JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. VESSIOT

Contribution à la géométrie conforme. Cercles et surfaces cerclées

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 2 (1923), p. 99-165.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1923_9_2__99_0>

Contribution à la Géométrie conforme.
Cercles et surfaces cerclées.

Par E. VESSIOT.

Introduction et Résumé.

1. Il existe, pour l'espace à trois dimensions, une géométrie conforme (1), où l'on étudie les propriétés géométriques qui demeurent inaltérées par les transformations conformes; de même qu'il y a une géométrie euclidienne et une géométrie projective, pour lesquelles les déplacements et les transformations projectives jouent, respectivement, un rôle analogue.

Le groupe conforme, qui sert à définir cette géométrie conforme, est, comme on sait, le groupe des ∞^{10} transformations ponctuelles qui n'altèrent pas les angles; c'est aussi, comme il est connu, le groupe des transformations ponctuelles qui changent toute sphère en sphère. On trouvera, dans le premier paragraphe de cette étude, la démonstration du fait que ce groupe conforme est également le groupe de toutes les transformations (ponctuelles ou de contact) changeant tout cercle en cercle.

2. Des questions importantes de la géométrie classique, telles que la détermination des systèmes triples orthogonaux, la théorie des systèmes cycliques, la recherche des surfaces isothermiques, relèvent de la géométrie conforme; et il y aurait intérêt à les approfondir à ce point de vue. Mais cela ne sera possible que quand les principes fon-

(1) A. Demoulin l'appelle géométrie *anallagmatique* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 5 juin 1905).

damentaux de la géométrie conforme auront été établis; elle n'a été, jusqu'ici, que très peu étudiée.

Des théories élémentaires trouvent, cependant, leur expression la plus simple quand on les expose du point de vue de la géométrie conforme. La courbure normale, en un point M d'une courbe Γ, tracée sur une surface Σ, est le rayon de la sphère, tangente à Σ en M, qui a un contact du second ordre avec Γ : le théorème de Meunier se résume dans le fait que cette *sphère de courbure normale* ne dépend que de la direction de la tangente en M à Γ. La formule d'Euler, pour les courbures normales, est une conséquence immédiate du fait que les directions de tangentes, qui sont ainsi associées à chaque sphère tangente à Σ en M, sont, en vertu de la remarque précédente, celles des tangentes menées en ce point (double) à l'intersection de cette sphère et de la surface Σ.

La courbure géodésique est, de même, le rayon de la sphère, normale à Σ en M, qui a un contact du second ordre avec Γ; et il sera commode de substituer à la considération de la courbure géodésique celle de cette *sphère de courbure géodésique*. Par leur intersection, ces deux sphères de courbures, normale et géodésique, donnent le cercle de courbure de Γ, dont les éléments différentiels du second ordre sont ainsi déterminés. La détermination de la sphère osculatrice, par son angle avec la sphère de courbure normale, fournira ceux du troisième ordre.

3. Les figures géométriques élémentaires avec lesquelles on doit opérer en géométrie conforme sont, comme nous venons d'en indiquer des exemples, les sphères et les cercles. En ce qui concerne les sphères, les éléments infinitésimaux à introduire sont l'angle d'une sphère variable S avec la sphère infiniment voisine, qu'on peut appeler *variation angulaire* (infinitésimale) de la sphère S; et un autre élément qu'on peut nommer la *rotation propre* (infinitésimale) d'un couple variable de sphères orthogonales S_1, S_2. Cette rotation propre est l'angle de S_1 avec la sphère infiniment voisine de S_2; au signe près, c'est aussi l'angle de S_2 avec la sphère infiniment voisine de S_1.

Si nous reprenons l'exemple des sphères de courbures normale et géodésique d'une courbe Γ, tracée sur une surface Σ, la rotation propre de ce couple de sphères est l'angle de torsion géodésique $\Theta\,ds$; qui est, du reste, égal aussi à la variation angulaire de l'une et l'autre des deux sphères considérées (¹).

A la dénomination près que nous employons (²), ces rotations propres ont été introduites dans l'étude des familles de ∞^1 sphères, et de leurs enveloppes (³). Par une généralisation de la méthode du trièdre mobile, appliquée par Darboux à l'étude euclidienne des courbes et des surfaces, on peut associer à la sphère variable, dont on étudie l'enveloppe, un pentasphère orthogonal déterminé, c'est-à-dire un système de cinq sphères, deux à deux orthogonales. Et c'est par les rapports des rotations propres, infinitésimales, des couples de sphères orthogonales fournies par ce pentasphère que l'on définit les invariants différentiels fondamentaux de la surface enveloppe considérée (⁴).

4. Après l'étude des systèmes de ∞^1 sphères, qui se trouve ainsi achevée, du moins dans ses traits essentiels et dans le cas général, et pour préparer la théorie des courbes et des surfaces en géométrie conforme, sur laquelle je reviendrai dans d'autres articles, il était nécessaire de faire l'étude des systèmes de ∞^1 cercles. Elle a été le sujet de la thèse de M. Besserve (Paris, 1915) : il y a déterminé par un calcul direct, en suivant la méthode de Lie, les invariants différentiels de ces systèmes de cercles; il en a donné certaines interprétations géomé-

---

(¹) Demartres avait déjà observé que $\Theta\,ds$ est la variation angulaire de la sphère de courbure normale (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XXI, juillet 1897).

(²) J'indique plus loin les raisons qui m'ont fait adopter ces noms de *variation angulaire* et de *rotation propre;* et les noms correspondants de *vitesse angulaire* et de *vitesse de rotation* (propre).

(³) Le Vavasseur, *Académie des Sciences de Toulouse*, 10ᵉ série, t. I, 1901; C. Guichard, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1912; Besserve, *Thèse*, Paris, 1915.

(⁴) La méthode du pentasphère mobile a été introduite par A. Demoulin (*loco citato*). Elle est aujourd'hui classique, et n'est, du reste, qu'un cas particulier d'une méthode générale, applicable à la géométrie de n'importe quel groupe de transformations.

triques; et en a déduit les conditions d'équivalence (¹) de deux surfaces cerclées.

Il nous a paru cependant nécessaire de mettre en évidence, plus nettement et plus complètement que ne l'a fait cet auteur, les éléments géométriques fondamentaux de cette théorie; de les introduire directement; de donner aux résultats analytiques une forme simple et maniable et de pousser plus loin l'étude des surfaces cerclées. C'est ce que j'ai essayé de faire, en utilisant les coordonnées pentasphériques, ce qui permet de substituer au groupe conforme de l'espace son isomorphe, le groupe orthogonal à cinq variables, et en employant la méthode du pentasphère orthogonal variable. J'ai dû, pour abréger, me borner, essentiellement, aux cas généraux; et renoncer à donner des applications dans cet article. Je vais indiquer les idées qui m'ont guidé, et résumer les résultats que j'ai obtenus.

3. Je reprends d'abord l'étude d'un système de deux cercles A et B. Je montre que par le cercle A passent deux sphères, a et a', orthogonales entre elles, qui sont bissectrices de tout couple de sphères passant par A et coupant B sous un même angle. Deux sphères, b et b', passant par B, sont bissectrices de tout couple de sphères passant par B et coupant A sous un même angle. Chacune des sphères, a, a' est, de plus, orthogonale à l'une des sphères b, b'; par exemple, a est orthogonale à b', et a' à b. On retrouve ainsi un système de quatre sphères qui se rencontre (²) dans la recherche des cercles coupant à angle droit, en deux points, chacun des cercles donnés A et B : ces cercles, qu'on peut appeler *cercles perpendiculaires communs* à A et B, sont les cercles (a, b) et (a', b') (³).

J'introduis de plus les sphères bissectrices des couples (a, b), (a', b') : avec la sphère orthogonale commune à A et B, elles constituent un pentasphère orthogonal dont la considération met en évidence

(¹) Le mot *équivalence* signifie, en géométrie conforme, que chacune des deux figures considérées peut être déduite de l'autre par une transformation conforme.

(²) *Voir*, par exemple, E. von Weber, *Archiv der Mathematik und Physik*, 3e série, t. VII, 1904.

(³) La notation cercle (a, b) indique le cercle intersection des sphères a et b.

la symétrie interne du système des deux cercles A et B, au point de vue conforme, et montre immédiatement que chaque système A, B est, à ce même point de vue, entièrement caractérisé par les valeurs ω et ω', des angles formés par les couples de sphères (a, b), (a', b') [1]. Je donne, de plus, des formules très simples pour exprimer les angles des sphères du faisceau A avec le cercle B, et inversement [2]; ainsi que les angles que forment entre elles les sphères du faisceau A et du faisceau B, et ceux sous lesquels sont coupés les deux cercles A et B par un cercle qui les rencontre, l'un et l'autre, en deux points.

M. Kœnigs [3] a proposé une généralisation de la notion d'angle, pour le cas de deux cercles A et B qui ne se rencontrent pas; et M. E. von Weber a indiqué que cet *angle de deux cercles* s'exprime, au moyen des angles ω et ω', par la formule

$$\cos\Psi = \cos\omega \cos\omega'.$$

Je définis un autre angle Ψ_1, qu'on peut également considérer comme une généralisation de l'angle de deux cercles sécants; car $\sin^2\Psi_1$ est, comme cela a lieu pour le carré du sinus de l'angle de deux cercles qui se rencontrent, la somme (constante) des carrés des sinus des angles sous lesquels un quelconque des cercles A et B est coupé par deux sphères orthogonales passant par l'autre. On a, pour cet angle Ψ_1, que j'appelle *inclinaison relative* des deux cercles, la formule

$$\sin^2\Psi_1 = \sin^2\omega + \sin^2\omega'.$$

La différence

$$\sin^2\Psi_1 - \sin^2\Psi = \sin^2\omega . \sin^2\omega',$$

qui s'annule quand les deux cercles se rencontrent, joue, dans une certaine mesure, le rôle de plus courte distance, et pourrait s'appeler l'*écart angulaire* des deux cercles.

---

(1) *Voir* une autre démonstration de ce résultat dans l'article de M. E. von Weber, cité ci-dessus.

(2) Le mot « faisceau A » signifie le faisceau des sphères passant par le cercle A.

(3) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II, 1898. M. Kœnigs part de la représentation d'un cercle par ses coordonnées pentasphériques, analogues aux coordonnées pluckériennes de la droite.

6. L'application des considérations précédentes à un cercle C d'une surface cerclée Σ et au cercle infiniment voisin conduit aux conséquences suivantes. Pour le cercle C et le cercle voisin C', de la surface, qui tend vers C, les angles ω et ω' sont infiniment petits; il en est de même de Ψ et Ψ_1. Si l'on désigne par $d\varpi$, $d\varpi'$ les parties principales de ω et ω', celles de Ψ et Ψ_1, qui sont égales, ont pour expression commune l'*élément différentiel fondamental* $d\sigma$ défini par

$$d\sigma^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2.$$

On est ainsi conduit à poser

$$\frac{d\varpi}{d\sigma} = \cos\alpha, \qquad \frac{d\varpi'}{d\sigma'} = \sin\alpha;$$

et α est l'une des formes de l'*invariant différentiel du premier ordre* de la surface cerclée.

Le pentasphère orthogonal associé, comme il a été expliqué, au couple de cercles C et C', tend, lorsque C' tend vers C, vers un pentasphère orthogonal Π qui comprend : les deux sphères p, p' (que j'appelle *sphères centrales*), passant par C et par les positions limites des cercles perpendiculaires communs à C et C'; les deux sphères q, q' (que j'appelle *adjointes* aux sphères centrales), coupant, respectivement, les précédentes, à angle droit, le long de ces cercles perpendiculaires communs à C et au cercle infiniment voisin; enfin la sphère r (que j'appelle *sphère orthogonale*), qui est orthogonale à C et au cercle infiniment voisin. Les pieds des cercles perpendiculaires communs limites, sur C, seront les deux couples de *points centraux* (¹) de ce cercle générateur : ce sont les points où C est coupé par les sphères adjointes q et q'.

Le cercle (q, q'), qui a pour foyers les points où la sphère orthogonale r rencontre C, et que j'appelle *cercle associé* à C, sert à définir la distribution, sur C, des points où les sphères passant par C touchent la surface Σ. A cet effet, un point quelconque m de C sera défini par l'angle θ que fait, avec la sphère adjointe q, la sphère qui passe par ce

(¹) Ne pas confondre avec les points désignés ainsi par ENNEPER, et, après lui, par DEMARTRES.

point et par le cercle associé; et une sphère quelconque S du faisceau C sera définie par l'angle φ qu'elle fait avec la sphère centrale p, dont q est l'adjointe. La *formule de distribution*, qui a lieu lorsque S est tangente à Σ en m, a ainsi la forme simple

$$\tang \theta = \tang \alpha . \tang \varphi,$$

où α est l'invariant différentiel défini plus haut. En particulier, chaque sphère centrale est tangente à Σ aux points centraux correspondants.

7. L'étude de la variation infinitésimale du pentasphère Π, associé au cercle générateur C, introduit les *autres invariants fondamentaux* (qui sont du second ordre), comme étant les vitesses de rotation propre (relativement à la variable canonique σ) des couples de sphères (p, p'), (q, q'), (r, q), (r, q'). Le mode particulier de variation des pentasphères qui correspondent à des surfaces cerclées est caractérisé par le fait que les quatre vitesses de rotation des couples (p, q'), (p', q), (p, r), (p', r) sont nulles.

Pour définir cette variation, pour une surface cerclée donnée, on obtient un système différentiel, analogue au système des équations dites de Serret-Frenet, en lequel se résume toute la théorie. Les conditions d'équivalence (conforme) de deux surfaces cerclées, leur définition par des équations intrinsèques, en résultent immédiatement.

Ce *système de Serret-Frenet* appartient à une classe de systèmes de Lie que j'ai étudiés autrefois ([1]). Le groupe correspondant est, en général, le groupe linéaire orthogonal à cinq variables; il se réduit au groupe orthogonal à quatre variables, quand tous les cercles générateurs de la surface sont orthogonaux à une sphère fixe. On peut, par suite, indiquer la nature des intégrations dont dépend la détermination des surfaces cerclées définies par un système d'équations intrinsèques donné.

8. L'introduction des variables canoniques σ et θ fournit un mode de représentation invariante des points de la surface cerclée, et permet

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1909.

une étude complète de la géométrie conforme sur cette surface, étude dont je donne les premiers éléments. Employant une notation vectorielle, je représente les sphères et les points de l'espace à trois dimensions par les vecteurs d'un espace à cinq dimensions dont les composantes sont les coordonnées pentasphériques de ces sphères et de ces points. Le produit de deux vecteurs a, b est désigné par ab ou (ab); on peut différentier ces vecteurs et ces produits scalaires.

Les cinq sphères p, p', q, q', r sont ainsi représentées par cinq vecteurs, désignés par les mêmes lettres, qui sont des fonctions de σ; je suppose

$$p^2 = p'^2 = q^2 = q'^2 = r^2 = 1.$$

Un point quelconque de la surface est alors représenté par le vecteur

$$m = r - iq\sin\theta + iq'\cos\theta$$

(pour lequel $m^2 = 0$). La sphère tangente, passant par le cercle générateur C, et tangente à Σ en ce point m, est

$$v = \frac{1}{k}(p\cos\theta\sin\alpha + p'\sin\theta\cos\alpha), \qquad \text{avec} \qquad k^2 = \cos^2\theta\sin^2\alpha + \sin^2\theta\cos^2\alpha.$$

Les courbes minima sont définies par $dm^2 = 0$. Ce dm^2 est une forme quadratique invariante, qui joue un rôle analogue au ds^2 de la surface, dont elle ne diffère du reste que par un facteur : elle sert en particulier à exprimer l'angle de deux autres courbes de la surface.

Pour une courbe tracée sur la surface, la sphère de courbure normale est

$$\rho m + v, \qquad \text{avec} \qquad \rho = -\frac{dm\,dv}{dm^2}.$$

Je donne les expressions explicites des formes dm^2 et $dm\,dv$, au moyen des invariants de la surface; j'en déduis l'équation différentielle des lignes de courbure, pour lesquelles je donne aussi des formules analogues à celles d'Olinde Rodrigues.

J'étudie ensuite, d'une manière analogue, la courbure géodésique, ce qui conduit à une généralisation de la notion de ligne géodésique; et je termine par le calcul de l'élément $\Theta\,ds$, où Θ désigne la torsion géodésique, après avoir établi pour une surface quelconque, relativement à cet élément, les résultats énoncés plus haut (n° 3) (1).

I. — Le Groupe de la Géométrie des cercles.

9. Le groupe de transformations de contact de l'espace, le plus général, qui change tout cercle en cercle est le groupe (ponctuel) conforme.

Soit, en effet, T une transformation de contact changeant tout cercle en cercle : ce ne peut être qu'une transformation ponctuelle prolongée.

Supposons, en effet, le contraire; et considérons les ∞^4 cercles qui passent par un même point M de l'espace, arbitrairement choisi. Soit C l'un quelconque de ces cercles, C' son transformé par T. Deux quelconques des cercles C ayant un élément de contact commun, les cercles homologues C' ont un élément de contact commun, c'est-à-dire se rencontrent en un point M'. Mais si T n'est pas une transformation

(1) Les résultats de ce mémoire, que je possédais depuis plusieurs années, et que les circonstances ne m'avaient pas permis de publier, ont été résumés, après qu'il était écrit, dans deux notes parues aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (10 avril et 25 avril 1922).

M. Hadamard m'a alors indiqué qu'il avait, dans des énoncés d'exercices proposés dans le tome II de ses *Leçons de géométrie élémentaire* (nos **1249** à **1254**), introduit les invariants ω et ω' et le système des sphères a, b, a', b'; ce qui m'avait échappé. Ces leçons de géométrie, parues en 1901, sont antérieures à l'article de M. E. von Weber, que j'ai cité plus haut, et que j'avais seul cité dans mes deux notes. Dans les énoncés de M. Hadamard figurent la plupart des propriétés angulaires des sphères des faisceaux A et B que les formules du présent mémoire mettent en évidence; ainsi que la possibilité de la transformation de chacun des cercles A et B dans l'autre par un système de deux inversions.

J'aurais dû citer alors également une note de A. Demoulin (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 août 1921), qui, publiée pendant les vacances où j'avais commencé la rédaction de ce mémoire, m'avait échappé. L'auteur y introduit, avec une définition différente, le *pentasphère* II — [n° 7] — ; il donne une *formule de distribution;* ainsi que les équations des *sphères de courbure principales*, rapportées au pentasphère II. Un nouvel article de A. Demoulin, sur le même sujet, vient de paraître dans le *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique*, 5e série, tome 8, 1922, n° 8, p. 479.

ponctuelle, M' ne peut rester le même quand on change, d'une manière arbitraire, le couple de cercles C considéré. On pourra donc trouver trois cercles C, soient C_1, C_2, C_3, dont les transformés C'_1, C'_2, C'_3 se couperont deux à deux en trois points distincts M'_{23}, M'_{31}, M'_{12}; et un cercle C arbitraire sera changé par T en un cercle C' qui devra, de même, couper C'_1, C'_2, C'_3 en trois points distincts M'_1, M'_2, M'_3.

Mais il n'y a que ∞^3 cercles satisfaisant à cette condition; de sorte que nous concluons que la transformation T change en ∞^3 cercles seulement les ∞^4 cercles C qui passent par un point arbitraire M de l'espace. Or, on obtient tous les cercles de l'espace, et même chacun deux fois, en prenant successivement ceux qui passent par les ∞^2 points d'une sphère. En définitive, si T n'était pas une transformation ponctuelle, elle changerait les ∞^6 cercles de l'espace en ∞^5 cercles seulement.

Soit γ l'un quelconque de ces derniers. La transformation T^{-1}, inverse de T, devant redonner les ∞^6 cercles de l'espace, à partir des ∞^5 cercles γ, changerait chacun de ceux-ci en ∞^1 cercles. Or, cette singularité est inadmissible; car, d'après leur origine, les cercles γ doivent fournir, par leurs éléments de contact, tous les éléments de contact de l'espace; il existe donc, parmi ces cercles γ, des cercles qui possèdent une infinité d'éléments de contact dont aucun n'est singulier pour T^{-1}, c'est-à-dire qui, dans un domaine convenablement limité, ne donnent qu'un élément transformé. Comme un cercle est défini par trois de ses éléments de contact, on en conclut qu'un cercle γ ne peut donner, en général, par T^{-1}, qu'un cercle transformé, et non ∞^1.

Il y a donc contradiction; et il faut conclure que T est une transformation ponctuelle.

10. Ce point établi, considérons deux cercles C_1 et C_2 d'une même sphère S. Ils se coupent en deux points; il en est donc de même des cercles transformés C'_1 et C'_2, et ils définissent une sphère S'. Tout cercle de S, coupant en deux points chacun des cercles C_1 et C_2, aura pour homologue un cercle coupant C'_1 et C'_2 en deux points chacun, et qui, par suite, appartiendra à S'. Donc S' est le lieu des cercles homologues des cercles de S; et la transformée de S est S'.

Ainsi la transformation T est une transformation ponctuelle qui change toute sphère en sphère : c'est donc une transformation conforme.

Réciproquement, toute transformation conforme, changeant toute sphère en sphère, change tout cercle, intersection de deux sphères, en l'intersection des sphères homologues, c'est-à-dire en un cercle.

C'est donc le groupe conforme qui est le groupe fondamental de la géométrie cerclée.

II. — Notations et formules.

11. J'emploierai des coordonnées pentasphériques. On définit un tel système de coordonnées par un système de cinq sphères orthogonales deux à deux, ou pentasphère orthogonal. Les coordonnées d'une sphère quelconque sont alors les cinq cosinus (¹) des angles qu'elle forme avec les sphères coordonnées (coordonnées absolues), ou cinq nombres proportionnels à ces cosinus (coordonnées homogènes).

On est ainsi conduit à introduire une géométrie à cinq dimensions, et des vecteurs à cinq composantes. Nous désignerons le vecteur par une lettre minuscule, a par exemple, et ses composantes par la même lettre affectée d'indices, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Si ces composantes sont les coordonnées d'une sphère, nous l'appellerons la sphère a. Nous poserons, en général,

$$\sum_{k=1}^{5} a_k^2 = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} b_k^2 = b^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} a_k b_k = ab.$$

Si a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 sont les coordonnées absolues d'une sphère, on

---

(¹) On en précise la valeur par la formule cartésienne $\cos V = \dfrac{R^2 + R'^2 - D^2}{2RR'}$, où l'on choisit pour R et R′ des signes déterminés. Si les sphères sont réelles, et si l'on prend R et R′ positifs, cela revient à prendre pour V l'angle des normales extérieures.

a donc $a^2 = 1$. L'angle des deux sphères a et b est donné par

$$\cos V = \frac{ab}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}, \qquad \text{ou simplement} \qquad \cos V = ab,$$

suivant qu'elles sont définies par des coordonnées homogènes, ou des coordonnées absolues (¹).

L'ensemble des sphères a qui passent par un point donné, est défini par une équation linéaire homogène

$$\sum_{k=1}^{5} a_k x_k = 0, \qquad \text{ou} \qquad ax = 0,$$

dans laquelle

$$x^2 = \sum_{k=1}^{5} x_k^2 = 0.$$

Le vecteur x est donc ici l'équivalent du point. Les points sont des vecteurs de longueur nulle, si l'on veut. Les composantes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 du vecteur sont les coordonnées du point. Ce sont aussi les coordonnées de la sphère de rayon nul qui a le point en question pour centre.

Les changements de pentasphère de référence, comme les transformations conformes, se traduisent par des transformations orthogonales, opérant sur les composantes des vecteurs ci-dessus considérés. Toute invariance, en géométrie conforme, se traduit donc par une invariance algébrique, relative au groupe orthogonal à cinq variables. De là l'importance des coordonnées pentasphériques.

12. Un cercle A sera défini comme commun à deux sphères a, a'. Une sphère quelconque passant par A sera $\lambda a + \lambda' a'$, λ et λ' étant des coefficients numériques.

Si les sphères a, a' sont orthogonales, $aa' = 0$. Supposant, de plus,

(¹) Les sphères a et $-a$ diffèrent par le sens positif choisi sur la normale; la formule $\cos V = ab$ donne l'angle des directions positives des normales aux deux sphères considérées.

$a^2 = 1$, $a'^2 = 1$, nous avons en

$$a'' = a\cos\varphi + a'\sin\varphi \qquad (\text{d'où } a''^2 = 1),$$

la sphère du faisceau considéré qui fait l'angle φ avec a et l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ avec a'. Les foyers du cercle sont alors les points $a \pm ia'$.

Considérons un autre cercle, soit B, intersection des sphères, orthogonales entre elles, b et b'; et supposons $b^2 = b'^2 = 1$.

Nous allons chercher d'abord la condition de rencontre de A et B. C'est que la sphère orthogonale commune à a, a', b, b' soit de rayon nul. Les coordonnées de cette sphère sont les déterminants du tableau formé avec les coordonnées de a, a', b, b'. On a donc à écrire que la somme des carrés de ces déterminants est nulle, ce qui donne, d'après le théorème de Binet-Cauchy,

$$(1)\quad 0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & (ab) & (ab') \\ 0 & 1 & (a'b) & (a'b') \\ (ab) & (a'b) & 1 & 0 \\ (ab') & (a'b') & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (ab)^2 - (ab')^2 - (a'b)^2 - (a'b')^2 + [(ab)(a'b') - (ab')(a'b)]^2.$$

15. La formule $1 - \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$ qui lie, en coordonnées rectangulaires cartésiennes, les trois cosinus directeurs d'une droite, fournit les deux énoncés suivants :

1° *Le carré du cosinus de l'angle d'une droite avec un plan est égal à la somme des carrés des cosinus des angles de ce plan avec deux plans rectangulaires passant par la droite.*

2° *Le carré du sinus de l'angle de deux droites est égal à la somme des carrés des sinus des angles formés par l'une d'elles avec deux plans rectangulaires passant par l'autre.*

Pour le premier énoncé, la droite est Oz, les plans passant par elle sont les plans yOz et xOz, et α, β, γ définissent la normale au plan considéré, de sorte que γ est le sinus de l'angle de la droite et du plan.

Pour le second énoncé, l'une des droites est Oz, on considère encore les plans yOz et xOz passant par elle, et α, β, γ définissent la direction de la seconde droite.

Une transformation par inversion permet d'étendre l'énoncé 1° au cas de l'angle d'un cercle et d'une sphère, et l'énoncé 2° au cas de l'angle de deux cercles qui se rencontrent. Ainsi :

1° *Le carré du cosinus de l'angle d'une sphère avec un cercle est la somme des carrés des cosinus des angles de cette sphère avec deux sphères orthogonales passant par le cercle.*

2° *Le carré du sinus de l'angle de deux cercles qui se rencontrent est égal à la somme des carrés des sinus des angles formés par l'un des cercles avec deux sphères orthogonales passant par l'autre.*

Avec les notations du numéro précédent, ces énoncés donnent les formules suivantes :

1° *Angle de la sphère b avec le cercle (a, a'),*

$$\cos^2 V = (ab)^2 + (a'b)^2; \tag{2}$$

2° *Angle des deux cercles (a, a') et (b, b'),*

$$\sin^2 W = [1 - (ab)^2 - (a'b)^2] + [1 - (ab')^2 - (a'b')^2], \tag{3}$$

ou

$$\cos^2 W = (ab)^2 + (a'b)^2 + (ab')^2 + (a'b')^2 - 1. \tag{3'}$$

Si l'on tient compte de la relation (1), on peut substituer à cette dernière formule la suivante :

$$\cos W = (ab)(a'b') - (ab')(a'b). \tag{4}$$

On y arriverait directement en transformant par inversion la formule de la théorie des trièdres trirectangles, $\gamma = \alpha\beta' - \beta\alpha'$, qui donne le cosinus de l'angle d'une droite $O'x'$ avec Oz en fonction des cosinus des angles que forment les plans xOz et yOz, qui sont deux plans rectangulaires quelconques passant par Oz, avec deux plans rectangulaires quelconques passant par la droite $O'x'$ [1].

---

[1] C'est à cause de cette démonstration que nous n'avons pas laissé un double signe dans la formule (4). Il faut entendre ici que le cercle (a, a') est

14. Supposons que les sphères a, a' fassent un angle quelconque α, et que les sphères b, b' fassent un angle quelconque β; mais, pour simplifier, conservons les coordonnées absolues, de sorte que

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = \cos\alpha, \qquad bb' = \cos\beta.$$

On pourra appliquer les formules précédentes, en y remplaçant a' par $a'' = \frac{a' - a\cos\alpha}{\sin\alpha}$, et b' par $b'' = \frac{b' - b\cos\beta}{\sin\beta}$. D'où les formules générales (¹) :

$$(2') \qquad \cos^2 V \sin^2\alpha = (ab)^2 + (a'b)^2 - 2(ab)(a'b)\cos\alpha,$$

$$\begin{aligned}(3') \quad \cos^2 W \sin^2\alpha \sin^2\beta = {} & (ab)^2 + (ab')^2 + (a'b)^2 + (a'b')^2 - \sin^2\alpha\sin^2\beta \\ & - 2[(ab)(a'b) + (ab')(a'b')]\cos\alpha \\ & - 2[(ab)(ab') + (a'b)(a'b')]\cos\beta \\ & + 2[(ab)(a'b') + (ab')(a'b)]\cos\alpha\cos\beta,\end{aligned}$$

$$(4') \qquad \cos W \sin\alpha \sin\beta = (ab)(a'b') - (ab')(a'b).$$

En éliminant $\cos W$ entre les deux dernières, on aurait la condition d'intersection des deux cercles.

Enfin, si l'on employait des coordonnées homogènes, il faudrait remplacer chaque produit scalaire tel que (ab) par $\frac{ab}{\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}}$, expression du cosinus de l'angle des deux sphères a et b.

15. Nous aurons à calculer le rapport anharmonique

$$\rho = (\mathrm{PP'QQ'})$$

formé sur un cercle par les couples de points PP′, QQ′ où il est coupé par deux sphères données. Il s'obtient au moyen de l'angle Ω des sphères menées par P, P′ et Q, Q′ orthogonalement au cercle. On a,

---

supposé parcouru dans le sens qui est direct par rapport au couple des directions positives des normales aux sphères a et a'. Le cercle (a', a) en diffère par ce sens de circulation. La formule donne l'angle des tangentes positives des deux cercles (a, a'), (b, b').

(¹) α est supposé positif, de manière que le cercle (a, a'') soit orienté comme le cercle (a, a'). De même pour β.

en effet,

$$(5)\qquad \rho = \frac{\cos\Omega - 1}{\cos\Omega + 1} = -\tang^2\frac{\Omega}{2}, \qquad \cos\Omega = \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Pour arriver à ce résultat, il suffit de transformer la figure formée par le cercle et les deux sphères orthogonales, par une inversion, en prenant pour pôle le point P : le cercle devient une droite, l'une des sphères devient un plan perpendiculaire à cette droite, l'autre une sphère ayant la droite pour diamètre. En coupant par un plan passant par la droite, il reste à évaluer le rapport anharmonique formé, sur un diamètre d'un cercle, par les extrémités de ce diamètre, le pied d'une corde perpendiculaire au diamètre et le point à l'infini, en fonction de l'angle de la corde et du cercle. En prenant le cercle pour cercle trigonométrique, et le diamètre pour axe des cosinus, l'angle Ω de la corde et du cercle est l'abscisse angulaire de l'une des extrémités de la corde, et la formule $\rho = \frac{\cos\Omega - 1}{\cos\Omega + 1}$ est l'expression du rapport anharmonique des points considérés en fonction de leurs abscisses, rapportées au centre du cercle.

Remarquons que l'angle Ω a, en réalité, deux déterminations supplémentaires. La formule (5) leur fait correspondre deux valeurs ρ et $\frac{1}{\rho}$ pour le rapport anharmonique. Cela correspond au fait que rien ne permet de distinguer, dans la manière dont ils sont définis, les deux points d'un même couple.

III. — Système de deux cercles.

16. Considérons deux cercles A et B, définis respectivement par deux couples (a, a'), (b, b') de sphères orthogonales. Nous supposerons donc

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = bb' = 0.$$

Pour simplifier les discussions, et en vue de l'application aux surfaces cerclées, nous supposerons les cercles A et B réels.

Nous allons étudier les rapports de chacun de ces cercles avec les sphères passant par l'autre. Nous aurons donc à introduire des sphères variables

$$u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi,$$

passant, respectivement, par A et B (1).

D'après la formule (2), l'angle U de u avec B, et l'angle V de v avec A sont donnés par les équations

$$(6)\qquad \cos^2 U = [(ab)\cos\varphi + (a'b)\sin\varphi]^2 + [(ab')\cos\varphi + (a'b')\sin\varphi]^2,$$

$$(7)\qquad \cos^2 V = [(ab)\cos\psi + (ab')\sin\psi]^2 + [(a'b)\cos\psi + (a'b')\sin\psi]^2.$$

Nous allons les réduire à une forme canonique simple, en particularisant les couples orthogonaux de sphères, (a, a') et (b, b'), qui définissent A et B. Mais il faut d'abord écarter un cas d'exception.

En effet, la formule (6), par exemple, pourrait être indépendante de φ. Cela supposerait

$$(8)\qquad (ab)^2 + (ab')^2 = (a'b)^2 + (a'b')^2, \qquad (ab)(a'b) + (ab')(a'b') = 0.$$

Ces équations seraient vérifiées pour

$$(9)\qquad (ab) = (ab') = (a'b) = (a'b') = 0;$$

c'est-à-dire si le cercle A est l'intersection de deux sphères orthogonales à B. L'inverse a lieu en même temps; et l'on dit que les cercles sont *conjugués*. On a

$$\cos^2 U = \cos^2 V = 0,$$

c'est-à-dire que toute sphère qui passe par un des cercles est orthogonale à l'autre.

Écartons cette hypothèse (9), et interprétons les conditions (8), en supposant, par exemple, $ab \neq 0$. En posant $a'b' = \lambda ab$ dans les équations (8), elles donnent

$$a'b = -\lambda ab', \qquad a'b' = \lambda ab, \qquad (1-\lambda^2)[(ab^2 + (ab')^2] = 0.$$

Comme ab et ab', cosinus des angles de sphères réelles, sont réels,

(1) La direction positive de la normale à u en un point de A s'obtient en faisant tourner de φ la direction positive de la normale à a, autour de la tangente à A, orientée dans le sens de circulation qui correspond à la notation (a, a') pour le cercle A. De même B sera considéré comme le cercle orienté (b, b'); et ψ aura la signification analogue à celle de φ.

et $ab \neq 0$, il reste

$$\lambda = \pm 1, \qquad a'b' = \lambda ab, \qquad a'b = -\lambda ab', \tag{10}$$

et les formules (6) et (7) se réduisent simultanément à

$$\cos^2 U = \cos^2 V = (ab)^2 + (ab')^2. \tag{11}$$

Chaque sphère passant par un des cercles coupe donc l'autre sous un angle qui est toujours le même : on peut dire que les cercles sont *isogonaux* [1].

17. Écartons ces cas. Alors pour chaque valeur de U, l'équation (6) définit, en interprétant φ comme abscisse sur le cercle trigonométrique, les directions de deux diamètres de ce cercle, dont les bissectrices sont indépendantes de U. Cela veut dire qu'il existe deux sphères orthogonales, passant par A, sur lesquelles sont également inclinées deux sphères quelconques du faisceau A coupant B sous un même angle. Nous les appellerons les *sphères centrales* (*du couple* A, B) *relatives à* A.

Il y a de même un couple de *sphères centrales relatives à* B, bissectrices de chaque couple de sphères du faisceau B coupant A sous un même angle.

Nous pouvons, dès lors, supposer qu'on a défini A et B par leurs sphères centrales, qui seront donc les sphères a, a', b, b'.

Dans ces conditions, les termes en $\sin\varphi\cos\varphi$ et $\sin\psi\cos\psi$ disparaissent des formules (6) et (7); c'est-à-dire que l'on a

$$(ab)(a'b) + (ab')(a'b') = 0, \qquad (ab)(ab') + (a'b)(a'b') = 0.$$

On en conclut que si l'on n'avait pas l'un au moins des systèmes de relations

$$(ab') = (a'b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (ab) = (a'b') = 0, \tag{12}$$

[1] On vérifie sur les conditions (10) que ce cas est celui où il existe deux droites isotropes contenant chacune un foyer de chacun des cercles. Les équations (9) expriment que les foyers de A et les foyers de B sont sommets opposés d'un quadrilatère formé par quatre droites isotropes; ou encore que chaque cercle passe par les foyers de l'autre.

on aurait

$$(ab)^2-(a'b')^2=0 \qquad \text{et} \qquad (ab')^2-(a'b)^2=0;$$

mais alors on retomberait sur le cas des cercles isogonaux.

Donc nous concluons à l'un des systèmes (12); et comme on peut échanger les notations a, a' et b, b', nous pouvons supposer

$$ab'=a'b=0. \tag{13}$$

Alors les quatre sphères centrales, dans l'ordre circulaire a, a', b, b' sont telles que deux sphères consécutives quelconques sont orthogonales. Nous appellerons ω et ω' les angles des sphères opposées [1]

$$\cos\omega=ab, \qquad \cos\omega'=a'b'. \tag{14}$$

Les relations (6) et (7) prennent ainsi la forme annoncée

$$\cos^2 U=\cos^2\omega\cos^2\varphi+\cos^2\omega'\sin^2\varphi, \tag{6'}$$

$$\cos^2 V=\cos^2\omega\cos^2\psi+\cos^2\omega'\sin^2\psi, \tag{7'}$$

qui est, de plus, identique pour les deux relations, ce qui révèle une sorte de symétrie interne ou de réciprocité, dans le système des deux cercles. A égalité d'inclinaison sur les sphères centrales de A et de B, deux sphères passant par A et B (respectivement) coupent B et A (respectivement) sous le même angle.

On peut aussi écrire ces relations sous la forme

$$\sin^2 U=\sin^2\omega\cos^2\varphi+\sin^2\omega'\sin^2\varphi, \tag{6''}$$

$$\sin^2 V=\sin^2\omega\cos^2\psi+\sin^2\omega'\sin^2\psi. \tag{7''}$$

18. On vérifiera sans peine que ces formules [avec les conditions (13) et les notations (14)] peuvent être obtenues d'une infinité de manières dans le cas des cercles isogonaux ($\cos^2\omega=\cos^2\omega'$), et des cercles conjugués ($\cos\omega=\cos\omega'=0$). Dans le premier cas, il suffit, ayant choisi arbitrairement le couple (a, a'), de déterminer le couple (b, b') par la condition $(a'b)=0$. Dans le second cas, les couples (a, a') et (b, b') demeurent entièrement arbitraires.

---

(1) Nous pourrons supposer $\cos\omega$ et $\cos\omega'$ positifs, en choisissant convenablement les signes de a, b, a', b'.

Remarquons, d'autre part, que la condition (1), exprimant que les deux cercles se rencontrent, devient ici

$$\cos^2\omega + \cos^2\omega' - 1 = (\cos\omega \cos\omega')^2,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\omega \sin^2\omega' = 0.$$

Elle consiste donc dans le contact de deux sphères centrales, opposées, (a et b) ou (a' et b'). Ces sphères centrales sont donc alors les sphères qui passent par chacun des cercles et sont tangentes à l'autre au point commun. Si elles sont confondues, les deux cercles sont bisécants. Les cercles sont tangents, si toute sphère passant par l'un est tangente à l'autre, c'est-à-dire si l'on a, à la fois,

$$\sin\omega = \sin\omega' = 0.$$

19. Pour simplifier, j'écarterai dorénavant tout cas d'intersection, et je vais indiquer quelques conséquences des formules précédentes.

La formule (6″) montre que $\sin^2\omega$ et $\sin^2\omega'$ ne peuvent être négatifs tous les deux, car il y a toujours des sphères u qui rencontrent B.

Si l'un est positif et l'autre négatif, il y a deux sphères menées par A qui sont tangentes à B; elles sont données par

$$\operatorname{tang}\varphi = \pm i \frac{\sin\omega}{\sin\omega'};$$

de sorte que, si l'on désigne leur angle par δ, on a, en valeurs absolues,

$$\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = i \frac{\sin\omega}{\sin\omega'}. \tag{15}$$

On voit qu'il y a en même temps deux sphères tangentes à A, menées par B, dont l'angle a la même valeur δ. On pourra appeler cet angle δ le *diamètre angulaire relatif* des deux cercles; il tend vers zéro ou π, si les deux cercles tendent à se couper.

Ce cas est celui où les deux cercles ne sont pas *engagés* l'un dans l'autre : des deux couples de sphères centrales opposées, il y a un couple de sphères qui se coupent et un couple de sphères qui ne se coupent pas ([1]).

Si $\sin^2\omega$ et $\sin^2\omega'$ sont positifs tous deux, les formules montrent que toute sphère passant par l'un des cercles coupe l'autre; c'est le cas où les cercles sont engagés l'un dans l'autre; les couples de sphères centrales opposées sont deux couples de sphères qui se rencontrent ([2]).

Dans ce cas l'angle aigu sous lequel une sphère passant par l'un des cercles coupe l'autre varie entre les limites extrêmes ω et ω', sans jamais s'annuler; tandis que quand les cercles ne sont pas engagés l'un dans l'autre, il varie entre zéro et celle des valeurs ω et ω' qui est réelle.

Cet angle ne peut devenir droit, par conséquent, que si l'un des angles ω, ω' est droit. Supposons, par exemple, $\cos\omega' = 0$. Il vient

$$\cos^2 U = \cos^2\omega \cos^2\varphi,$$

ou, au signe près,

$$\cos U = \cos\omega \cos\varphi, \qquad \cos V = \cos\omega \cos\psi;$$

de sorte qu'il y a une sphère et une seule passant par un quelconque des deux cercles et coupant l'autre à angle droit; et c'est celle des sphères centrales qui coupe à angle droit la sphère centrale opposée. Les cercles sont dits alors en *involution :* ils peuvent, du reste, être engagés l'un dans l'autre, ou ne pas l'être ([3]).

20. L'angle χ des deux sphères u et v est donné par

$$\cos\chi = uv = (a\cos\varphi + a'\sin\varphi)(b\cos\psi + b'\sin\psi),$$

([1]) On peut alors supposer $0 < \omega \leqq \frac{\pi}{2}$ et $\omega' = ih$, avec $h > 0$.

([2]) On peut alors supposer $0 < \omega \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 < \omega' \leqq \frac{\pi}{2}$.

([3]) Je n'insiste pas sur d'autres conséquences évidentes. Par exemple, deux sphères orthogonales passant par A coupent B sous deux angles U et U' tels que

$$\cos^2 U + \cos^2 U' = \cos^2\omega + \cos^2\omega' = \text{const.}$$

J'aurai à y revenir.

qui, en tenant compte de (13) et (14), devient

$$(16)\qquad \cos\chi = \cos\omega\cos\varphi\cos\psi + \cos\omega'\sin\varphi\sin\psi.$$

Enfin, les angles respectifs W_A et W_B du cercle (u, v) avec A et B sont donnés par la formule (4'), de sorte que l'on a

$$\sin\chi\cos W_A = (au)(a'v) - (av)(a'u),$$
$$\sin\chi\cos W_B = (bu)(b'v) - (bv)(b'u),$$

ce qui devient, avec les valeurs (13) et (14),

$$(17)\qquad \sin\chi\cos W_A = -\cos\omega\sin\varphi\cos\psi + \cos\omega'\cos\varphi\sin\psi,$$
$$(18)\qquad \sin\chi\cos W_B = \cos\omega\cos\varphi\sin\psi - \cos\omega'\sin\varphi\cos\psi.$$

Nous remarquerons que ces formules deviennent, en prenant, par exemple, les signes + dans les premiers membres,

$$(19)\qquad \cos W_A = -\frac{\partial\chi}{\partial\varphi},\qquad \cos W_B = \frac{\partial\chi}{\partial\psi}.$$

Les maxima et minima de χ se produiront donc pour les cercles (u, v) coupant à angle droit chacun des cercles donnés : nous les appellerons les *cercles perpendiculaires communs*.

Les combinaisons

$$\sin\chi(\cos W_A + \cos W_B) = (\cos\omega + \cos\omega')\sin(\psi - \varphi),$$
$$\sin\chi(\cos W_A - \cos W_B) = (\cos\omega' - \cos\omega)\sin(\psi + \varphi)$$

montrent que, si l'on écarte le cas des cercles isogonaux, il y a deux cercles perpendiculaires communs, donnés par

$$\varphi, \psi = 0 \text{ ou } \pi,\qquad \varphi, \psi = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2}.$$

Ce sont donc les cercles (a, b) et (a', b'), cercles d'intersection des sphères centrales opposées. Comme nous l'avons vu, un seul est réel, le cercle (a, b) par exemple, si les cercles A et B ne sont pas engagés l'un dans l'autre; ils sont réels tous deux, dans le cas contraire : les valeurs de χ qui leur correspondent sont, comme il était évident, ω et ω' [1].

---

[1] Nous considérons ici χ comme l'angle aigu des deux sphères, abstraction faite de tout choix de directions positives sur les normales à ces sphères.

Il n'y a, du reste, de véritable minimum pour χ que dans le second cas, et pour la plus petite des valeurs ω, ω'. L'angle χ peut toujours devenir droit, et peut toujours s'annuler dans le premier cas. Dans le second cas il reste toujours supérieur à la plus petite des valeurs ω, ω'.

21. Lorsque deux cercles A et B sont conjugués, tout cercle (u, v) qui rencontre l'un et l'autre en deux points est divisé par ces points harmoniquement. Pour vérifier ce résultat connu, qui justifie le nom de *conjugué* donné à deux tels cercles, il suffit de remarquer que si l'on a, conformément aux notations adoptées dans cette étude,

$$u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi,$$

les sphères

$$u' = a\sin\varphi - a'\cos\varphi, \qquad v' = b\sin\psi - b'\cos\psi$$

sont alors les sphères orthogonales à (u, v) menées par les points où ce cercle est rencontré par chacun des cercles A et B. Et comme ces sphères u' et v' sont orthogonales, la propriété résulte de la formule (5), qui donne $\rho = -1$, pour $\cos\Omega = 0$.

Les cercles perpendiculaires communs à A et B, qui sont (a, b) et (a', b'), étant conjugués en vertu des relations

$$aa' = ab' = ba' = bb' = 0,$$

déterminent donc deux divisions harmoniques sur A et B.

Considérons inversement les divisions déterminées par A et B sur chacun des cercles perpendiculaires. La sphère a' est orthogonale à (a, b), et passe par les points communs à (a, b) et (a, a'); la sphère b' est orthogonale à (a, b) et passe par les points communs à (a, b) et (b, b'). Donc, d'après la formule (5), le rapport anharmonique des deux couples déterminés sur (a, b) par A et B est

$$\frac{(a'b') - 1}{(a'b') + 1} = \frac{\cos\omega' - 1}{\cos\omega' + 1} = -\operatorname{tang}^2\frac{\omega'}{2}.$$

De même, le rapport anharmonique des deux couples déterminés par A et B sur (a', b') est égal à $-\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}$. Ces résultats ont été indiqués déjà par M. E. von Weber, sans démonstration.

22. Au système des deux cercles A, B, on peut associer un pentasphère orthogonal déterminé : il est formé par les sphères bissectrices des sphères centrales qui se coupent suivant chacun des cercles perpendiculaires communs,

$$(20)\quad p = \frac{a+b}{2\cos\frac{\omega}{2}}, \qquad q = \frac{a-b}{2\sin\frac{\omega}{2}}, \qquad p' = \frac{a'+b'}{2\cos\frac{\omega'}{2}}, \qquad q' = \frac{a'-b'}{2\sin\frac{\omega'}{2}},$$

auxquelles on associe la sphère orthogonale commune (¹) aux deux cercles A et B.

Si A et B sont engagés l'un dans l'autre, p, q, p', q' sont réelles et la sphère orthogonale commune est imaginaire (centre réel, carré du rayon négatif).

Si A et B ne sont pas engagés l'un dans l'autre, la sphère orthogonale commune est réelle, mais l'un des cercles perpendiculaires communs, le cercle (a', b') par exemple, est imaginaire, et des deux sphères p' et q', la sphère p' est seule réelle.

Si l'on se donne le tétrasphère orthogonal p, q, p', q', et les angles ω et ω' associés aux cercles opposés (conjugués) $(p, q)(p', q')$, on a, pour les cercles donnés (a, a'), (b, b'), les formules

$$(21)\quad \begin{cases} a = p\cos\frac{\omega}{2} + q\sin\frac{\omega}{2}, & a' = p'\cos\frac{\omega'}{2} + q'\sin\frac{\omega'}{2}, \\ b = p\cos\frac{\omega}{2} - q\sin\frac{\omega}{2}, & b' = p'\cos\frac{\omega'}{2} + q'\sin\frac{\omega'}{2}. \end{cases}$$

Si l'on change ω en $\omega + 2k\pi$, cela ne peut faire que changer le signe des vecteurs a et b.

Si l'on change ω en $\pi - \omega$, cela revient à échanger p et q, en changeant le signe de b. Mais le changement de p en q, sans changement des autres sphères du tétrasphère, peut s'obtenir par une transformation conforme.

On peut donc conclure que deux systèmes de deux cercles A, B,

---

(¹) C'est la sphère qui passe par les quatre foyers des deux cercles. Elle n'est de rayon nul que si les cercles ont un point commun. Elle n'est indéterminée que si les cercles sont sur une même sphère; les foyers sont alors sur un même cercle. Si ce cercle est de rayon nul, les cercles donnés sont tangents.

pour lesquels $\cos^2\omega$ et $\cos^2\omega'$ ont les mêmes valeurs, peuvent se transformer l'un en l'autre par une transformation conforme. En effet, on pourra toujours transformer l'un dans l'autre, au moyen d'une transformation conforme appropriée, les pentasphères orthogonaux qui leur sont respectivement associés, de manière à transformer l'un dans l'autre les couples de sphères qui correspondent à l'angle ω, et ceux qui correspondent à l'angle ω'.

L'un et l'autre système de cercles sera alors représenté par les mêmes formules (21); et la seule ambiguïté qui peut y subsister dans le choix des déterminations de ω et ω' ne peut donner que des systèmes de cercles réductibles l'un à l'autre, d'après ce qui précède, par une nouvelle transformation conforme [1].

Remarquons encore qu'un système de deux cercles est à lui-même son homologue pour les transformations conformes qui correspondent à un nombre pair de changements de signes, simultanés, de p, q, p', q' : suivant les cas, chacun des cercles sera à lui-même son homologue, ou bien chaque cercle sera l'homologue de l'autre [2].

Le changement de p en $-p$, par exemple (sans changement des autres sphères du système), s'obtient par une *symétrie* relative à la sphère p; c'est-à-dire par l'inversion qui laisse invariant chaque point de p. Cette inversion devient une symétrie, au sens euclidien du mot, si la sphère p se trouve être un plan.

D'autre part, deux symétries successives par rapport à deux sphères orthogonales fournissent une transformation conforme qu'on peut considérer aussi, par voie de généralisation, comme la *symétrie par rapport au cercle* commun à ces deux sphères. On dira donc que le système des cercles A et B reste invariant par les symétries effectuées par rapport à chacun des six cercles d'intersection des quatre sphères

---

(1) Le fait que l'égalité des valeurs de $\cos^2\omega$ et $\cos^2\omega'$ est suffisante pour l'*équivalence* des deux systèmes de cercles (en géométrie conforme) résulte de ce qu'un système de deux cercles a deux invariants indépendants, et deux seulement, pour lesquels on peut évidemment choisir $\cos^2\omega$ et $\cos^2\omega'$ (*voir* Besserve, *Thèse*). Une démonstration directe, différente de la précédente, a été donnée par E. von Weber.

(2) L'existence de ce second cas explique ce que nous avons indiqué plus haut, sous le nom de *symétrie interne* du système (n° **17**).

p, q, p', q' du pentasphère orthogonal considéré. Les symétries par rapport aux cercles perpendiculaires communs à A et B, cercles (p, q) et (p', q'), laissent invariant chacun des cercles A et B; les quatre autres échangent entre eux ces deux cercles.

Relativement à la symétrie par rapport à un cercle C, j'observe en passant qu'on peut la définir directement : deux points M et M′ sont symétriques par rapport à C, s'ils appartiennent à la fois à deux cercles perpendiculaires à C. Ou encore : soient D, D′ les extrémités du diamètre de C qui contient la projection orthogonale de M sur le plan de C; M′ est le conjugué harmonique de M, par rapport à D et D′, sur le cercle MDD′.

On peut définir d'une manière analogue la *symétrie conforme par rapport à un couple de points*, qui est la généralisation de la symétrie euclidienne par rapport à *un* point. Deux points M et M′ sont symétriques par rapport au couple I, J, s'ils sont sur un cercle passant en I et J, et s'ils sont conjugués harmoniques de I et J sur ce cercle. On remarquera que si M et M′ sont symétriques par rapport à I et J, inversement I et J sont aussi symétriques par rapport au couple M, M′.

Les trois espèces de symétrie conforme ainsi introduites donnent lieu à des théorèmes analogues aux théorèmes élémentaires classiques relatifs aux trois espèces de symétrie euclidienne, dont les symétries conformes sont la généralisation immédiate.

23. A la configuration formée par les cercles A et B, les sphères centrales, et le pentasphère orthogonal que nous avons associé à ces cercles, on peut encore adjoindre les sphères

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{ll} a_0 = -p\sin\frac{\omega}{2} + q\cos\frac{\omega}{2}, & a'_0 = -p'\sin\frac{\omega'}{2} + q'\cos\frac{\omega'}{2}, \\ b_0 = -p\sin\frac{\omega}{2} + q\cos\frac{\omega}{2}, & b'_0 = -p'\sin\frac{\omega'}{2} - q'\cos\frac{\omega'}{2}, \end{array}\right.$$

menées, par chacun des cercles perpendiculaires communs, normalement aux sphères centrales a, b, a', b', respectivement.

Les cercles (a_0, a'_0), (b_0, b'_0), que nous désignerons par A_0, B_0, sont respectivement conjugués à A et B. Ils sont définis par cette propriété, jointe à la condition, qu'ils remplissent évidemment, d'être orthogonaux à la sphère orthogonale commune à A et B. Il y a réciprocité entre le système A, B et le système A_0, B_0. Partant du même tétrasphère p, q, p', q', on passe de l'un à l'autre en changeant les angles ω et ω', qui correspondent au premier, en $\pi+\omega$ et $\pi+\omega'$.

Voici quel est le rôle de ces cercles A_0, B_0, pour le système donné A, B. Les sphères du faisceau A_0 déterminent sur A la même involution que les sphères du faisceau B; et, de même, les sphères du faisceau B_0 déterminent sur B la même involution que les sphères du faisceau A (¹).

D'une manière plus précise, les sphères

$$(23) \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi, \qquad v_0 = a_0\sin\omega\cos\psi + a'_0\sin\omega'\sin\psi$$

coupent A aux mêmes points. Cela résulte de l'identité

$$a\cos\omega\cos\psi + a'\cos\omega'\sin\psi = v + v_0,$$

dont la vérification est immédiate.

Si donc on introduit l'angle ψ_0 de v_0 avec a_0, la sphère v_0 se représente par

$$(24) \qquad \bar{v}_0 = a_0\cos\psi_0 + a'_0\sin\psi_0,$$

et l'on a la relation

$$(25) \qquad \operatorname{tang}\psi_0 = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega}\operatorname{tang}\psi.$$

Les considérations du nº 13 permettront de calculer, en fonction des angles ψ et ψ' relatifs à deux sphères v et v' du faisceau B, le rapport anharmonique des couples de points qu'elles déterminent sur A. Il suffira de se servir de la formule (5), $\rho = \frac{\cos\Omega - 1}{\cos\Omega + 1}$, Ω étant l'angle des deux sphères v_0 et v'_0, du faisceau A_0, qui sont associées à v et v' par la loi donnée par les formules (23). Remarquons que l'on

(¹) Le cercle A_0 a pour foyers les points doubles de l'involution déterminée sur A par le faisceau B; ces points doubles sont, du reste, les points où A est coupé par la sphère orthogonale commune à A et B. Les foyers de B_0 se définissent de même.

a, d'après (23) et (6''),

$$v_0^2 = \sin^2\omega \cos^2\psi + \sin^2\omega' \sin^2\psi = \sin^2 V,$$

V étant l'angle sous lequel v coupe A; et nous aurons

$$(26) \qquad \cos\Omega = \frac{\sin^2\omega \cos\psi \cos\psi' + \sin^2\omega' \sin\psi \sin\psi'}{\sin V \sin V'},$$

formule dont le numérateur se déduit de $\sin^2 V$ par la formation polaire.

En particulier, les deux couples de points de A, déterminés par v et v', seront harmoniques, si l'on a

$$(27) \qquad \sin^2\omega \cos\psi \cos\psi' + \sin^2\omega' \sin\psi \sin\psi' = 0.$$

On peut vérifier ainsi que les sphères centrales relatives à B $\left(\psi = 0,\ \psi' = \frac{\pi}{2}\right)$ déterminent sur A une division harmonique. Ce n'est qu'une autre manière d'énoncer le résultat donné au n° **21** sur les cercles perpendiculaires communs.

Nous venons d'examiner l'involution déterminée sur A par le faisceau B. De même, pour l'involution déterminée par le faisceau A sur B, on devra associer les sphères

$$(27) \qquad u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad u_0 = b_0 \sin\omega \cos\varphi + b'_0 \sin\omega' \sin\varphi.$$

La seconde étant écrite

$$(28) \qquad \overline{u}_0 = b_0 \cos\varphi_0 + b'_0 \sin\varphi_0,$$

on aura la formule

$$(29) \qquad \operatorname{tang}\varphi_0 = \frac{\sin\omega'}{\sin\omega} \operatorname{tang}\varphi.$$

Enfin, l'angle Ω de deux sphères u_0, u'_0 sera donné par

$$(30) \qquad \cos\Omega = \frac{\sin^2\omega \cos\varphi \cos\varphi' + \sin^2\omega' \sin\varphi \sin\varphi'}{\sin U \sin U'},$$

où $\sin^2 U = u_0^2$, $\sin^2 U' = u_0'^2$ introduisent les angles des sphères u et u' avec le cercle B.

Je remarquerai enfin que les formules (25) et (29) font intervenir le *diamètre angulaire relatif* δ des deux cercles, introduit au n° **25**. Elles s'écrivent en effet, en tenant compte de (15),

$$(31) \qquad \operatorname{tang}\varphi = -i \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\operatorname{tang}\varphi_0, \qquad \operatorname{tang}\psi = -i\operatorname{tang}\frac{\delta}{2}\operatorname{tang}\psi_0.$$

24. Au lieu des invariants ω et ω', on peut faire intervenir des combinaisons symétriques de ces invariants. Elle se présentent d'elles-mêmes, si l'on cherche à étendre la notion d'*angle de deux cercles* à deux cercles A et B non sécants.

Le plus naturel est de s'adresser aux formules (4) et (3), établies dans le cas de deux cercles sécants.

Si l'on utilise la formule (4), on obtient la définition proposée par M. Kœnigs, et justifiée par son analogie avec la formule qui donne, en géométrie euclidienne, le cosinus de l'angle de deux directions. Cette analogie apparaît si l'on introduit les coordonnées des deux cercles, qui sont les déterminants des tableaux (matrices)

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & a'_5 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 & b'_5 \end{Vmatrix},$$

formés avec les coordonnées pentasphériques des cercles. Si l'on suppose, comme nous l'avons fait,

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = bb' = 0,$$

ces coordonnées A_k, B_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$) satisfont aux conditions

$$\sum_k A_k^2 = 1, \qquad \sum_k B_k^2 = 1,$$

et l'on a

$$\sum A_k B_k = (ab)(a'b') - (a'b)(ab').$$

Si donc on définit un angle σ par la condition

$$(32) \qquad \cos\Psi = (ab)(a'b') - (ab')(a'b),$$

cela équivaudra à le définir par la formule

$$\cos\Psi = \sum_{k=1}^{10} A_k B_k \qquad \left(\text{avec} \sum_{k=1}^{10} A_k^2 = \sum_{k=1}^{10} B_k^2 = 1\right);$$

ce qui met en évidence l'analogie en question.

A notre point de vue, il importe de remarquer que le second membre de la formule (32) conserve, au signe près, la même valeur, quand on change les systèmes orthogonaux a, a'; b, b' qui définissent les deux cercles A, B. Cela se vérifie le plus simplement en utilisant les formules du nº **10**. Soient les deux couples orthogonaux quelconques

$$(33) \qquad u = a\cos\varphi + a'\sin\varphi, \qquad u' = -a\sin\varphi + a'\cos\varphi,$$

$$(34) \qquad v = b\cos\psi + b'\sin\psi, \qquad v' = -b\sin\psi + b'\cos\psi,$$

en supposant maintenant les conditions (13) et les notations (14). Il viendra

$$(uv)(u'v') - (uv')(u'v) = \cos\omega\cos\omega',$$

et la formule (32), où a, a', b, b' auront été remplacés par u, v, u', v', deviendra

$$(35) \qquad \cos\Psi = \cos\omega\cos\omega'.$$

Remarquons que $\cos\omega$ et $\cos\omega'$ ne sont définis qu'au signe près, de sorte qu'il serait plus correct de poser seulement

$$\cos\Psi = \pm\cos\omega\cos\omega'.$$

En résumé, étant donnés deux cercles A et B, on peut définir le cosinus de leur angle par la différence des produits en croix formés avec les cosinus des angles que forment deux sphères orthogonales quelconques passant par A avec deux sphères orthogonales quelconques passant par B; car cette différence est constante (au signe près) pour tous les couples de sphères orthogonales en question. Et il équivaut au même de dire que le cosinus de l'angle à définir est égal au produit des cosinus des angles suivant lesquels se coupent les couples de sphères centrales ayant pour intersections respectives les cercles perpendiculaires communs à A et B.

25. Passant à la formule (3), nous remarquons que, pour des cercles A, B non sécants, le second membre est encore la somme des carrés des sinus des angles formés par l'un des cercles avec deux sphères orthogonales passant par l'autre.

Pour deux couples (33) et (34) quelconques, cette somme est, d'après les formules (6″) et (7″), suivant le rôle attribué aux deux cercles,

$$\sin^2 U + \sin^2 U' = \sin^2\omega + \sin^2\omega', \qquad \sin^2 V + \sin^2 V' = \sin^2\omega + \sin^2\omega'.$$

Elle ne dépend donc pas des arbitraires qui figurent dans sa formation, rôle des cercles, choix des couples de sphères orthogonales.

On peut donc définir comme angle des deux cercles, à cet autre point de vue, l'angle Ψ_1 dont le carré du sinus est égal à la somme constante en question, ce qui revient à poser

$$(36) \qquad \sin^2\Psi_1 = \sin^2\omega + \sin^2\omega',$$

formule où interviennent de nouveau les angles ω et ω' des sphères centrales. Ce n'est naturellement que la formule plus générale (3)

$$(37) \qquad \sin^2\Psi_1 = 2 - (ab)^2 - (ab')^2 - (a'b')^2 - (a'b')^2$$

(relative à deux couples orthogonaux quelconques), appliquée aux couples des sphères centrales.

Nous réserverons le nom d'*angle des deux cercles* à l'angle Ψ, introduit par M. Kœnigs, et nous donnerons à l'angle Ψ_1, que nous venons de définir, celui d'*inclinaison relative des deux cercles* (1).

---

(1) Si les cercles sont en involution, on a

$$\omega' = \frac{\pi}{2}, \quad \cos\Psi = 0, \quad \sin^2\Psi_1 = 1 + \sin^2\omega \quad \text{ou} \quad \cos^2\Psi_2 = -\sin^2\omega.$$

On peut alors, par une inversion, transformer en droites un des cercles donnés et un des cercles perpendiculaires communs. Le système A, B est alors formé d'un cercle et d'une droite passant par son centre; et ω est l'*inclinaison* de la droite sur le plan du cercle. Donc Ψ_1 caractérise alors cette inclinaison, ce qui explique la dénomination adoptée.

26. Quand on définit les cercles par leurs coordonnées, on est conduit à introduire un autre élément. C'est, en gardant les notations précédentes, le carré de la matrice formée avec les coordonnées des quatre sphères a, a', b, b', satisfaisant toujours à

$$a^2 = a'^2 = b^2 = b'^2 = 1, \qquad aa' = bb' = 0.$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 & a'_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 & b'_5 \end{array} \right\|.$$

Pour l'évaluer au moyen des coordonnées des deux cercles, il faut représenter celles-ci avec deux indices :

$$A_{ij} = a_i a'_j - a_j a'_i, \qquad B_{ij} = b_i b'_j - b_j b'_i.$$

On est amené à introduire ainsi les cinq formes

$$A_{ij} A_{kl} + A_{ik} A_{lj} + A_{il} A_{jk} = \Omega_h,$$

où h, i, j, k, l sont des indices différents. L'élément en question est la somme des carrés des polaires de ces cinq formes, c'est-à-dire ([1])

$$\text{(38)} \qquad E^4 = \sum_h \left\{ \sum_s B_s \frac{\partial \Omega_h}{\partial A_s} \right\}^2.$$

Le carré de la matrice en question est donné, avec nos notations, par la formule (1), d'où résultent les formules

$$\text{(39)} \qquad E^4 = \cos^2\Psi - \cos^2\Psi_1 = \sin^2\Psi_1 - \sin^2\Psi = \sin^2\omega \sin^2\omega',$$

dès que l'on tient compte de (32), (37), (35), (36).

([1]) Cette forme doublement quadratique a été introduite par M. Kœnigs pour exprimer la condition d'intersection des deux cercles ($E^4 = 0$). Il faut observer que, dans nos notations, $\Sigma A_s^2 = \Sigma B_s^2 = 1$: la formule (38) définit, par suite, l'élément que E. von Weber désigne par la lettre H. L'expression de $\cos\Psi$ est désignée par J dans son article. M. Besserve s'est servi, d'après Darboux, des expressions de ces deux éléments en fonction des distances mutuelles des foyers des deux cercles.

Comme la condition $E = 0$ est celle qui exprime que les cercles se rencontrent, nous dirons que E est l'*écart angulaire* des deux cercles.

On peut enfin chercher la relation entre les éléments que nous venons de définir et le diamètre angulaire relatif défini au n° **19** par la formule

$$\operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = i\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}.$$

On a

$$\cos\delta = \frac{\sin^2\omega' + \sin^2\omega}{\sin^2\omega' - \sin^2\omega}, \qquad \sin\delta = \frac{2i\sin^2\omega\sin^2\omega'}{\sin^2\omega' - \sin^2\omega}, \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{2i\sin^2\omega\sin^2\omega'}{\sin^2\omega' + \sin^2\omega},$$

d'où

$$(40) \qquad \operatorname{tang}^2\delta = -\frac{4E^4}{\sin^4\Psi_1}.$$

IV. — Application aux surfaces cerclées. Éléments géométriques associés ou cercle générateur.

27. Nous allons appliquer les résultats précédents à deux cercles infiniment voisins d'une surface cerclée Σ. Le cercle générateur C est défini, initialement, par deux sphères, c et c', que nous pouvons supposer orthogonales; les coordonnées c_k, c'_k de ces sphères étant fonctions d'un paramètre t. Nous allons leur substituer un autre couple orthogonal variable

$$(41) \qquad g = c\cos\gamma + c'\sin\gamma, \qquad g' = -c\sin\gamma + c'\cos\gamma,$$

choisi de manière à simplifier les calculs ultérieurs. Il est entendu que nous supposons

$$c^2 = c'^2 = 1, \qquad cc' = 0;$$

de sorte que nous aurons aussi

$$g^2 = g'^2 = 1, \qquad gg' = 0.$$

La condition que nous imposons au couple (41) est que chaque sphère de ce couple soit orthogonale au cercle caractéristique de l'autre, c'est-à-dire que l'on ait

$$(42) \qquad g\,dg' = g'\,dg = 0.$$

L'identité $g\,dg' + g'\,dg = 0$, qui résulte de $gg' = 0$, indique que cette double condition se réduit à une seule, qui est

$$g[-\sin\gamma\,dc + \cos\gamma\,dc' - g\,d\gamma] = 0,$$

ou, à cause de $c\,dc = c'\,dc' = 0$, $c\,dc' = -c'\,dc$,

$$(43) \qquad \begin{cases} d\gamma = c\,dc' = -c'\,dc = \frac{1}{2}(c\,dc' - c'\,dc) = \rho\,dt \\ \text{avec} \\ \rho = c\frac{dc'}{dt} = -c'\frac{dc}{dt}. \end{cases}$$

La détermination de γ dépend donc d'une quadrature, et γ est défini à une constante additive près.

Remarquons l'interprétation suivante. L'angle de la sphère c avec la sphère $c' + \Delta c'$ est de la forme $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, avec $\sin\varepsilon = c(c' + \Delta c')$. Donc $\rho = c\frac{dc'}{dt} = \lim\frac{\varepsilon}{\Delta t}$ mesure l'un des éléments de la variation du couple (c, c'); il est égal et de signe contraire à celui que l'on obtient en changeant le rôle des deux sphères. C'est ce que l'on appellera la *vitesse de rotation* (conforme) du couple [1]. Cette vitesse est réduite à zéro pour les couples (g, g'), ci-dessus déterminés.

On peut observer que $c(c' + \Delta c')$ est aussi le cosinus de l'angle du cercle (c, c') avec le cercle $(c', c' + \Delta c')$, intersection de la sphère c' et de la sphère voisine $c' + \Delta c'$.

28. Cherchons l'*angle du cercle* C *avec le cercle infiniment voisin* (nº **24**). Il est donné par la formule (32), c'est-à-dire par

$$(44) \quad \cos\Psi = [g(g + \Delta g)][g'(g' + \Delta g')] - [g(g' + \Delta g')][g'(g + \Delta g)].$$

---

[1] On devrait dire *vitesse de rotation propre*. Dans le cas d'un couple de plans rectangulaires, en géométrie euclidienne, c'est la projection de la vitesse de rotation instantanée sur l'arête du dièdre formé par ces deux plans.

Or, à cause de

$$(g+\Delta g)^2=1 \qquad \text{ou} \qquad 2g\,\Delta g-\overline{\Delta g}^2=0,$$

ceci se réduit à

$$\cos\Psi=1-\frac{1}{2}(\Delta g^2+\Delta g'^2)+\ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre infinitésimal supérieur, puisque $g\,\Delta g'$, $g'\,\Delta g$ sont d'ordre supérieur au premier, à cause des conditions (42). On aura donc, pour la partie principale de σ^2, l'expression $dg^2+dg'^2$. Nous introduirons donc l'élément fondamental $d\sigma$ défini par

$$d\sigma^2=dg^2+dg'^2, \tag{45}$$

qui fournit l'angle de C avec le cercle infiniment voisin, et définit, par intégration, ce que l'on peut appeler la *distance angulaire* de deux cercles C, mesurée sur la surface Σ.

Opérons de même pour l'*inclinaison relative du cercle* C *et du cercle infiniment voisin* (n° **25**). La formule (37) donne ici

$$\begin{aligned}\sin^2\Psi_1=2-[g(g+\Delta g)]^2-[g'(g'+\Delta g')]^2\\ -[g(g'+\Delta g')]^2-[g'(g+\Delta g)]^2,\end{aligned} \tag{46}$$

ou, en réduisant aux termes d'ordre infinitésimal moindre,

$$\sin^2\Psi_1=\overline{\Delta g}^2+\overline{\Delta g'}^2+\ldots.$$

Donc l'inclinaison cherchée est encore $dg^2+dg'^2$; de sorte que les deux extensions, au cas de cercles non sécants, de la notion d'angle conduisent ici au même élément infinitésimal.

29. Passons à l'*écart angulaire du cercle* C *et du cercle infiniment voisin* (n° **26**) donné par la formule (39). Les termes du second degré se détruisant, d'après ce qui précède, il faut conserver dans les formules (44) et (46) les termes de degré supérieur. Il vient ainsi, en tenant compte de

$$(g+\Delta g)(g'+\Delta g')=0, \qquad \text{d'où} \qquad g\,\Delta g'+g'\,\Delta g=-\Delta g\,\Delta g',$$

et n'écrivant que l'ensemble des termes d'ordre moindre,

$$E^4 = \overline{\Delta g}^2\, \overline{\Delta g'}^2 - (\Delta g\, \Delta g')^2 + \ldots .$$

Donc l'écart angulaire E des deux cercles infiniment voisins considérés est du premier ordre et sa partie principale est égale à l'élément $d\eta$ défini par la formule

$$(47) \qquad d\eta^4 = dg^2\, dg'^2 - (dg\, dg')^2.$$

Un calcul facile, que j'omets, donne, pour $d\sigma$ et $d\eta$, exprimés au moyen des coordonnées d'un couple quelconque c, c' de sphères orthogonales passant par le cercle variable C, les formules générales

$$(48) \qquad d\sigma^2 = dc^2 + dc'^2 - 2\,d\gamma^2,$$

$$(49) \qquad \begin{aligned} d\eta^4 &= dc^2\, dc'^2 - (dc\, dc')^2 - (dc^2 + dc'^2)\, d\gamma^2 + d\gamma^4 \\ &= (dc^2 - d\gamma^2)(dc'^2 - d\gamma^2) - (dc\, dc')^2, \end{aligned}$$

ce qui conduit à introduire la combinaison simple, indépendante de $d\gamma$,

$$(50) \qquad d\tau^4 = d\sigma^4 - 4\,d\eta^4 = (dc^2 - dc'^2)^2 + 4(dc\, dc')^2.$$

Remarquons que les termes dg^2, dg'^2, dc^2, dc'^2 sont susceptibles d'une interprétation géométrique simple bien connue : dg^2, par exemple, est le carré de l'angle de la sphère g avec la sphère infiniment voisine. Car l'angle ε de g et $g + \Delta g$ est donné par

$$2(1 - \cos\varepsilon) = \varepsilon^2 + \ldots = 2[1 - g(g + \Delta g)] = -2g\,\Delta g = \overline{\Delta g}^2,$$

ce qui montre que le carré de la partie principale de ε^2 est dg^2.

Le quotient $\frac{dg^2}{dt^2} = \left[\lim \frac{\varepsilon}{\Delta t}\right]^2$ est le carré de ce que l'on peut appeler la *vitesse angulaire* (conforme) de la sphère g considérée (1).

30. Le *diamètre angulaire relatif du cercle* C *et du cercle infiniment voisin* a une valeur finie. D'après la formule (40) on a, en

(1) En géométrie euclidienne, la sphère étant remplacée par un plan, c'est la vitesse de rotation instantanée du plan autour de sa caractéristique.

effet, pour cette limite δ,

$$\tang^2\delta = -\frac{4\,d\eta^4}{d\sigma^4}, \tag{51}$$

d'où

$$\cos^2\delta = \frac{d\sigma^4}{d\sigma^4 - 4\,d\eta^4} = \frac{d\sigma^4}{d\tau^4}, \tag{52}$$

équation où intervient l'expression $d\tau^4$ signalée plus haut.

On obtient ainsi un invariant différentiel du premier ordre des surfaces cerclées, et l'on sait que tout autre est une fonction de celui-là. Le plus simple, dans nos notations, serait $\frac{d\sigma}{d\eta}$, que l'on peut considérer comme l'analogue du *paramètre de distribution* des surfaces réglées, puisque $d\sigma$ joue le rôle d'angle, et $d\eta$ le rôle de distance de deux cercles générateurs infiniment voisins (¹).

51. Considérons enfin les angles ω et ω' formés par les sphères centrales relatives à un cercle C et à un cercle voisin C'. Lorsque ce dernier tend vers le premier, ω et ω' tendent vers zéro; car on a, d'après les formules données aux nᵒˢ **15** et **16**,

$$\sin^2\omega + \sin^2\omega' = \sin^2\theta, \qquad \sin^2\omega' - \sin^2\omega = \frac{1}{\cos\delta}\sin^2\theta_1.$$

Ces formules donnent immédiatement les parties principales $d\varpi$ et $d\varpi'$ des angles ω et ω'

$$d\varpi^2 = \left(1 - \frac{1}{\cos\delta}\right)\frac{1}{2}\,d\sigma^2, \qquad d\varpi'^2 = \left(1 + \frac{1}{\cos\delta}\right)\frac{1}{2}\,d\sigma^2, \tag{53}$$

δ étant défini par les formules (51) ou (52).

(¹) *Voir* la Thèse de M. Besserve, qui donne (p. 48) des formules équivalentes à (51) et (52). Il introduit l'angle δ comme angle des sphères passant par C dont les points de contact avec la surface sont confondues (*sphères fondamentales*). Il indique aussi l'analogie de $\frac{d\sigma}{d\eta}$ avec le *paramètre de distribution* que nous signalons ici, mais avec une définition très indirecte de l'élément qui joue le rôle de distance (p. 44).

Pour établir la concordance de nos formules avec celles de M. Besserve, introduisons les coordonnées pentasphériques des foyers (x, y, z), (x', y', z') du

On en conclut encore les relations

$$(54)\qquad d\sigma^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2, \qquad d\eta^2 = d\varpi\, d\varpi', \qquad d\tau^4 = d\sigma^4 - 4d\eta^4 = (d\varpi^2 - d\varpi'^2)^2$$

entre $d\varpi$ et $d\varpi'$ et les éléments invariants précédemment introduits.

En vertu des formules (45) et (47), on voit que $d\varpi^2$ et $d\varpi'^2$ sont les deux racines de l'équation en s

$$(55)\qquad (s - dg^2)(s - dg'^2) - (dg\, dg')^2 = 0,$$

---

cercle C :

$$f_1 = x,\quad f_2 = y,\quad f_3 = z,\quad f_4 = \frac{x^2+y^2+z^2-1}{2},\quad f_5 = \frac{x^2+y^2+z^2+1}{2i};$$

$$f'_1 = x',\quad f'_2 = y',\quad f'_3 = z',\quad f'_4 = \frac{x'^2+y'^2+z'^2-1}{2},\quad f'_5 = \frac{x'^2+y'^2+z'^2+1}{2i}.$$

On a

$$ff' = 2R^2,$$

R étant le rayon du cercle; et l'on peut appliquer nos formules avec

$$c = \frac{f+f'}{2R}, \qquad c' = \frac{f-f'}{2iR}.$$

On trouve

$$dc^2 + dc'^2 = \frac{df\, df'}{R^2} - 2\frac{dR^2}{R^3}, \qquad dc^2 - dc'^2 = \frac{df^2 + df'^2}{2R^2}, \qquad dc\, dc' = \frac{df^2 - df'^2}{4iR^2}$$

et

$$d\gamma = c\, dc' = \frac{f'df - f\,df'}{4iR^2} = \frac{P + P'}{4iR^2},$$

$$P = (x'-x)\,dx + (y'-y)\,dy + (z'-z)\,dz,$$

$$P' = (x'-x)\,dx' + (y'-y)\,dy' + (z'-z)\,dz'.$$

On a ainsi

$$(\alpha)\qquad d\sigma^2 = \frac{df\,df'}{R^2} + \frac{PP'}{2R^4}, \qquad d\tau^4 = d\sigma^4 - 4d\eta^4 = \frac{df^2\,df'^2}{R^4},$$

et l'on doit remarquer que $df\,df'$, df^2, df'^2 se réduisent à

$$df^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad df'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2,$$

$$df\,df' = dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz'.$$

Les seconds membres des formules (α) sont ainsi identiques aux quantités $\Delta_1^2\, dt^2$, $\Delta^4 dt^4$ de M. Besserve. D'après la formule (52), $\frac{d\sigma}{d\tau}$ est l'invariant I_0 de M. Besserve.

ou, si l'on revient à c et c',

$$(s + d\gamma^2 - dc^2)(s + d\gamma^2 - dc'^2) - (dc\, dc')^2 = 0. \tag{55 bis}$$

Ces éléments $d\varpi$ et $d\varpi'$ vont jouer dans la suite un rôle important.

32. Nous allons chercher maintenant ce que deviennent, lorsque le cercle C′ de la surface tend vers C, les sphères centrales relatives au couple (C, C′) et le pentasphère orthogonal associé à ce couple.

Les sphères centrales

$$\begin{aligned} a &= g\cos\varphi_1 + g'\sin\varphi_1, & b &= (g+\Delta g)\cos\psi_1 + (g'+\Delta g')\sin\psi_1,\\ a' &= -g\sin\varphi_1 + g'\cos\varphi_1, & b' &= -(g+\Delta g)\sin\psi_1 + (g'+\Delta g')\cos\psi_1 \end{aligned}$$

sont définies (nº **17**) par les conditions $ab' = a'b = 0$, qui, combinées par addition et soustraction, donnent les équations

$$\begin{gathered} (2 + g\,\Delta g + g'\Delta g')\sin(\varphi_1 - \psi_1) + (g\,\Delta g' - g'\Delta g)\cos(\varphi_1 - \psi_1) = 0,\\ (g'\Delta g' - g\,\Delta g)\sin(\varphi_1 + \psi_1) + (g\,\Delta g' + g'\Delta g)\cos(\varphi_1 + \psi_1) = 0. \end{gathered}$$

La première montre que $\varphi_1 - \psi_1$ est infiniment petit; c'est même un infiniment petit du troisième ordre au moins par rapport à l'accroissement Δt du paramètre qui fait passer de C à C′. Car on a

$$g\,dg' = g'\,dg = 0,$$

et l'on en déduit

$$g\,d^2g' = -dg\,dg' = g'\,d^2g.$$

Nous transformons la seconde en tenant compte des identités

$$2g\,\Delta g = -\overline{\Delta g}^2, \qquad 2g'\,\Delta g' = -\overline{\Delta g'}^2,$$

déjà utilisées, et de l'identité

$$g\,\Delta g' + g'\Delta g = -\Delta g\,\Delta g',$$

qui résulte de

$$(g+\Delta g)(g'+\Delta g') = 0.$$

Il vient ainsi

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 + \psi_1) = \frac{2\,\Delta g\,\Delta g'}{\overline{\Delta g}^2 - \overline{\Delta g'}^2};$$

et l'on conclut (¹) que φ_1 et ψ_1 tendent vers une limite commune Φ, donnée par

$$\text{tang}\, 2\Phi = \frac{2\,dg\,dg'}{dg^2 - dg'^2}. \tag{56}$$

Les sphères centrales a et b tendent donc vers la même sphère limite, qui, d'après les formules (20), est aussi limite pour la sphère p du pentasphère associé au couple; nous la désignerons par cette même lettre p. Nous désignerons de même par p' la sphère vers laquelle tendent a', b' et la sphère p' du pentasphère. Nous posons donc ici

$$p = g\cos\Phi + g'\sin\Phi, \qquad p' = -g\sin\Phi + g'\cos\Phi, \tag{57}$$

Pour trouver ce que deviennent les cercles perpendiculaires communs (p, q), (p', q'), il suffira de chercher ce que deviennent q et q', données par les formules (20). On a, par exemple,

$$\frac{b-a}{2\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\Delta g}{2\sin\frac{\omega}{2}}\cos\psi_1 + \frac{\Delta g}{2\sin\frac{\omega}{2}}\sin\psi_1,$$

d'où l'on conclut immédiatement, à la limite,

$$-q = \frac{dg}{d\varpi}\cos\Phi + \frac{dg'}{d\varpi}\sin\Phi.$$

On aura pour q' une formule toute semblable. Nous introduirons les valeurs opposées, de sorte que nous aurons, pour limite des deux sphères q, q',

$$q = \frac{dg}{d\varpi}\cos\Phi + \frac{dg'}{d\varpi}\sin\Phi, \qquad q' = -\frac{dg}{d\varpi'}\sin\Phi + \frac{dg'}{d\varpi'}\cos\Phi. \tag{58}$$

Quant à la cinquième sphère du pentasphère considéré, qui est la sphère orthogonale commune aux quatre autres, elle tend vers la sphère orthogonale commune aux sphères (57), (58), ou, plus simplement, aux sphères g, g', dg, dg' : on peut dire que cette dernière sphère est la sphère orthogonale à C et au cercle infiniment voisin.

(¹) Comme il a été dit [nº 4], nous ne considérons que les cas généraux; nous écartons donc ici le cas d'indétermination où $dg\,dg'$ et $dg^2 - dg'^2$ seraient nuls tous deux

33. *En résumé*, nous trouvons deux cercles Γ et Γ' perpendiculaires communs au cercle C et au cercle infiniment voisin; nous les appellerons les *cercles centraux de* C; les points I et J, I' et J' où ils coupent C seront les deux couples de *points centraux* ([1]). Nous appellerons *sphères centrales* de C les sphères p et p' qui passent respectivement par C et Γ, et par C et Γ'. Nous appellerons *sphères adjointes* les sphères q et q' qui, passant respectivement par Γ et Γ', sont respectivement orthogonales aux sphères centrales p et p' (passant par Γ, et par Γ'). Enfin nous appellerons *sphère orthogonale* de C la sphère orthogonale à C et au cercle infiniment voisin.

Les deux sphères centrales, les deux sphères adjointes et la sphère orthogonale constituent, d'après ce qui précède, un *pentasphère orthogonal associé à* C, qui est entièrement déterminé.

On a introduit précédemment les sphères menées par C et tangentes au cercle voisin C'; elles ont, comme nous l'avons vu, pour bissectrices les sphères centrales relatives à C. A la limite ces sphères tangentes deviennent ce qu'on a appelé *sphères fondamentales* ([2]).

Les sphères que nous appelons « sphères centrales » sont donc bissectrices de ces sphères fondamentales et forment avec elles les angles $\pm \frac{\delta}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \pm \frac{\delta}{2}$.

34. Les formules (22) montrent que le cercle q, q', défini par (38), c'est-à-dire le cercle dg, dg', est la position limite commune C_0 des cercles A_0 et B_0, considérés au n° **25**, si l'on assimile C au cercle A considéré alors, et C' au cercle B ([3]). Nous dirons que C_0 est le *cercle associé à* C.

Reprenons les notations de ce n° **25**, et considérons la sphère u passant par C et qui fait l'angle φ avec la sphère centrale a. Imaginons en même temps la sphère u_0 qui coupe C' orthogonalement aux points

([1]) Ne pas confondre avec les points introduits sous ce nom par Enneper et Demartres.

([2]) BESSERVE, *Thèse*, p. 48.

([3]) Ce cercle C_0 est celui qui a pour foyers les points où la *sphère orthogonale* de C coupe C. Les cercles C et C_0 sont, évidemment, conjugués.

m et m', où C′ est rencontré par u : elle fait avec b_0 l'angle φ_0 donné par la formule (29).

Supposons, par exemple, φ constant : m et m' se déplacent lorsque Δt tend vers zéro, sur la courbe d'intersection (autre que C) de u avec la surface cerclée, et tendent vers les points μ et μ' où cette courbe coupe C.

Ce sont les points de contact de u avec la surface. Ils sont donc situés sur la sphère passant par C_0 et faisant avec q (limite de b_0) l'angle φ_0 qu'on obtient en passant à la limite dans la formule (29), c'est-à-dire qui est donné par

$$\tang\varphi_0 = \frac{d\varpi'}{d\varpi}\tang\varphi. \tag{59}$$

Remarquons que, d'après (15), on a

$$\tang\frac{\delta}{2} = i\frac{d\varpi}{d\varpi'}, \tag{15 bis}$$

de sorte que cette formule (59) peut aussi s'écrire [comparez (31)]

$$\tang\varphi = -i\tang\frac{\delta}{2}\tang\varphi_0. \tag{59 bis}$$

On a ainsi une forme tout à fait précise de la *loi de variation des sphères, passant par* C, *et tangentes à la surface aux divers points de* C. Si l'on se donne, par exemple, le point de contact μ, on cherchera l'angle φ_0 que fait avec la sphère adjointe q la sphère qui passe par C_0 et μ; et la formule (59 *bis*) donnera l'angle φ que fait la sphère tangente cherchée avec la sphère centrale p.

On remarquera l'analogie de la formule (59) avec la *formule de Chasles*, relative aux surfaces réglées. On voit qu'à ce point de vue c'est $\frac{d\varpi'}{d\varpi}$ qui joue le rôle de paramètre de distribution.

En particulier, $\varphi_0 = k\pi$ entraîne $\varphi_0 = k'\pi$, c'est-à-dire que les points centraux relatifs à la sphère centrale p considérée sont les points de contact de cette sphère.

Si l'on fait $\varphi = \pm\frac{\delta}{2}$ dans (59 *bis*), on trouve $\tang\varphi_0 = \pm i$, ce qui indique que le point de contact d'une sphère fondamentale est sur la sphère de rayon nul $q \pm iq'$, c'est-à-dire est en un des foyers F, F' du cercle C_0, comme on devait s'y attendre (*voir* note (¹), p. 125). Ces foyers sont, en d'autres termes, les points doubles de l'involution des couples de points de contact des sphères du faisceau C.

Remarquons encore que φ_0, comme φ, varie de $\frac{\pi}{2}$ quand on passe d'une sphère centrale à l'autre.

Nous avons défini la loi de variation en nous servant de la sphère centrale p; il est clair que des considérations toutes semblables s'appliquent à la sphère centrale p' et à son adjointe q'.

54 *bis*. Je signale encore la formule qui donne l'angle d'une sphère quelconque du faisceau C avec le cercle infiniment voisin C'. On la déduit immédiatement de la formule (6''); en ne gardant que les parties principales des deux membres, et désignant par dU celle de l'angle considéré, on obtient immédiatement

$$dU^2 = \cos^2\varphi \, d\varpi^2 + \sin^2\varphi \, d\varpi'^2. \tag{60}$$

De là une interprétation nouvelle de $d\varpi$ et $d\varpi'$ qu'on obtient en faisant successivement $\varphi = 0$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Ce sont les angles des deux sphères centrales de C avec le cercle C', infiniment voisin de C sur la surface.

Remarquons enfin que, pour deux sphères du faisceau C, orthogonales entre elles, on a

$$dU^2 + dU'^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2 = d\sigma^2, \tag{54 bis}$$

ce qui donne une définition, très générale et très simple, de l'élément $d\sigma$.

V. — Les invariants des surfaces cerclées.

55. La génération de la surface cerclée Σ est maintenant ramenée au mouvement (dans l'espace conforme) du pentasphère orthogonal Π que nous avons associé au cercle générateur C : sphères centrales p et p', sphères adjointes q et q', sphère orthogonale. Nous désignerons par r cette dernière. Prenons comme paramètre-temps l'élément invariant σ, défini (¹) par

$$d\sigma^2 = dg^2 + dg'^2 = dc^2 + dc'^2 - \frac{1}{2}(c\,dc' - c'\,dc)^2;$$

et les invariants fondamentaux, dont l'expression en fonction de σ définira la surface Σ et toutes celles qui lui sont homologues par les transformations du groupe conforme, seront les *vitesses de rotation* (conformes) (n° **27**) des divers couples de sphères du pentasphère II.

Calculons ces rotations. La différentiation des équations (57) donne, en tenant compte des formules (58),

$$(61)\qquad dp = p'\,d\Phi + q\,d\varpi, \qquad dp' = -p\,d\Phi + q'\,d\varpi'.$$

On en conclut

$$(62)\quad p'\,dp = -p\,dp' = d\Phi, \qquad q\,dp = -p\,dq = d\varpi, \qquad q'\,dp' = -p'\,dq' = d\varpi',$$

$$(63)\quad p\,dq' = p'\,dq = q\,dp' = q'\,dp = p\,dr = p'\,dr = r\,dp = r'\,dp = 0.$$

Les éléments invariants $d\varpi$, $d\varpi'$ sont les racines de l'équation (55) ou (55 *bis*). L'angle Φ est donné par la formule (56). De sa définition géométrique (angle de la sphère centrale p avec la sphère g) résulte qu'il augmente d'une constante γ_0 si l'on substitue au couple g, g', pour définir le cercle, un autre couple à vitesse de rotation nulle; car deux tels couples font un angle constant γ_0. On pouvait donc prévoir l'invariance de $d\Phi$. On a, du reste,

$$(64)\quad d\tau^2\,d\Phi = (dg\,d^2g' + dg'\,d^2g)\cos 2\Phi - (dg\,d^2g - dg'\,d^2g')\sin 2\Phi$$

avec

$$d\tau^2 \cos 2\Phi = dg^2 - dg'^2, \qquad d\tau^2 \sin 2\Phi = 2\,dg\,dg',$$
$$d\tau^4 = (dg^2 - dg'^2)^2 + 4(dg\,dg')^2.$$

36. Dans le calcul des autres vitesses de rotation, j'emploierai la notation δ, pour indiquer la différentiation d'une fonction de t et de Φ, dans laquelle Φ est laissé constant. On a ainsi, d'après (58),

$$\delta p = \cos\Phi\,dg + \sin\Phi\,dg' = q\,d\varpi, \qquad \delta p' = -\sin\Phi\,dg + \cos\Phi\,dg' = q'\,d\varpi'.$$

(¹) Ceci exclut la classe des surfaces cerclées pour lesquelles $dg^2 + dg'^2$ est nul.

A cause de $qq' = 0$, on en conclut

$$\delta p\, d\,\delta p' - \delta p'\, d\,\delta p = (q\, dp' - q'\, dq)\, d\varpi\, d\varpi'.$$

On a, d'autre part,

$$d\,\delta p = \delta^2 p + \delta p'\, d\Phi, \qquad d\,\delta p' = \delta^2 p' - \delta p\, d\Phi,$$
$$\delta p^2 + \delta p'^2 = dg^2 + dg'^2 = d\sigma^2.$$

Par suite,

$$(q\, dq' - q'\, dq)\, d\varpi\, d\varpi' = (\delta p\, \delta^2 p' - \delta p'\, \delta^2 p) - d\sigma^2\, d\Phi;$$
$$= (dg\, d^2 g' - dg'\, d^2 g) - d\sigma^2\, d\Phi;$$

d'où la formule

$$(65)\quad q'\, dq = -q\, dq' = \frac{1}{2}(q'\, dq - q\, dq') = \frac{d\sigma^2\, d\Phi - (dg\, d^2 g' - dg'\, d^2 g)}{2\, d\varpi\, d\varpi'}.$$

37. Le vecteur r a pour composantes les déterminants formés avec le tableau des coefficients de p, p', q, q', ce que nous écrivons symboliquement

$$(66)\qquad r = \| p \quad p' \quad q \quad q' \|.$$

On a donc

$$r\, dq = | p \quad p' \quad q \quad q' \quad dq |, \qquad r\, dq' = | p \quad p' \quad q \quad q' \quad dq' |,$$

les seconds membres de ces formules désignant les déterminants dont les colonnes seraient les composantes des vecteurs indiqués successivement entre les deux barres. On a, avec les notations précédentes,

$$q = \frac{\delta p}{d\varpi}, \qquad q' = \frac{\delta p'}{d\varpi'}, \qquad dq = \frac{1}{d\varpi}(\delta^2 p + \delta p'\, d\Phi) + d\frac{1}{\varpi}\delta p,$$
$$dq' = \frac{1}{d\varpi'}(\delta^2 p' - \delta p\, d\Phi) + d\frac{1}{\varpi}\delta p',$$

de sorte qu'il vient

$$r\, dq\, d\varpi\, d\varpi' = \frac{1}{d\varpi} | p \quad p' \quad \delta p \quad \delta p' \quad \delta^2 p |,$$

$$r\, dq'\, d\varpi\, d\varpi' = \frac{1}{d\varpi'} | p \quad p' \quad \delta p \quad \delta p' \quad \delta^2 p' |;$$

d'où, en posant

$$(67)\quad dG^4 = | g \quad g' \quad dg \quad dg' \quad d^2 g |, \qquad dG'^4 = | g \quad g' \quad dg \quad dg' \quad d^2 g' |,$$

les formules

$$(68)\quad \begin{cases} r\,dq = \dfrac{1}{d\varpi\, d\varpi'}\left(\dfrac{dG^4}{d\varpi}\cos\Phi + \dfrac{dG'^4}{d\varpi}\sin\Phi\right), \\ r\,dq' = \dfrac{1}{d\varpi\, d\varpi'}\left(-\dfrac{dG^4}{d\varpi'}\sin\Phi + \dfrac{dG'^4}{d\varpi'}\cos\Phi\right). \end{cases}$$

38. On peut se proposer de calculer, en fonction de c et c' (sphères orthogonales quelconques passant par le cercle générateur), les rotations que nous venons d'exprimer au moyen de g et g' (couple orthogonal à vitesse de rotation nulle). Ce calcul fera intervenir l'angle γ, défini par $d\gamma = c\,dc = -c'\,dc$, qui définit le couple (g, g') par rapport au couple (c, c'). Nous désignerons par ∂ une différentiation de fonctions de t et de γ, dans laquelle on laisserait γ constant. Nous aurons ainsi, en ayant égard à $g\,dg = g'\,dg' = 0$, $g\,dg' = g'\,dg = 0$,

$$\begin{gathered} \partial g = \cos\gamma\, dc + \sin\gamma\, dc', \qquad \partial g' = -\sin\gamma\, dc + \cos\gamma\, dc', \\ \partial g = dg - g'\,d\gamma, \qquad \partial g' = dg' + g\,d\gamma, \\ \partial g^2 - \partial g'^2 = dg^2 - dg'^2, \qquad \partial g\,\partial g' = dg\,dg'; \end{gathered}$$

d'où l'on conclut

$$\frac{2\,dc\,dc'}{dc^2 - dc'^2} = \frac{(dg^2 - dg'^2)\sin 2\gamma + 2\,dg\,dg'\cos 2\gamma}{(dg^2 - dg'^2)\cos 2\gamma - 2\,dg\,dg'\sin 2\gamma};$$

et, en tenant compte des formules (64),

$$(69)\quad \begin{cases} \operatorname{tang} 2(\Phi + \gamma) = \dfrac{2\,dc\,dc'}{dc^2 - dc'^2}, \qquad d\tau^2\cos 2(\Phi + \gamma) = dc^2 - dc'^2, \\ d\tau^2 \sin 2(\Phi + \gamma) = 2\,dc\,dc'. \end{cases}$$

On remarquera que ces formules définissent directement la position des sphères centrales par rapport au couple (c, c'), l'angle de la sphère c avec la sphère centrale p étant $\Phi + \gamma$.

On en conclut

$$(70)\quad \begin{cases} d\Phi = -d\gamma + \dfrac{1}{d\tau^4}\big[(dc\,d^2c' + dc'\,d^2c)(dc^2 - dc'^2) \\ \qquad\qquad - 2\,dc\,dc'(dc\,d^2c - dc'\,d^2c')\big]. \end{cases}$$

Pour le calcul de $q' dq$, nous avons ensuite

$$\partial^2 g = \cos\gamma\, d^2 c + \sin\gamma\, d^2 c', \qquad \partial^2 g' = -\sin\gamma\, d^2 c + \cos\gamma\, d^2 c',$$
$$\partial^2 g = d^2 g - 2\, dg'\, d\gamma - g\, d\gamma^2 - g'\, d^2\gamma,$$
$$\partial^2 g' = d^2 g' - 2\, dg\, d\gamma - g'\, d\gamma^2 + g\, d^2\gamma;$$

d'où, en observant les identités $g\, d^2 g = -dg^2$, $g'\, d^2 g' = -dg'^2$,

$$\partial g\, \partial^2 g' - \partial g'\, \partial^2 g = (dg\, d^2 g' - dg'\, d^2 g) - d\gamma\, d\sigma^2 + 2\, d\gamma^3.$$

Comme on a, d'autre part,

$$\partial g\, \partial^2 g' - \partial g'\, \partial^2 g = dc\, d^2 c' - dc'\, d^2 c,$$

il vient

$$(71) \qquad q'\, dq = \frac{1}{2\, d\varpi\, d\varpi'} [d\sigma^2 (d\Phi + d\gamma) - 2\, d\gamma^3 - (dc\, d^2 c' - dc'\, d^2 c)].$$

Enfin, on peut écrire, par des simplifications immédiates de ces déterminants,

$$dG^4 = |g \quad g' \quad \partial g \quad \partial g' \quad \partial^2 g'|, \qquad dG'^4 = |g \quad g' \quad \partial g \quad \partial g' \quad \partial^2 g'|;$$

et l'on en conclut

$$dG^4 = dC^4 \cos\gamma + dC'^4 \sin\gamma, \qquad dG'^4 = -dC^4 \sin\gamma + dC^4 \cos\gamma,$$

en posant

$$(72) \qquad dC^4 = |c \quad c' \quad dc \quad dc' \quad d^2 c|, \qquad dC'^4 = |c \quad c' \quad dc \quad dc' \quad d^2 c'|.$$

Les formules (68) deviennent ainsi

$$(73) \qquad \begin{cases} r\, dq = \dfrac{1}{d\varpi\, d\varpi'} \left[\dfrac{dC^4}{d\varpi} \cos(\Phi + \gamma) + \dfrac{dC'^4}{d\varpi} \sin(\Phi + \gamma) \right], \\[2ex] r\, dq' = \dfrac{1}{d\varpi\, d\varpi'} \left[-\dfrac{dC^4}{d\varpi} \sin(\Phi + \gamma) + \dfrac{dC'^4}{d\varpi} \cos(\Phi + \gamma) \right]. \end{cases}$$

59. Ayant égard à l'identité $d\sigma^2 = d\varpi^2 + d\varpi'^2$, nous poserons

$$(74) \qquad q\, dp = d\varpi = \cos\alpha\, d\sigma, \qquad q'\, dp' = d\varpi' = \sin\alpha\, d\sigma,$$

ce qui revient, d'après (60), à

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\frac{\delta}{2} = i$$

et donne à la *formule de distribution* (59) la forme

$$\tang \varphi_0 = \tang \alpha \tang \varphi. \tag{75}$$

On remarquera que α est réel, quand δ est imaginaire, c'est-à-dire quand le cercle infiniment voisin de C est engagé dans C, et inversement.

Pour les autres rotations, nous poserons

$$p'\,dp = d\Phi = \mathrm{P}\,d\sigma, \qquad q'\,dq = \mathrm{Q}\,d\sigma, \qquad r\,dq = \mathrm{R}\,d\sigma, \qquad r\,dq' = \mathrm{R}'\,d\sigma. \tag{76}$$

Le système différentiel de Serret-Frenet, qui définit le mouvement (conforme) du pentasphère fondamental Π, *s'écrit, par suite,*

$$\frac{dp}{d\sigma} = q\cos\alpha + p'\mathrm{P}, \qquad \frac{dp'}{d\sigma} = q'\sin\alpha - p\mathrm{P}, \tag{77}$$

$$\frac{dq}{d\sigma} = -p\cos\alpha + q'\mathrm{Q} + r\mathrm{R}, \qquad \frac{dq'}{d\sigma} = -p'\sin\alpha - q\mathrm{Q} + r\mathrm{R}', \tag{78}$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = -q\mathrm{R} - q'\mathrm{R}'. \tag{79}$$

La forme de la dernière conduit à poser

$$\mathrm{R} = -\mathrm{H}\cos\Omega, \qquad \mathrm{R}' = -\mathrm{H}\sin\Omega, \tag{80}$$

où H et Ω ont les interprétations suivantes.

On a $dr^2 = \mathrm{H}^2\,d\sigma^2$, ce qui montre que $\mathrm{H}\,d\sigma$ est l'angle de la sphère orthogonale avec la sphère orthogonale voisine; cela revient à dire (n° **29**) que H est la vitesse angulaire (conforme) de la sphère orthogonale.

A cause de $r\,dr = 0$ on voit, d'autre part, que la sphère dr est la sphère qui coupe à angle droit la sphère orthogonale le long de son cercle caractéristique; et cette sphère étant

$$\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{dr}{d\sigma} = q\cos\Omega + q'\sin\Omega,$$

on voit qu'elle passe par le cercle C_0 associé au cercle C, et que Ω est l'angle qu'elle fait avec la sphère q, adjointe à la sphère centrale p.

Les invariants différentiels de la surface cerclée sont donc

$$(81)\qquad \alpha,\quad P,\quad Q,\quad R,\quad \Omega$$

et les dérivées de ces invariants par rapport à σ. La surface est définie géométriquement, au point de vue conforme, quand on connaît, en fonction de σ, ces cinq invariants fondamentaux. Il faut observer que σ n'est défini qu'à une constante additive près, de sorte que les formules définissant la surface seraient, d'une manière plus précise, de la forme

$$(82)\qquad \frac{d\alpha}{d\sigma}=f_1(\alpha),\quad P=f_2(\alpha),\quad Q=f_3(\alpha),\quad R=f_4(\alpha),\quad \Omega=f_5(\alpha);$$

c'est-à-dire que ce sont des relations liant, deux à deux, les six invariants différentiels du premier et du second ordre [1].

Si α, P, Q, R, R' sont connus en fonction de σ, la détermination de la famille de surfaces cerclées, homologues entre elles, qu'ils définissent s'obtient par l'intégration du système (77), (78), (79), où l'on peut considérer les lettres p, p', q, q', r comme des variables ordinaires. Chaque système de coordonnées p_k, p'_k, q_k, q'_k, r_k, pour $k=1, 2, 3, 4, 5$, est une solution de ce système. Il suffit d'assujettir leurs valeurs

---

[1] Comparez Besserve, *Thèse*, p. 101. Nous nous bornons ici au cas général. En ce qui concerne la concordance des notations, elle est établie par ce qui précède en ce qui concerne l'invariant I_0 de M. Besserve, et $I_1=\frac{dI_0}{d\sigma}$. Les *sphères fondamentales* sont

$$s=p\cos\frac{\delta}{2}+p'\sin\frac{\delta}{2},\qquad s'=p\cos\frac{\delta}{2}-p'\sin\frac{\delta}{2};$$

d'où l'on tire, en ayant égard à (77),

$$ds^2=\left(P\,d\sigma+\frac{1}{2}d\delta\right)^2,\qquad ds'^2=\left(P\,d\sigma-\frac{1}{2}d\delta\right)^2.$$

En comparant aux résultats de la page 66 de la Thèse de M. Besserve, on conclut à l'identité de P avec l'invariant I_2 de cet auteur. M. Besserve trouvant d'autre part (p. 74), pour le carré de l'angle de la sphère orthogonale avec la sphère infiniment voisine, la formule $(I_4^2+I_5^2-2I_0^2I_4I_5)\,d\sigma^2$, on en conclut que I_4 et I_5 sont des combinaisons, linéaires et homogènes, de R et R', dont les coefficients ne dépendront que de α.

initiales à satisfaire aux conditions d'orthogonalité, pour qu'elles y satisfassent quel que soit σ.

Sur l'intégration de ce système, je renverrai aux indications que j'ai données autrefois ([1]), fournissant le moyen d'en ramener l'intégration à celle d'un système de Lie, d'ordre 3, dont le groupe associé est le groupe projectif qui laisse invariant le complexe linéaire

$$dz + x\,dy - y\,dx = 0.$$

40. Réciproquement, *le mouvement d'un pentasphère*

$$(p, p', q, q', r),$$

pour lequel les rotations des couples (p, q'), (q, p'), (p, r), (p', r) *sont nulles, définit une surface cerclée, pour laquelle ce pentasphère est le pentasphère associé au cercle générateur, lequel est le cercle* (p, p'). Les équations du mouvement seront, en effet, de la forme (77), (78), (79), en déterminant la variable σ par la condition

$$d\sigma^2 = (q\,dp)^2 + (q'\,dp')^2.$$

Soit C le cercle (p, p'). Comme on a

$$rp = 0, \qquad rp' = 0, \qquad r\,dp = 0, \qquad r\,dp' = 0,$$

la sphère r est orthogonale à C et au cercle infiniment voisin.

L'angle de l'une des sphères centrales avec p est donné [équation (69)] par la tangente de l'angle double, qui est nulle, car la condition $q\,dp' = 0$ donne $dp\,dp' = 0$, par la première équation (77). Donc p et p' sont les sphères centrales de C.

En continuant à appliquer à p et p' les formules générales établies précédemment pour c et c', nous trouvons, par (43), $d\gamma = p\,dp' = -\mathrm{P}\,d\sigma$, et, par (55 *bis*), en tenant compte de (77),

$$d\varpi^2 = dp^2 - \mathrm{P}^2\,d\sigma^2 = \cos^2\alpha\,d\sigma^2, \qquad d\varpi'^2 = dp'^2 - \mathrm{P}^2\,d\sigma^2 = \sin^2\alpha\,d\sigma^2;$$

on peut disposer des signes $\pm$, dont il est possible d'affecter p et p',

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 148, 8 février 1909. Le système (77), (78), (79) est lui-même un système de Lie, dont le groupe associé est le groupe orthogonal à cinq variables. On trouvera, dans le même Tome des *Comptes rendus* une autre méthode, de Darboux, pour intégrer de tels systèmes.

de manière à conclure de ces formules

$$d\varpi = \cos\alpha\, d\sigma, \qquad d\varpi' = \sin\alpha\, d\sigma.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que les formules (58) deviennent, si l'on y introduit c et c' par les équations (41),

$$\begin{aligned} q &= \frac{dc}{d\varpi}\cos(\Phi+\gamma) + \frac{dc'}{d\varpi}\sin(\Phi+\gamma) + \frac{p'}{d\varpi}d\gamma,\\ q' &= -\frac{dc}{d\varpi'}\sin(\Phi+\gamma) + \frac{dc'}{d\varpi'}\cos(\Phi+\gamma) - \frac{p}{d\varpi'}d\gamma. \end{aligned}$$

Comme ici $c = p$, $c' = p'$, $\Phi + \gamma = 0$, $d\gamma = -\mathrm{P}\, d\sigma$, ces formules, qui définissent les sphères adjointes, se réduisent à

$$q = \frac{1}{\cos\alpha}\left[\frac{dp}{d\sigma} - p'\mathrm{P}\right], \qquad q' = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{dp'}{d\sigma} + p\mathrm{P}\right].$$

Or ce sont les valeurs mêmes que l'on déduit des formules (77). Donc les sphères q, q' du pentasphère considéré sont bien les sphères adjointes aux sphères centrales du cercle (p, p').

On observera que tout ce qui est essentiel dans les hypothèses résulte de l'existence d'un système d'équations de la forme

$$\frac{dp}{dt} = \mathrm{A}q + \mathrm{P}p', \quad \frac{dp'}{dt} = \mathrm{A}'q' - \mathrm{P}p, \quad pp' = qq' = pq = pq' = p'q = p'q' = 0,$$

entre les vecteurs correspondant à quatre sphères p, p', q, q'.

On peut encore dire que la condition $dp\, dp' = 0$ exprime que les sphères p, p', supposées orthogonales, sont sphères centrales du cercle qu'elles déterminent, et que les conditions

$$p\, dp' = p'\, dq = p\, dq' = 0,$$

quand on les impose à quatre sphères, orthogonales deux à deux, expriment que le cercle (p, p') a pour sphères centrales p et p', et, pour sphères adjointes à ces sphères centrales respectives, les deux autres sphères q et q' du tétrasphère.

VI. — La Géométrie sur la surface cerclée.

41. Un point quelconque du cercle C, de la surface Σ, est, avec les notations précédentes,

$$m = r - iq \sin\theta + iq' \cos\theta, \tag{83}$$

car on a $m^2 = 0$, $mp = mp' = 0$. Ce point est sur la sphère

$$v_0 = q \cos\theta + q' \sin\theta, \tag{84}$$

car on a $mv_0 = 0$. L'angle θ est l'angle de cette sphère avec la sphère q; et le second point d'intersection de cette sphère avec C est donné par (83), quand on y change θ en $\theta + \pi$. L'angle θ est donc une sorte d'*abscisse angulaire*, sur le cercle C, pour laquelle le cercle C_0, associé à C, joue le rôle de pôle, la sphère adjointe q le rôle d'axe polaire, et les sphères (orientées) passant par C_0 le rôle de rayons vecteurs.

Les points de la surface Σ sont ainsi définis par les *coordonnées intrinsèques absolues* σ et θ.

Conformément à la loi de distribution [équation (75)], la sphère tangente à Σ en m est

$$v = \frac{1}{k}(p \cos\theta \sin\alpha + p' \sin\theta \cos\alpha), \qquad k = \sqrt{\cos^2\theta \sin^2\alpha + \sin^2\theta \cos^2\alpha}. \tag{85}$$

On peut le vérifier comme il suit. Sur une courbe quelconque Γ, un point m et un point voisin $m + \Delta m$ peuvent être considérés comme des sphères de rayon nul, qui définissent un faisceau de sphères, orthogonales à la droite joignant les deux points. A ce faisceau appartient la sphère Δm; donc, à la limite, la sphère dm est orthogonale à la courbe Γ en m. On vérifie, du reste, qu'elle passe bien par m, à cause de $m\,dm = 0$, qui résulte de $m^2 = 0$.

Si la courbe Γ est tracée sur Σ, on aura

$$dm = dr - i\,dq \sin\theta + i\,dq' \cos\theta - i v_0\, d\theta.$$

On en conclut, par les formules de Serret-Frenet,

$$v\, dm = \frac{1}{k}[-i \sin\theta \cos\theta \sin\alpha(-\cos\alpha) - i \cos\theta \sin\theta \cos\alpha(\sin\alpha)] = 0.$$

Donc la sphère v est orthogonale à toutes les sphères orthogonales en m aux courbes de Σ passant en ce point; et, par suite, est tangente à la surface.

Remarquons que les courbes $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ sont les lieux des points centraux, c'est-à-dire sont analogues aux *lignes de striction* des surfaces réglées (¹).

42. Pour deux déplacements d et δ sur la surface, on a l'angle qu'ils forment, par l'angle des sphères dm, δm qui leur sont respectivement orthogonales. Cet angle V est donc donné par la formule

$$\cos V = \frac{dm\,\delta m}{\sqrt{dm^2}\sqrt{\delta m^2}}.$$

Le numérateur est la forme polaire de la forme quadratique dm^2, que l'on calcule au moyen des formules

$$\begin{gathered} dr^2 = (R^2 + R'^2)\,d\sigma^2, \qquad dq^2 = (\cos^2\alpha + Q^2 + R^2)\,d\sigma^2, \\ dq'^2 = (\sin^2\alpha + Q^2 + R'^2)\,d\sigma^2; \\ dr\,dq = -RR'\,d\sigma^2, \qquad dr\,dq' = QR\,d\sigma^2, \qquad dq\,dq' = RR'\,d\sigma^2; \\ v_0\,dr = -(R\cos\theta + R'\sin\theta)\,d\sigma, \qquad v_0\,dq = R\sin\theta\,d\sigma, \\ v_0\,dq' = -Q\cos\theta\,d\sigma, \end{gathered}$$

qui résultent des équations de Serret-Frenet. On trouve

$$(86) \qquad dm^2 = [(R\cos\theta + R'\sin\theta + iQ)\,d\sigma + i\,d\theta]^2 - k^2\,d\sigma^2.$$

Cette forme n'est pas autre chose, *à un facteur près*, que le ds^2 de la surface. En effet, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées rectangulaires du point m, ses *coordonnées pentasphériques cartésiennes* sont :

$$(87) \qquad \begin{cases} m_1 = \mu x, \qquad m_2 = \mu y, \qquad m_3 = \mu z, \\ m_4 = \mu\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 - 1}{2}, \qquad m_5 = \mu\dfrac{x^2 + y^2 + z^2 + 1}{2i}, \end{cases}$$

(¹) Ne pas confondre avec les lignes désignées ainsi par Enneper et Demartres.

μ étant un facteur convenable. Or, on a

$$m = -im_5 - \mu \quad \text{et} \quad m^2 = 0.$$

De là

$$\left(d\frac{m_4}{\mu}\right)^2 + \left(d\frac{m_5}{\mu}\right)^2 = 0, \qquad \left(d\frac{m}{\mu}\right)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$dm^2 = \mu^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Pour déterminer le facteur μ, il suffit d'observer que les coordonnées pentasphériques cartésiennes d'une sphère c, de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R_0, sont, avec la condition $c^2 = 1$,

$$(88) \quad \left\{ \begin{aligned} c_1 &= -\frac{x_0}{R_0}, \qquad c_2 = -\frac{y_0}{R_0}, \qquad c_3 = -\frac{z_0}{R_0}, \\ c_4 &= \frac{1 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 + R_0^2}{2R_0}, \qquad c_5 = i\frac{1 + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R_0^2}{2R_0}; \end{aligned} \right.$$

de sorte que, si l'on désigne ici par

$$(x_0, y_0, z_0, R_0), \quad (x_2, y_2, z_2, R_2), \quad (x'_2, y'_2, z'_2, R'_2)$$

les coordonnées des centres et les rayons respectifs des sphères x, q, q', on aura

$$m_1 = -\left(\frac{x_0}{R_0} - i\sin\theta\frac{x_2}{R_2} + i\cos\theta\frac{x'_2}{R'_2}\right),$$
$$m_2 = -\left(\frac{y_0}{R_0} - i\sin\theta\frac{y_2}{R_2} + i\cos\theta\frac{y'_2}{R'_2}\right),$$
$$m_3 = -\left(\frac{z_0}{R_0} - i\sin\theta\frac{z_2}{R_2} + i\cos\theta\frac{z'_2}{R'_2}\right).$$

On en conclut que le point m n'est autre que le point du plan des centres des trois sphères considérées qui a pour coordonnées barycentriques, relativement à ces trois centres, $-\frac{1}{R_0}, \frac{i\sin\theta}{R_2}, \frac{-i\cos\theta}{R'_2}$. Donc le facteur μ a pour expression :

$$(87\ bis) \qquad \mu = -\left(\frac{1}{R_0} - \frac{i\sin\theta}{R_2} + \frac{i\cos\theta}{R'_2}\right),$$

où R_0, R_2, R'_2 sont les rayons de la sphère orthogonale et des sphères adjointes aux sphères centrales.

Puisque l'on a $dm^2 = \mu^2\, ds^2$, les *courbes minima* de la surface ont pour équation différentielle $dm^2 = 0$. On arrive à cette même équation en remarquant que la condition $dm^2 = 0$ exprime que dm est un vecteur définissant un point; que ce point étant infiniment voisin de m, la droite qui joint m à dm est tangente au lieu de m; et que l'identité $m\,dm = 0$ (résultant de $m^2 = 0$) exprime que cette droite est une droite isotrope.

Les *trajectoires orthogonales* des cercles C sont définies par

$$\frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\theta)} = 0,$$

ou

$$i\,d\theta + (R\cos\theta + R'\sin\theta + iQ)\,d\sigma = 0. \tag{89}$$

On retrouve ainsi que leur détermination résulte de l'intégration d'une équation de Riccati, obtenue en posant $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = T$.

Par ce changement de variable, la forme (88) deviendra, à un facteur près,

$$\begin{gathered}\{[R(1-T^2) + 2R'T + iQ(1+T^2)]\,d\sigma + 2i\,dT\}^2 \\ -[(1-T^2)^2\sin^2\alpha + 4T^2\cos^2\alpha]\,d\sigma^2.\end{gathered}$$

Cette forme devra être employée, au lieu de (88), en un point de courbure $q \pm iq'$ (n° **24**), la forme (88) devenant alors illusoire. On a, dans ce cas, $T = \pm i$, et la forme quadratique en question devient

$$[(R \pm iR')\,d\sigma - dT]^2 + \cos 2\alpha\, d\sigma^2.$$

On en conclut, en particulier, que les lieux des points de courbure coupent le cercle C sous les angles donnés par

$$\cos j = \frac{R \pm iR'}{\sqrt{(R \pm iR')^2 + \cos 2\alpha}},$$

formule d'où l'on tire, pour interpréter R et R',

$$(R \pm iR')^2 = \cos 2\alpha \cot^2 j.$$

43. Passons à la détermination de la *courbure normale* d'une courbe tracée sur la surface. Elle équivaut à celle de la sphère, tangente en m à la surface, et qui a en m, avec la courbe considérée, un contact du second ordre. Une sphère tangente à la surface appartient au faisceau défini par m et v; elle est donc

$$(90)\qquad \varpi = \rho m + v.$$

On a $\rho = r\varpi$, c'est-à-dire que ρ est le cosinus de l'angle de la sphère considérée avec la sphère orthogonale.

Soit d la différentiation relative à la courbe de la surface que nous considérons. Comme on devait s'y attendre, la condition de contact $\varpi\, dm = 0$ est réalisée; et il faut écrire la condition du contact du deuxième ordre, $\varpi\, d^2 m = 0$. Or, si l'on suppose que la sphère ϖ varie avec le point m de la courbe, on déduit de $\varpi\, dm = 0$, l'identité

$$\varpi\, d^2 m + d\varpi\, dm = 0.$$

La condition cherchée est donc

$$0 = d\varpi\, dm = dm(m\, d\rho + \rho\, dm + dv) = \rho\, dm^2 + dm\, dv;$$

d'où la formule cherchée

$$(91)\qquad \rho = -\frac{dm\, dv}{dm^2}.$$

Si nous posons

$$(92)\qquad \bar{v} = p\cos\theta\sin\alpha + p'\sin\theta\cos\alpha = kv,$$

nous aurons

$$dm\, d\bar{v} = k\, dm\, dv + dk.\, v\, dm = k\, dm\, dv,$$

et la formule précédente pourra s'écrire

$$(91\ bis)\qquad \rho = -\frac{1}{k}\frac{dm\, d\bar{v}}{dm^2}.$$

Le numérateur se calcule au moyen des équations de Serret-Frenet, qui donnent :

$$dp\, dr = -\mathrm{R}\cos\alpha\, d\sigma^2,\qquad dp\, dq = 0,\qquad dp\, dq' = -(\mathrm{P}\sin\alpha + \mathrm{Q}\cos\alpha)\, d\sigma^2,$$
$$dp'\, dr = -\mathrm{R}'\sin\alpha\, d\sigma^2,\qquad dp'\, dq = (\mathrm{P}\cos\alpha + \mathrm{Q}\sin\alpha)\, d\sigma^2,\qquad dp'\, dq' = 0,$$
$$v_0\, dp = \cos\theta\cos\alpha\, d\sigma,\qquad v_0\, dp' = \sin\theta\sin\alpha\, d\sigma.$$

On trouve

$$(93)\quad -dm\,dv = \Big[ik^2 P + \sin\alpha\cos\alpha(R\cos\theta + R'\sin\theta + iQ) - i\sin\theta\cos\theta\frac{d\alpha}{d\sigma}\Big]d\sigma^2 + 2i\sin\alpha\cos\alpha\,d\sigma\,d\theta.$$

On remarquera que les courbes qui satisfont à l'équation $dm\,dv = 0$ peuvent être considérées comme l'analogue des lignes asymptotiques, car en chacun de leurs points, la sphère passant par le cercle générateur, qui est tangente à la surface, a un contact du second ordre avec la courbe. Parmi ces courbes figurent les cercles générateurs $d\sigma = 0$; les autres sont définies par l'équation

$$0 = 2i\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\theta}{d\sigma} + ik^2 P + \sin\alpha\cos\alpha(iQ + R\cos\theta + R'\sin\theta) - i\frac{d\alpha}{d\sigma}\sin\theta\cos\theta.$$

44. Il convient d'observer ici le cas $R = R' = 0$. L'équation (79) donne alors $r = \text{const}$. Donc, c'est le cas où *tous les cercles générateurs sont orthogonaux à une sphère fixe* (¹). En prenant alors comme variable $\tan g\theta$, on ramènera l'équation précédente à une équation de Riccati.

D'autre part, l'équation (89) des trajectoires orthogonales des cercles générateurs s'intégrera par une quadrature.

Remarquons que le système de Serret-Frenet se réduit, dans ce cas, à un système du quatrième ordre :

$$(94)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{d\sigma} &= q\cos\alpha + p'P, & \frac{dp'}{d\sigma} &= q'\sin\alpha - pP;\\ \frac{dq}{d\sigma} &= -p\cos\alpha + q'Q, & \frac{dq'}{d\sigma} &= -p'\sin\alpha - qQ.\end{aligned}\right.$$

C'est un système de Lie, dont le groupe associé est le groupe orthogonal à quatre variables.

(¹) On pourrait dire qu'ils admettent cette sphère comme *sphère de symétrie.*

Dans la Note citée [1], j'ai donné des formules entièrement explicites, réduisant à l'intégration de deux équations de Riccati la résolution de tels systèmes.

On peut considérer le cas où la surface cerclée est une transformée (par une transformation conforme) d'une surface réglée, ou dégénère en une surface réglée, comme un cas limite du précédent, la sphère orthogonale fixe se réduisant alors à une sphère de rayon nul. Directement, il se trouve exclu de notre analyse; car nous avons écarté les cercles sécants de nos considérations (n° **19**).

Rappelons ici que, en géométrie conforme, les plans et les droites se présentent comme des sphères et des cercles passant par le *point à l'infini*. Car, en coordonnées pentasphériques cartésiennes (n° **12**), la condition pour que la sphère a se réduise à un plan est

$$a_4 - ia_5 = 0;$$

ce qui s'interprète en disant qu'elle contient le point

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0, \qquad r_4 = \lambda, \qquad r_5 = -i\lambda.$$

C'est ce point qui est le point à l'infini et qui remplace, en géométrie conforme, le plan à l'infini de la géométrie projective.

45. Je reviens au cas général, pour chercher l'*équation différentielle* des *lignes de courbure* et *les sphères de courbure principales*. Je simplifierai les calculs, en posant

$$(96)\quad \begin{cases} \rho k = \bar{\rho}, \qquad R\cos\theta + R'\sin\theta + iQ = ih, \qquad h\,d\sigma + d\theta = Z, \\ k^2 P - h\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{d\alpha}{d\sigma}\sin\theta\cos\theta = l. \end{cases}$$

Nous aurons ainsi

$$(97)\quad -dm^2 = Z^2 + k^2\,d\sigma^2, \qquad -dm\,d\bar{v} = 2i\sin\alpha\cos\alpha . Z\,d\sigma + il\,d\sigma^2;$$

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1909. D'autres méthodes d'intégration avaient été données antérieurement par Eiesland, Laura, Darboux.

et il s'agit d'exprimer que l'équation

$$\bar{\rho}\, dm^2 + dm\, d\bar{v} = 0 \tag{98}$$

a une racine double en $\frac{d\theta}{d\sigma}$, ou en $\frac{Z}{d\sigma}$. D'où les équations

$$\rho Z + i \sin\alpha\cos\alpha\, d\sigma = 0, \qquad (\bar{\rho} k^2 + il)\, d\sigma + i \sin\alpha\cos\alpha . Z = 0. \tag{99}$$

On en conclut l'équation en $\bar{\rho}$,

$$\bar{\rho}^2 k^2 + \bar{\rho} il + \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0; \tag{100}$$

et l'équation différentielle des lignes de courbure

$$\sin\alpha\cos\alpha . k^2\, d\sigma^2 - lZ\, d\sigma - \sin\alpha\cos\alpha . Z^2 = 0. \tag{101}$$

On observera que la valeur

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 = -\frac{l}{2k^2} = \frac{1}{2}(\bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2),$$

où $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2$ sont les racines de (100), définit la *sphère harmonique*, qui, dans le faisceau des sphères tangentes $\bar{\rho} m + \bar{v}$, est la conjuguée harmonique de la sphère-point m ($\bar{\rho} = \infty$) par rapport aux sphères principales ($\bar{\rho} = \bar{\rho}_1$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}_2$).

Aux points de courbure, nous faisons le changement de variable

$$T = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

La sphère tangente sera

$$\bar{\rho}[-2iTq + i(1 - T^2)q'] + (1 - T^2)p\sin\alpha + 2Tp'\cos\alpha;$$

c'est-à-dire, suivant qu'il s'agit du point $q + iq'$, ou du point $q - iq'$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\rho}(q - iq') + (p\sin\alpha + ip'\cos\alpha) & (T = i), \\ -\bar{\rho}(q - iq') + (p\sin\alpha - ip'\cos\alpha) & (T = -i). \end{array} \right. \tag{102}$$

L'équation (100) devient l'une des deux équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\rho}^2\cos 2\alpha - \bar{\rho}\left(\frac{d\alpha}{d\sigma} - iP\cos 2\alpha\right) = 0 & (T = i), \\ \bar{\rho}^2\cos 2\alpha - \bar{\rho}\left(\frac{d\alpha}{d\sigma} + iP\cos 2\alpha\right) = 0 & (T = -i). \end{array} \right. \tag{103}$$

L'une des racines est donc nulle; et nous retrouvons ces résultats connus, que la sphère principale correspondante est la *sphère fondamentale;* et que la direction principale est celle du cercle générateur ($d\sigma = 0$); ce qui a fait donner par Demartres, aux points considérés, le nom de *points de courbure* ([1]).

46. On peut opérer autrement pour trouver les lignes de courbure, et obtenir ainsi des formules que l'on peut considérer comme les analogues des *formules d'Olinde Rodrigues.*

Pour que le point de contact de la sphère $w = \rho m + v$ décrive une ligne de courbure, il faudra, si cette sphère a un contact du second ordre avec le lieu de son point de contact, qu'elle soit tangente à la sphère infiniment voisine de même nature. Donc, que l'on ait simultanément

$$(104) \qquad \rho\, dm^2 + dm\, dv = 0, \qquad dw^2 = [d(\rho m + v)]^2 = 0.$$

Or on a, à cause des identités $m\, dm = 0$, $mv = 0$, $v\, dm = 0$,

$$[d(\rho m + v)]^2 = [m\, d\rho + (\rho\, dm + dv)]^2 = (\rho\, dm + dv)^2.$$

Donc, $\rho\, dm + dv$ est une sphère de rayon nul; ou, si l'on veut, définit un point. La première équation (104), qui s'écrit

$$dm(\rho\, dm + dv) = 0,$$

exprime que ce point est sur la sphère dm. Or, si les sphères dm et dv se coupaient suivant un cercle, le point $\rho\, dm + dv$ serait un des foyers de ce cercle, et ne serait pas sur la sphère dm. Il faut donc conclure

([1]) On retrouve ici bien facilement un résultat de M. Besserve (*Thèse*, p. 70), sur l'angle des sphères principales en question, qui ne sont pas les sphères fondamentales. Le cosinus est

$$-\frac{1}{\cos 2\alpha}(1 - 2\bar\rho_2\bar\rho'_2) = \cos\delta(1 - 2\bar\rho_2\bar\rho'_2),$$

en désignant par $\bar\rho_2$, $\bar\rho'_2$ les racines non nulles des équations (103); et

$$\bar\rho_2\bar\rho'_2 = \left(\frac{d\alpha}{d\sigma}\right)^2 \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + P^2 = P^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{d\delta}{d\sigma}\right)^2.$$

que les sphères dm et dv sont tangentes; et que $\rho\, dm + dv$ est leur point de contact.

Mais on a

$$m\, dm = m\, dv = mv = 0;$$

et le point m, appartenant ainsi aux deux sphères dm et dv, et à la sphère v, qui leur est orthogonale ($v\, dm = v\, dv = 0$), est aussi leur point de contact.

La condition cherchée sera donc que $\rho\, dm + dv$ et v représentent un même point, ou bien que l'on ait une identité de la forme

$$\rho\, dm + dv = \lambda m. \tag{105}$$

Pour exprimer que cette identité a lieu, on pourra exprimer que les produits scalaires des deux membres par cinq vecteurs indépendants sont égaux. Comme les produits de chacun de ces deux membres par m et par v sont déjà nuls, on pourra se borner aux produits par

$$r, \quad q \cos\theta + q' \sin\theta, \quad p \sin\theta \cos\alpha - p' \cos\theta \sin\alpha.$$

La première des équations ainsi obtenues donne λ,

$$\rho(-i\mathrm{R} \sin\theta + i\mathrm{R}' \cos\theta)\, d\sigma = \lambda; \tag{106}$$

et les deux autres sont les équations (99).

En résumé, *le fait qu'un point de la surface décrit une ligne de courbure équivaut à l'existence d'une identité de la forme*

$$dv + \rho[dm + i(\mathrm{R} \sin\theta - \mathrm{R}' \cos\theta) m\, d\sigma] = 0. \tag{107}$$

Dans le cas, déjà signalé, $\mathrm{R} = \mathrm{R}' = 0$, cette équation se réduit à

$$dv + \rho\, dm = 0.$$

Il y a alors aussi une simplification dans les équations (99) et (100), où h se réduit à l'invariant Q; de sorte que Z est une différentielle totale $d\zeta$.

47. Je passe à la recherche de la *courbure géodésique* d'une courbe Γ tracée sur la surface Σ. Elle équivaut à la détermination de la sphère normale à la surface, qui a, avec la courbe considérée Γ, un contact du second ordre.

Parmi les sphères normales à la surface au point m, figure le faisceau des sphères δm, où δ désigne la différentiation relative à une courbe tracée arbitrairement sur la surface, à partir de m. Continuons à désigner par d la différentiation relative à la courbe Γ, que nous étudions. La condition $\delta m\, dm = 0$ définira la direction δ, perpendiculaire à la direction d; et la sphère δm correspondante sera l'une des sphères tangentes à la courbe Γ donnée, et normales à la surface. Le faisceau de toutes ces sphères (tangentes à Γ, et normales à Σ) est

$$(108)\qquad n = \nu m + \varpi, \qquad \varpi = \frac{\delta m}{\sqrt{\delta m^2}}, \qquad dm\, \delta m = 0.$$

Tout revient à calculer ν par la condition $n d^2 m = 0$ qui, à cause de $n\, dm = 0$, se réduit à $dn\, dm = 0$. On obtient ainsi, en tenant compte de $m\, dm = 0$, qui élimine $d\nu$,

$$(109)\qquad \nu\, dm^2 + d\varpi\, dm = 0;$$

et tout revient à calculer, explicitement, le produit scalaire $d\varpi\, dm$, qui se réduit, à cause de $dm\, \delta m = 0$, à

$$(110)\qquad d\varpi\, dm = \frac{dm\, d\, \delta m}{\sqrt{\delta m^2}} = -\frac{d^2 m\, \delta m}{\sqrt{\delta m^2}}.$$

Je poserai, pour abréger,

$$dm^2 = \mathrm{M}(\sigma, \theta;\, d\sigma, d\theta),$$

$$dm \frac{\partial m}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial (d\sigma)} = \mathrm{M}_1, \qquad dm \frac{\partial m}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial (d\theta)} = \mathrm{M}_2.$$

On pourra prendre, pour satisfaire à $dm\, \delta m = 0$,

$$(113)\qquad \delta\sigma = \mathrm{M}_2, \qquad \delta\theta = -\mathrm{M}_1.$$

On aura ainsi, M étant une forme quadratique en $d\sigma$, $d\theta$,

$$\delta m^2 = \mathrm{M}(\sigma, \theta;\, \mathrm{M}_2, -\mathrm{M}_1) = \Delta . \mathrm{M}(\sigma, \theta;\, d\sigma, d\theta),$$

Δ étant le discriminant de la forme, c'est-à-dire ici k^2. Donc

$$(114)\qquad \delta m^2 = k^2\, dm^2.$$

Nous avons ensuite

$$d^2 m \frac{\partial m}{\partial \sigma} = d\left(dm \frac{\partial m}{\partial \sigma}\right) - dm\, d\frac{\partial m}{\partial \sigma} = d\mathrm{M}_1 - dm \frac{\partial (dm)}{\partial \sigma} = d\mathrm{M}_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial (dm^2)}{\partial \sigma};$$

c'est-à-dire

$$d^2 m^2 \frac{\partial m}{\partial \sigma} = dM_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \sigma}; \qquad d^2 m^2 \frac{\partial m}{\partial \theta} = \partial M_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \theta};$$

et, par suite,

$$d^2 m\, \delta m = M_2\left(dM_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right) - M_1\left(dM_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial \theta}\right);$$

c'est-à-dire

$$(115) \qquad 4\, d^2 m\, \delta m = \frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\theta)}\left[d\frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\sigma)} - \frac{\partial(dm^2)}{\partial\sigma}\right] - \frac{\partial(dm^2}{\partial(d\sigma)}\left[d\frac{\partial(dm^2)}{\partial(d\theta)} - \frac{\partial(dm^2)}{\partial\theta}\right].$$

On voit donc que l'élément dm^2 intervient seul dans le calcul; ce qui est conforme à la nature de la courbure géodésique.

En effectuant, il vient, si l'on pose

$$-M = E\, d\sigma^2 + 2F\, d\sigma\, d\theta + G\, d\theta^2,$$

$$(116) \quad -d^2 m\, \delta m = (EG - F^2)(d\sigma\, d^2\theta - d\theta\, d^2\sigma) - \begin{vmatrix} E\, d\sigma + F\, d\theta & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \sigma} d\sigma^2 + \frac{\partial E}{\partial \theta} d\sigma\, d\theta + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \sigma}\right) d\theta^2 \\ F\, d\sigma + G\, d\theta & \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial \theta}\right) d\sigma^2 - \frac{\partial G}{\partial \sigma} d\sigma\, d\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial \theta} d\theta^2 \end{vmatrix}.$$

On a

$$E = h^2 + k^2, \qquad F = h, \qquad G = 1, \qquad EG - F^2 = k^2;$$

et la formule (116) s'écrit

$$(117) \quad -d^2 m\, \delta m = k^2(d\sigma\, d^2\theta - d\theta\, d^2\sigma) - k^2\left(\frac{\partial h}{\partial \sigma} - h\frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{1}{2}\frac{\partial k^2}{\partial \theta}\right) d\sigma^3 + \frac{1}{2} Z\, dk^2\, d\sigma + \frac{1}{2} Z^2 \frac{\partial k^2}{\partial \theta} d\sigma + \frac{\partial h}{\partial \theta} Z^3.$$

Rappelons les notations précédemment introduites

$$h = Q - i(R\cos\theta + R'\sin\theta), \qquad k^2 = \cos^2\theta\sin^2\alpha + \sin^2\theta\cos^2\alpha,$$
$$Z = h\, d\sigma + d\theta;$$

d'où résultent les formules auxiliaires

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = i(R\sin\theta - R'\cos\theta), \qquad h\frac{\partial h}{\partial \theta} = Q\frac{\partial h}{\partial \theta} + \frac{1}{2}(R^2 - R'^2)\sin 2\theta - RR'\cos 2\theta,$$

$$\frac{\partial k^2}{\partial \sigma} = \sin 2\alpha \cos 2\theta \frac{d\alpha}{d\sigma}, \qquad \frac{\partial k^2}{\partial \theta} = \sin 2\theta \cos 2\alpha.$$

On remarquera que le second membre de (116) est l'expression qui intervient dans le calcul de la courbure géodésique, en géométrie euclidienne, pour une surface dont le ds^2 serait (les coordonnées curvilignes étant désignées par σ et θ)

$$E\,d\sigma^2 + 2F\,d\sigma\,d\theta + G\,d\theta^2.$$

Nous pouvons donc conclure que *les géodésiques du* dm^2, *sur notre surface cerclée, sont les courbes qui sont coupées en trois points confondus par les sphères* δm *qui leur sont tangentes.* Ces sphères δm jouent ici le rôle que jouent, en géométrie euclidienne, les plans normaux à la surface.

48. Le *cercle osculateur* à la courbe Γ de la surface est l'intersection des deux sphères, de courbure normale et de courbure géodésique,

$$(118) \qquad w = \rho m + v, \qquad n = \nu m + \varpi,$$

que nous avons déterminées. Ces deux sphères sont orthogonales. Il resterait à trouver la *sphère osculatrice* à Γ. Nous nous bornerons à indiquer la méthode, sans développer les calculs. Cette sphère sera de la forme

$$(119) \qquad x = w \cos\xi + n \sin\xi,$$

ξ étant l'angle qu'elle fait avec la sphère de courbure normale w; et tout revient à déterminer cet angle. Il suffit d'écrire, pour cela, les relations

$$xm = 0, \qquad x\,dm = 0, \qquad x\,d^2m = 0$$

étant vérifiées quel que soit ξ, que l'on a, en outre,

$$x\,d^3m = 0 \qquad \text{ou} \qquad dx\,d^2m = 0.$$

Cela donne la formule

$$(120) \qquad \cos\xi \,.\, dw\,d^2m + \sin\xi \,.\, dn\,d^2m = 0,$$

sur laquelle on peut faire les remarques suivantes. On a

$$\begin{aligned} dw\,d^2m &= d\rho \,.\, m\,d^2m + \rho\,dm\,d^2m + dv\,d^2m \\ &= -d\rho \quad dm^2 + \rho\frac{1}{2}d(dm^2) + dv\,d^2m, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la valeur $\rho = -\frac{dm\, dv}{dm^2}$,

$$dw\, d^2 m = -d\rho\, dm^2 + dv\left[d^2 m - \frac{1}{2} dm \frac{d(dm^2)}{dm^2}\right],$$
$$= -d\rho\, dm^2 + \sqrt{dm^2}\, d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right) dv.$$

La formule (120) devient ainsi

$$(121)\qquad \left[d\rho - d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right)\frac{dv}{\sqrt{dm^2}}\right]\cos\xi + \left[d\nu - d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right)\frac{d\varpi}{\sqrt{dm^2}}\right]\sin\xi = 0.$$

Elle contient les différentielles du troisième ordre par le terme $d\nu$ seulement.

Les courbes dont la sphère osculatrice est tangente à la surface, ($\sin\xi = 0$), satisfont donc à l'équation invariante, du second ordre,

$$(122)\qquad d\rho = d\left(\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\right)\frac{dv}{\sqrt{dm^2}},\qquad \rho = -\frac{dm}{\sqrt{dm^2}}\frac{dv}{\sqrt{dm^2}}.$$

On peut, du reste, rattacher la question à la théorie euclidienne des surfaces. Si l'on introduit la courbure normale, la courbure géodésique, et la torsion géodésique

$$N = \frac{\cos\theta}{R},\qquad G = \frac{\sin\theta}{R},\qquad \Theta = \frac{1}{T} - \frac{d\theta}{ds},$$

en désignant, suivant l'usage, par θ l'angle de la normale principale à la courbe avec la normale à la surface, par R le rayon de courbure, et T le rayon de torsion, on a, s étant l'arc de la courbe,

$$\operatorname{tang}(\theta - \xi) = -\frac{T}{R}\frac{dR}{ds};$$

et l'on en conclut l'équation, équivalente à (121),

$$(123)\qquad \left(\frac{dN}{ds} - \Theta G\right)\cos\xi + \left(\frac{dG}{ds} - \Theta N\right)\sin\xi = 0,$$

ce qui indique que le quotient

$$(124)\qquad \mathfrak{J} = \left(\frac{dG}{ds} - \Theta N\right) : \left(\frac{dN}{ds} - \Theta G\right)$$

est un invariant des surfaces pour le groupe conforme, relatif à une courbe tracée sur cette surface. L'équation invariante (122) est

$$\frac{dN}{ds} - \Theta G = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{T}\operatorname{tang}\theta + \frac{1}{R}\frac{dR}{ds} = 0,$$

ce qui est bien une équation du second ordre, tandis que l'invariant (124) est du troisième ordre.

49. L'expression différentielle $\Theta\, ds$ se présente d'elle-même, avec un caractère invariant, quand on étudie le *déplacement infinitésimal* (*conforme*) *du système des deux sphères de courbure, normale et géodésique*, que nous avons désignées par w et n. *Pour une surface quelconque, les variations angulaires infinitésimales de ces deux sphères,* $\sqrt{\overline{dw^2}}$, $\overline{dn^2}$, *et la rotation infinitésimale de leur couple,* $n\,dw$, *sont trois quantités égales à* $\Theta\, ds$.

Soient, en effet, (x, y, z) un point courant d'une surface Σ; s l'arc d'une courbe qu'il décrit sur Σ; (α, β, γ) les cosinus directeurs de la tangente à la courbe; $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ ceux de la direction perpendiculaire à cette tangente dans le plan tangent à la surface; (λ, μ, ν) ceux de la normale à la surface. Les coordonnées des sphères w et n sont, en posant $R_n = \frac{R}{\cos\theta}$, $R_g = \frac{R}{\sin\theta}$,

$$w_1 = -\left(\frac{x}{R_n} + \lambda\right),\quad w_2 = -\left(\frac{y}{R_n} + \mu\right),\quad w_3 = -\left(\frac{z}{R_n} + \nu\right),\quad w_4 = \frac{1 - W}{2R_n},\quad w_5 = i\frac{1 + W}{2R_n},$$

$$n_1 = -\left(\frac{x}{R_g} + \alpha_1\right),\quad n_2 = -\left(\frac{y}{R_g} + \beta_1\right),\quad n_3 = -\left(\frac{z}{R_g} + \gamma_1\right),\quad n_4 = \frac{1 - N}{2R_g},\quad n_5 = i\frac{1 + N}{2R_g},$$

avec

$$W = x^2 + y^2 + z^2 + 2R_n(\lambda x + \mu y + \nu z),$$
$$N = x^2 + y^2 + z^2 + 2R_g(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z).$$

En utilisant les formules [1] connues, du type

$$d\lambda = \alpha_1 \Theta\, ds - \alpha\frac{ds}{R_n}, \qquad d\alpha_1 = -\lambda\Theta\, ds - \alpha\frac{ds}{R_g},$$

---

(1) *Voir*, par exemple, pour les notations et les formules employées ici, nos *Leçons de Géométrie supérieure*, p. 28, 29.

on obtient les équations

$$dw^2 = \Theta^2 ds^2, \qquad dn^2 = \Theta^2 ds^2, \qquad n\, dw = \Theta\, ds,$$

qui s'expriment dans le théorème énoncé ci-dessus.

Il nous reste, dans le cas de la surface cerclée, à indiquer le calcul de $n\,dw$, qui, à cause de sa signification $\Theta\,ds$, doit donner, à un facteur près, le premier membre de l'équation (101) des lignes de courbure.

On a, avec les notations utilisées dans les calculs précédents,

$$n\,dw = (\nu m + \varpi)\,d(\rho m + v) = \varpi\,dv = \frac{1}{k^2\sqrt{dm^2}}\,\delta m\,d\bar{v}.$$

Car

$$m^2 = m\,dm = m\,dv = m\varpi = \varpi\,dm = v\,\delta m = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} d\bar{v} &= \cos\theta\sin\alpha\,dp + \sin\theta\cos\alpha\,dp' + p\,d(\cos\theta\sin\alpha) + p'\,d(\sin\theta\cos\alpha),\\ \delta m &= \delta r - i\sin\theta\,\delta p + i\cos\theta\,\delta p' - iv_0\,\delta\theta, \end{aligned}$$

d'où, en se servant des formules de Serret-Frenet,

$$\delta m\,d\bar{v} = i[-Z\sin\alpha\cos\alpha - P k^2\,d\sigma + \sin\theta\cos\theta\,d\alpha]\,\delta\sigma - i\sin\alpha\cos\alpha\,d\sigma\,\delta\theta.$$

Il ne reste plus qu'à introduire les valeurs

$$\delta\sigma = -Z, \qquad \delta\theta = hZ + k^2\,d\sigma$$

pour obtenir l'expression

$$\delta m\,d\bar{v} = i[\sin\alpha\cos\alpha\,.\,Z^2 + lZ\,d\sigma - \sin\alpha\cos\alpha\,.\,k^2\,d\sigma^2],$$

qui, multipliée par $\frac{1}{k^2\sqrt{dm^2}}$, donne la formule cherchée

$$n\,dw = \Theta\,ds = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\,.\,Z^2 + lZ\,d\sigma - \sin\alpha\cos\alpha\,.\,k^2\,d\sigma^2}{k^2\sqrt{Z^2 + k^2\,d\sigma^2}},$$

où k^2, Z, l sont définis par les formules (85) et (96); et dont le numérateur est bien, au signe près, le premier membre de l'équation (101).