JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. LEFSCHETZ

Sur les intégrales multiples des variétés algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 3 (1924), p. 319-343.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1924_9_3__319_0>

Sur les intégrales multiples des variétés algébriques;

PAR S. LEFSCHETZ.

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est d'étendre aux intégrales de seconde espèce de multiplicité quelconque d'une variété algébrique à d dimensions V_d un théorème fondamental que j'ai démontré récemment pour les intégrales doubles des surfaces (¹).

Soit d'abord $F(x, y, z) = 0$ une surface algébrique V_2. On sait, et c'est là une découverte importante due à M. Picard, que dans la théorie des intégrales doubles de V_2, celles de type (²)

$$(1) \qquad \int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy,$$

U, V, fonctions rationnelles, jouent un rôle analogue à celui des fonctions rationnelles pour les intégrales abéliennes. Leur propriété capitale est de préserver leur forme dans les transformations birationnelles; de plus, elles se conduisent de façon relativement simple par rapport aux courbes de singularités. Je les ai nommées intégrales *impropres* de seconde espèce.

(¹) *Voir* mon Mémoire des *Transactions of the American Math. Soc.*, vol. XXII, 1921, 1^re^ Partie, Chap. I, ainsi que ma *Monographie* de la Collection Borel : *L'« Analysis Situs » et la Géométrie algébrique*, 1924, Note I.

(²) Ici comme dans la suite $\frac{\partial}{\partial x}, \ldots$ sont les dérivées partielles prises en tenant compte du fait que z (plus tard t pour les V_d) est une fonction des autres coordonnées donnée par $F = 0$. Au contraire, $U'_x, \ldots$ désigne les dérivées partielles prises en supposant toutes les variables indépendantes.

D'une façon générale, une intégrale de seconde espèce se conduit par définition comme une intégrale (1) au voisinage de ses courbes singulières. Elle est *propre* de seconde espèce si elle ne peut être mise sous forme (1). Des intégrales de seconde espèce sont linéairement indépendantes s'il n'en existe pas de combinaison linéaire impropre.

Le nombre maximum ρ_0 de telles intégrales est un invariant numérique fort important. Un résultat classique dû à M. Picard consiste précisément en une relation entre ρ_0 et d'autres invariants numériques de V_2 (nombre ρ, connexion linéaire, invariant de Zeuthen-Segre).

Soit maintenant une V_d d'équation $F(x_1, x_2, \ldots, x_d, t) = 0$. Les définitions précédentes s'étendent aisément à ses intégrales d-uples. Mais on sait qu'il y a aussi lieu de considérer les intégrales de multiplicité $k < d$, soient

$$\int\int\cdots\int\sum A_{i_1 i_2\ldots i_k}\,dx_{i_1}\,dx_{i_2}\ldots dx_{i_k}, \tag{2}$$

où les A sont rationnelles et satisfont aux « conditions d'intégralité de Poincaré »

$$\frac{\partial A_{i_1 i_2\ldots i_k}}{\partial x_{i_{k+1}}} + (-1)^k \frac{\partial A_{i_2 i_3\ldots i_{k+1}}}{\partial x_{i_1}} + \frac{\partial A_{i_3 i_4\ldots i_1}}{\partial x_{i_2}} + \ldots = 0 \tag{3}$$

(les signes alternent pour k impair). Il est entendu que l'on change le signe de A quand on effectue un nombre impair de transpositions des indices.

Les intégrales impropres de multiplicité $k+1$ sont obtenues ainsi : Désignons par $B_{i_1 i_2\ldots i_{k+1}}$ les premiers membres des relations (3). Les intégrales impropres en question ont la forme générale

$$\int\int\cdots\int\sum B_{i_1 i_2\ldots i_{k+1}}\,dx_{i_1}\,dx_{i_2}\ldots dx_{i_{k+1}}.$$

Par exemple, les conditions d'intégralité de

$$\int\sum A_h\,dx_h$$

sont

$$\frac{\partial A_h}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_h} = 0,$$

d'où, pour l'intégrale double impropre de seconde espèce, la forme générale

$$\int\int\sum\left(\frac{\partial A_h}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_h}\right)dx_i\,dx_h.$$

De même les conditions d'intégralité de

$$\int\int\sum A_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

s'écrivent

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_h}+\frac{\partial A_{jh}}{\partial x_i}+\frac{\partial A_{hi}}{\partial x_j}=0$$

Par conséquent les intégrales triples impropres de seconde espèce ont la forme générale

$$\int\int\int\sum\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_h}+\frac{\partial A_{jh}}{\partial x_i}+\frac{\partial A_{hi}}{\partial x_j}\right)dx_i\,dx_j\,dx_h.$$

On vérifie aisément que toutes ces intégrales satisfont aux conditions d'intégralité qui leur correspondent. Une fois la forme des intégrales impropres (sous-entendu de deuxième espèce) définie, tout ce que l'on a dit pour $k=d=2$ s'étend de soi-même.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental suivant :

Théorème fondamental. — *Soient r le nombre maximum de cycles à k dimensions indépendants, ne rencontrant pas un groupe donné d'hypersurfaces* (¹) *de V_d, ρ_0^k le minimum de r quand on envisage tous les groupes possibles. Le nombre d'intégrales k-uples de seconde espèce linéairement indépendantes est précisément ρ_0^k.*

Ceci est vrai même pour $k=1$, car alors r est fixe et égal à R_1, indice de connexion linéaire, de sorte que le théorème se réduit à un résultat maintenant classique (Picard, Castelnuovo-Enriques). Enfin, pour une courbe algébrique de genre p,

$$\rho_0^1=R_1=2p$$

(¹) On nomme ainsi les V_{d-1} de V_d.

et l'on retombe sur le théorème bien connu relatif aux intégrales abéliennes de seconde espèce.

L'analyse qui suit se rattache étroitement à la Note I de ma *Monographie* (¹) et nous n'y reprendrons aucun théorème dont la démonstration est une extention immédiate de celle pour les surfaces. On fera donc l'étude des intégrales doubles d'une V_3, puis d'une $V_d (d > 3)$, enfin des intégrales triples d'une V_3. Chacun de ces cas sera l'occasion d'introduire quelques difficultés nouvelles que l'on apprendra en même temps à surmonter. Après cela, comme le cas général ne présenterait plus rien de neuf, nous n'avons pas cru utile de le discuter.

Notations principales. — Ce sont les mêmes que dans la *Monographie*. Il convient de les rappeler pour la commodité du lecteur.

H = section hyperplane de V_d.

H_x = section par x = const., de même pour H_y, ...

Γ_k, M_k = respectivement cycle, multiplicité à k dimensions. On les suppose toujours sommes d'éléments analytiques en nombre fini et bilatères. On écrira avec Poincaré l'*équivalence* $M_h \to M_{h-1}$ pour indiquer que M_h a pour frontière complète M_{h-1}. Les deux étant plongées dans une M_n, on écrit aussi l'homologie $M_{h-1} \sim 0 \pmod{M_n}$ quand on ne tient pas à mentionner M_h; enfin lorsqu'il n'y a aucun doute quant à M_n on omet souvent le « $\bmod M_n$ ».

R_k = indice de connexion à k dimensions de V_d.

$M_h M_k$ = intersection de M_h avec M_k. On écrit cependant pour abréger H_{xy} au lieu de $H_x H_y$, etc.

I. — Rappel de certaines propriétés topologiques.

1. J'emprunte ces propriétés à la *Monographie* où elles sont exposées avec plus de détails.

I. Tout $\Gamma_k (k < d)$ de V_d est réductible à une H et y constitue un cycle invariant.

(¹) En particulier, on suppose ici aussi que V_d n'a que des singularités ordinaires.

11. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_N$ les valeurs critiques de x_1 [1]. Il existe un Γ_{d-1} de H_{x_1} évanouissant en a_i, soit δ_i. Traçons des coupures aa_i et soit Δ_i le lieu de δ_i quand x_1 décrit aa_i. Pour tout Γ_d on peut écrire

$$(1) \qquad \Gamma_d \sim \sum \lambda_i \Delta_i + M_d \qquad (M_d \text{ est dans } H_{x_1}).$$

Le cycle à droite sera fini en même temps que M_d. Quand les λ sont tous nuls, le Γ_d est contenu dans H_{x_1}. Le nombre de tels cycles distincts est R_{d-2}. Tout Γ_d combiné avec l'un d'eux convenablement choisi conduit à un cycle fini. Il y aura ainsi $R_d - R_{d-2}$ cycles Γ_d finis distincts.

2. L'énoncé du théorème fondamental est là pour nous imposer l'étude de l'*intersection des cycles et des hypersurfaces de* V_d, dont nous allons maintenant nous occuper.

De la discussion de la *Monographie* (Chap. V, § 1) on tire sans peine que la réduction d'un Γ_k $(k < d)$ à une V_{d-1}, soit H_{x_1}, peut se faire au moyen d'une déformation durant laquelle Γ_k ne rencontre jamais un ensemble donné d'hypersurfaces, soient $C_1, C_2, \ldots, C_s$. Par conséquent, quant à ces cycles, on peut remplacer V_d par une V_{d-1} et il suffit de considérer les Γ_d.

Une remarque analogue s'applique à la réduction des Γ_d au type (1) (*loc. cit.*). Toutefois le cycle réduit, ou plus particulièrement son M_d, rencontre la V_{d-2}, base du faisceau $\{H_{x_1}\}$ (faisceau des H_{x_1}), soit A. Cette circonstance peut cependant être évitée comme ceci : soit $\{H_{x'}\}$ un faisceau linéaire de sections hyperplanes voisin du précédent (x' est le paramètre dont elles dépendent), de variété-base A' voisine de A dans H_a. Soient Δ'_i les éléments analogues aux Δ_i pour $\{H_{x'}\}$. On réduira Σ_d à un cycle $\Sigma\lambda_i\Delta'_i + M_d$, où M_d est dans H_a et ne rencontre pas A. On fera ensuite tendre A' vers A, donc $\{H_{x'}\}$ vers $\{H_{x_1}\}$, sans changer M_d et en évitant que durant leur déformation les Δ' ne rencontrent les C. On voit facilement que ces conditions peuvent être satisfaites en remarquant que Δ_i peut être remplacé par le lieu de

[1] Ce sont les valeurs correspondant à des singularités nouvelles de l'hypersurface.

δ_i située dans une H qui partirait de H_a pour aboutir à H_{a_i} en restant durant son déplacement toujours voisine d'une H_{x_1} dont l'x_1 est sur aa_i. On obtiendra ainsi en définitive un Γ_d ne rencontrant pas non plus un certain nombre de H_{x_1}.

Si certaines des C passaient par les points de contact des hyperplans $x_1 = a_i$, on raisonnerait comme dans la *Monographie* (Note I, n° 10, Remarque), et l'on arriverait toujours au même résultat, à l'aide de multiplicités Δ convenablement choisies.

5. A partir de ce moment, nous pouvons donc supposer nos Γ_d réduits au type (1).

Convenons de comprendre l'hypersurface à l'infini parmi les C. Les cycles ne les rencontrant pas sont alors finis.

Prenons l'ensemble des C suffisamment ample pour que le nombre de cycles distincts ne les rencontrant pas (il ne peut croître quand on lui ajoute de nouvelles hypersurfaces) atteigne son minimum ρ_0^d. Soient $\Gamma_d^i (i = 1, 2, \ldots, \rho_0^d)$ des cycles distincts correspondants, supposés réduits au type (1). Observons que leurs systèmes d'entiers λ sont tous distincts. En effet, autrement il y aurait un cycle de ce type aux λ tous nuls, c'est-à-dire réduit à son M_d. Or un Γ_d dans H_a coupe A suivant un Γ_{d-2} qui ne forme pas frontière dans H_a (*Monographie*, *loc. cit.*) et un tel cycle ne peut être fini.

Outre les cycles précédents il y en aura en général d'autres aux mêmes propriétés et aux systèmes de λ indépendants des leurs. Toutefois un tel cycle pourra toujours être combiné avec les Γ_d^i de manière à en fournir un $\sim 0 \pmod{V_d}$. Soit Γ_d le cycle ainsi obtenu. Il y aura une $M_{d+1} \rightarrow \Gamma_d$, et cette M_{d+1} sera caractérisée par le fait de couper l'hypersurface à l'infini suivant un Γ_{d-1} ne rencontrant pas les autres C_k. D'ailleurs (*loc. cit.* n° 5) on pourra remplacer Γ_d par un cycle différant très peu d'un Γ_{d-1} dans l'hypersurface à l'infini, plus particulièrement même par le lieu d'un Γ_{d-1} de H_{x_1} quand H_{x_1} décrit un cercle de grand rayon. Encore une fois ce Γ_{d-1} ne rencontrera pas les autres C_k.

A côté des cycles que nous venons de considérer il y en a d'autres de type (1), soient $\overline{\Gamma}_d^j (j = 1, 2, \ldots, n)$ et ils auront cette propriété : Soit $\overline{\Gamma}_d$ une combinaison quelconque d'entre eux. Nous sommes assurés qu'*il n'existe pas de système de multiplicités* M^k_{d-1}, *telles que* $M^k_{d-1} \sim \Gamma_d C_k$, *se trouve dans* C_k *et ne rencontre ni les autres* C, *ni la variété singulière accidentelle* (¹) *que* C_k *pourrait posséder*. Effectivement, si $\overline{\Gamma}_d$ ne possédait pas cette propriété, on pourrait, en élaborant le raisonnement (*loc. cit.*, n° I), le réduire à un cycle ne rencontrant plus les C.

II. — Un lemme préliminaire.

4. Avant de passer aux intégrales il sera commode de démontrer un certain lemme.

Soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique C, les coefficients de f étants rationnels en certains paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Sur C soient $A_1, A_2, \ldots, A_r$ des points définis rationnellement dans leur ensemble en fonction des t. Soit enfin J une intégrale abélienne de C, infinie aux seuls points A_i et complètement déterminable par sa façon de s'y comporter et par ses $2p$ périodes cycliques (p : genre de C) Quand les t varient, cycles et infinis peuvent changer. Notre lemme consiste en ceci : *Lorsque le comportement de* J *par rapport aux nouveaux éléments* (cycles et infinis) *est le même que par rapport aux anciens, elle est de forme*

$$(1) \qquad \int R(x, y, t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dx,$$

où R *est rationnelle en tous ses arguments.*

Suivons un argument de M. Picard (²). Les A_i seront découpés par une certaine courbe D, $\varphi(x, y) = 0$, les coefficients de φ étant rationnels aux t. D coupera en général C suivant d'autres points que les A_i. Pour ne pas avoir à nous en préoccuper, convenons de les regarder

---

(¹) Accidentelle en ce sens qu'elle ne provient pas des singularités de V_d. On peut d'ailleurs la remplacer dans l'énoncé par la variété des points non ordinaires (au sens de l'Introduction) de C_k. Par exemple pour $d = 3$ il s'agirait d'un nombre fini de points singuliers isolés.

(²) PICARD et SIMART, *Traité des fonctions algébriques de deux variables*, vol. I, p. 101.

comme des pôles d'ordre zéro de J et de les comprendre ainsi parmi les A_i.

En laissant de côté tout d'abord les périodes cycliques, on trouve que J est une combinaison linéaire d'un certain nombre d'intégrales (1), soient $J_1, J_2, \ldots$ en nombre fini. La détermination des a_k, telle que $J = \Sigma a_k J_k$ possède les périodes voulues, conduit alors à un système d'équations linéaires invariantes dans leur ensemble quand les t varient d'une façon arbitraire. On en conclut que les a_k sont des fonctions uniformes des t. Il est facile de voir qu'elles sont sans singularités essentielles. Par suite, les a_k sont rationnelles et J a bien la forme voulue.

Remarque. — Il est à peine besoin d'insister sur les extensions aux surfaces et aux variétés. Dorénavant il sera entendu, sauf avis contraire, qu'en discutant une V_d toutes les fonctions sont rationnelles aux coordonnées du point courant sur la variété. Le doute, s'il en subsiste, pourra toujours être levé à l'aide d'une discussion de la nature précédente.

III. — Intégrales doubles d'une V_3 (1).

5. Les trois points essentiels pour démontrer le théorème fondamental suivant la voie qui nous a réussi pour les surfaces (*Monographie*, Note I) sont ceux-ci :

1° Détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une intégrale de seconde espèce soit impropre.

2° Réduction des intégrales de seconde espèce à une certaine forme simple.

3° Formation d'une intégrale réduite à périodes données relativement à un certain groupe de cycles.

---

(1) La plupart des théorèmes des sections III, IV ont déjà été donnés dans un Mémoire des *Annali di Matematica*, 3e série, vol. XXVI, 1917. J'en ai cependant notablement simplifié les démonstrations en les adaptant, en outre, au but de ce travail.

Une fois que ces points sont solidement établis, la démonstration s'achève de suite.

6. Intégrales impropres de seconde espèce. — Il sera commode de prendre l'équation de V_3 sous la forme $F(x, y, z, t) = 0$.

Ses intégrales doubles seront de type

$$\int\int A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy \tag{1}$$

avec la condition d'intégralité

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

et il s'agit de savoir dans quelles conditions (1) est de la forme

$$\int\int \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{3}$$

Bien entendu, toutes les fonctions écrites sont rationnelles aux coordonnées courantes sur V_3.

7. Soit $C_1, C_2, \ldots, C_r$ un système de surfaces de V_3 auxquelles correspondent déjà des cycles distincts, au nombre minimum de ρ_0^2, ne les rencontrant pas. Nous pouvons supposer ces cycles $\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \ldots, \Gamma_2^{\rho_0^2}$ contenus dans H_x (n° **2**).

Il est possible qu'en amplifiant le système des courbes $C_i H_x$ de la surface H_x, par certaines courbes $d_1, d_2, \ldots, d_s$, on soit conduit à un nombre différent de cycles distincts (mod H_x) ne rencontrant ni les CH_x ni les d. Je dis cependant que l'*on peut s'arranger pour que nos cycles ne rencontrent pas non plus les d*. En effet, soit D_k une surface quelconque passant par d_k et amplifions le système des C en y ajoutant les D. Le nombre de cycles distincts ne rencontrant pas le système amplifié est toujours ρ_0^2, résultat immédiat de la définition de cet entier. Il y a donc encore ρ_0^2 cycles distincts ne rencontrant ni les C ni les D. En choisissant de tels cycles pour les Γ_2^i, ils auront bien la propriété voulue.

8. Corollaire. — *Pour que* (1), *de seconde espèce, soit de la* *forme*

$$(4)\quad \iint \left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial R'}{\partial z}\right)dy\,dz+\left(\frac{\partial S}{\partial z}+\frac{\partial S'}{\partial x}\right)dz\,dx+\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial T'}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

il faut et il suffit qu'elle n'ait que des périodes nulles par rapport à tout Γ_2 ne rencontrant pas un groupe suffisamment ample de surfaces.

Il suffit d'appliquer le théorème II, n° 7, Note I de ma *Monographie*, par exemple à

$$(5)\qquad \iint A\,dy\,dz$$

pour voir que la condition est bien nécessaire.

Elle est tout aussi bien suffisante. Car d'abord (4) étant de seconde espèce se conduit au voisinage de toute surface d'infini comme une intégrale impropre. On en conclut de suite que (5) est de seconde espèce pour H_x. Soit Γ_2 quelconque dans H_x et n'y rencontrant pas les traces des surfaces C_i, D_k; donc ni les $C_i H_x$, ni les d_k. La période correspondante de (1) est nulle par hypothèse, par suite aussi celle de (5). Cette intégrale doit être alors impropre de seconde espèce pour H_x (*loc. cit.*, n° 14), et A a bien la forme annoncée. De même pour B et C. C. Q. F. D.

9. Théorème. — *Les intégrales impropres de seconde espèce sont de forme invariante par rapport aux transformations birationnelles.*

Soient en effet x', ... les nouvelles variables. (3) est la somme de trois intégrales semblables dont l'une est

$$\begin{aligned}&\iint -\frac{\partial U}{\partial z}dz\,dx+\frac{\partial U}{\partial y}dx\,dy\\ &=\iint \frac{D(x,U)}{D(z,x)}dz\,dx+\frac{D(x,U)}{D(x,y)}dx\,dy\\ &=\iint \frac{D(x,U)}{D(y,z)}dy\,dz+\frac{D(x,U)}{D(z,x)}dz\,dx+\frac{D(x,U)}{D(x,y)}dx\,dy.\end{aligned}$$

Or cette dernière intégrale a pour transformée ([1])

$$(6)\qquad \iint \frac{D(x, U)}{D(y', z')} dy'\,dz' + \frac{D(x, U)}{D(z', x')} dz'\,dx' + \frac{D(x, U)}{D(x', y')} dx'\,dy',$$

et comme on peut écrire avec M. Picard

$$\frac{D(x, U)}{D(y', z')} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(x\frac{\partial U}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(x\frac{\partial U}{\partial y'}\right), \qquad \ldots,$$

(6) a bien la forme voulue. Enfin une somme d'intégrales (3) est toujours de cette forme; donc la transformée de (3) est une intégrale semblable. C. Q. F. D.

10 Théorème. — *Toute intégrale* (4) *est impropre de seconde espèce.*

Pour qu'une intégrale soit de forme (4) il faut et il suffit que certaines de ses périodes soient nulles. Donc elle conserve son type, comme les intégrales impropres, quand on transforme V_3 homographiquement. Faisons-le de manière à rendre la nouvelle intégrale finie sur toute H_x, y compris la surface à l'infini, et écrivons-la sous la forme simplifiée

$$(7)\qquad \iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z}\right) dy\,dz + S\,dz\,dx + T\,dx\,dy.$$

De (7) soustrayons l'intégrale impropre

$$\iint \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z}\right) dy\,dz - \frac{\partial R}{\partial x}dz\,dx - \frac{\partial R'}{\partial x}dx\,dy.$$

Il suffira alors de démontrer le théorème pour l'intégrale restante, finie elle aussi sur toute H_x et de forme

$$(8)\qquad \iint S\,dz\,dx + T\,dx\,dy,$$

([1]) *Voir* Picard et Simart, vol. I, p. 15

avec la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial T}{\partial z}=0.$$

En vertu de cette condition,

$$(9)\qquad \int S\,dz-T\,dy$$

est une intégrale simple attachée à H_x. Sa période par rapport à un Γ_1 quelconque de H_x est une fonction rationnelle $r(x)$. En effet l'intégrale est finie à l'infini, tout comme (8). Prenons donc Γ_1 dans la courbe à l'infini de H_x (courbe fixe de la surface). La période est alors évidemment uniforme, à nombre fini de pôles, donc rationnelle.

Je dis de plus que

$$r_1(x)=\int^x r(x)\,dx$$

est rationnelle aussi. En effet, soit ζ un circuit entourant $x=x_0$ dans le plan x. On aura

$$\int_\zeta r(x)\,dx=0,$$

car le premier membre n'est autre que le résidu de (8) par rapport à un tube Γ_2 dont l'*axe* est la position de Γ_1 dans H_{x_0}. Or (8), finie sur toute H_x, ne pourra posséder un résidu pareil. Ainsi $r_1(x)$, intégrale de fonction rationnelle sans points logarithmiques, est bien rationnelle.

Nous pouvons maintenant former une intégrale simple attachée à H_x, aux périodes $r_1(x)$, soit

$$\int W\,dz+V\,dy,\qquad \frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial y}=0.$$

Il est clair que

$$\iint \frac{\partial W}{\partial x}\,dz\,dx-\frac{\partial V}{\partial x}\,dx\,dy$$

est impropre de seconde espèce. Retranchons-la de (8). Il restera une intégrale, toujours semblable à (8), mais cette fois à intégrale (9) sans périodes, par laquelle on peut remplacer (8) elle-même. Cela revient à admettre que (9) elle-même n'a pas de périodes. Mais alors cette intégrale est une fonction rationnelle $-\mathrm{U}$, sur H_x, que l'on montre en réalité l'être aussi sur V_3. On aura enfin

$$\mathrm{S}=-\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}, \qquad \mathrm{T}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}$$

et (8) prend la forme

$$\int\int -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\,dz\,dx+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\,dx\,dy,$$

qui est bien de forme (3). *Notre théorème est donc démontré.*

Corollaire. — *Pour qu'une intégrale soit impropre, il faut et il suffit qu'elle n'ait que des périodes nulles par rapport à tout* Γ_2 *ne rencontrant pas un groupe suffisamment ample de surfaces.*

11. Réduction des intégrales de seconde espèce. Intégrales réduites a périodes données. — Nous avons vu (n° **8**) que si (1) est de seconde espèce pour V_3, (5) l'est pour H_x. Il y aura alors deux fonctions rationnelles V, W, telles que

$$\mathrm{A}-\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right)=\frac{\mathrm{P}(x,y,z,t)}{\varphi(x)\mathrm{F}'_t},$$

où P et φ sont des polynomes, le premier adjoint à V_3. Soustrayant alors de (1) l'intégrale impropre

$$\int\int\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}-\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\right)dy\,dz+\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}\,dz\,dx-\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,dx\,dy,$$

on la réduira à la forme

$$\int\int\frac{\mathrm{P}(x,y,z,t)}{\varphi(x)\mathrm{F}'_t}\,dy\,dz+\mathrm{B}\,dz\,dx+\mathrm{C}\,dx\,dy, \tag{10}$$

qui répond au second desideratum du n° **5**.

12. V_3 possède au moins un Γ_2 infini. Telle est, par exemple, la courbe infinie de H_x. Tout comme pour V_2, on démontre que tout Γ_2 combiné avec celui-là conduit à un cycle fini. Il suffit, par exemple, de réduire le cycle à H_x et d'appliquer le résultat relatif à V_2. On en conclut que *la variété possède* R_2-1 *cycles* Γ_2 *finis, distincts.*

Soient $\Gamma_2^1, \ldots, \Gamma_2^{n_2-1}$ un tel système de cycles, supposés réduits à H_x. Il s'agit *d'établir l'existence d'une intégrale de seconde espèce* (10) *à périodes arbitraires données par rapport à ces* Γ_2.

Or les Γ_2 évanouissants de H_x sont distincts des cycles précédents (mod H_x), puisque les uns sont ~ 0 (mod V_3) et les autres non, et que toute homologie vraie (mod H_x) l'est certes (mod V_3).

Imposons donc à une intégrale double

$$\int\int \frac{P(y, z, t)}{F'_t} dy\, dz$$

d'avoir des périodes constantes données par rapport aux Γ'_2 et des périodes nulles par rapport aux cycles évanouissants. D'après le lemme, on pourra le faire avec un polynome P rationnel en x. C'est dire qu'il y a une intégrale double

$$(11) \qquad \int\int \frac{P(x, y, z, t)}{\varphi(x) F'_t} dy\, dz,$$

où P et φ ont toujours le même sens, à périodes constantes données par rapport aux Γ'_2. Alors

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\int \frac{P}{\varphi F'_t} dy\, dz$$

est sans périodes, d'où (n° **17**)

$$-\frac{\partial}{\partial x} \frac{P}{\varphi F'_t} = \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

et, par suite,

$$(12) \qquad \int\int \frac{P\, dy\, dz}{\varphi F'_t} + B\, dz\, dx + C\, dx\, dy$$

est une intégrale double attachée à V_3. On voit de suite qu'*elle se conduit comme une intégrale de seconde espèce au voisinage de toute surface autre qu'une* H_{x_i} *relative à une racine* x_i *de* $\varphi(x)$; il faut peut-être aussi exclure la surface à l'infini. Effectivement C étant une surface autre que celles-ci, (12) n'a pas de résidus correspondants, car ils devraient être des résidus de (11). En se servant d'une modification du résultat que nous allons obtenir au numéro suivant, et en raisonnant alors à peu près comme pour V_2 (*Monographie*, Note I, n° 7, théorème IV), on arrivera au résultat cherché.

Observons en tout cas que (12) n'a pas de résidus à l'infini, car de tels résidus appartiendraient aussi à (11).

13. La discussion plus ou moins simple qui va suivre a pour but de nous débarrasser des résidus de (12). Je dis d'abord que *ceux relatifs à* H_{x_i} *sont les périodes d'une intégrale simple de cette surface*. En effet, écrivons (12) sous la forme

$$\iint \frac{H\,dy\,dz}{(x-x_i)^\beta} + \frac{K\,dz\,dx + L\,dx\,dy}{(x-x_i)^\gamma}. \tag{13}$$

Lorsque $\gamma = 1$, $\beta = 0$ ou 1, il n'y a qu'à imiter un raisonnement de M. Picard pour le voir [1]. Soit donc $\beta > 1$. Ajoutons à (13) l'intégrale impropre

$$\frac{1}{\gamma-1}\iint\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{L}{(x-x_i)^{\gamma-1}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{K}{(x-x_i)^{\gamma-1}}\right]dy\,dz - \frac{\partial}{\partial x}\frac{K}{(x-x_i)^{\gamma-1}}dz\,dx - \frac{\partial}{\partial x}\frac{L}{(x-x_i)^{\gamma-1}}dx\,dy.$$

(Comme toute intégrale impropre, cette dernière n'a pas de résidus, car ils devraient appartenir à une intégrale impropre évidente attachée à une des surfaces H_x, H_y, H_z.)

L'intégrale obtenue sera semblable à (13), aux mêmes résidus, mais avec $\gamma - 1$ au lieu de γ. En continuant, on arrivera à une intégrale avec $\gamma = 1$, auquel cas la condition d'intégrabilité donne de suite $B = 0$, et l'on se trouve ramené au type de M. Picard.

14. L'intégrale simple J attachée à H_{x_i} ne peut avoir de périodes logarithmiques que par rapport à la courbe à l'infini de la surface. Comme V_3 est en position générale par rapport aux axes, la courbe en question est irréductible. Or une combinaison linéaire, à coefficients entiers non nuls des périodes logarithmiques de J relativement à ses diverses courbes d'infini irréductibles, est égale à zéro. Donc, si de

[1] PICARD et SIMART, vol. II, p. 476.

telles courbes existent, il y en a au moins *deux* (Picard). On en conclut que J est de seconde espèce.

Puisque les Γ_1 d'une H_x sont invariants, que toutes les surfaces ont même connexion linéaire (elles ne perdent ni ne gagnent de Γ_1 même aux points critiques), il existe une intégrale simple attachée à H_{x_1}

$$\int V\,dy + W\,dz$$

aux mêmes périodes (égales à des constantes) que J par rapport aux Γ_1 correspondants. Ces périodes, rappelons-le, sont des résidus de (12) relativement à H_{x_i}. Mais nous avons

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y};$$

par suite

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{V}{x - x_i} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{W}{x - x_i}.$$

Donc

$$\int\int \frac{V\,dz\,dx - W\,dx\,dy}{x - x_i} \tag{14}$$

vérifie la condition d'intégrabilité. Ses résidus relativement à H sont les mêmes que ceux de (12) puisqu'ils sont les mêmes que ceux de

$$\int\int B\,dz\,dx, \qquad \int\int C\,dx\,dy.$$

De résidu par rapport aux surfaces $H_{x_j}(j \neq i,\ x_j$ fini), elle ne peut en avoir, car ils devraient être proportionnels aux périodes logarithmiques de

$$\int \frac{dx}{x - x_i}.$$

Enfin, comme elle manque de terme en $dy\,dz$, (14) n'a pas de résidus par rapport aux surfaces qui ne sont pas des H_x. Soustrayons donc (14) de (12). Le résultat sera une intégrale semblable, sans résidus par rapport à H_{x_i}. En continuant on arrivera ainsi à une intégrale (12) sans résidus à distance finie. Mais étant de la forme (12), cette intégrale est sans résidus à l'infini. *Cette intégrale, nécessairement de seconde espèce, est celle que nous cherchions.*

15. Nous sommes maintenant en possession de tous les éléments de la démonstration du théorème fondamental pour les intégrales doubles de V_3. Les détails omis se traitent exactement comme pour V_2 et il est inutile de s'y arrêter.

Il n'y a aucune difficulté à identifier $\rho = R_2 - \rho_0^2$ avec le nombre de de M. Picard de V_3. Ici encore nous passons outre, car il ne se présente rien de neuf.

IV. — Intégrales doubles d'une V_d ($d > 3$).

16. Soit $F(x_1, x_2, \ldots, x_d, t) = 0$ l'équation de V_d. Seule la formation d'une intégrale à périodes données présente des difficultés sérieuses. Examinons donc ce point.

On commence par construire

$$(1)\qquad \int\int A_{12}\,dx_1\,dx_2, \qquad A_{12} = \frac{P(x_1, \ldots, x_d, t)}{\varphi(x_3, \ldots, x_d)F'_t}$$

(P, polynome adjoint; φ, polynome), à périodes données par rapport aux Γ_2 de la surface $H_{x_3} \ldots x_d$. Nous savons alors former des fonctions rationnelles $A_{1i} = A_{2i}$, telles que, en tenant toujours compte de ce que $A_{ik} = -A_{ki}$,

$$(2)\qquad \int\int A_{12}\,dx_1\,dx_2 + A_{2i}\,dx_2\,dx_i + A_{i1}\,dx_i\,dx_1,$$

soit de seconde espèce pour $H_{x_3} \ldots x_{i-1}\,x_{i+1} \ldots x_d$. On aura donc les relations

$$(3)\qquad \frac{\partial A_{12}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{2i}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{i1}}{\partial x_2} = 0 \qquad (i = 3, 4, \ldots, d),$$

et l'on se rappellera que

$$(4)\qquad \int\int A_{1i}\,dx_1\,dx_i, \qquad \int\int A_{2i}\,dx_2\,dx_i$$

sont de seconde espèce pour certaines surfaces faciles à spécifier.

En combinant les relations (3) relatives à i, j, on trouve de suite

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial A_{1i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial A_{2i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{2j}}{\partial x_i}\right) = 0.$$

Par conséquent,

$$(5)\qquad \int \left(\frac{\partial A_{1i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_i}\right) dx_1 + \left(\frac{\partial A_{2i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{2j}}{\partial x_i}\right) dx_2$$

est une intégrale simple de la surface $H_{x_i x_j \ldots x_d}$. Soit $r(x_3, x_4, \ldots, x_d)$ une quelconque de ses périodes. On montre sans peine qu'elle est rationnelle.

Non seulement cela, mais

$$(6)\qquad r_1 = \int^{x_j} r\, dx_j$$

l'est aussi, car si elle avait des points logarithmiques,

$$(7)\qquad \int\int \left(\frac{\partial A_{1i}}{\partial x_j} - \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_i}\right) dx_1\, dx_2 = \frac{\partial}{\partial x_j}\int\int A_{1i}\, dx_1\, dx_i - \int\int \frac{\partial A_{1j}}{\partial x_i}\, dx_1\, dx_i$$

aurait des résidus, et ne serait pas de seconde espèce. Or la seconde intégrale à droite l'est évidemment. Quant à la première, c'est la dérivée d'une des intégrales de seconde espèce (4). Ces dernières n'ont pas de résidus, donc leurs dérivées en manquent aussi et sont de seconde espèce. Ainsi (7) est de seconde espèce et (6) est bien rationnelle.

17. Formons donc une intégrale simple attachée à la même surface que (5), aux périodes r_1, soit

$$\int \alpha\, dx_1 + \beta\, dx_2, \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} - \frac{\partial \beta}{\partial x_1} = 0.$$

Alors

$$(8)\qquad \int \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}\, dx_1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_i}\, dx_2,$$

attachée à la même surface, aura les mêmes périodes que (5). La différence entre (5) et (8) sera donc une fonction rationnelle sur cette surface, et en fait sur V_d. Soit $-A_{ij}$ cette fonction.

On aura

$$\frac{\partial A_{1i}}{\partial x_j} - \frac{\partial (A_{1j} + \alpha)}{\partial x_i} = -\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial A_{2i}}{\partial x_j} - \frac{\partial (A_{2j} + \beta)}{\partial x_i} = -\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_2}.$$

Grâce à la relation satisfaite par α, β, on peut remplacer A_{1j} par $A_{1j}+\alpha$ et A_{2j} par $A_{2j}+\beta$, sans modifier les relations (3). Ceci étant fait, employons toujours les mêmes notations qu'avant. Les nouvelles fonctions A_{1j}, A_{2j}, A_{ij} satisfont au système

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}+\dfrac{\partial A_{jk}}{\partial x_i}+\dfrac{\partial A_{ki}}{\partial x_j}=0 \\ (k=1,2;\ i,j=3,4,\ldots,d;\ i\neq j\neq k), \end{array}\right.$$

qui est plus général que (3).

18. Il s'agit maintenant de montrer que les relations (9) sont vraies pour toutes les valeurs de k.

Or de ces relations on tire aisément

$$\frac{\partial^2 A_{ij}}{\partial x_1\,\partial x_k}+\frac{\partial^2 A_{jk}}{\partial x_1\,\partial x_i}+\frac{\partial^2 A_{ki}}{\partial x_1\,\partial x_j}=0\qquad (i,j,k\geqq 3),$$

qui montre que

$$(10)\qquad \int\left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i}\right)dx_j-\frac{\partial A_{ki}}{\partial x_1}dx_1$$

est une intégrale simple attachée à une certaine surface aisément décrite. De la nature du coefficient de dx_1 on déduit que (10) est sans périodes. C'est donc une fonction rationnelle sur sa surface et le même coefficient permet d'affirmer que cette fonction rationnelle est égale à $-A_{ki}$ plus une fonction des x autres que x_1, x_j. Par suite

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i}=-\frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j},$$

ce qui montre que (9) est vérifiée pour $k>2$.

19. Puisque les A satisfont aux conditions d'intégrabilité [les relations (9) pour toutes les combinaisons i, j, k, $i\neq j\neq k$],

$$\int\!\!\int\sum A_{ij}\,dx_i\,dx_j$$

est une intégrale double attachée à V_d, intégrale aux périodes voulues. Je n'insiste pas sur l'élimination de ses résidus qui n'offre aucune difficulté et l'on aura finalement une intégrale de seconde espèce aux mêmes périodes.

On peut donc considérer le théorème fondamental comme établi pour les intégrales doubles d'une V_d quelconque.

V. — Intégrales triple d'une V_3.

20. Nous allons reprendre la V_3 de la section III, nous limitant à traiter des seuls points qui présentent des difficultés nouvelles.

La réduction d'une intégrale de seconde espèce au type

$$(1) \qquad \int\int\int \frac{P(x, y, z, t)}{\varphi(y, z) F_t'} dx\, dy\, dz$$

est facile. Il s'agit d'étudier ses périodes.

Nous nous donnons d'abord un Γ_3 fini et nous le supposons réduit à la forme de la section I

$$(1) \qquad \Gamma_3 \sim \sum \lambda_i \Delta_i + M_3,$$

le faisceau $\{H_z\}$, aux valeurs critiques C_i, jouant ici le même rôle que $\{H_{x_1}\}$ de la section I.

M_3 qui est dans H_c (c est le point de départ des coupures dans le plan z) est finie puisque Γ_3 et les Δ le sont. Je dis que *l'on peut s'arranger pour que* M_3 *ne rencontre pas les courbes* $H_{y_k c}$ ($H_{y_k z}$ *pour* $z = c$), *où* y_k *est une racine de* $\varphi(y, c) = 0$. Pour le voir, examinons la nature de M_3. Les δ_i étant maintenant dans H_c, on aura

$$M_3 \equiv \sum \lambda_i \delta_i.$$

Or les δ sont eux-mêmes des Γ_2 finis de la surface H_c, du type réduit habituel, et tout comme dans ma *Monographie*, Note I (n° 10, Remarque), on peut les remplacer par certains cycles, leur faisant éviter $H_{y_k c}$ quand y_k est critique. Reste à considérer le cas général où y_k ne l'est pas.

Soit R la région du plan y correspondant aux valeurs de y pour lesquelles H_{yc} rencontre M_3. Puisque M_3 est finie, R l'est aussi.

Quand y est sur la frontière de R, H_{yc} coupe M_3 suivant des points isolés et il est clair que l'on peut déformer cette frontière à loisir pourvu que l'on ne lui fasse pas traverser les y critiques. En particulier, on peut faire traverser à cette frontière les y_k non critiques, donc s'arranger pour qu'elles n'appartiennent plus à R. Alors M_3 ne rencontrera plus les $H_{y_k c}$. C. Q. F. D.

21. Les théorèmes (n° **9**, **10**, *loc. cit.*) s'ensuivront et tout aussi bien la réduction des intégrales de seconde espèce au type

$$(2) \qquad \int\int\int \frac{P(x, y, z, t)}{F'_t}\,dx\,dy\,dz.$$

De même pour les théorèmes II et IV (*loc. cit.*, n° 7). En vertu du dernier notamment, une intégrale sans résidus est de seconde espèce. Mais sa réciproque n'est plus vraie. Soit en effet une intégrale impropre attachée à H_z, infinie uniquement sur des H_{yz},

$$(3) \qquad \int\int R(x, y, z, t)\,dx\,dy = \int\int\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)dx\,dy$$

à périodes constantes non toutes nulles, telle que celles déjà données (*loc. cit.*, n° 12); elle existe à coup sûr si le nombre ρ de H_z dépasse l'unité. Tel serait par exemple le cas pour une V_3 quelconque à nombre $\rho > 1$, voire pour une V_3 cubique, quoique son nombre ρ soit égal à l'unité. L'intégrale triple impropre

$$(4) \quad \int\int\int \frac{R}{z - z_0}\,dx\,dy\,dz = \int\int\int\left[\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{U}{z - z_0} + \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{V}{z - z_0}\right]dx\,dy\,dz$$

a pour résidus les périodes de (3) multipliées par $2\pi i$.

Cependant, *une intégrale de seconde espèce manque de résidus par rapport aux Γ_3 de la section III dont la caractéristique est de ne pas rencontrer un groupe suffisamment ample de surfaces de V_3*. On le démontre comme pour le théorème III (*loc. cit.*, n° 7).

22. Arrêtons-nous encore aux résidus de (2), supposée de seconde espèce. De la discussion de la section III on conclut sans peine que tout résidu est une somme de ceux relatifs aux Γ_3 lieux de Γ_2 de H_z quand z décrit un cercle de grand rayon. Mais ces Γ_2 ne sont pas quelconques. En effet, d'après la remarque à la fin du numéro précédent, il faudra toujours qu'ils rencontrent certaines surfaces de V_3. Ce sont donc des cycles dépendant des $\rho - 1$ finis distincts qui ne rencontrent pas toute surface de V_3 en un nombre algébrique nul de points.

En couplant ceci avec la discussion du n° **21** on arrive à la conclusion qu'il y a une intégrale impropre J, somme d'intégrales (3), aux mêmes résidus que (2). La différence J' entre (2) et J est de même forme que cette dernière et l'on aura ainsi réduit (2) à J'. Soit J'' de type (2), aux mêmes périodes que J'. J'' — J' est sans périodes, donc impropre. Par conséquent J', et enfin J, aura été réduite à J''. D'où :

THÉORÈME. — *Toute intégrale de seconde espèce est réductible à une intégrale* (2) *sans résidus.*

25. Les cycles Γ_2 de H_z ne rencontrant pas toutes ses courbes en un nombre algébriquement nul de points sont homologues à des courbes de la surface. Les cycles finis parmi eux sont du type

$$C'_j \sim m C_j - m_j HH_z,$$

où C_j est une courbe d'ordre m_j de H_z et m est l'ordre de V_3 (*Monographie, loc. cit.*, n° 4).

Supposons C'_j invariant, en ce sens que quand z décrit un chemin fermé quelconque, le cycle est toujours ramené à un autre homologue (mod H_z). La période correspondante de

$$(4) \qquad \iint \frac{P(x, y, z, t)}{F'_t} dx\, dy$$

est uniforme, finie pour z finie, régulière à l'infini, donc égale à un *polynome*. Le résidu de (2) par rapport au Γ_3 déduit de C'_i est égal au résidu à l'infini de ce polygone multiplié par $2\pi i$, donc nul également. Ainsi (2) *ne peut avoir de résidus que par rapport aux* Γ_3 *déduits des* C'_i *non invariants.*

Remarquons que si C'_j est invariant, mC_j l'est aussi. On en conclurait facilement à l'invariance de C_j, mais peu importe. Il est surtout utile pour nous de savoir qu'il existe alors une courbe $\overline{C}_j$ de H_z, *trace d'une surface de* V_3, telle que (¹)

$$\overline{C}_j \sim m C_j + \mu \, HH_z \qquad (\text{mod } H_z).$$

On voit de suite qu'il est possible de remplacer partout C_j par $\overline{C}_j$.

Réservant ρ pour le nombre de Picard de V_3, soit ρ' celui des H. Disons en passant que ρ est le nombre maximum de surfaces non homologues en tant que Γ_4 de la variété (*loc. cit.*). De plus les traces de telles surfaces sur une H donnent lieu à des courbes non homologues (mod H). On en conclut que le nombre de $\overline{C}_j$ distinctes (mod H_z) est précisément ρ. Donc enfin *le nombre de cycles* C'_j *non invariants, distincts* (mod H_z) *est égal à* $\rho' - \rho$. *Ce nombre est aussi celui des résidus distincts de* (2).

Je rappelle encore cette proposition fort importante que j'ai démontrée (*loc. cit.*, p. 356) : *Lorsque le* ρ_0^2 *des sections hyperplanes dépasse celui de* V_3, ρ' *est égal à* ρ. Un corollaire immédiat en est ce résultat très intéressant : *Lorsque le* ρ_0^2 *des sections hyperplanes dépasse celui de* V_3, *les intégrales de seconde espèce* (2) *n'ont pas de résidus.*

24. Pour achever la démonstration du théorème fondamental comme dans la *Monographie*, la seule difficulté possible se présente quand on veut démontrer ce théorème :

Théorème. — *Il existe une intégrale impropre n'ayant que des* H_z *pour surfaces d'infini, à périodes arbitraires données par rapport aux cycles* $\overline{\Gamma}_3^q$ *de la section I.*

Dans ses grandes lignes, ce théorème a déjà été démontré dans mon Mémoire des *Transactions of the Am. Math. Soc.*, p. 339. Je vais y revenir pour préciser certains détails qui n'y avaient été qu'effleurés.

Considérons d'abord l'intégrale double la plus générale attachée

---

(¹) *Voir* mon Mémoire des *Transactions of the American Mathematical Society*, p. 352.

à H_z :

$$\iint W(x, y, z, t)\, dx\, dy, \tag{5}$$

infinie uniquement sur les courbes $C_i H_z$ à distance finie. J'ai étudié jadis ces intégrales ([1]), et de mon travail on tire cette conclusion : Les résidus relatifs à une des courbes en question sont les périodes cycliques et logarithmiques de l'intégrale abélienne la plus générale, infinie aux points $C_i C_k H_z$, ainsi qu'à l'infini (on ne considère pour l'instant que les C autres que la surface à l'infini), avec cette restriction : Les résidus par rapport à un point quelconque (intersection de deux C sur H_z, ou point multiple de l'une) doivent satisfaire à un certain nombre de relations linéaires et homogènes à coefficients entiers.

En se rappelant la propriété caractéristique des $\overline{\Gamma}_3$, on arrive à cette conclusion : Il existe une intégrale (5) ayant par rapport à chacun des cycles linéaires $\overline{\Gamma}_3^h C_i$ (ou plutôt par rapport à des tubes de H_c dont ces cycles sont les axes) un résidu arbitraire donné. De là on conclut à l'existence d'une intégrale (5) à résidu égal à $+1$ relativement à $\sum_i \overline{\Gamma}_3^h C_i$, et au contraire à résidu nul relativement aux cycles semblables correspondant aux autres valeurs de h.

Dans ces conditions

$$\frac{\partial}{\partial z}\iint W\, dx\, dy$$

est de seconde espèce à distance finie sur H_z. On peut appliquer à une telle intégrale le raisonnement du n° 11, Note I, de la *Monographie*, qui exige seulement qu'elle se conduise comme une intégrale de seconde espèce à distance finie. On en conclura à l'existence de U, V, telles que

$$\begin{aligned} J_h &= \iiint R(x, y, z, t)\frac{dx\, dy\, dz}{F'_t} \\ &= \iiint \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz, \end{aligned}$$

où R est infinie uniquement sur des H_z.

([1]) *Quarterly Journal*, vol. XLIX, 1917, p. 333-343.

Soit Γ_2^h la frontière du voisinage de $\sum_i \overline{\Gamma_3^h}\, C_i$ sur $\overline{\Gamma_3^h}$. Puisque $dz = 0$ sur les Γ_2^h,

$$\int\int_{\overline{\Gamma}_4^h} \frac{R\,dx\,dy\,dz}{F_i} = \int\int_{\Gamma_2^h} W\,dx\,dy = 1,$$

$$\int\int\int_{\overline{\Gamma}_3^k} = 0 \qquad (k \neq h).$$

L'intégrale $\Sigma\alpha_h J_h$ est infinie uniquement sur des H_z et a les α_h pour périodes relativement aux $\overline{\Gamma_3^h}$. Ceci démontre notre théorème.

25. Conclusion. — Ce qui précède nous donne tous les éléments de la démonstration du théorème fondamental. L'extension aux intégrales k-uples d'une V_d quelconque n'offre pas de difficultés nouvelles.