_E f_i(P)f_j(P)\,dP = \sum_{k=0}^{\infty}a_{ik}a_{jk},$$

supposta l'indipendenza lineare delle funzioni f_k, ne segne l'indipendenza lineare, qualunque sia n, dei primi membri delle prime $n+1$ equazioni del sistema schmidtiano (9), associato al sistema (3) di equazioni integrali, e viceversa.

---

(1) Data la convergenza delle serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}^2$, è facile dimostrare la convergenza della serie al primo membro, per quali si vogliano valori dei parametri μ_i, nonchè l'eguaglianza.

Poniano ora

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} a_{jk}, \tag{11}$$

e, per enunciare il criterio di completezza del n° **21**, usiamo, in particolore, in luogo del sistema completo arbitrario $[g_\nu]$, il sistema $[\varphi_\nu]$, ortogonale e completo del n° **29**, allora, con le attuali notazioni, si ha *precisamente* il

TEOREMA DI SCHMIDT. — *Dato il sistema schmidtiano omogeneo* (9), *tale che, qualunque sia n, i primi membri delle prime $n+1$ equazioni siano linearmente indipendenti, condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema non possieda che la soluzione nulla, è che, per qualunque valore dell'indice* ν, *si abbia :*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{0\nu} & a_{1\nu} & \dots & a_{n\nu} \\ a_{0\nu} & \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ a_{1\nu} & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n\nu} & \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{12}$$

ove le quantità α_{ij} sono date dalle (11). *In ogni caso, il determinante a denominatore è sempre positivo, quello al numeratore non è mai negativo, ed il loro quoziente, per ogni fissato valore di ν, non cresce mai al crescere di n.*

32. UN'UTILE AGGIUNTA AL TEOREMA DI SCHMIDT. — Nelle applicazioni del teorema di Schmidt ora enunciato è utile un'osservazione, che vogliamo ora qui fare, la quale non si trova neppure nella citata esposizione del Riesz (*loc. cit.*, p. 376). Secondo questa osservazione, si ha :

Il verificarsi della (12), *per un particolare valore m dell'indice* ν, *ha di conseguenza che, per ogni soluzione del sistema schmidtiano omogeneo* (9), *è* $x_m = 0$ [1].

Sia invero verificata la (12) per il particolare valore m dell'indice ν, dico che allora non potrà esistere una soluzione del sistema schmidtiano omogenco (9) per la quale risulti $x_m \neq 0$. Ed infatti, in caso contrario, il seguente sistema schmidtiano

$$(13) \qquad \begin{cases} x_m = 1, \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} x_k = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

possiederebbe una soluzione $[x_k]$. Per tale soluzione sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = M.$$

Comunque sè scelgano gli $n + 2$ parametri $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, dalle prime $n + 2$ equazioni del sistema (13) deduciamo

$$\mu = \mu x_m + \sum_{k=0}^{\infty} x_k \sum_{i=0}^{n} a_{ik} \mu_i,$$

onde segne la diseguaglianza

$$\mu^2 \leqq M \left(\mu^2 + 2\mu \sum_{i=0}^{n} a_{im} \mu_i + \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} \mu_i \mu_j \right),$$

segne cioè che la forma quadratica

$$(M - 1) \mu^2 + 2 M \sum_{i=0}^{n} a_{im} \mu \mu_i + M \sum_{i,j=0}^{n} \alpha_{ij} \mu_i \mu_j,$$

nei parametri $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, è definita o semidefinita positiva per ogni valore di n. Il suo discriminante sarà perciò non negativo, si

---

[1] Mentre, secondo il teorema di Schmidt, per dedurre che $x_m = 0$, parrebbe necessario verificare che la (12) ha luogo per ogni valore dell'indice ν, e non semplicemente per il solo valore m.

avrà cioè, per ogni valore di n,

$$M\begin{vmatrix} 1 & a_{0m} & a_{1m} & \dots & a_{nm} \\ a_{0m} & \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ a_{1m} & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nm} & \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \geqq 0,$$

ciò che, valendo la (12) per $\nu = m$, à assurdo per ogni valore finito di M.

Si ha così, si noti, una nuova semplicissima dimostrazione elementare della sufficienza della condizione (12) — verificata per ogni valore dell'indice ν — perchè il sistema schmidtiano omogeneo (9) non abbia che la soluzione nulla.