JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. ABRAMESCO

Sur les séries de polynômes à une variable complexe

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 1 (1922), p. 77-84.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1922_9_1__77_0>

Sur les séries de polynomes à une variable complexe;

PAR N. ABRAMESCO.

1. Considérons *une série de M. Appell* (¹),

$$\sum \frac{a_n}{P_n(x)}, \tag{1}$$

où les a_n sont des quantités données et où les polynomes donnés $P_n(x)$ ont leurs racines intérieures à une courbe (C). ***Proposons-nous de trouver la région de convergence de ces séries, quand les polynomes $P_n(x)$ sont liés par des relations données.***

2. Considérons le cas où les polynomes $P_n(x)$ sont donnés par une relation récurrente de *Poincaré* (²)

$$R_k(x)P_{n+k}(x) + R_{k-1}(x)P_{n+k-1}(x) + \ldots + R_0(x)P_n(x) = 0 \tag{2}$$
$$(n = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

k étant un nombre donné et $R_s(x)$ des fonctions données qui dépendent de x et du rang n.

Posant $v_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, la relation (2) s'écrit

$$v_{n+k-1}v_{n+k-2}\ldots v_n + \frac{R_{k-1}}{R_k}v_{n+k-2}v_{n+k-3}\ldots v_n + \ldots + \frac{R_1}{R_k}v_n + \frac{R_0}{R_k} = 0,$$

(¹) *Voir* P. APPELL, *Sur les développements en série suivant les inverses de polynomes donnés* (*Comptes rendus*, t. 157, p. 5 et 1042; *Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre 1913; *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 58, 1920, p. 1). — N. ABRAMESCO, *Comptes rendus*, t. 172, 1921, p. 649.

(²) POINCARÉ, *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies* (*American Journal*, vol. VII).

et si, pour $n \to \infty$, le rapport v_n a une limite, cette limite est une racine de l'équation

$$\text{(3)} \qquad F(\lambda) \equiv \lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + A_0 = 0,$$

où

$$A_s = \lim_{n \to \infty} \frac{R_s}{R_k}.$$

Par un procédé analogue à celui employé par Poincaré (¹) pour le cas $k = 3$, on montre que le rapport $\frac{P_{n+1}}{P_n}$ tend, en général, vers la racine $\alpha(x)$ de plus grand module de l'équation (3).

La *série de Poincaré*,

$$\sum a_n P_n(x),$$

qui est une série de polynomes $P_n(x)$ liés par la relation (2), *a sa région de convergence* (²) *limitée par la courbe*

$$|\alpha(x)| = \rho,$$

$\alpha(x)$ *étant la racine de plus grand module de l'équation* (3), *et*

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

3. Considérons *une série de M. Appell*,

$$\sum \frac{a_n}{P_n(x)},$$

les polynomes $P_n(x)$ étant liés par la relation (2), et les polynomes $P_n(x)$ ayant leurs racines intérieures à une courbe (C). Pour trouver la région de convergence de cette série, considérons la série

$$\text{(4)} \qquad a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots,$$

convergente à l'extérieur du cercle $|z| = \rho = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$.

(¹) POINCARÉ, *loc. cit.* — Voir aussi PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 420.
(²) PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 420.

Laissant de côté certains cas exceptionnels, nous supposerons que l'équation (3) a toutes ses racines distinctes et que $\alpha(x)$ est la racine de plus grand module de cette équation.

Supposons premièrement $|\alpha| > \rho$ et considérons un nombre ρ_1, tel que $\rho < \rho_1 < |\alpha|$. Nous avons

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = \alpha, \qquad \left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| > \rho_1 > \rho;$$

et si, pour fixer les idées, nous supposons que l'on a cette inégalité en partant de $n = 0$, nous aurons

$$\left|\frac{P_1}{P_0}\right| > \rho_1, \qquad \left|\frac{P_2}{P_1}\right| > \rho_1, \qquad \dots, \qquad \left|\frac{P_n}{P_{n-1}}\right| > \rho_1;$$

$$|P_n| > |P_0|\rho_1^n; \qquad \left|\frac{a_n}{P_n}\right| < \frac{1}{|P_0|}\frac{|a_n|}{\rho_1^n}.$$

Donc, si $|\alpha| > \rho$, la série de M. Appell est valable, comme ayant les modules de ses termes plus petits que ceux de la série convergente (4) $(\rho_1 > \rho)$.

Supposons, au contraire, que $|\alpha| < \rho$ et que $|\alpha| < \rho_2 < \rho$. Nous aurons

$$\left|\frac{P_{n+1}}{P_n}\right| < \rho_2 < \rho$$

et, si cette inégalité existe depuis $n = 0$, on a

$$|P_n| < |P_0|\rho_2^n, \qquad \left|\frac{a_n}{P_n}\right| > \frac{1}{|P_0|}\frac{|a_n|}{\rho_2^n}.$$

Donc, si $|\alpha| < \rho$, la série (1) est divergente comme ayant les modules de ses termes plus grands que ceux d'une série divergente

$$\sum \frac{a_n}{\rho_2^n}, \qquad (\rho_2 < \rho).$$

Il en résulte que la *courbe de convergence de la série de M. Appell, où les polynomes* $P_n(x)$ *sont liés par la relation* (2), *est donnée par l'équation* $|\alpha(x)| = \rho$, $\alpha(x)$ *étant la racine qui a le plus grand module de l'équation* (3).

La courbe (Γ), $|\alpha| = \rho$, $(x = X + iY)$, du plan XOY, sépare le plan en deux régions, l'une intérieure à la courbe, et l'autre extérieure où se trouvent les points à l'infini. Pour une de ces régions, on a $|\alpha(x)| - \rho > 0$ et, pour l'autre, $|\alpha| - \rho < 0$; donc, d'après ce que nous avons vu, dans la première région, $|\alpha(x)| - \rho > 0$, la série de M. Appell converge, dans l'autre elle diverge. Or, la série (1) converge pour x tendant vers l'infini, qui est dans la région extérieure à la courbe (Γ) et donc *la série de M. Appell sera convergente dans la région extérieure à la courbe* $|\alpha(x)| = \rho$, *qui est en même temps extérieure à la courbe* (C) *où se trouvent les racines des polynomes* $P_n(x)$.

4. *Exemples.* — 1° $P_n(x) = (x-a)^n$. La relation (2) et l'équation (3) sont

$$P_n(x) = (x-a)P_{n-1}(x), \qquad \lambda = x - a.$$

La série de M. Appell est dans ce cas $\sum \frac{a_n}{(x-a)^n}$, et la région de convergence est le domaine extérieur au cercle $|\alpha| = \rho$, ou $|x - a| = \rho$, et l'on retrouve les résultats connus.

2° Supposons que $P_n(x)$ soit le *polynome de Legendre*,

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

qui a toutes ses racines réelles et sur le segment $(-1, +1)$. La relation (2) et l'équation (3) sont

$$nP_n - (2n-1)xP_{n-1} + (n-1)P_{n-2} = 0, \qquad \lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0.$$

Faisant la transformation conforme

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right),$$

les racines λ' et λ'' de l'équation (3) sont ξ et $\frac{1}{\xi}$. Dans l'hypothèse $|\xi| > 1$, la région de convergence est le domaine extérieur à l'ellipse

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \qquad |\xi| = \rho,$$

de foyers $-1, +1$.

3° Considérons les *polynomes orthogonaux* (¹) $P_n(x)$, qui généralisent les polynomes de Legendre et qui sont définis par les relations

$$\int_a^b \varphi(x)\, P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n);$$
$$\int_a^b \varphi(x)\, P_n^2(x)\, dx = I_n = \text{const.},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction positive et intégrable dans l'intervalle (a, b). On sait que les polynomes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles et sur le segment (a, b). Dans le cas $a = -1$, $b = 1$, $\varphi(x) = 1$, on a les polynomes de Legendre.

Posant, dans le cas général,

$$I_n = \frac{D_n(\varphi)}{D_{n-1}(\varphi)}, \qquad D_n(\varphi) = \begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & g_2 & \dots & g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & g_{n+1} & \dots & g_{2n} \end{vmatrix}, \qquad g_s = \int_a^b \varphi(t)\, t^s\, dt,$$

le polynome $P_n(x)$ est donné par

$$P_n(x) = \frac{1}{D_{n-1}(\varphi)} \begin{vmatrix} x g_0 - g_1 & x g_1 - g_2 & \dots & x g_{n-1} - g_n \\ x g_1 - g_2 & x g_2 - g_3 & \dots & x g_n - g_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x g_{n-1} - g_n & x g_n - g_{n+1} & \dots & x g_{2n-2} - g_{2n-1} \end{vmatrix},$$

$$P_n(x) = \frac{D_{n-1}(F)}{D_{n-1}(\varphi)}, \qquad F = (x - t)\,\varphi(t),$$

$$x g_s - g_{s+1} = \int_a^b (x - t)\,\varphi(t)\, t^s\, dt = \int_a^b F(t)\, t^s\, dt,$$

et l'on voit que $D_{n-1}(F)$ et $D_{n-1}(\varphi)$ sont respectivement les détermi-

(¹) *Voir* DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. IV, 1878, p. 411).

nants des formes ([1]) quadratiques

$$\int_a^b (x-t)\varphi(t)(y_0+y_1 t+\ldots+y_{n-1}t^{n-1})^2 dt = \sum\sum (x g_{p+q} - g_{p+q+1}) y_p y_q,$$

$$\int_a^b \varphi(t)(y_0+\ldots+y_{n-1}t^{n-1})^2 dt = \sum\sum g_{p+q} y_p y_q \qquad [p, q = 0, 1, \ldots (n-1)].$$

La relation de récurrence connue ([2]), entre trois polynomes consécutifs, est

$$P_{n+1} - (x-u_n)P_n + \frac{I_n}{I_{n-1}} P_{n-1} = 0,$$

et, avec les notations employées, on trouve

$$u_n = \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_{n-1} & g_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n & g_{n+1} & \ldots & g_{2n-1} & g_{2n+1} \end{vmatrix}}{D_n(\varphi)} - \frac{\begin{vmatrix} g_0 & g_1 & \ldots & g_{n-2} & g_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-1} & g_n & \ldots & g_{2n-3} & g_{2n-1} \end{vmatrix}}{D_{n-1}(\varphi)},$$

et pour $n \to \infty$, l'équation (3) devient

$$\lambda^2 - \frac{4}{b-a}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\lambda + 1 = 0.$$

([1]) Étudiées par M. Szegö dans son Mémoire *A Hankel-féle formákról* (Les formes de Hankel) dans le bulletin hongrois *Mathematikai és Termeszettudomanyi értesitö*, 1918, p. 497. M. Szegö considère les polynomes $P_n(x)$ qui sont égaux aux déterminants des formes de Hankel et démontre que ces polynomes satisfont aux conditions des polynomes orthogonaux; il obtient une relation (incomplète) de récurrence (d'ailleurs trouvée par *Darboux* en 1878) entre trois polynomes consécutifs (sans dire un mot des grands géomètres *Stieltjes* et *Darboux*, qui ont étudié ces polynomes); il démontre que la limite pour $n \to \infty$ de $\sqrt[n]{P_n(x)}$ est égale à

$$e^{\int_a^b \log(x-t)\frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}}$$

et enfin, que les courbes de convergence des séries $\sum c_n P_n(x)$ sont des ellipses de foyers a et b.

([2]) *Voir* aussi le *Cours d'Analyse supérieure* fait, à la *Sorbonne*, par M. E. Picard, en 1918.

La région de convergence de la série (¹) de M. Appell est le domaine extérieur à l'ellipse

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{4}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \qquad |\alpha| = \rho,$$

de foyers a et b.

4° Considérons les *polynomes électrosphériques* $P_n(x)$ qui admettent la fonction génératrice

$$\frac{1}{1 - 2tx + t^2} = \sum t^n P_n(x).$$

Ces polynomes ont été rencontrés par MM. *Guillet* et *Aubert* [1] dans leurs recherches sur l'attraction mutuelle de deux sphères électrisées ou d'une sphère et d'un plan; la capacité commune des deux armatures en présence est donnée, à un facteur près, par la série de M. Appell

$$(5) \qquad \sum \frac{1}{P_n(x)}.$$

La relation (2) est

$$P_{n+1} - 2xP_n + P_{n-1} = 0.$$

On voit, de cette relation, que la suite de Sturm : $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_n(x)$, devient respectivement pour -1, $+1$,

$$1, \quad -2, \quad 3, \quad \ldots, \quad (-1)^n(n+1); \qquad 1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad (n+1);$$

donc la suite perd, entre -1 et $+1$, n variations, et donc les polynomes $P_n(x)$ ont leurs racines réelles sur le segment $(-1, +1)$.

L'équation (3) est $\lambda^2 - 2\lambda x + 1 = 0$, et la région de convergence de la série (5), où $\rho = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, est limitée par le segment $(-1, +1)$,

$$x = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right), \qquad |\xi| = 1,$$

et donc cette série est valable dans tout le plan XOY ($x = X + iY$), sauf sur la coupure $(-1, +1)$.

---

[1] *Comptes rendus*, t. 155, 1912, p. 139, 204, 708, 820; t. 157, 1913, p. 367.

5. *Considérons la série*

$$\sum \frac{a_n}{P_n(x)} + \sum b_n P_n(x), \tag{6}$$

qui généralise la série de Laurent. La région de convergence de cette série, quand les polynomes $P_n(x)$ *sont liés par la relation* (2), *est le domaine intérieur à la courbe* $|\alpha(x)| = \rho_1$ *et extérieur à la courbe* $|\alpha(x)| = \rho$, *et qui est en même temps extérieur à la courbe* (C) *où se trouvent les racines des polynomes* $P_n(x)$; $\alpha(x)$ *étant la racine de plus grand module de l'équation* (3) *et* $\rho = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$, $\frac{1}{\rho_1} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|}$.

Exemple. — Dans le cas des polynomes orthogonaux, le domaine de convergence de la série (6) est une couronne formée par deux ellipses homofocales.