JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N.-E. NÖRLUND

Remarques diverses sur le calcul aux différences finies

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 193-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__193_0>

Remarques diverses sur le calcul aux différences finies;

PAR N.-E. NÖRLUND.

Réductions des sommes multiples.

1. Désignons la différence du premier ordre par le symbole

$$\underset{\omega}{\Delta} F(x) = \frac{F(x+\omega) - F(x)}{\omega}$$

et la moyenne du premier ordre par le symbole

$$\underset{\omega}{\nabla} F(x) = \frac{F(x+\omega) + F(x)}{2}.$$

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des nombres positifs quelconques. On détermine la différence d'ordre n par l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1\ldots\omega_n}{\Delta}} F(x) = \underset{\omega_n}{\Delta}\left[\overset{n-1}{\underset{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}{\Delta}} F(x)\right]$$

et la moyenne d'ordre n par l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1\ldots\omega_n}{\nabla}} F(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\left[\overset{n-1}{\underset{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}{\nabla}} F(x)\right].$$

Si $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \omega$, j'écris plus brièvement

$$\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} F(x) \quad \text{et} \quad \overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} F(x).$$

Dans trois Mémoires (¹) récents, j'ai étudié la somme de première espèce et d'ordre n

$$G_n(x) = \mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} x$$

et la somme de seconde espèce et d'ordre n

$$F_n(x) = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} z.$$

Les fonctions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ satisfont aux équations suivantes :

$$\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} G_n(x) = \varphi(x),$$

$$\mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} F_n(x) = \varphi(x).$$

J'ai considéré ces fonctions en admettant que les paramètres ω_i sont des nombres positifs quelconques. Que se passe-t-il si deux des nombres ω_i viennent coïncider dans un point? Je vais démontrer qu'en ce cas une somme d'ordre n s'exprime linéairement par deux ou trois sommes d'ordre $n-1$. Pour le voir, je commence par déduire un théorème relativement aux polynomes d'Euler $E_\nu^{(n)}(x)$. Ces polynomes figurent comme coefficients dans le développement suivant (C, p. 184) :

$$(1) \qquad \frac{2^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}+1)(e^{\omega_2 t}+1)\ldots(e^{\omega_n t}+1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

(¹) *Mémoire sur le calcul aux différences finies* (*Acta mathematica*, t. XLIV, 1923, p. 71-211); *Sur certaines équations aux différences finies* [*Transactions of the American Mathematical Society*, t. XXV, 1923 (sous presse)]; *Mémoire sur les polynomes de Bernoulli* (*Acta mathematica*, t. XLIII, 1920, p. 121-196). Dans les renvois qui vont suivre, je désignerai ces trois Mémoires par les lettres A, B et C. *Voir* aussi : *Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XLIV, 1920, p. 174-192 et p. 200-220); *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens* (Strasbourg, 22-30 septembre 1920, p. 98-119).

Dérivons par rapport à ω_1, on trouvera

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathrm{E}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = -\frac{2^n t\, e^{(x+\omega_1)t}}{(e^{\omega_1 t}+1)^2 (e^{\omega_2 t}+1)\ldots(e^{\omega_n t}+1)}.$$

Mais en développant le dernier membre suivant les puissances de t on obtient, en vertu de l'équation (1),

$$-\frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu+1}}{\nu!} \mathrm{E}_\nu^{(n+1)}(x+\omega_1 \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de t, on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathrm{E}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = -\frac{\nu}{2} \mathrm{E}_{\nu-1}^{(n+1)}(x+\omega_1 \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{E}_\nu^{(n+1)}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ &\quad = 2\,\mathrm{E}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) + \frac{2}{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathrm{E}_{\nu+1}^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n). \end{aligned}$$

Par conséquent, un polynome d'Euler d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, s'exprime linéairement par deux polynomes d'ordre n. En posant $x = 0$, il vient

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{C}_\nu^{(n+1)}[\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n] \\ &\quad = 2\,\mathrm{C}_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n] + \frac{1}{\nu+1} \frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathrm{C}_{\nu+1}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]. \end{aligned}$$

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x \geqq b$, une dérivée continue d'ordre m telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{n+1+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0, \qquad \varepsilon > 0.$$

La somme de première espèce se développe en série de la manière suivante (B, § 8) :

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1, \ldots, \omega_n}^{n} x \\ &\quad = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{\mathrm{C}_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^{\infty} \frac{\overline{\mathrm{E}}_{m-1}^{(n)}(-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\, dt. \end{aligned}$$

Ici $\overline{E}_\nu^{(n)}(x)$ désigne une fonction qui satisfait à l'équation

$$\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \overline{E}_\nu^{(n)}(x) = 0$$

et qui est, dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$, égale au polynome d'Euler $E_\nu^{(n)}(x)$. Cette fonction vérifie l'équation

$$(5)\quad \begin{aligned} &\overline{E}_\nu^{(n+1)}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ &\quad = 2\overline{E}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) + \frac{2}{\nu+1}\frac{\partial}{\partial\omega_1}\overline{E}_{\nu+1}^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n). \end{aligned}$$

En effet, en appliquant l'opération $\mathop{\nabla}\limits_{\omega_2,\ldots,\omega_n}^{n-1}$ au second membre, on trouvera

$$(6)\qquad 2\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) + \frac{2}{\nu+1}\frac{\partial}{\partial\omega_1}\overline{E}_{\nu+1}^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

Mais

$$\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) = \omega_1^\nu \overline{E}_\nu^{(1)}\left(\frac{x}{\omega_1} \,\middle|\, 1\right).$$

Par conséquent, on aura

$$\omega_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1}\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) = \nu\,\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) - \nu x\,\overline{E}_{\nu-1}^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

L'expression (6) est donc égale à

$$2\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1) + \frac{2}{\omega_1}\overline{E}_{\nu+1}^{(1)}(x \mid \omega_1) - \frac{2x}{\omega_1}\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

En y appliquant l'opération $\mathop{\nabla}\limits_{\omega_1}$, on trouvera

$$\overline{E}_\nu^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

Par conséquent, les moyennes d'ordre n des deux membres de l'équation (5) sont égales. Comme cette équation est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 \ldots + \omega_n$, elle est donc vraie pour toutes les valeurs de x. Cela posé, considérons une somme d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, c'est-à-dire une fonction de la forme $G_{n+1}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. En développant, on trouvera, en vertu des équations (4), (3) et (5),

$$
\begin{aligned}
&G_{n+1}(x \mid \omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\
&= \mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n}^{n+1} x \\
&= \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n+1)}[\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n+1)}(-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt \\
&= 2\sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + 2\int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt \\
&+ 2\frac{\partial}{\partial \omega_1} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_{\nu+1}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{2^{\nu+1}(\nu+1)!} \varphi^{(\nu)}(x) + 2\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \omega_1} \frac{\overline{E}_m^{(n)}(-t)}{m!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.
\end{aligned}
$$

Mais on vérifie sans peine que cette équation peut s'écrire de la manière suivante :

$$
\mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n}^{n+1} x = 2 \mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n}^{n} x + 2\frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathop{\mathbf{S}} \left(\int_a^x \varphi(z)\,dz \right) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n}^{n} x.
$$

Notre somme d'ordre $n+1$ s'exprime donc linéairement par deux sommes d'ordre n. En particulier, pour $n = 1$, on trouvera

$$
(7) \qquad \mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega}^{2} x = 2 \mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x + 2\frac{\partial}{\partial \omega} \mathop{\mathbf{S}} \int_a^x \varphi(z)\,dz \mathop{\nabla}_{\omega} x.
$$

2. Pour les sommes de seconde espèce, on peut obtenir une relation semblable. Considérons d'abord la fonction génératrice des polynomes de Bernoulli (C, p. 183) :

$$
\frac{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}-1)(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).
$$

En dérivant par rapport à ω_1, on trouvera

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} \frac{\partial}{\partial \omega_1} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\
&= \frac{\omega_2 \ldots \omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t}-1)(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)} - \frac{\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n t^{n+1} e^{(x+\omega_1)t}}{(e^{\omega_1 t}-1)^2(e^{\omega_2 t}-1)\ldots(e^{\omega_n t}-1)}.
\end{aligned}
$$

Mais en développant le dernier membre suivant les puissances de t, on trouvera

$$\frac{1}{\omega_1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{t^\nu}{\nu!}[B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) - B_\nu^{(n+1)}(x+\omega_1\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)].$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de t, on obtient

$$\begin{aligned}\omega_1 \frac{\partial}{\partial\omega_1} & B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ & = B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) - B_\nu^{(n+1)}(x+\omega_1\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).\end{aligned}$$

Cette équation peut aussi s'écrire comme il suit :

$$(8)\qquad \begin{aligned} & B_\nu^{(n+1)}(x\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ & \quad = B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) - \nu\omega_1 B_{\nu-1}^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \\ & \qquad\qquad - \omega_1\frac{\partial}{\partial\omega_1}B_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).\end{aligned}$$

Un polynome de Bernoulli d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, s'exprime donc linéairement par trois polynomes d'ordre n. La somme de seconde espèce de la fonction $\varphi(x)$ se développe en série de la manière suivante (B, § 16) :

$$(9)\qquad \begin{aligned} & \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z \\ & \quad = \sum_{\nu=0}^{m+n-1}\frac{B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{\nu!}f_n^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(-t)}{(m+n-1)!}\varphi^{(m)}(x+t)\,dt,\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$f_n(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz.$$

Ici $\overline{B}_\nu^{(n)}(x)$ désigne une fonction qui satisfait à l'équation

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \overline{B}_\nu^{(n)}(x) = 0$$

et qui est, dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$, égale au polynome de Bernoulli $B_\nu^{(n)}(x)$. Cette fonction vérifie la relation suivante :

$$(10)\quad \begin{aligned}&\overline{B}_\nu^{(n+1)}(x\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\\ &\quad = \overline{B}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) - \nu\omega_1 \overline{B}_{\nu-1}^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\\ &\qquad - \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \overline{B}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).\end{aligned}$$

En effet, nous venons de voir que cette relation est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n$. Et les deux membres admettent la même différence d'ordre n. La relation est donc vraie pour toutes les valeurs de x. Cela posé, considérons la fonction

$$F_{n+1}(x\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

En développant, on trouvera

$$\begin{aligned}&F_{n+1}(x\,|\,\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\\ &\quad = \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n+1} z\\ &\quad = \sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n+1)}[\omega_1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{\nu!} f_{n+1}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n+1)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.\end{aligned}$$

Mais en tenant compte des équations (8) et (10), on peut écrire la dernière expression comme il suit :

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{\nu!} f_{n+1}^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt\\ -\omega_1 &\sum_{\nu=1}^{m+n} \frac{B_{\nu-1}^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{(\nu-1)!} f_n^{(\nu-1)}(x) - \omega_1 \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(-t)}{(m+n-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt\\ -\omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} &\sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}[\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n]}{\nu!} f_{n+1}^{(\nu)}(x) - \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.\end{aligned}$$

Nous avons ainsi établi la relation suivante :

$$\begin{aligned}\mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n+1} z &= \mathop{\mathrm{S}}_a^x \int_a^z \varphi(z)\,dz \mathop{\Delta}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n} z\\ &\quad - \omega_1 \mathop{\mathrm{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n} z - \omega_1 \frac{\partial}{\partial \omega_1} \mathop{\mathrm{S}}_a^x \int_a^z \varphi(z)\,dz \mathop{\Delta}_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}^{n} z.\end{aligned}$$

Une somme de seconde espèce et d'ordre $n+1$, ayant deux paramètres égaux, s'exprime donc linéairement par trois sommes d'ordre n. Pour $n=1$, on trouvera en particulier

$$(11)\quad \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega}^{2} z$$
$$= \mathop{\mathbf{S}}_a^x \int_a^z \varphi(z)\, dz \mathop{\Delta}_{\omega} z - \omega \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega} z - \omega \frac{\partial}{\partial\omega} \mathop{\mathbf{S}}_a^x \int_a^z \varphi(z)\, dz \mathop{\Delta}_{\omega} z.$$

3. Considérons en second lieu le cas où tous les nombres ω sont égaux. En ce cas, les polynomes d'Euler et les polynomes de Bernoulli satisfont aux relations suivantes (C, p. 186) :

$$(12)\qquad \omega E_\nu^{(n+1)}(x \mid \omega) = \frac{2}{n} E_{\nu+1}^{(n)}(x \mid \omega) - \frac{2}{n}(x - n\omega) E_\nu^{(n)}(x \mid \omega),$$

$$(13)\qquad B_\nu^{(n+1)}(x \mid \omega) = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_\nu^{(n)}(x \mid \omega) + \frac{\nu}{n}(x - n\omega) B_{\nu-1}(x \mid \omega).$$

En raisonnant comme plus haut, on vérifie que ces deux relations subsistent si l'on remplace les polynomes $E(x \mid \omega)$ et $B(x \mid \omega)$ par les fonctions $\overline{E}(x \mid \omega)$ et $\overline{B}(x \mid \omega)$. Si l'on pose $x = 0$, on trouve en particulier

$$(14)\qquad C_\nu^{(n+1)} = \frac{1}{n} C_{\nu+1}^{(n)} + 2 C_\nu^{(n)},$$

$$(15)\qquad B_\nu^{(n+1)} = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) B_\nu^{(n)} - \nu B_{\nu-1}^{(n)}.$$

Étudions les deux sommes de la fonction $\varphi(x)$:

$$G_n(x \mid \omega) = \mathbf{S}\, \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega}^{n} x,$$
$$F_n(x \mid \omega) = \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(x) \mathop{\Delta}_{\omega}^{n} x.$$

Développons, suivant les puissances de ω, la somme de première espèce et d'ordre $n+1$; en tenant compte des équations (14) et (12), on trouvera

$$\mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}} x = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n+1)} \omega^\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n+1)}(-t \mid \omega)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt$$

$$= 2 \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n)} \omega^\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x)$$

$$+ \frac{2}{n\omega} \int_0^\infty \frac{(t+n\omega)\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t \mid \omega)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt$$

$$+ \frac{2}{n\omega} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_\nu^{(n)} \omega^\nu}{2^\nu \nu!} \nu \varphi^{(\nu-1)}(x) + \frac{2}{n\omega} \int \frac{\overline{E}_m^{(}(-t \mid \omega)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.$$

Mais en intégrant par parties dans la dernière intégrale, on peut écrire cette équation comme il suit :

$$\mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}} x = 2\left(1 - \frac{x}{n\omega}\right) \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n)} \omega^\nu}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu)}(x)$$

$$+ 2\left(1 - \frac{x}{n\omega}\right) \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t \mid \omega)}{(m-1)!} \varphi^{(m}(x+t)\,dt$$

$$+ \frac{2}{n\omega} \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{C_\nu^{(n)} \omega^\nu}{2^\nu \nu!} D_x^\nu[x\varphi(x)] + \frac{2}{n\omega} \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(-t \mid \omega)}{(m-1)!} D_x^m[(x+t)\varphi(x+t)]\,dt.$$

On aura donc

$$(16) \qquad G_{n+1}(x \mid \omega) = 2\left(1 - \frac{x}{n\omega}\right) G_n(x \mid \omega) + \frac{2}{n\omega} \mathop{\mathbf{S}} x\varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} x.$$

En développant la somme de seconde espèce $F_{n+1}(x \mid \omega)$ suivant les puissances de ω et en tenant compte des équations (13) et (15), on démontre de même que

$$(17) \qquad F_{n+1}(x \mid \omega) = \frac{x - n\omega}{n} F_n(x \mid \omega) - \frac{1}{n} \mathop{\mathbf{S}}_a^x z\varphi(x) \overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} z.$$

En particulier, pour $n = 1$ on trouvera

$$\mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \overset{2}{\underset{\omega}{\nabla}} x = 2\left(1 - \frac{x}{\omega}\right) \mathop{\mathbf{S}} \varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x + \frac{2}{\omega} \mathop{\mathbf{S}} x\varphi(x) \underset{\omega}{\nabla} x,$$

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z) \overset{2}{\underset{\omega}{\nabla}} z = \mathop{\mathbf{S}}_a^x (x - z - \omega)\varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z.$$

En rapprochant ces équations des équations (7) et (11) on obtient les expressions suivantes pour les dérivées des fonctions $G(x|\omega)$ et $F(x|\omega)$ par rapport à ω :

$$\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\mathop{\mathbf{S}}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega} x=\mathop{\mathbf{S}}x\varphi'(x)\mathop{\nabla}_{\omega} x-x\mathop{\mathbf{S}}\varphi'(x)\mathop{\nabla}_{\omega} x,$$

$$\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z=\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}(z-x)\varphi'(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z+\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z-(x-a)\varphi(a)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}(z-x)\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z+\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z.$$

4. Les équations (16) et (17) permettent de déterminer les sommes d'un ordre quelconque par voie récursive. Soit par exemple $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, $\omega=1$ et posons

$$g_n(x)=\mathop{\mathbf{S}}\frac{\overset{n}{\nabla} x}{x},$$

$$\Psi_n(x)=\mathop{\mathbf{S}}_{1}^{x}\frac{\overset{n}{\Delta} x}{x}.$$

On trouvera

$$g_{n+1}(x)=2\left(1-\frac{x}{n}\right)g_n(x)+\frac{2}{n},$$

$$\Psi_{n+1}(x)=\left(\frac{x}{n}-1\right)\Psi_n(x)-\frac{B_n^{(n)}(x-1)}{n.n!}.$$

On en conclut que les transcendantes $g_n(x)$ et $\Psi_n(x)$ s'expriment par les transcendantes élémentaires $g_1(x)$ et $\Psi_1(x)$ de la manière suivante :

$$g_n(x)=2^{n-1}\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n-1}\right)g_1(x)+p(x),$$

$$\Psi_n(x)=(x-1)\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{x}{n-1}-1\right)\Psi_1(x)+q(x),$$

$p(x)$ et $q(x)$ désignant des polynomes en x.

Les relations de récurrence (16) et (17) montrent qu'une somme d'ordre n de la fonction $\varphi(x)$ peut toujours s'exprimer par une somme de premier ordre étendue sur la fonction $\varphi(x)$ multipliée par un polynome (¹). On peut arriver plus directement à ce résultat de la manière suivante. On a par définition

$$\underset{a}{\overset{x}{\mathrm{S}}} \varphi(z) \underset{\omega_1 \ldots \omega_{n+1}}{\overset{n+1}{\Delta}} z = \lim_{\eta \to 0} \left\{ \int_0^\infty \frac{\mathrm{B}_n^{(n+1)}(x-z)}{n!} \varphi(z) e^{-\eta z} dz \right.$$
$$\left. + (-1)^{n+1} \omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{n+1} \sum \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)} \right\},$$

où $\Omega = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \ldots + s_{n+1}\omega_{n+1}$. En faisant $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{n+1} = \omega$, on peut écrire la série à $n+1$ entrées, qui figure dans cette expression, comme une série simple. En effet, considérons la série

$$\sum_{s_1+s_2\ldots+s_{n+1} \leqq p} \varphi(x+s_1+s_2\ldots+s_{n+1}),$$

où la sommation est étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ qui vérifient l'inégalité $s_1 + s_2 \ldots + s_{n+1} \leqq p$. On voit aisément que la somme de cette série est égale à

$$\sum_{s=0}^{s=p} \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2.3\ldots n} \varphi(x+s).$$

On aura donc, pour toute valeur positive de η,

$$\sum \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n} \varphi(x+s\omega) e^{-\eta(x+s\omega)},$$

car dans une série absolument convergente on peut ranger les termes dans tel ordre que l'on veut. De plus on a, dans le cas actuel,

$$\mathrm{B}_n^{(n+1)}(x) = (x-\omega)(x-2\omega)\ldots(x-n\omega).$$

La fonction $\mathrm{F}_{n-1}(x\,|\,\omega)$ est donc égale à la limite, pour $\eta \to 0$, de

---

(¹) Il va sans dire qu'en général cette réduction n'a plus lieu quand les ω sont différents l'un de l'autre.

l'expression suivante :

$$\frac{1}{n!}\int_a^{\infty}(x-z-\omega)(x-z-2\omega)\ldots(x-z-n\omega)\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz$$
$$+(-1)^{n+1}\omega^{n+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{n!}\,\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)}.$$

Mais cette limite est une somme de premier ordre. On aura donc

$$\text{(18)}\qquad \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega}^{n+1} z$$
$$=\frac{1}{n!}\mathop{\mathbf{S}}_a^x(x-z-\omega)(x-z-2\omega)\ldots(x-z-n\omega)\,\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega} z.$$

C'est la formule que j'avais en vue. De même, la somme de première espèce et d'ordre $n+1$ est par définition égale à la limite, pour $\eta\to 0$, de l'expression

$$\text{(19)}\qquad 2^{n+1}\sum(-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_{n+1}}\varphi(x+\Omega)\,e^{-\eta(x+\Omega)}.$$

En réduisant cette série multiple à une série à entrée simple, on trouvera

$$\mathbf{S}\,\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega}^{n+1} x=2^{n+1}\lim_{\eta=0}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{(s+n)!}{s!\,n!}\,\varphi(x+s\omega)\,e^{-\eta(x+s\omega)},$$

mais cette équation peut s'écrire comme il suit :

$$\text{(20)}\qquad \mathbf{S}\,\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega}^{n+1} x$$
$$=\left(\frac{2}{\omega}\right)^n\frac{1}{n!}\lim_{z\to x}\mathbf{S}\,(x-z+\omega)(x-z+2\omega)\ldots(x-z+n\omega)\,\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega} x.$$

En remarquant qu'une factorielle se développe de la manière suivante :

$$(x-z+1)(x-z+2)\ldots(x-z+n)$$
$$=\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}(x+1)(x+2)\ldots(x+s)\,z(z-1)\ldots(z-n+s+1),$$

on trouvera enfin

$$\mathop{\mathbf{S}}\varphi(x)\overset{n+1}{\underset{\omega}{\nabla}}x$$
$$=\left(\frac{2}{\omega}\right)^n\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}x(x-\omega)\ldots[x-(n-s-1)\omega]\,G_{1,s}(x\mid\omega),$$

où l'on a posé

$$G_{1,s}(x\mid\omega)=\mathop{\mathbf{S}}(x+\omega)(x+2\omega)\ldots(x+s\omega)\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla}x.$$

Une somme d'ordre quelconque s'exprime donc linéairement par un nombre fini de sommes de premier ordre.

Sommation par parties.

5. On connaît le rôle que joue le procédé d'intégration par parties dans diverses questions d'analyse. Je vais montrer que, dans le calcul aux différences finies, on peut avec avantage se servir d'un procédé analogue que j'appelle *la sommation par parties*, et je vais en tirer divers développements remarquables. Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ deux fonctions qui sont holomorphes dans un certain demi-plan $\mathcal{R}(x)\geqq b$, et qui y restent, en valeur absolue, plus petites que

$$Ce^{(k+\varepsilon)|x|},$$

C et k étant des nombres positifs. Soit ω un nombre positif et plus petit que $\frac{\pi}{2k}$. Admettons, dans ce qui suit, que x reste dans le demi-plan susdit. On a, évidemment,

$$\underset{\omega}{\nabla}[\varphi(x)\psi(x)]=\psi(x)\underset{\omega}{\nabla}\varphi(x)+\frac{\omega}{2}\varphi(x+\omega)\underset{\omega}{\Delta}\psi(x). \tag{21}$$

Par conséquent,

$$\underset{\omega}{\nabla}\left[\overset{n-s-1}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\right]$$
$$=\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x+s\omega)+\frac{\omega}{2}\overset{n-s-1}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi[x+(s+1)\omega]\overset{s+1}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

Multiplions cette égalité par $(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s$ et donnons à s les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$. En ajoutant les égalités ainsi obtenues, il vient

$$\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s \underset{\omega}{\nabla}\left[\overset{n-s-1}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\right]\left(\frac{\omega}{2}\right)^s$$
$$=\psi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x)-(-1)^n\left(\frac{\omega}{2}\right)^n\varphi(x+n\omega)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

Remarquons qu'on aura (A, p. 85, p. 171),

$$\mathbf{S}\left(\underset{\omega}{\nabla}\psi(x)\right)\underset{\omega}{\nabla}x=\varphi(x)$$

et formons la somme des deux membres de l'égalité que nous venons de trouver. On obtient

$$(22)\quad \sum_{s=0}^{n-1}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s \overset{n-s-1}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)$$
$$=\mathbf{S}\,\psi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x)\underset{\omega}{\nabla}x-(-1)^n\left(\frac{\omega}{2}\right)^n\mathbf{S}\,\varphi(x+n\omega)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\underset{\omega}{\nabla}x.$$

Le calcul de la somme

$$\mathbf{S}\left(\psi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}\varphi(x)\right)\underset{\omega}{\nabla}x$$

est ainsi ramené au calcul de la somme

$$\mathbf{S}\left(\varphi(x+n\omega)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\right)\underset{\omega}{\nabla}x,$$

qui peut être plus facile. Soit par exemple à calculer la somme $\mathbf{S}\,\Psi(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\nabla x$, où $\Psi(x)$ désigne la dérivée logarithmique de la fonction $\Gamma(x)$. En posant $\psi(x)=\Psi(x)$, $\varphi(x)=x-1$ et $n=1$, on trouvera

$$\mathbf{S}\,\Psi(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\nabla x=(x-1)\Psi(x)-\frac{1}{2}\mathbf{S}\,\nabla x$$
$$=(x-1)\Psi(x)-\frac{1}{2}.$$

Posons

$$G_n(x) = \mathop{\mathbf{S}}_{\omega} \varphi(x) \overset{n}{\nabla} x$$

et remplaçons dans l'équation (22) la fonction $\varphi(x)$ par la fonction $G_n(x)$. Il vient

$$(23)\quad \mathop{\mathbf{S}}_{\omega} \varphi(x)\psi(x)\nabla x = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s G_{s+1}(x+s\omega) \mathop{\overset{s}{\Delta}}_{\omega}\psi(x) + (-1)^n \left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathop{\mathbf{S}}_{\omega} G_n(x+n\omega) \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega}\psi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x.$$

Cette formule s'applique en particulier quand la fonction $\psi(x)$ est un polynome, car en prenant n suffisamment grand la somme au second membre s'annule. Si l'on pose $\varphi(x) = 1$, il vient

$$(24)\quad \mathop{\mathbf{S}}_{\omega} \psi(x)\nabla x = \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \mathop{\overset{s}{\Delta}}_{\omega}\psi(x) + \left(-\frac{\omega}{2}\right)^n \mathop{\mathbf{S}}_{\omega} \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega}\psi(x) \mathop{\nabla}_{\omega} x.$$

Si l'on fait tendre n vers l'infini ce développement converge pourvu que ω soit suffisamment petit.

En faisant $\varphi(x) = a^x$ et $\omega = 1$, on aura

$$G_n(x) = a^x \left(\frac{2}{1+a}\right)^n.$$

Par conséquent,

$$\mathbf{S}\, a^x \psi(x) \nabla x = \frac{2a^x}{1+a} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \left(\frac{a}{1+a}\right)^s \overset{s}{\Delta}\psi(x) + (-1)^n \left(\frac{a}{1+a}\right)^n \mathbf{S}\, a^x \Delta^n \psi(x) \nabla x.$$

Soit par exemple $\psi(x) = \frac{1}{x}$, il vient

$$\mathbf{S} \frac{a^x}{x} \nabla x = 2a^{x-1} \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{a}{1+a}\right)^s \frac{s!}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

Si a est positif, ce développement converge dans tout le plan des x en exceptant les points $x = 0, -1, -2, \ldots$.

6. En partant de l'identité

$$\underset{\omega}{\nabla}[\varphi(x)\psi(x)] = \psi(x+\omega)\underset{\omega}{\nabla}\varphi(x) - \frac{\omega}{2}\varphi(x)\underset{\omega}{\Delta}\psi(x)$$

on démontre de même la relation

$$(25)\qquad \underset{\omega}{\mathbf{S}}\varphi(x)\psi(x)\nabla x = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)^s G_{s+1}(x)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi[x-(s+1)\omega] + \left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathbf{S}\, G_n(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x-n\omega)\underset{\omega}{\nabla}x.$$

Cette relation se réduit à l'équation (20) si l'on fait

$$\psi(x) = (x-z+\omega)(x-z+2\omega)\ldots[x-z+(n-1)\omega]$$

et si l'on pose $z = x$. Si $\varphi(x) = 1$, il vient

$$(26)\qquad \mathbf{S}\,\psi(x)\underset{\omega}{\nabla}x = \sum_{s=0}^{n-1}\left(\frac{\omega}{2}\right)^s \overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi[x-(s+1)\omega] + \left(\frac{\omega}{2}\right)^n \mathbf{S}\overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x-n\omega)\underset{\omega}{\nabla}x.$$

7. On peut étendre ces résultats à des sommes d'ordre quelconque. On aura par exemple le développement suivant :

$$(27)\qquad \mathbf{S}\,\varphi(x)\psi(x)\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}x = \sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^s\frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{s!}G_{s+n}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x) + R_m^{(n)},$$

où

$$R_m^{(n)} = (-1)^m\left(\frac{\omega}{2}\right)^m\sum_{s=0}^{n-1}\frac{m(m+1)\ldots(m+s-1)}{s!}\mathbf{S}\,G_{s+m}(x+m\omega)\overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}}x.$$

En effet, pour $n = 1$, cette équation se réduit à l'équation (23), et par voie d'induction on démontre aisément qu'elle est vraie pour toute valeur entière et positive de n. De l'équation (21) on déduit de même

$$\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}}[\varphi(x)\psi(x)] = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} \left(\frac{\omega}{2}\right) \overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}} \varphi(x+s\omega) \overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}} \psi(x).$$

On peut dire que l'équation (27) donne l'extension de cette équation au cas où n est un entier négatif. Et l'on peut aller plus loin et donner à n des valeurs réelles quelconques. Cette extension conduit à des résultats assez remarquables; elle est analogue à l'extension qu'ont faite Liouville et Riemann de la notion de dérivée, mais nous n'examinerons pas ce point ici.

Si l'on fait $\psi(x) = x$ dans l'équation (27), on retrouve la relation de récurrence (16). Cette relation est ainsi démontrée de nouveau, mais avec une autre hypothèse relative à la fonction $\varphi(x)$.

Remarquons enfin qu'en posant $\varphi(x) = 1$, on trouve le développement remarquable

$$(28) \quad \mathbf{S}\, \psi(x) \overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} x = \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \left(\frac{\omega}{2}\right)^s \frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{s!} \overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}} \psi(x) + R_m^{(n)}(x)$$

avec le reste

$$(29) \qquad R_m^{(n)}(x) = (-1)^m \left(\frac{\omega}{2}\right)^m \sum_{s=0}^{n-1} \binom{m+s-1}{s} \mathbf{S}\, \overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}} \psi(x) \overset{n-s}{\underset{\omega}{\nabla}} x.$$

8. Passons aux sommes de seconde espèce et rappelons d'abord qu'on a (A, p. 85)

$$\mathbf{S}_a^x \underset{\omega}{\Delta} \varphi(z) \underset{\omega}{\Delta} z = \varphi(x) - \frac{1}{\omega} \int_a^{a+\omega} \varphi(x)\, dx.$$

La différence d'un produit peut s'écrire

$$\underset{\omega}{\Delta}[\varphi(x)\psi(x)] = \varphi(x+\omega) \underset{\omega}{\Delta} \psi(x) + \psi(x) \underset{\omega}{\Delta} \varphi(x).$$

Posons comme plus haut

$$F_n(x) = \mathbf{S}_a^x \varphi(z) \overset{n}{\underset{\omega}{\Delta}} z.$$

On aura

$$\underset{\omega}{\Delta} F_n(x) = F_{n-1}(x), \qquad \underset{\omega}{\Delta} F_1(x) = \varphi(x).$$

Par conséquent,

$$\underset{\omega}{\Delta}\left[F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\right] = F_{s+1}[x+(s+1)\omega]\overset{s+1}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)$$
$$+ F_s(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

Faisons successivement $s = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ et ajoutons. Il vient

$$\underset{\omega}{\Delta}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x) = \varphi(x)\psi(x)$$
$$-(-1)^m F_m(x+m\omega)\overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

En formant la somme des deux membres de cette équation, on trouvera

$$\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\psi(z)\underset{\omega}{\Delta} z = \sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x) \tag{30}$$
$$+(-1)^m \mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x} F_m(z+m\omega)\overset{m}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(z)\underset{\omega}{\Delta} z - C,$$

C désignant une constante qui est égale à

$$C = \frac{1}{\omega}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\int_a^{a+\omega} F_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x)\,dx. \tag{31}$$

Faisons $m = 1$, il vient (¹)

$$\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x}\varphi(z)\psi(z)\underset{\omega}{\Delta} z \tag{32}$$
$$= F_1(x)\psi(x) - \mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x} F_1(z+\omega)\underset{\omega}{\Delta}\psi(z)\underset{\omega}{\Delta} z - \frac{1}{\omega}\int_a^{a+\omega} F_1(x)\psi(x)\,dx.$$

(¹) Quand ω tend vers zéro, la formule (32) se réduira à la formule d'intégration par parties.

Soit, par exemple, à calculer la somme $\overset{x}{\underset{1}{\mathrm{S}}}\Psi(z)\frac{\Delta z}{z}$, où $\Psi(z)$ désigne la dérivée de $\log\Gamma(z)$. En faisant $\psi(z)=\Psi(z)$, $\varphi(z)=\frac{1}{z}$ et $\omega=1$, on trouvera

$$\overset{x}{\underset{1}{\mathrm{S}}}\Psi(z)\frac{\Delta z}{z}=[\Psi(x)]^2-\overset{x}{\underset{1}{\mathrm{S}}}\Psi(z+1)\frac{\Delta z}{z}-\int_1^2[\Psi(x)]^2\,dx.$$

Par conséquent,

$$2\overset{x}{\underset{1}{\mathrm{S}}}\Psi(z)\frac{\Delta z}{z}=[\Psi(x)]^2+\Psi'(x)-1-\int_1^2[\Psi(x)]^2\,dx.$$

Dans le cas où $\psi(z)$ est un polynome dont le degré est plus petit que m, le second terme au second membre de l'équation (30) s'annule parce que $\Delta^m\psi(z)=0$. La constante C sera aussi égale à zéro; on le vérifie aisément en tenant compte de l'équation

$$\psi(z)=\sum_{s=0}^{m-1}\frac{(z-x)(z-x-\omega)\ldots[z-x-(s-1)\omega]}{s!}\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

On aura donc

$$\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{S}}}\varphi(z)\psi(z)\underset{\omega}{\Delta}z=\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\mathrm{F}_{s+1}(x+s\omega)\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\psi(x).$$

Transformation d'Euler.

9. L'équation (28) peut s'étendre au cas où les ω_i sont des nombres positifs quelconques. Admettons que

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)e^{-\varepsilon x}=0,$$

quelque petit que soit le nombre positif ε. Euler a fait remarquer que l'on a la relation suivante :

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\rho^s\varphi(x+s\omega)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{\rho^s\omega^s}{(1+\rho)^{s+1}}\overset{s}{\underset{\omega}{\Delta}}\varphi(x).$$

Cette équation est vraie pour toute valeur de ρ dans l'intervalle $0 < \rho < 1$. Soient maintenant $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ des nombres positifs et plus petits que 1. En appliquant n fois de suite la transformation d'Euler, on trouve

$$\sum (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} \rho_1^{s_1} \rho_2^{s_2} \ldots \rho_n^{s_n} \varphi(x + s_1\omega_1 + s_2\omega_2 \ldots + s_n\omega_n)$$
$$= \sum (-1)^{s_1+s_2\ldots+s_n} \frac{\rho_1^{s_1}\omega_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\omega_2^{s_2}\ldots\rho_n^{s_n}\omega_n^{s_n}}{(1+\rho_1)^{s_1+1}(1+\rho_2)^{s_2+1}\ldots(1+\rho_n)^{s_n+1}} \mathop{\Delta}_{\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}\cdots\omega_n^{s_n}}^{s_1+s_2\ldots+s_n} \varphi(x),$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Posons

$$\rho_i = e^{-\eta\omega_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et faisons tendre le nombre positif η vers zéro. Il vient

$$(33) \quad \mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x$$
$$= \sum (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{s_2} \ldots \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{s_n} \mathop{\Delta}_{\omega_1^{s_1}\cdots\omega_n^{s_n}}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \varphi(x),$$

pourvu que la série au second membre converge. *La limite*

$$\mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \overset{n}{\nabla} x$$

existe donc toujours quand cette série converge.

Soit en particulier $\varphi(x) = x^\nu$, ν étant un entier positif. La série se réduit à un nombre fini de termes et l'on trouve

$$\mathrm{E}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{s_1} \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{s_2} \ldots \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^{s_n} \mathop{\Delta}_{\omega_1^{s_1}\cdots\omega_n^{s_n}}^{s_1+s_2+\ldots+s_n} x^\nu,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ qui vérifient l'inégalité $s_1 + s_2 + \ldots + s_n \leqq \nu$.

On peut trouver une expression bien simple du terme complémentaire de la série (33). Pour abréger l'écriture, nous faisons $n = 2$. Considérons donc la série

$$\sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} (-1)^{s_1+s_2} \rho_1^{s_1} \rho_2^{s_2} \varphi(x + s_1\omega_1 + s_2\omega_2),$$

où $0 < \rho_1 < 1$ et $0 < \rho_2 < 1$. En multipliant et divisant cette série par $(1+\rho_1)(1+\rho_2)$, on voit qu'elle est égale à la somme des quatre expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi(x)}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)} - \frac{\rho_1\omega_1}{1+\rho_1}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\mathop{\Delta}_{\omega_1}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&\qquad - \frac{\rho_2\omega_2}{1+\rho_2}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\mathop{\Delta}_{\omega_2}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&\qquad - \frac{\rho_1\omega_1\rho_2\omega_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\mathop{\Delta}_{\omega_1\omega_2}^{2}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2).
\end{aligned}$$

Soient p et q deux entiers positifs quelconques. En effectuant cette opération pq fois, on trouve la relation suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&=\sum_{s_2=0}^{q-1}\sum_{s_1=0}^{p-1}(-1)^{s_1+s_2}\frac{\rho_1^{s_1}\omega_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\omega_2^{s_2}}{(1+\rho_1)^{s_1+1}(1+\rho_2)^{s_2+1}}\mathop{\Delta}_{\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}}^{s_1+s_2}\varphi(x)\\
&\quad+(-1)^p\frac{\rho_1^p\omega_1^p}{(1+\rho_1)^p}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\mathop{\Delta}_{\omega_1^p}^{p}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&\quad+(-1)^q\frac{\rho_2^q\omega_2^q}{(1+\rho_2)^q}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\mathop{\Delta}_{\omega_2^q}^{q}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2)\\
&\quad-(-1)^{p+q}\frac{\rho_1^p\omega_1^p\rho_2^q\omega_2^q}{(1+\rho_1)^p(1+\rho_2)^q}\sum_{s_2=0}^{\infty}\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2}\rho_1^{s_1}\rho_2^{s_2}\mathop{\Delta}_{\omega_1^p\omega_2^q}^{p+q}\varphi(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2).
\end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\rho_1 = e^{-\eta\omega_1}, \qquad \rho_2 = e^{-\eta\omega_2}$$

et faisons tendre η vers zéro. Il vient

$$\mathop{\mathrm{S}}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega_1\omega_2}^{2}x=\sum_{s_2=0}^{q-1}\sum_{s_1=0}^{p-1}(-1)^{s_1+s_2}\left(\frac{\omega_1}{2}\right)^{s_1}\left(\frac{\omega_2}{2}\right)^{s_2}\mathop{\Delta}_{\omega_1^{s_1}\omega_2^{s_2}}^{s_1+s_2}\varphi(x)+\mathop{\mathrm{S}}\mathrm{R}_{p,q}(x)\mathop{\nabla}_{\omega_1\omega_2}^{2}x,$$

où

$$R_{p,q}(x) = (-1)^p \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^p \mathop{\Delta}^{p}_{\omega_1^p} \varphi(x)$$

$$+ (-1)^q \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^q \mathop{\Delta}^{q}_{\omega_2^q} \varphi(x) - (-1)^{p+q} \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^p \left(\frac{\omega_2}{2}\right)^q \mathop{\Delta}^{p+q}_{\omega_1^p\,\omega_2^q} \varphi(x).$$

On en conclut en particulier que la limite

$$\mathop{\mathrm{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1 \ldots \omega_n} x$$

existe si la série

(34) $$\sum (-1)^{s_1+s_2+\ldots+s_n} \mathop{\Delta}^{p} \varphi(x+\Omega)$$

converge quand la valeur de p surpasse un certain nombre.

Soit par exemple $\varphi(x) = \log x$. La série (34) converge si $p \geqq 1$ (B, § 6). L'expression

$$\mathop{\mathrm{S}} \log x \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1 \ldots \omega_n} x$$

a donc un sens et l'on voit aisément que la série au second membre de l'équation (33) converge dans le cas actuel.