JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH. RIQUIER

Sur les principes fondamentaux de la théorie des contacts dans l'Hypergéométrie réelle ou imaginaire et sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 109-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__109_0>

Sur les principes fondamentaux de la théorie des contacts dans l'Hypergéométrie réelle ou imaginaire et sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre;

PAR CH. RIQUIER,

Professeur à l'Université de Caen.

DEUXIÈME PARTIE (¹).

SYSTÈMES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE; FIGURES INTÉGRALES; FAMILLES COMPLÈTES DE FIGURES INTÉGRALES; RÉDUCTION DES SYSTÈMES QUELCONQUES.

Rappel d'une notion courante.

35. Considérons un système différentiel quelconque, T, où se trouvent engagées diverses fonctions inconnues, $u, v, \ldots$, des variables indépendantes $x, y, \ldots$, et dont nous supposerons les seconds membres réduits à zéro par la simple transposition, toujours permise, de leurs termes dans les premiers membres. En même temps que le système T, considérons un système (T *bis*), identique à T quant à l'écriture, mais où les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ seront supposées dépendre, non plus seulement, comme dans T, des variables $x, y, \ldots$, mais encore d'autres variables, $\alpha, \beta, \ldots$, en nombre quelconque, *qui ne figurent*

(¹) Pour la première Partie, voir *Journal de Mathématiques*, t. II, 1923, p. 215 à 280.

dans les équations, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation. Considérons enfin le système des formules

$$(1)\qquad \begin{cases} u = \psi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots), \\ v = \varphi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont supposés développables à partir des valeurs numériques

$$x_0, \quad y_0, \quad \ldots, \quad \alpha_0, \quad \beta_0, \quad \ldots$$

de

$$x, \quad y, \quad \ldots, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \ldots \text{ (1)}.$$

Cela étant :

Si les fonctions (1) *sont des intégrales du système* (T *bis*), *elles fournissent, par l'attribution à* $\alpha, \beta, \ldots$, *de toutes valeurs numériques (suffisamment rapprochées de* $\alpha_0, \beta_0, \ldots$), *des intégrales du système* T.

Réciproquement, si, par l'attribution à $\alpha, \beta, \ldots$, *de toutes valeurs numériques (suffisamment rapprochées de* $\alpha_0, \beta_0, \ldots$), *les fonctions* (1) *fournissent des intégrales du système* T, *elles sont des intégrales du système* (T *bis*).

I. Soient

$$\begin{gathered} x, \quad y, \quad \ldots \\ \alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \end{gathered}$$

des variables indépendantes partagées en deux groupes qui en contiennent chacun un nombre quelconque;

$\mathfrak{D}$ un domaine de l'espace

$$[[x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots]]$$

défini à l'aide des relations

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < R_y, \qquad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(\alpha - \alpha_0) < R_\alpha, \qquad \operatorname{mod}(\beta - \beta_0) < R_\beta, \qquad \ldots, \end{aligned}$$

(1) Il s'agit de développements entiers par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, $\ldots$, $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0$, $\ldots$.

où $x_0, y_0, \ldots, \alpha_0, \beta_0, \ldots$ désignent des valeurs particulières de $x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$, et $R_x, R_y, \ldots, R_\alpha, R_\beta, \ldots$ des constantes positives (>0);

$H(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$ une fonction représentable dans toute l'étendue du domaine $\mathfrak{D}$ à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots, \alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0, \ldots$.

Si aux variables $\alpha, \beta, \ldots$ du second groupe on attribue des valeurs particulières, $\alpha_1, \beta_1, \ldots$, vérifiant les relations

$$\operatorname{mod}(\alpha_1 - \alpha_0) < R_\alpha, \qquad \operatorname{mod}(\beta_1 - \beta_0) < R_\beta, \qquad \ldots,$$

et que l'on prenne une dérivée quelconque de la fonction des seules variables $x, y, \ldots$ ainsi obtenue, le résultat final est le même que si l'on avait *d'abord* effectué sur $H(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$ la dérivation dont il s'agit (relative aux seules variables $x, y, \ldots$), et que l'on eût *ensuite* introduit dans la dérivée résultante l'hypothèse numérique

$$\alpha, \beta, \ldots = \alpha_1, \beta_1, \ldots.$$

En d'autres termes, on a la relation

$$\left[\frac{\partial^{i+j+\ldots} H(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial x^i \partial y^j \ldots}\right]_{\alpha, \beta, \ldots = \alpha_1, \beta_1, \ldots} = \frac{\partial^{i+j+\ldots} H(x, y, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots)}{\partial x^i \partial y^j \ldots}.$$

Observons en effet que les différences

$$R_\alpha - \operatorname{mod}(\alpha_1 - \alpha_0) = r_\alpha,$$
$$R_\beta - \operatorname{mod}(\beta_1 - \beta_0) = r_\beta,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sont positives (>0), et considérons le domaine, $\mathfrak{d}$, défini à l'aide des relations

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < R_y, \qquad \ldots,$$
$$\operatorname{mod}(\alpha - \alpha_1) < r_\alpha, \qquad \operatorname{mod}(\beta - \beta_1) < r_\beta, \qquad \ldots.$$

Des premières propriétés établies sur les séries entières ([1]) il résulte que la fonction $H(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$ est représentable, dans toute

([1]) Voir *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 45.

l'étendue du domaine $\mathfrak{d}$, à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, ..., $\alpha - \alpha_1$, $\beta - \beta_1$, ... En ordonnant ce développement par rapport à $\alpha - \alpha_1$, $\beta - \beta_1$, ..., on aperçoit immédiatement la propriété que nous avons en vue.

II. Revenons à notre énoncé général, et considérons les expressions

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^{m+n+\ldots}\psi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial x^m\,\partial y^n \ldots} & (m \geqq 0,\ n \geqq 0, \ldots), \\ \dfrac{\partial^{p+q+\ldots}\varphi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial x^p\,\partial y^q \ldots} & (p \geqq 0,\ q \geqq 0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

c'est-à-dire les fonctions $\psi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$, ..., avec leurs dérivées de tous ordres relatives aux seules variables $x, y, \ldots$. Puis, désignant par α_1, β_1, ..., des valeurs particulières quelconques de α, β, ... (suffisamment rapprochées de α_0, β_0, ...), introduisons dans les expressions (2) l'hypothèse numérique

$$\alpha, \beta, \ldots = \alpha_1, \beta_1, \ldots,$$

et soient

$$(3)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \left[\dfrac{\partial^{m+n+\ldots}\psi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial x^m\,\partial y^n \ldots}\right]_{\alpha, \beta, \ldots = \alpha_1, \beta_1, \ldots} & (m \geqq 0,\ n \geqq 0, \ldots), \\ \left[\dfrac{\partial^{p+q+\ldots}\varphi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)}{\partial x^p\,\partial y^q \ldots}\right]_{\alpha, \beta, \ldots = \alpha_1, \beta_1, \ldots} & (p \geqq 0,\ q \geqq 0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

les fonctions des seules variables $x, y, \ldots$ ainsi obtenues. En vertu de la remarque exposée dans l'alinéa I, les expressions (3) sont, quels que soient $x, y, \ldots$, respectivement égales aux expressions

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^{m+n+\ldots}\psi(x, y, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots)}{\partial x^m\,\partial y^n \ldots} & (m \geqq 0,\ n \geqq 0, \ldots), \\ \dfrac{\partial^{p+q+\ldots}\varphi(x, y, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots)}{\partial x^p\,\partial y^q \ldots} & (p \geqq 0,\ q \geqq 0, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Cela étant, supposons que les fonctions $\psi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots)$, ..., seconds membres des formules (1), soient des intégrales du système (T *bis*). Si, dans les premiers membres de (T *bis*), on remplace les dérivées

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^{m+n+\ldots} u}{\partial x^m\, \partial y^n \ldots} & (m \geqq 0,\ n \geqq 0,\ \ldots), \\ \dfrac{\partial^{p+q+\ldots} v}{\partial x^p\, \partial y^q \ldots} & (p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

par les expressions respectives (2), ces premiers membres deviennent des fonctions de $x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ identiquement nulles, lesquelles, par l'attribution ultérieure à $\alpha, \beta, \ldots$ des valeurs numériques $\alpha_1, \beta_1, \ldots$, se réduiront à des fonctions de $x, y, \ldots$ identiquement nulles. D'ailleurs, les variables $\alpha, \beta, \ldots$ ne figurant pas dans le système (T *bis*), cette suite d'opérations pourra s'effectuer en remplaçant dans (T *bis*) les dérivées (5) par les expressions respectives (3), ou, ce qui revient au même à cause de l'identité signalée plus haut, par les expressions respectives (4). Ainsi, par la substitution aux dérivées (5) des expressions (4), les premiers membres de (T *bis*) se réduisent à des fonctions de $x, y, \ldots$ identiquement nulles : les premiers membres de T, qui sont les mêmes que ceux de (T *bis*), jouissent donc aussi de cette propriété; en d'autres termes, les fonctions

$$\left\{\begin{array}{l} u = \psi(x, y, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots), \\ v = \varphi(x, y, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

sont des intégrales du système T.

Réciproquement, supposons que, pour toutes valeurs numériques, $\alpha_1, \beta_1, \ldots$, de $\alpha, \beta, \ldots$ (suffisamment rapprochées de $\alpha_0, \beta_0, \ldots$), les fonctions (1) fournissent des intégrales du système T. Si, dans les premiers membres de T, on remplace les dérivées (5) par les expressions respectives (4), ou, ce qui revient au même, par les expressions respectives (3), ces premiers membres se réduisent à des fonctions de $x, y, \ldots$ identiquement nulles : les premiers membres de (T *bis*), qui sont les mêmes que ceux de T, jouissent donc aussi de cette propriété, c'est-à-dire, puisque les valeurs $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ sont arbitraires, que si, dans les premiers membres de (T *bis*), on remplace les dérivées (5) par les expressions respectives (2), ces premiers membres se réduisent à des fonctions de $x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$ identiquement nulles; en d'autres termes, les fonctions (1) sont des intégrales du système (T *bis*).

Figures intégrales ordinaires et figures intégrales singulières d'un système d'équations aux dérivées partielles.

54. Nous plaçant, pour tout ce qui concerne les définitions fondamentales de la théorie des fonctions, au point de vue constamment adopté dans nos recherches antérieures, nous commencerons par rappeler que l'adoption d'un pareil point de vue impose logiquement à toutes intégrales d'un système différentiel la condition d'être *olotropes* [1], tout au moins entre certaines limites : car le mot *différentiel*, qui sert de qualificatif au système, implique à lui seul l'existence des dérivées des fonctions inconnues, laquelle, si l'on se reporte aux définitions premières auxquelles nous avons fait allusion, implique à son tour l'olotropie de ces fonctions. Cela posé, une distinction essentielle doit avant tout être faite entre les divers groupes possibles d'intégrales d'un système donné.

Dans un système différentiel, S, résolu par rapport à telles ou telles dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, les intégrales seront qualifiées d'*ordinaires*, si l'on peut assigner au groupe des variables indépendantes quelque domaine de variation tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient olotropes, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où tous les seconds membres du système soient eux-mêmes olotropes [2].

---

[1] *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. III.

[2] « Un système différentiel est *immédiat*, quand toutes ses équations sont du premier ordre et fournissent immédiatement plus ou moins de dérivées des fonctions inconnues, exprimées en fonctions composées des variables indépendantes, de ces fonctions inconnues elles-mêmes et de leurs autres dérivées....

» Les intégrales *ordinaires* d'un système immédiat sont celles dont les valeurs, à elles-mêmes et à leurs dérivées paramétriques premières, associées aux valeurs correspondantes des variables, tombent toujours dans des aires où les compo-

La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations du système considéré en transforme les divers seconds membres en diverses fonctions composées des variables, des intégrales, et de quelques-unes de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour la différentiation des fonctions composées sont applicables aux seconds membres dont il s'agit; d'ailleurs, les deux membres de chaque équation étant identiquement égaux après cette substitution, leurs dérivées semblables de tous ordres le sont aussi : en conséquence, un groupe quelconque d'intégrales ordinaires vérifie, non seulement les équations du système, mais encore toutes celles qu'on en peut déduire par différentiation.

Une solution non ordinaire du système sera qualifiée de *singulière*.

Désignant, enfin, par h le nombre des variables indépendantes $x, y, \ldots$ et par k celui des fonctions inconnues $u, v, \ldots$, nous dirons qu'une figure à h dimensions, définie dans l'espace à $h+k$ dimensions

$$[[x, y, \ldots, u, v, \ldots]],$$

par un groupe réduit de k équations finies (n° **20**), est une *figure intégrale* du système S, si ce groupe réduit est résoluble par rapport aux k coordonnées $u, v, \ldots$, et que, après résolution, il fournisse un groupe d'intégrales particulières de S; la figure intégrale sera dite

---

santes des seconds membres des équations du système sont toutes olotropes.

» Pour les intégrales *singulières*, au contraire, les valeurs dont il s'agit sont toujours singulières pour quelqu'une au moins de ces composantes. »

MÉRAY. *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, première Partie, p. 310, 313.

Ce point de vue nous a semblé pouvoir être généralisé comme il suit :

« Des intégrales particulières d'un système donné seront dites *ordinaires*, si, les seconds membres du système ayant été réduits à zéro par la simple transposition de leurs termes dans les premiers membres, on peut assigner quelque domaine tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient exprimables par des développements construits à partir du centre, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où les premiers membres du système soient exprimables de la même manière. »

Voir *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 98.

ordinaire ou *singulière*, suivant que les intégrales particulières ainsi obtenues par résolution sont elles-mêmes ordinaires ou singulières.

La considération des figures intégrales singulières sera, dans ce qui suit, systématiquement exclue.

Observation sur l'intégrabilité complète d'un système d'équations aux dérivées partielles orthonome [1].

35. Considérons un système d'équations aux dérivées partielles orthonome, O, impliquant les fonctions inconnues $u, v, \ldots$ des variables indépendantes $x, y, \ldots$. En même temps que O, considérons le système orthonome (O *bis*), identique à O quant à l'écriture, mais où les inconnues $u, v, \ldots$ seront supposées dépendre, non plus seulement de $x, y, \ldots$, comme dans O, mais encore d'autres variables, $\alpha, \beta, \ldots$, en nombre quelconque, qui ne figurent dans le système, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation.

Cela étant, *les conditions de passivité sont les mêmes pour* O *et* (O *bis*).

I. S'il n'y a, dans un système orthonome, aucune dérivée cardinale des inconnues, *la passivité du système a lieu d'elle-même* [2].

II. Supposons que, dans un système orthonome, il y ait des dérivées cardinales, c'est-à-dire que deux premiers membres au moins du système considéré soient des dérivées d'une même inconnue. *Pour qu'un pareil système soit passif, ou, ce qui revient au même, pour que les diverses expressions ultimes de chaque dérivée principale soient identiquement égales entre elles, il suffit que cela ait lieu pour chacune des dérivées cardinales* [3].

---

[1] *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. VII.

[2] *Ibid.*, nos 92, 110.

[3] *Ibid.*, no 111. Les alinéas I, II, III et IV de la démonstration qui se trouve exposée au no 111 de l'Ouvrage cité pourront être reproduits textuellement; la rédaction du dernier alinéa, V, sera très légèrement modifiée comme il suit :

« Comme nous l'avons déjà remarqué dans le deuxième alinéa de la démonstration, chaque dérivée principale de première classe ne possède, dans un système orthonome, qu'une seule expression directe. Si donc on suppose que les diverses

III. Revenons à notre énoncé général.

Les systèmes O, (O *bis*) étant identiques quant à l'écriture, et les variables α, β, ... n'y figurant, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation, il est facile de voir : 1° que les dérivées cardinales des inconnues sont les mêmes pour les deux systèmes; 2° que chacune de ces dérivées cardinales a, de part et d'autre, les mêmes expressions ultimes.

En rapprochant de ce fait les conclusions formulées dans les alinéas I et II, on aperçoit immédiatement que les conditions de passivité sont les mêmes pour O et (O *bis*).

56. *Tout système orthonome passif est complètement intégrable, c'est-à-dire admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies* (1).

57. *La passivité du système orthonome* O *entraîne l'intégrabilité complète des systèmes* O *et* (O *bis*), considérés au n° **55**.

C'est ce qui résulte du simple rapprochement des n^os^ **55** et **56**.

Familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

58. Supposons qu'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant les k fonctions inconnues u, v, ... des h variables indépendantes x, y, ..., soit résolu par rapport à un groupe de dérivées (premières) de u, v, ... Pour disposer nettement les équations d'un système de cette espèce, on peut les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux

expressions ultimes de chaque dérivée cardinale sont identiquement égales, l'application répétée des propositions qui font l'objet des troisième et quatrième alinéas prouve que l'égalité identique entre les diverses expressions directes d'une même dérivée principale a encore lieu dans la deuxième classe, puis dans la troisième, et ainsi de suite indéfiniment. Il n'y a, dès lors, pour une même dérivée principale quelconque, qu'une seule expression directe, et, à plus forte raison, qu'une seule expression ultime, ce que nous voulions établir.

(1) *Ibid.*, n° 115.

variables x, y, ... et les colonnes aux inconnues u, v, ..., en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{\partial u}{\partial x}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x) : on obtient ainsi une sorte de damier où les cases pleines et vides peuvent offrir des dispositions relatives variées. Si, pour fixer les idées, on considère un système du premier ordre, S, impliquant les deux fonctions inconnues u, v des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, le damier dont il s'agit contiendra trois cases pleines, correspondant à ces trois dérivées, et cinq cases vides correspondant aux dérivées restantes, $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$; quant aux seconds membres du système, ils seront fonctions de ces dernières et de x, y, z, s, u, v.

(1)

	(u)	(v)
(x)	$\frac{\partial u}{\partial x} = \ldots$	
(y)	$\frac{\partial u}{\partial y} = \ldots$	
(z)		$\frac{\partial v}{\partial z} = \ldots$
(s)		

39. Supposons actuellement qu'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, impliquant les k fonctions inconnues u, v, ... des h variables indépendantes x, y, ..., et résolu, comme il vient d'être dit, par rapport à un groupe déterminé de dérivées (premières) de u, v, ..., satisfasse à la condition suivante ;

Le système, ainsi résolu, est complètement intégrable.

Il ne cesse pas de l'être lorsqu'on y considère les fonctions inconnues u, v, ... comme dépendant, non seulement de $x, y, \ldots$, mais encore d'autres variables, en nombre quelconque, qui ne figurent dans les équations du système, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation.

[C'est ce qui a lieu, par exemple, dans un système orthonome passif (n° **37**).]

En supposant, pour fixer les idées, qu'il s'agisse du système S, de damier (1), donné comme exemple au numéro précédent, il résulte de l'hypothèse formulée que ce système, si les inconnues u, v y sont considérées comme dépendant seulement de x, y, z, s, admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires (n° **34**) répondant à des conditions initiales de la forme

$$\left\{\begin{array}{ll} u = \text{fonction donnée de } z, s & \text{pour } x, y = \text{valeurs numériques données } x_0, y_0, \\ v = \text{fonction donnée de } x, y, s \text{ pour} & z = \text{valeur numérique donnée } z_0; \end{array}\right.$$

et que le système (S *bis*), identique à S quant à l'écriture, mais où les inconnues u, v sont considérées comme dépendant à la fois de x, y, z, s, et d'autres variables, α, β, ..., en nombre qnelconque, admet un groupe (unique) d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales de la forme

$$\left\{\begin{array}{ll} u = \text{fonct. donnée de } z, s, \alpha, \beta, \ldots & \text{pour } x, y = \text{val. numér. données } x_0, y_0, \\ v = \text{fonct. donnée de } x, y, s, \alpha, \beta, \ldots \text{ pour} & z = \text{val. numér. donnée } z_0. \end{array}\right.$$

Cela posé, définissons ce que l'on doit entendre par famille *complète* de figures intégrales (ordinaires) du système S (n° **34**).

A cet effet, ajoutons au nombre des cases vides de son damier [le damier (1)] celui des fonctions inconnues que le système implique, ce qui donne le total 7; puis, en même temps que le système S, considérons les deux relations

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} F(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \\ H(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \end{array}\right.$$

où figurent, avec u, v, x, y, z, s, les sept constantes arbitraires α, β, γ, δ, θ, λ, μ. Les relations (2) étant supposées résolubles par rapport à u, v, exécutons sur elles les diverses différentiations premières relatives à x, y, z, s, en traitant u, v comme des fonctions de x, y, z, s, α, β, γ, δ, θ, λ, μ; il vient ainsi

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, & \dfrac{\partial H}{\partial x}+\dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0, & \dfrac{\partial H}{\partial y}+\dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial z}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}=0, & \dfrac{\partial H}{\partial z}+\dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z}=0,\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial s}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s}=0, & \dfrac{\partial H}{\partial s}+\dfrac{\partial H}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial s}+\dfrac{\partial H}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial s}=0.
\end{array}\right.$$

Cela étant, les relations (2) seront dites définir une famille *complète* de figures intégrales (ordinaires) du système S, si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° *En même temps que les relations* (2) *sont résolubles par rapport aux inconnues* u, v, *le système formé par les dix équations* (2) *et* (3) *est résoluble par rapport aux dix quantités* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, α, β, γ, δ, θ, λ, μ [c'est-à-dire par rapport aux sept constantes arbitraires et aux trois dérivées premières qui correspondent respectivement aux trois cases pleines du damier (1)].

2° *Par l'attribution* α, β, γ, δ, θ, λ, μ *de toutes valeurs numériques, les relations* (2) *donnent des figures intégrales* (*ordinaires*) *de* S.

Dans l'exposé qui suit, nous adopterons constamment, pour les diverses quantités

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial s},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial z},\quad \frac{\partial v}{\partial s},$$

les notations respectives

$$u_x,\quad u_y,\quad u_z,\quad u_s,\quad v_x,\quad v_y,\quad v_z,\quad v_s;$$

il en résultera, pour le système S, l'écriture

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} u_x &= U_x(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s),\\ u_y &= U_y(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s),\\ v_z &= V_z(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \end{aligned}\right.$$

et, pour les relations (3), l'écriture

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} u_x + \frac{\partial F}{\partial v} v_x = 0, &\quad &\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u} u_x + \frac{\partial H}{\partial v} v_x = 0,\\ &\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} u_y + \frac{\partial F}{\partial v} v_y = 0, &\quad &\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial u} u_y + \frac{\partial H}{\partial v} v_y = 0,\\ &\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u} u_z + \frac{\partial F}{\partial v} v_z = 0, &\quad &\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial u} u_z + \frac{\partial H}{\partial v} v_z = 0,\\ &\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial u} u_s + \frac{\partial F}{\partial v} v_s = 0, &\quad &\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial u} u_s + \frac{\partial H}{\partial v} v_s = 0. \end{aligned}\right.$$

On suppose d'ailleurs expressément (puisque la considération des figures intégrales singulières est, comme nous l'avons dit plus haut, systématiquement exclue du présent travail) que, dans le groupe numérique (fondamental)

$$\left\{\begin{array}{ll} (6) & x_0,\ y_0,\ z_0,\ s_0,\ u_0,\ v_0,\ (u_z)_0,\ (u_s)_0,\ (v_x)_0,\ (v_y)_0,\ (v_s)_0,\\ (7) & (u_x)_0,\ (u_y)_0,\ (v_z)_0,\\ (8) & \alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0,\ \delta_0,\ \theta_0,\ \lambda_0,\ \mu_0, \end{array}\right.$$

à partir duquel peut s'effectuer la résolution, tant du système (2) par rapport à u, v que du système [(2), (5)] par rapport à u_x, u_y, v_z, α, β, γ, δ, θ, λ, μ, les valeurs (6) n'excèdent pas les limites d'olotropie communes aux seconds membres, U_x, U_y, V_z, du système (4).

40. Avant de poursuivre, il est indispensable d'observer que, *si le groupe des relations* (2) *remplit les deux conditions requises par la définition du numéro précédent, tout groupe réduit,* (2′), *numériquement équivalent à* (2) *les remplit également.*

I. Considérons préalablement deux systèmes, P, Q, composés chacun de m équations, et définissant chacun, par résolution à partir d'une même solution numérique fondamentale, m fonctions implicites, u, v, ..., des deux groupes de variables (x, y, ...) et (α, β, ...) (n° **1**);

spécifions en outre, en vue de ce qui va suivre, que les diverses différentiations à exécuter sur toutes ces équations conformément à la règle des fonctions implicites se rapporteront exclusivement aux variables $x, y, \ldots$ du premier groupe. Si, sur les équations de P, on exécute toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, g$, et que, dans les relations ainsi obtenues, on assimile pour un instant les variables $x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots$, les fonctions $u, v, \ldots$ et leurs dérivées à autant de variables indépendantes distinctes, le système résultant est, comme on sait, un système réduit, résoluble par rapport aux m fonctions implicites que définit P et à leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, g$ (n'intéressant que $x, y, \ldots$) (¹). Pareillement, si, sur les équations de Q, on opère toutes les différentiations des ordres $0, 1, 2, \ldots, g$, le système résultant est un système réduit, résoluble par rapport aux m fonctions implicites que définit Q et à leurs dérivées semblables. Cela étant, je dis que *l'équivalence numérique des deux systèmes* P, Q, *lorsqu'elle a lieu, entraîne l'équivalence numérique des deux systèmes qui s'en déduisent respectivement à l'aide des différentiations indiquées.*

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les deux systèmes P, Q, étant, par hypothèse, numériquement équivalents, définissent (n° **6**) un seul et même groupe de fonctions implicites,

$$(9) \qquad \begin{cases} u = \varphi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots), \\ v = \psi(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et que d'ailleurs, en vertu de la propriété ci-dessus rappelée, chacun des deux systèmes visés par la conclusion de l'énoncé du présent alinéa I équivaut au système que l'on déduit de (9) par toutes les différentiations possibles des ordres $0, 1, 2, \ldots, g$ relatives à $x, y, \ldots$.

II. Établissons maintenant la remarque formulée au début du présent n° **40**.

L'équivalence numérique supposée entre les systèmes réduits (2) et (2′) entraîne, en vertu du n° **6**, les conséquences suivantes : le sys-

(¹) *Voir* à ce sujet les nºˢ 118 à 121 de l'Ouvrage intitulé *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles.*

tème (2′) se compose, comme (2), de deux équations; il peut, comme lui, être résolu par rapport à u, v; et il définit les mêmes fonctions implicites, u, v, des variables

$$x,\ y,\ z,\ s,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \theta,\ \lambda,\ \mu.$$

Dès lors, puisque les fonctions implicites que définit le système (2) sont supposées fournir, par l'attribution à α, β, γ, δ, θ, λ, μ de toutes valeurs numériques, des solutions particulières du système (4), il en sera de même pour celles que définit le système (2′).

Considérons, d'autre part, les deux systèmes qui se déduisent respectivement de (2) et de (2′) par toutes les différentiations des ordres 0, 1, relatives à x, y, z, s : en vertu de I, ces deux systèmes réduits sont numériquement équivalents. Dès lors, puisque le premier est supposé résoluble par rapport aux quantités

$$u_x,\ u_y,\ v_z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \theta,\ \lambda,\ \mu,$$

le second jouira nécessairement aussi de la même propriété (n° **6**).

41. Il nous faut maintenant, pour justifier la définition du n° **39** (à laquelle se rattache intimement la remarque du n° **40**), établir l'existence de quelque famille complète de figures intégrales (ordinaires) du système S [ou (4)].

Soit donc

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ s_0,\ u_0,\ v_0,$$
$$(u_x)_0,\ (u_y)_0,\ (u_z)_0,\ (u_s)_0,\ (v_x)_0,\ (v_y)_0,\ (v_z)_0,\ (v_s)_0$$

une solution *numérique* du système (4) choisie comme on voudra sous la seule restriction *que les valeurs*

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ s_0,\ u_0,\ v_0,\ (u_z)_0,\ (u_s)_0,\ (v_z)_0,\ (v_y)_0,\ (v_s)_0$$

n'excèdent pas les limites d'olotropie communes aux seconds membres de ce système (¹).

En prenant pour valeurs fondamentales de

$$x,\ y,\ z,\ s,\ u,\ v,\ u_x,\ u_y,\ u_z,\ u_s,\ v_x,\ v_y,\ v_z,\ v_s$$

(¹) *Voir* la remarque finale du n° **39**.

celles qui figurent dans la solution numérique choisie, et pour valeurs fondamentales des sept indéterminées

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \theta, \quad \lambda, \quad \mu$$

des valeurs numériques,

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \gamma_0, \quad \delta_0, \quad \theta_0, \quad \lambda_0, \quad \mu_0, \tag{10}$$

choisies d'une façon entièrement arbitraire, on peut assigner au système (4), de la manière que nous allons indiquer, *quelque famille complète de figures intégrales* (*ordinaires*).

Considérons en effet un système d'équations aux dérivées partielles, (4 *bis*), identique à (4) quant à l'écriture, mais où les fonctions inconnues u, v seront supposées dépendre, non plus seulement, comme dans (4), de x, y, z, s, mais encore de sept autres variables, α, β, γ, δ, θ, λ, μ, qui ne figurent dans le système, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation, et pour lesquelles nous choisirons arbitrairement les valeurs fondamentales (10).

Désignons ensuite par

$$\upsilon(z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu),$$
$$\varphi(x, y, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu)$$

deux fonctions choisies comme on voudra dans les seules conditions :

1° Que les fonctions υ, φ soient développables à partir des valeurs fondamentales des quantités dont elles dépendent respectivement, et que les sept fonctions

$$\upsilon, \quad \varphi, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial z}, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial s}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s}$$

aient pour valeurs fondamentales respectives

$$u_0, \quad v_0, \quad (u_z)_0, \quad (u_s)_0, \quad (v_x)_0, \quad (v_y)_0, \quad (v_s)_0;$$

2° Que le déterminant différentiel de ces sept fonctions par rapport aux sept quantités α, β, γ, δ, θ, λ, μ ait une valeur fondamentale différente de zéro [1].

Considérons enfin, dans le système (4 *bis*), la solution particulière répondant aux conditions initiales

$$\left\{\begin{aligned} u &= \upsilon(z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) && \text{pour } x, y = x_0, y_0, \\ v &= \varphi(x, y, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) && \text{pour } z = z_0 \end{aligned}\right.$$

(*voir* le début du n° **39**), et soit

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= \Upsilon(x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu), \\ v &= \Phi(x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) \end{aligned}\right.$$

la solution dont il s'agit. Je dis que les formules (11) définissent une famille complète de figures intégrales (ordinaires) du système (4).

En premier lieu, le système des dix relations

$$(12) \qquad u = \Upsilon, \quad v = \Phi, \quad u_z = \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}, \quad u_s = \frac{\partial \Upsilon}{\partial s}, \quad v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_s = \frac{\partial \Phi}{\partial s},$$
$$u_x = \frac{\partial \Upsilon}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial \Upsilon}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

est résoluble, conformément au principe général des fonctions implicites, par rapport à α, β, γ, δ, θ, λ, μ, u_x, u_y, v_z; ou, ce qui revient ici manifestement au même, le système des sept relations (12) est résoluble par rapport à α, β, γ, δ, θ, λ, μ. Car, par un groupement

---

[1] Par exemple, soient

$$G_1, \quad G_2, \quad G_3, \quad G_4, \quad G_5, \quad G_6, \quad G_7$$

sept fonctions linéaires en $\alpha - \alpha_0$, $\beta - \beta_0$, $\gamma - \gamma_0$, $\delta - \delta_0$, $\theta - \theta_0$, $\lambda - \lambda_0$, $\mu - \mu_0$, telles que les coefficients (numériques) de ces sept différences forment un déterminant différent de zéro, tandis que les termes indépendants ont pour valeurs respectives

$$(u_z)_0, \quad (u_s)_0, \quad u_0, \quad (v_x)_0, \quad (v_y)_0, \quad (v_s)_0, \quad v_0 :$$

pour satisfaire à la double condition énoncée, il suffit, comme le montre un calcul élémentaire, de prendre

$$\upsilon = (z - z_0)G_1 + (s - s_0)G_2 + G_3,$$
$$\varphi = (x - x_0)G_4 + (y - y_0)G_5 + (s - s_0)G_6 + G_7.$$

convenable des termes de leurs développements, les fonctions Υ et Φ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\Upsilon(x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = {} & \upsilon(z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) \\
& + (x - x_0)\,\mathrm{A}(x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) \\
& + (y - y_0)\,\mathrm{B}(x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu), \\
\Phi(x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = {} & \varphi(x, y, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) \\
& + (z - z_0)\,\mathrm{C}(x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu),
\end{aligned}$$

et les équations (12) prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned}
u &= \upsilon + (x - x_0)\,\mathrm{A} + (y - y_0)\,\mathrm{B}, \\
v &= \varphi + (z - z_0)\,\mathrm{C}, \\
u_z &= \frac{\partial\upsilon}{\partial z} + (x - x_0)\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial z} + (y - y_0)\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial z}, \\
u_s &= \frac{\partial\upsilon}{\partial s} + (x - x_0)\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial s} + (y - y_0)\frac{\partial\mathrm{B}}{\partial s}, \\
v_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (z - z_0)\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial x}, \\
v_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial y}, \\
v_s &= \frac{\partial\varphi}{\partial s} + (z - z_0)\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial s};
\end{aligned}\right.$$

or, le déterminant différentiel relatif à α, β, γ, δ, θ, λ, μ des seconds membres de ces formules a même valeur fondamentale que le déterminant similaire provenant des sept fonctions

$$\upsilon,\quad \varphi,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial z},\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial s},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s}:$$

il a donc, d'après l'hypothèse faite sur ces dernières, une valeur fondamentale différente de zéro.

En second lieu, les formules (11), définissant une solution particulière du système (4 *bis*), fourniront (n° **35**), par l'attribution à α, β, γ, δ, θ, λ, μ de toutes valeurs numériques, des solutions particulières du système (4).

Les fonctions u, v définies par les formules (11) satisfont ainsi à toutes les conditions requises par la définition du n° **39**.

42. Considérons actuellement les relations (2) et (5), et supposons remplie la première des deux conditions formulées au n° **39**, savoir :

En même temps que les relations (2) sont résolubles par rapport à u, v, le système formé par les dix relations (2) et (5) est résoluble par rapport à

$$(13)\qquad u_x,\quad u_y,\quad v_z,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \theta,\quad \lambda,\quad \mu\quad (^1).$$

Soient, alors,

$$(14)\qquad \begin{cases} u_x = U'_x(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ u_y = U'_y(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ v_z = V'_z(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s); \end{cases}$$

$$(15)\qquad \begin{cases} \alpha = A(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \beta = B(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \gamma = \Gamma(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \delta = \Delta(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \theta = \Theta(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \lambda = \Lambda(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \mu = M(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s) \end{cases}$$

les formules de résolution du système [(2), (5)] par rapport aux quantités (13).

Cela étant, *pour que les relations (2) définissent une famille complète de figures intégrales (ordinaires) du système (4), il faut et il suffit que les seconds membres, U'_x, U'_y, V'_z, des formules (14) soient respectivement identiques aux seconds membres, U_x, U_y, V_z, du système (4).*

I. La condition posée est nécessaire.

Supposons en effet que les relations (2) définissent une famille com-

(1) On suppose expressément, comme nous l'avons spécifié au n° **39**, que, dans le groupe numérique fondamental à partir duquel cette double résolution est possible, les valeurs de x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s n'excèdent pas les limites d'olotropie communes aux seconds membres, U_x, U_y, V_z, du système (4).

plète de figures intégrales (ordinaires) du système (4); elles définiront par là même (n° **33**) une solution particulière (ordinaire) du système désigné au n° **41** par (4 *bis*): en conséquence, les relations (2) et (5), résolues (conformément à la règle classique qui donne les fonctions implicites et leurs dérivées) par rapport aux quantités

$$(16) \qquad u, \quad v, \quad u_x, \quad u_y, \quad u_z, \quad u_s, \quad v_x, \quad v_y, \quad v_z, \quad v_s,$$

fourniront pour ces dernières des valeurs, fonctions de

$$(17) \qquad x, \quad y, \quad z, \quad s, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \theta, \quad \lambda, \quad \mu,$$

qui, substituées dans le système (4 *bis*), le vérifieront pour toutes valeurs numériques des quantités (17). Le système (4 *bis*) est donc une simple conséquence numérique du système [(2), (5)] ou [(14), (15)], et, dès lors, si l'on effectue dans (4 *bis*) les substitutions indiquées par les formules (14) et (15), on tombe sur des identités: or, il vient ainsi

$$(18) \qquad U'_x = U_x, \qquad U'_y = U_y, \qquad V'_z = V_z.$$

II. La condition posée est suffisante.

La première des deux conditions requises (n° **39**) par la définition d'une famille complète de figures intégrales du système (4) étant satisfaite, supposons, de plus, que l'on ait identiquement les relations (18): il s'agit de prouver que la seconde de ces deux conditions se trouve également satisfaite.

Effectivement, le système réduit [(2), (5)], qui détermine un certain groupe de fonctions implicites, u, v, de x, y, z, s, α, β, γ, δ, θ, λ, μ, avec leurs diverses dérivées premières relatives à x, y, z, s, équivaut numériquement au système réduit [(14), (15)]: les fonctions implicites et les dérivées considérées vérifient donc, notamment, les formules (14), c'est-à-dire, à cause des identités (18), le système (4 *bis*). Les formules (2) définissent dès lors une solution particulière du système (4 *bis*), et fournissent par suite (n° **33**), pour toutes valeurs numériques attribuées à α, β, γ, δ, θ, λ, μ, des solutions particulières du système (4) : on en conclut qu'elles définissent une famille complète de figures intégrales de ce dernier système.

43. La proposition établie au numéro précédent peut encore se formuler de la manière que nous allons indiquer.

En supposant remplie, comme ci-dessus, la première des deux conditions requises par la définition du n° **39**, on pourra, de sept relations convenablement choisies du système [(2), (5)], tirer les sept quantités α, β, γ, δ, θ, λ, μ, et les porter dans les trois relations restantes, élimination qui, en vertu du n° **13**, donne un système nécessairement réduit. Cela étant, *pour que les relations* (2) *définissent une famille complète de figures intégrales du système* (4), *il faut et il suffit que l'élimination dont il s'agit fasse retomber sur un système numériquement équivalent à* (4).

Effectivement, pour que les relations (2) définissent une famille complète de figures intégrales de (4), il faut et il suffit (n° **42**) qu'en résolvant le système [(2), (5)] par rapport aux quantités (13), et retenant les trois formules de résolution relatives à u_x, u_y, v_z, celles-ci soient respectivement identiques aux trois équations du système (4) : or, en vertu d'une proposition énoncée plus haut (n° **12**), ces trois formules de résolution constituent un système numériquement équivalent à celui qui résulte de l'élimination spécifiée.

44. *Les relations* (2) *étant supposées définir une famille complète de figures intégrales (ordinaires) du système* (4) [n° **39**], *il suffit, pour obtenir sans aucune figure étrangère les diverses figures intégrales (ordinaires) de ce dernier, d'adjoindre à ses deux fonctions inconnues* u, v *les sept inconnues auxiliaires* α, β, γ, δ, θ, λ, μ, *et d'assujettir ces neuf inconnues à vérifier, en même temps que les relations* (2), *celles qui s'en déduisent par les différentiations premières relatives aux quatre variables* x, y, z, s, *mais en ne conservant, dans chacune des relations résultantes, que la partie linéaire et homogène par rapport aux dérivées des inconnues adjointes.*

En d'autres termes, il suffit d'assujettir les neuf inconnues à vérifier le système des relations

$$(2)\quad \begin{cases} F(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0, \\ H(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu) = 0; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0, \\ \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0. \end{cases}$$

Cela une fois établi, il est manifeste que, *si l'on résout les relations* (2) *par rapport à* u, v, *les deux inconnues principales se trouveront exprimées à l'aide des variables* x, y, z, s *et des sept inconnues adjointes*.

Inversement, *on peut*, comme nous le verrons, *exprimer les sept inconnues adjointes à l'aide des variables* x, y, z, s, *des deux inconnues principales, et de leurs dérivées : il suffit*, pour cela, *de résoudre*, conformément à la définition du n° **59**, *le système* [(2), (5)] *par rapport aux dix quantités* u_x, u_y, v_z, α, β, γ, δ, θ, λ, μ, *et de retenir les sept dernières des formules ainsi obtenues*.

A chaque figure intégrale du système (4) *correspond de cette manière, pour les inconnues adjointes*, α, β, γ, δ, θ, λ, μ, *du système* [(2), (19), (20), (21), (22)], *un groupe déterminé de fonctions, et à deux figures intégrales distinctes du système* (4) *deux groupes distincts de fonctions*.

I. Les relations (2) définissant, par hypothèse, une famille complète de figures intégrales du système (4), le système [(2), (5)] est résoluble par rapport à u_x, u_y, v_z, α, β, γ, δ, θ, λ, μ, et, parmi les formules de résolution, (14), (15), trois sont, en vertu du n° **42**, respectivement identiques aux trois relations, $u_x = U_x$, $u_y = U_y$, $v_z = V_z$, du système (4). En d'autres termes, *le système* [(2), (5)] *équivaut numériquement à*

$$(4)\quad \begin{cases} u_x = U_x(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ u_y = U_y(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ v_z = V_z(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s); \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} \alpha = \mathrm{A}(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \beta = \mathrm{B}(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \gamma = \Gamma(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \delta = \Delta(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \theta = \Theta(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \lambda = \Lambda(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s), \\ \mu = \mathrm{M}(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_x, v_y, v_s). \end{cases}$$

11. *La méthode indiquée par notre énoncé général ne peut manquer de fournir toutes les figures intégrales* (*ordinaires*) *du système* (4).

Soit, en effet,

$$\begin{cases} u = \upsilon(x, y, z, s), \\ v = \varphi(x, y, z, s) \end{cases}$$

une solution particulière du système (4). Si, dans les dix formules ci-dessus, (4) et (23), on remplace

$$u,\quad v,\quad u_x,\quad u_y,\quad u_z,\quad u_s,\quad v_x,\quad v_y,\quad v_z,\quad v_s$$

respectivement par

$$\upsilon,\quad \varphi,\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial x},\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial y},\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial z},\quad \frac{\partial\upsilon}{\partial s},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

les trois premières, (4), sont identiquement vérifiées, et les suivantes, (23), fournissent, pour α, β, γ, δ, θ, λ, μ, certaines fonctions (olotropes) de x, y, z, s; les neuf fonctions

$$(24)\qquad \upsilon,\quad \varphi,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \theta,\quad \lambda,\quad \mu,$$

prises conjointement, vérifient donc identiquement les dix formules de résolution du système [(2), (5)], par suite le système [(2), (5)] lui-même. D'ailleurs, vérifiant les relations (2) et (5), elles ne peuvent manquer de vérifier aussi toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations relatives à x, y, z, s, et, notamment, les huit relations déduites de (2) par des différentiations premières, c'est-à-dire

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}u_x + \frac{\partial F}{\partial v}v_x \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial u}u_x + \frac{\partial H}{\partial v}v_x \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0;\\
&\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}u_y + \frac{\partial F}{\partial v}v_y \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial u}u_y + \frac{\partial H}{\partial v}v_y \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0;\\
&\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u}u_z + \frac{\partial F}{\partial v}v_z \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial u}u_z + \frac{\partial H}{\partial v}v_z \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} = 0;\\
&\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial u}u_s + \frac{\partial F}{\partial v}v_s \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial u}u_s + \frac{\partial H}{\partial v}v_s \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial s} = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Or, le simple rapprochement des relations (25) avec les relations (5) donne immédiatement les relations (19), (20), (21) et (22).

Les neuf fonctions (24) vérifient donc bien les relations (2), (19), (20), (21) et (22).

III. *La méthode indiquée par notre énoncé général fournit exclusivement des figures intégrales (ordinaires) du système* (4); de plus, *les sept inconnues adjointes du système* [(2), (19), (20), (21), (22)] *peuvent, par l'application du mécanisme qui s'y trouve décrit, s'exprimer à l'aide des variables* x, y, z, s, *des deux inconnues principales, et de leurs dérivées.*

Si neuf fonctions, u, v, α, β, γ, δ, θ, λ, μ, de x, y, z, s, prises conjointement, vérifient identiquement les relations (2), (19), (20), (21) et (22), les deux premières, u, v, de ces fonctions constituent une solution particulière du système (4).

Effectivement, puisque les neuf fonctions dont il s'agit vérifient les relations indiquées, elles vérifient également toutes celles qui s'en déduisent par des différentiations relatives à x, y, z, s, et, notamment, les huit relations déduites de (2) par des différentiations premières, c'est-à-dire les relations (25). Or, le simple rapprochement des relations (25) avec les relations (19), (20), (21) et (22) fait retomber sur (5). Les neuf fonctions considérées vérifient donc le système [(2), (5)], et, par suite, en vertu de I, le système, numériquement équivalent, [(4), (23)]; en particulier, les fonctions u, v vérifient identiquement le système (4).

Et l'on voit, de plus, que les fonctions α, β, γ, δ, θ, λ, μ s'expriment à l'aide des formules (23).

45. Supposons, comme au numéro précédent, que les relations (2) définissent une famille complète (n° **39**) de figures intégrales du système (4). Si, comme dans l'alinéa VI de l'Introduction, on désigne par k le nombre des fonctions inconnues engagées dans un système du premier ordre, par h le nombre des variables indépendantes, par l celui des cases vides de son damier, par p le plus petit des deux entiers h, l, et par j un entier auquel on attribuera tour à tour les $p+1$ valeurs vérifiant la double relation

$$k+l-p \leqq j \leqq k+l,$$

on a, dans le cas actuel,

$$k=2,\qquad h=4,\qquad l=5,\qquad \text{d'où}\qquad p=4:$$

toute famille complète de figures intégrales doit donc dépendre de sept constantes arbitraires, et la double relation dont il s'agit devient

$$3\leq j\leq 7,$$

d'où

$$j=7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3.$$

Cela étant, on peut formuler l'énoncé suivant :

Pour avoir sans aucune figure étrangère toutes les figures intégrales (ordinaires) du système (4), il suffit d'effectuer de toutes les manières possibles l'opération consistant à remplacer, dans les relations (2), j des 7 paramètres α, β, γ, δ, θ, λ, μ par autant de fonctions arbitraires des $7-j$ paramètres restants, et à prendre, lorsqu'elles existent, les enveloppes des sous-familles ainsi obtenues.

L'entier j recevant tour à tour les cinq valeurs 7, 6, 5, 4, 3, on pourra partager en *cinq groupes* correspondants les figures intégrales (ordinaires) du système (4); or, ces cinq groupes se distinguent, comme nous le verrons, par les caractères suivants, tirés de la considération du tableau

$$(26)\qquad \left|\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial x}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial x}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial x}, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial x}, & \dfrac{\partial\mu}{\partial x}, \\
\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial y}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial y}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial y}, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}, & \dfrac{\partial\mu}{\partial y}, \\
\dfrac{\partial\alpha}{\partial z}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial z}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial z}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial z}, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}, & \dfrac{\partial\mu}{\partial z}, \\
\dfrac{\partial\alpha}{\partial s}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial s}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial s}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial s}, & \dfrac{\partial\theta}{\partial s}, & \dfrac{\partial\lambda}{\partial s}, & \dfrac{\partial\mu}{\partial s},
\end{array}\right.$$

qui a pour éléments les dérivées premières des sept inconnues adjointes du système [(2), (19), (20), (21), (22)] (n° **44**) :

Pour une figure intégrale du premier groupe, le tableau (26) *a tous ses éléments identiquement nuls.*

Pour une figure intégrale du deuxième groupe, les déterminants *du second ordre extraits de* (26) *sont tous identiquement nuls, sans que les éléments le soient tous.*

Pour une figure intégrale du troisième groupe, les déterminants du troisième ordre extraits de (26) *sont tous identiquement nuls, sans que ceux du second ordre le soient tous.*

Pour une figure intégrale du quatrième groupe, les déterminants du quatrième ordre extraits de (26) *sont tous identiquement nuls, sans que ceux du troisième ordre le soient tous.*

Enfin, *pour une figure intégrale du cinquième groupe, les déterminants du quatrième ordre extraits de* (26) *ne sont pas tous identiquement nuls.*

Les groupes successifs n'ont ainsi deux à deux aucune figure commune.

I. *Les diverses figures intégrales (ordinaires) du système* (4) *peuvent toutes s'obtenir par la méthode indiquée, en attribuant à j les cinq valeurs successives* 7, 6, 5, 4, 3.

Supposons en effet que les relations (2) définissent une famille complète de figures intégrales du système (4); il résulte alors du numéro précédent **44** :

1° Que, pour obtenir sans aucune figure étrangère les diverses figures intégrales de ce système, il suffit d'adjoindre à ses deux inconnues u, v les sept inconnues auxiliaires α, β, γ, δ, θ, λ, μ, et d'assujettir ces neuf inconnues à vérifier le système

$$[(2), (19), (20), (21), (22)],$$

que, pour simplifier l'écriture, nous désignerons souvent par Ξ.

2° Qu'à chaque figure intégrale du système (4) correspond, pour les sept inconnues adjointes du systéme Ξ, un groupe déterminé de fonctions.

Soit donc

$$u, \quad v, \quad \alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \quad \theta, \quad \lambda, \quad \mu$$

une solution quelconque du système Ξ; on peut distinguer pour elle les divers cas suivants :

Les éléments du tableau (26) sont tous identiquement nuls.

Les déterminants du second ordre extraits de (26) sont tous identiquement nuls, sans que les éléments le soient tous.

Les déterminants du troisième ordre extraits de (26) sont tous identiquement nuls, sans que ceux du second ordre le soient tous.

Les déterminants du quatrième ordre extraits de (26) sont tous identiquement nuls, sans que ceux du troisième ordre le soient tous.

Les déterminants du quatrième ordre extraits de (26) ne sont pas tous identiquement nuls.

Examinons successivement ces cinq cas, les seuls possibles.

Premier cas. — Pour la solution considérée de Ξ, les éléments du tableau (26) sont tous identiquement nuls.

En désignant alors par α_1, β_1, γ_1, δ_1, θ_1, λ_1, μ_1 certaines constantes numériques, la figure intégrale de (4) fournie par la solution considérée de Ξ sera définie (n° **44**) à l'aide du système

$$F(x, y, z, s, u, v, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \theta_1, \lambda_1, \mu_1) = 0,$$
$$H(x, y, z, s, u, v, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \theta_1, \lambda_1, \mu_1) = 0;$$

d'ailleurs, conformément à une observation faite plus haut (n° **50**), cette figure fixe peut être considérée comme étant à elle-même son enveloppe.

Deuxième cas. — Pour la solution considérée de Ξ, les déterminants du second ordre extraits de (26) sont tous identiquement nuls, sans que les éléments le soient tous; nous supposerons, pour fixer les idées, que la première colonne du tableau (26) contienne quelque élément non identiquement nul (1).

(1) En remplaçant au besoin les valeurs fondamentales (6), (7), (8) par d'autres, convenablement choisies, et qui en soient suffisamment rapprochées, on peut toujours supposer que les dérivées $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial y}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial s}$ n'ont pas toutes des valeurs fondamentales nulles : car si ces dérivées s'annulent toutes pour

$$x, y, z, s = x_0, y_0, z_0, s_0,$$

et si $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, par exemple, n'est pas identiquement nul, on pourra, dans un voisinage suffisamment rapproché de x_0, y_0, z_0, s_0, trouver d'autres valeurs numé-

Alors, dans chacun des six tableaux partiels

$$\left|\begin{array}{ll} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s}; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ll} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\gamma}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\gamma}{\partial s}; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ll} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\delta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\delta}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\delta}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\delta}{\partial s}; \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{ll} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\theta}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\theta}{\partial s}; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ll} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\lambda}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\lambda}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\lambda}{\partial s}; \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ll} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\mu}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\mu}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\mu}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\mu}{\partial s}, \end{array}\right.$$

qui ont en commun la première colonne de (26), les déterminants du second ordre formés par l'association de deux lignes quelconques sont tous identiquement nuls, sans que les éléments de la colonne commune le soient à la fois : les six fonctions β, γ, δ, θ, λ, μ sont donc composées de α (n° **2**), et elles ont la forme

$$(27) \qquad \left\{\begin{array}{lll} \beta = \mathcal{B}_1(\alpha), & \gamma_1 = \mathcal{C}_1(\alpha), & \delta = \mathcal{D}_1(\alpha), \\ \theta = \mathcal{G}_1(\alpha), & \lambda_1 = \mathcal{L}_1(\alpha), & \mu = \mathcal{M}_1(\alpha). \end{array}\right.$$

En posant

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\mathcal{B}_1}\frac{d\mathcal{B}_1}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\mathcal{C}_1}\frac{d\mathcal{C}_1}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\mathcal{D}_1}\frac{d\mathcal{D}_1}{d\alpha} \\ &\qquad + \frac{\partial F}{\partial\mathcal{G}_1}\frac{d\mathcal{G}_1}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\mathcal{L}_1}\frac{d\mathcal{L}_1}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial\mathcal{M}_1}\frac{d\mathcal{M}_1}{d\alpha} = \Upsilon_1, \\ &\frac{\partial H}{\partial\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\mathcal{B}_1}\frac{d\mathcal{B}_1}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\mathcal{C}_1}\frac{d\mathcal{C}_1}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\mathcal{D}_1}\frac{d\mathcal{D}_1}{d\alpha} \\ &\qquad + \frac{\partial H}{\partial\mathcal{G}_1}\frac{d\mathcal{G}_1}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\mathcal{L}_1}\frac{d\mathcal{L}_1}{d\alpha} + \frac{\partial H}{\partial\mathcal{M}_1}\frac{d\mathcal{M}_1}{d\alpha} = \Upsilon_2, \end{aligned}$$

---

riques, x_1, y_1, z_1, s_1, n'annulant pas $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, et associer à ces dernières les valeurs numériques correspondantes de u, v, u_x, u_y, u_z, u_s, v_x, v_y, v_z, v_s, α, β, γ, δ, θ, λ, μ.

Une remarque analogue doit être faite dans les troisième, quatrième et cinquième cas, considérés ci-après.

et portant les valeurs (27) dans les relations (19), (20), (21) et (22), ces dernières deviennent

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\Upsilon_1\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0, && \Upsilon_2\frac{\partial\alpha}{\partial x}=0,\\ &\Upsilon_1\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0, && \Upsilon_2\frac{\partial\alpha}{\partial y}=0,\\ &\Upsilon_1\frac{\partial\alpha}{\partial z}=0, && \Upsilon_2\frac{\partial\alpha}{\partial z}=0,\\ &\Upsilon_1\frac{\partial\alpha}{\partial s}=0, && \Upsilon_2\frac{\partial\alpha}{\partial s}=0,\end{aligned}\right.$$

et, comme les dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial x}, \frac{\partial\alpha}{\partial y}, \frac{\partial\alpha}{\partial z}, \frac{\partial\alpha}{\partial s}$ ne sont pas toutes identiquement nulles, les deux relations $\Upsilon_1=0$, $\Upsilon_2=0$ ne peuvent manquer d'être identiquement vérifiées en x, y, z, s.

Ainsi, dans la solution considérée du système Ξ, les valeurs de u, v, α vérifient les deux relations

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &F[x, y, z, s, u, v, \alpha, \mathcal{B}_1(\alpha), \mathcal{E}_1(\alpha), \mathcal{O}_1(\alpha), \mathcal{G}_1(\alpha), \mathcal{L}_1(\alpha), \mathcal{M}_1(\alpha)]=0,\\ &H[x, y, z, s, u, v, \alpha, \mathcal{B}_1(\alpha), \mathcal{E}_1(\alpha), \mathcal{O}_1(\alpha), \mathcal{G}_1(\alpha), \mathcal{L}_1(\alpha), \mathcal{M}_1(\alpha)]=0,\end{aligned}\right.$$

ainsi que les deux qui s'en déduisent par des dérivations partielles du premier ordre relatives à α, et cela sans que les dérivées premières de α soient toutes identiquement nulles : d'après ce qui a été vu au n° **31**, les figures de la famille (29) admettent donc une enveloppe, et, pour obtenir un système réduit définissant cette enveloppe, il suffit de remplacer α par sa valeur dans les équations (29). Or, en vertu du n° **44**, cette substitution donne la figure intégrale de (4) fournie par la solution considérée de Ξ.

Troisième cas. — Pour la solution considérée de Ξ, les déterminants du troisième ordre extraits de (26) sont tous identiquement nuls, sans que ceux du second ordre le soient tous : nous supposerons, pour fixer les idées, que des deux premières colonnes du tableau (26) on puisse extraire quelque déterminant du second ordre non identiquement nul.

Alors, dans chacun des cinq tableaux partiels

$$\left\{\begin{array}{ccc}
\frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, & \frac{\partial\gamma}{\partial z}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s}, & \frac{\partial\gamma}{\partial s};
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{ccc}
\frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial\delta}{\partial x}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial\delta}{\partial y}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, & \frac{\partial\delta}{\partial z}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s}, & \frac{\partial\delta}{\partial s};
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{ccc}
\frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial\theta}{\partial x}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial\theta}{\partial y}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, & \frac{\partial\theta}{\partial z}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s}, & \frac{\partial\theta}{\partial z};
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccc}
\frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial\lambda}{\partial x}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial\lambda}{\partial y}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, & \frac{\partial\lambda}{\partial z}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s}, & \frac{\partial\lambda}{\partial s};
\end{array}\right.
\qquad
\left\{\begin{array}{ccc}
\frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial\mu}{\partial x}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial\mu}{\partial y}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, & \frac{\partial\mu}{\partial z}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s}, & \frac{\partial\mu}{\partial s},
\end{array}\right.$$

qui ont en commun les deux colonnes

$$\begin{array}{cc}
\frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, \\
\frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s},
\end{array} \tag{30}$$

les déterminants du troisième ordre formés par l'association de trois lignes quelconques sont tous identiquement nuls, sans que les déterminants du second ordre extraits des deux colonnes communes le soient à la fois; les cinq fonctions γ, δ, θ, λ, μ sont donc composées de α et β (n° **2**), et elles ont la forme

$$\left\{\begin{array}{l}
\gamma = \mathcal{G}_2(\alpha, \beta), \qquad \delta = \mathcal{D}_2(\alpha, \beta), \qquad \theta = \mathcal{T}_2(\alpha, \beta), \\
\qquad\qquad \lambda = \mathcal{L}_2(\alpha, \beta), \qquad \mu = \mathcal{M}_2(\alpha, \beta).
\end{array}\right. \tag{31}$$

En posant

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{S}_2}\frac{\partial\mathcal{S}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{Q}_2}\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{T}_2}\frac{\partial\mathcal{T}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{L}_2}\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{M}_2}\frac{\partial\mathcal{M}_2}{\partial\alpha}=\Phi_{1,1},\\
&\frac{\partial F}{\partial\beta}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{S}_2}\frac{\partial\mathcal{S}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{Q}_2}\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{T}_2}\frac{\partial\mathcal{T}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{L}_2}\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial F}{\partial\mathcal{M}_2}\frac{\partial\mathcal{M}_2}{\partial\beta}=\Phi_{1,2},
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{S}_2}\frac{\partial\mathcal{S}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{Q}_2}\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{T}_2}\frac{\partial\mathcal{T}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{L}_2}\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{M}_2}\frac{\partial\mathcal{M}_2}{\partial\alpha}=\Phi_{2,1},\\
&\frac{\partial H}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{S}_2}\frac{\partial\mathcal{S}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{Q}_2}\frac{\partial\mathcal{Q}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{T}_2}\frac{\partial\mathcal{T}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{L}_2}\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\beta}+\frac{\partial H}{\partial\mathcal{M}_2}\frac{\partial\mathcal{M}_2}{\partial\beta}=\Phi_{2,2},
\end{aligned}\right.$$

et portant les valeurs (31) dans les relations (19), (20), (21) et (22), ces dernières deviennent

$$(32)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\Phi_{1,1}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\Phi_{1,2}\frac{\partial\beta}{\partial x}=0, &\quad &\Phi_{2,1}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\Phi_{2,2}\frac{\partial\beta}{\partial x}=0,\\
&\Phi_{1,1}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\Phi_{1,2}\frac{\partial\beta}{\partial y}=0, &\quad &\Phi_{2,1}\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\Phi_{2,2}\frac{\partial\beta}{\partial y}=0,\\
&\Phi_{1,1}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\Phi_{1,2}\frac{\partial\beta}{\partial z}=0, &\quad &\Phi_{2,1}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\Phi_{2,2}\frac{\partial\beta}{\partial z}=0,\\
&\Phi_{1,1}\frac{\partial\alpha}{\partial s}+\Phi_{1,2}\frac{\partial\beta}{\partial s}=0, &\quad &\Phi_{2,1}\frac{\partial\alpha}{\partial s}+\Phi_{2,2}\frac{\partial\beta}{\partial s}=0.
\end{aligned}\right.$$

Cela étant, on a identiquement, de toute nécessité,

$$\Phi_{1,1}=0,\qquad \Phi_{1,2}=0,\qquad \Phi_{2,1}=0,\qquad \Phi_{2,2}=0\ :$$

car, si la relation $\Phi_{1,1}=0$, par exemple, n'était pas identiquement vérifiée par la solution considérée de Ξ, on voit, par les relations (32), que les déterminants du second ordre extraits du tableau (30) seraient tous identiquement nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, dans la solution considérée du système Ξ, les valeurs de u, v, α, β vérifient les deux relations

$$(33)\quad\left\{\begin{aligned}
&F[x,y,z,s,u,v,\alpha,\beta,\mathcal{S}_2(\alpha,\beta),\mathcal{Q}_2(\alpha,\beta),\mathcal{T}_2(\alpha,\beta),\mathcal{L}_2(\alpha,\beta),\mathcal{M}_2(\alpha,\beta)]=0,\\
&H[x,y,z,s,u,v,\alpha,\beta,\mathcal{S}_2(\alpha,\beta),\mathcal{Q}_2(\alpha,\beta),\mathcal{T}_2(\alpha,\beta),\mathcal{L}_2(\alpha,\beta),\mathcal{M}_2(\alpha,\beta)]=0,
\end{aligned}\right.$$

ainsi que les quatre qui s'en déduisent par des dérivations partielles du premier ordre relatives à α et β, et cela sans que les déterminants du second ordre extraits du tableau (30) soient tous identiquement nuls : d'après ce qui a été vu au n° **31**, les figures de la famille (33) admettent donc une enveloppe, et, pour obtenir un système réduit définissant cette enveloppe, il suffit de remplacer α et β par leurs valeurs dans les équations (33). Or, en vertu du n° **44**, cette substitution donne la figure intégrale de (4) fournie par la solution considérée de Ξ.

Quatrième cas. — Pour la solution considérée de Ξ, les déterminants du quatrième ordre extraits de (26) sont tous identiquement nuls, sans que ceux du troisième ordre le soient tous : nous supposerons, pour fixer les idées, que des trois premières colonnes du tableau (26) on puisse extraire quelque déterminant du troisième ordre non identiquement nul.

Alors, chacun des quatre déterminants

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\delta}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\delta}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} & \frac{\partial\delta}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s} & \frac{\partial\beta}{\partial s} & \frac{\partial\gamma}{\partial s} & \frac{\partial\delta}{\partial s} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\theta}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} & \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s} & \frac{\partial\beta}{\partial s} & \frac{\partial\gamma}{\partial s} & \frac{\partial\theta}{\partial s} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} & \frac{\partial\lambda}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s} & \frac{\partial\beta}{\partial s} & \frac{\partial\gamma}{\partial s} & \frac{\partial\lambda}{\partial s} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} & \frac{\partial\beta}{\partial x} & \frac{\partial\gamma}{\partial x} & \frac{\partial\mu}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} & \frac{\partial\beta}{\partial y} & \frac{\partial\gamma}{\partial y} & \frac{\partial\mu}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} & \frac{\partial\beta}{\partial z} & \frac{\partial\gamma}{\partial z} & \frac{\partial\mu}{\partial z} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s} & \frac{\partial\beta}{\partial s} & \frac{\partial\gamma}{\partial s} & \frac{\partial\mu}{\partial s} \end{vmatrix},$$

qui ont en commun les trois colonnes

$$(34) \qquad \begin{matrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x}, & \frac{\partial\beta}{\partial x}, & \frac{\partial\gamma}{\partial x}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y}, & \frac{\partial\beta}{\partial y}, & \frac{\partial\gamma}{\partial y}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z}, & \frac{\partial\beta}{\partial z}, & \frac{\partial\gamma}{\partial z}, \\ \frac{\partial\alpha}{\partial s}, & \frac{\partial\beta}{\partial s}, & \frac{\partial\gamma}{\partial s}, \end{matrix}$$

est identiquement nul, sans que les déterminants du troisième ordre extraits des trois colonnes communes le soient à la fois; les quatre fonctions δ, θ, λ, μ sont donc composées de α, β et γ (nº 2), et elles ont la forme

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} \delta &= \omega_3(\alpha, \beta, \gamma), & \theta &= \varpi_3(\alpha, \beta, \gamma), \\ \lambda &= \mathfrak{L}_3(\alpha, \beta, \gamma), & \mu &= \mathfrak{M}_3(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}\right.$$

En posant

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \varpi_3}\frac{\partial \varpi_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{L}_3}\frac{\partial \mathfrak{L}_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{M}_3}\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial \alpha} &= \Psi_{1,1}, \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \varpi_3}\frac{\partial \varpi_3}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{L}_3}\frac{\partial \mathfrak{L}_3}{\partial \beta} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{M}_3}\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial \beta} &= \Psi_{1,2}, \\ \frac{\partial F}{\partial \gamma} + \frac{\partial F}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial F}{\partial \varpi_3}\frac{\partial \varpi_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{L}_3}\frac{\partial \mathfrak{L}_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{M}_3}\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial \gamma} &= \Psi_{1,3}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \varpi_3}\frac{\partial \varpi_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{L}_3}\frac{\partial \mathfrak{L}_3}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_3}\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial \alpha} &= \Psi_{2,1}, \\ \frac{\partial H}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \varpi_3}\frac{\partial \varpi_3}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{L}_3}\frac{\partial \mathfrak{L}_3}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_3}\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial \beta} &= \Psi_{2,2}, \\ \frac{\partial H}{\partial \gamma} + \frac{\partial H}{\partial \omega_3}\frac{\partial \omega_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial H}{\partial \varpi_3}\frac{\partial \varpi_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{L}_3}\frac{\partial \mathfrak{L}_3}{\partial \gamma} + \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_3}\frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial \gamma} &= \Psi_{2,3}, \end{aligned}\right.$$

et portant les valeurs (35) dans les relations (19), (20), (21) et (22), ces dernières deviennent

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} \Psi_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \Psi_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \Psi_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0, & \Psi_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \Psi_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial x} + \Psi_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0, \\ \Psi_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \Psi_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \Psi_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial y} &= 0, & \Psi_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \Psi_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial y} + \Psi_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial y} &= 0, \\ \Psi_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \Psi_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \Psi_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial z} &= 0, & \Psi_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \Psi_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial z} + \Psi_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial z} &= 0, \\ \Psi_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \Psi_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \Psi_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial s} &= 0, & \Psi_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial s} + \Psi_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial s} + \Psi_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial s} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Cela étant, on a identiquement, de toute nécessité,

$$\begin{aligned} \Psi_{1,1} &= 0, & \Psi_{1,2} &= 0, & \Psi_{1,3} &= 0, \\ \Psi_{2,1} &= 0, & \Psi_{2,2} &= 0, & \Psi_{2,3} &= 0 : \end{aligned}$$

car, si la relation $\Psi_{1,1} = 0$, par exemple, n'était pas identiquement vérifiée par la solution considérée de Ξ, on voit, par les relations (36), que les déterminants du troisième ordre extraits du tableau (34) seraient tous identiquement nuls, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, dans la solution considérée du système Ξ, les valeurs de u, v, α, β, γ vérifient les deux relations

$$(37)\quad \begin{cases} F[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \Theta_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{S}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{L}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{M}_3(\alpha, \beta, \gamma)] = 0, \\ H[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \Theta_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{S}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{L}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{M}_3(\alpha, \beta, \gamma)] = 0, \end{cases}$$

ainsi que les six qui s'en déduisent par des dérivations partielles du premier ordre relatives à α, β et γ, et cela sans que les déterminants du troisième ordre extraits du tableau (34) soient tous identiquement nuls : d'après ce qui a été vu au n° **31**, les figures de la famille (37) admettent donc une enveloppe, et, pour obtenir un système réduit définissant cette enveloppe, il suffit de remplacer α, β et γ par leurs valeurs dans les équations (37). Or, en vertu du n° **44**, cette substitution donne la figure intégrale de (4) fournie par la solution considérée de Ξ.

Cinquième et dernier cas. — Pour la solution considérée de Ξ, les déterminants du quatrième ordre extraits du tableau (26) ne sont pas tous identiquement nuls; nous supposerons, pour fixer les idées, que le déterminant formé par les quatre premières colonnes ne le soit pas.

Alors, les trois fonctions θ, λ, μ sont nécessairement composées de α, β, γ et δ (n° **3**), et elles ont la forme

$$(38)\qquad \theta = \mathfrak{S}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \qquad \lambda = \mathfrak{L}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \qquad \mu = \mathfrak{M}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

En posant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{S}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{L}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{M}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \alpha} = \Omega_{1,1}, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \beta} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{S}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial \beta} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{L}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \beta} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{M}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \beta} = \Omega_{1,2}, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{S}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{L}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \gamma} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{M}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \gamma} = \Omega_{1,3}, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \delta} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{S}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{S}_4}{\partial \delta} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{L}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \delta} + \dfrac{\partial F}{\partial \mathfrak{M}_4}\dfrac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \delta} = \Omega_{1,4} \end{cases}$$

et

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial \alpha}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{T}_4}\frac{\partial \mathfrak{T}_4}{\partial \alpha}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{L}_4}\frac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \alpha}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_4}\frac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \alpha}=\Omega_{2,1},\\
&\frac{\partial H}{\partial \beta}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{T}_4}\frac{\partial \mathfrak{T}_4}{\partial \beta}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{L}_4}\frac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \beta}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_4}\frac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \beta}=\Omega_{2,2},\\
&\frac{\partial H}{\partial \gamma}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{T}_4}\frac{\partial \mathfrak{T}_4}{\partial \gamma}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{L}_4}\frac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \gamma}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_4}\frac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \gamma}=\Omega_{2,3},\\
&\frac{\partial H}{\partial \delta}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{T}_4}\frac{\partial \mathfrak{T}_4}{\partial \delta}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{L}_4}\frac{\partial \mathfrak{L}_4}{\partial \delta}+\frac{\partial H}{\partial \mathfrak{M}_4}\frac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial \delta}=\Omega_{2,4},
\end{aligned}\right.$$

et portant les valeurs (38) dans les relations (19), (20), (21) et (22), ces dernières deviennent

$$(39)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\Omega_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\Omega_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial x}+\Omega_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial x}+\Omega_{1,4}\frac{\partial \delta}{\partial x}=0,\\
&\Omega_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\Omega_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial y}+\Omega_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial y}+\Omega_{1,4}\frac{\partial \delta}{\partial y}=0,\\
&\Omega_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial z}+\Omega_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial z}+\Omega_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial z}+\Omega_{1,4}\frac{\partial \delta}{\partial z}=0,\\
&\Omega_{1,1}\frac{\partial \alpha}{\partial s}+\Omega_{1,2}\frac{\partial \beta}{\partial s}+\Omega_{1,3}\frac{\partial \gamma}{\partial s}+\Omega_{1,4}\frac{\partial \delta}{\partial s}=0,\\
&\Omega_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\Omega_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial x}+\Omega_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial x}+\Omega_{2,4}\frac{\partial \delta}{\partial x}=0,\\
&\Omega_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\Omega_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial y}+\Omega_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial y}+\Omega_{2,4}\frac{\partial \delta}{\partial y}=0,\\
&\Omega_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial z}+\Omega_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial z}+\Omega_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial z}+\Omega_{2,4}\frac{\partial \delta}{\partial z}=0,\\
&\Omega_{2,1}\frac{\partial \alpha}{\partial s}+\Omega_{2,2}\frac{\partial \beta}{\partial s}+\Omega_{2,3}\frac{\partial \gamma}{\partial s}+\Omega_{2,4}\frac{\partial \delta}{\partial s}=0.
\end{aligned}\right.$$

Cela étant, on a identiquement, de toute nécessité,

$$\left\{\begin{matrix}
\Omega_{1,1}=0, & \Omega_{1,2}=0, & \Omega_{1,3}=0, & \Omega_{1,4}=0,\\
\Omega_{2,1}=0, & \Omega_{2,2}=0, & \Omega_{2,3}=0, & \Omega_{2,4}=0\ :
\end{matrix}\right.$$

car, si la relation $\Omega_{1,1}=0$, par exemple, n'était pas identiquement vérifiée par la solution considérée de Ξ, on voit, par les relations (39), que le déterminant formé par les quatre premières colonnes de (26) serait identiquement nul, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi, dans la solution considérée du système Ξ, les valeurs de u, v,

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vérifient les deux relations

$$(40) \quad \begin{cases} F[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mathfrak{T}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \mathfrak{L}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \mathfrak{M}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)] = 0, \\ H[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \mathfrak{T}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \mathfrak{L}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \mathfrak{M}_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta)] = 0, \end{cases}$$

ainsi que les huit qui s'en déduisent par des dérivations partielles du premier ordre relatives à α, β, γ et δ, et cela sans que le déterminant formé par les quatre premières colonnes du tableau (26) soit identiquement nul : d'après ce qui a été vu au n° **51**, les figures de la famille (40) admettent donc une enveloppe, et, pour obtenir un système réduit définissant cette enveloppe, il suffit de remplacer α, β, γ et δ par leurs valeurs dans les équations (40). Or, en vertu du n° **44**, cette substitution donne la figure intégrale de (4) fournie par la solution considérée de Ξ.

II. *La méthode indiquée par notre énoncé ne donne que des figures intégrales du système* (4), *et les cinq groupes de figures qui correspondent respectivement aux cinq valeurs successives* 7, 6, 5, 4, 3 *de l'entier j se distinguent les uns des autres à l'aide du caractère fondé sur la considération du tableau* (26).

Les relations (2) étant supposées définir une famille complète de figures intégrales du système (4), examinons tour à tour les cinq groupes de figures fournis par la méthode.

Premier groupe. — Si, dans les relations (2), on remplace $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu$ par des valeurs numériques arbitrairement choisies, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \theta_1, \lambda_1, \mu_1$, d'où résulte que les éléments du tableau (26) seront tous identiquement nuls, la figure fixe ainsi obtenue,

$$(41) \quad \begin{cases} F(x, y, z, s, u, v, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \theta_1, \lambda_1, \mu_1) = 0, \\ H(x, y, z, s, u, v, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \theta_1, \lambda_1, \mu_1) = 0, \end{cases}$$

qui est à elle-même son enveloppe (n° **50**), ne peut manquer d'être une figure intégrale de (4). Car les sept fonctions $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda, \mu$, qui ont alors leurs dérivées premières toutes identiquement nulles, prises conjointement avec les deux fonctions u, v tirées de (41), vérifient manifestement le système

$$[(2), (19), (20), (21), (22)],$$

et il résulte de là, en vertu du n° **14**, que les deux dernières, u, v, fournissent une figure intégrale de (4). Pour cette figure intégrale, les éléments du tableau (26) sont, comme nous l'avons dit, tous identiquement nuls.

Deuxième groupe. — Supposons que, dans les relations (2), on remplace six des quantités α, β, γ, δ, θ, λ, μ par autant de fonctions composées de la quantité restante, et que l'on pose, par exemple,

$$(42)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \beta = \mathcal{B}_1(\alpha), & \gamma = \mathcal{C}_1(\alpha), & \delta = \mathcal{D}_1(\alpha), \\ \theta = \mathcal{T}_1(\alpha), & \lambda = \mathcal{L}_1(\alpha), & \mu = \mathcal{M}_1(\alpha), \end{array}\right.$$

d'où résulte que les déterminants du second ordre extraits du tableau (26) seront tous identiquement nuls. Puis, considérons la famille de figures définie par les relations

$$(43)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{F}[x, y, z, s, u, v, \alpha, \mathcal{B}_1(\alpha), \mathcal{C}_1(\alpha), \mathcal{D}_1(\alpha), \mathcal{T}_1(\alpha), \mathcal{L}_1(\alpha), \mathcal{M}_1(\alpha)] = 0, \\ \mathrm{H}[x, y, z, s, u, v, \alpha, \mathcal{B}_1(\alpha), \mathcal{C}_1(\alpha), \mathcal{D}_1(\alpha), \mathcal{T}_1(\alpha), \mathcal{L}_1(\alpha), \mathcal{M}_1(\alpha)] = 0 \end{array}\right.$$

et supposons qu'elle admette une enveloppe : je dis que cette enveloppe ne peut manquer d'être une figure intégrale de (4).

Effectivement, les mêmes notations étant adoptées que dans le deuxième cas de l'alinéa I, il résulte de ce qui a été vu au n° **31** qu'en désignant par α une fonction convenablement choisie de x, y, z, s n'ayant pas toutes ses dérivées premières identiquement nulles, cette enveloppe se trouve définie par les relations (43), résolubles par rapport à u, v, et qu'en adjoignant à α les fonctions u, v obtenues par cette résolution, les trois fonctions u, v, α vérifient les relations (43), ainsi que celles,

$$(44)\qquad \Upsilon_1 = 0, \qquad \Upsilon_2 = 0,$$

qui s'en déduisent par des dérivations partielles du premier ordre relatives à α. Or, les relations (44) entraînent manifestement les relations (28), lesquelles, si l'on tient compte de (42), entraînent, à leur tour, (19), (20), (21) et (22). En conséquence, les neuf fonctions

$$u, \quad v, \quad \alpha, \qquad \beta = \mathcal{B}_1(\alpha), \qquad \gamma = \mathcal{C}_1(\alpha),$$
$$\delta = \mathcal{D}_1(\alpha), \qquad \theta = \mathcal{T}_1(\alpha), \qquad \lambda = \mathcal{L}_1(\alpha), \qquad \mu = \mathcal{M}_1(\alpha),$$

prises conjointement, vérifient le système

$$[(2), (19), (20), (21), (22)],$$

d'où résulte, en vertu du n° **44**, que les deux premières, u, v, fournissent une figure intégrale de (4). Pour cette figure intégrale, les déterminants du second ordre extraits du tableau (26) sont tous identiquement nuls, sans que les éléments du tableau le soient tous.

Troisième groupe. — Supposons que, dans les relations (2), on remplace cinq des quantités α, β, γ, δ, θ, λ, μ par autant de fonctions composées des deux quantités restantes, et que l'on pose, par exemple,

$$(45)\qquad \begin{cases} \gamma = \mathcal{C}_2(\alpha, \beta), \qquad \delta = \mathcal{O}_2(\alpha, \beta), \qquad \theta = \mathcal{E}_2(\alpha, \beta), \\ \qquad \lambda = \mathcal{L}_2(\alpha, \beta), \qquad \mu = \mathcal{M}_2(\alpha, \beta), \end{cases}$$

d'où résulte que les déterminants du troisième ordre extraits du tableau (26) sont tous identiquement nuls. Puis, considérons la famille de figures définie par les relations

$$(46)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \mathcal{C}_2(\alpha, \beta), \mathcal{O}_2(\alpha, \beta), \mathcal{E}_2(\alpha, \beta), \mathcal{L}_2(\alpha, \beta), \mathcal{M}_2(\alpha, \beta)] = 0, \\ \mathrm{H}[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \mathcal{C}_2(\alpha, \beta), \mathcal{O}_2(\alpha, \beta), \mathcal{E}_2(\alpha, \beta), \mathcal{L}_2(\alpha, \beta), \mathcal{M}_2(\alpha, \beta)] = 0, \end{cases}$$

et supposons qu'elle admette une enveloppe : je dis que cette enveloppe ne peut manquer d'être une figure intégrale de (4).

Effectivement, les mêmes notations étant adoptées que dans le troisième cas de l'alinéa I, il résulte de ce qui a été vu au n° **31** qu'en désignant par α, β deux fonctions convenablement choisies de x, y, z, s n'ayant pas leurs déterminants différentiels (d'ordre 2) tous identiquement nuls, cette enveloppe se trouve définie par les relations (46), résolubles par rapport à u, v, et qu'en adjoignant à α, β les fonctions u, v obtenues par cette résolution, les quatre fonctions u, v, α, β vérifient les relations (46), ainsi que celles,

$$(47)\qquad \begin{cases} \Phi_{1,1} = 0, \qquad \Phi_{1,2} = 0, \\ \Phi_{2,1} = 0, \qquad \Phi_{2,2} = 0, \end{cases}$$

qui s'en déduisent par les dérivations partielles du premier ordre relatives à α et β. Or, les relations (47) entraînent manifestement les relations (32), lesquelles, si l'on tient compte de (45), entraînent, à leur tour, (19), (20), (21) et (22). En conséquence, les neuf fonctions

$$u,\quad v,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma = \mathcal{E}_2(\alpha, \beta),\quad \delta = \mathcal{O}_2(\alpha, \beta),$$
$$\theta = \mathcal{C}_2(\alpha, \beta),\quad \lambda = \mathcal{L}_2(\alpha, \beta),\quad \mu = \mathfrak{M}_2(\alpha, \beta),$$

prises conjointement, vérifient le système

$$[(3), (19), (20), (21), (22)],$$

d'où résulte, en vertu du n° **44**, que les deux premières, u, v, fournissent une figure intégrale de (4). Pour cette figure intégrale, les déterminants du troisième ordre extraits du tableau (26) sont tous identiquement nuls, sans que ceux du second ordre le soient tous.

Quatrième groupe. — Supposons que, dans les relations (2), on remplace quatre des quantités α, β, γ, δ, θ, λ, μ par autant de fonctions composées des trois quantités restantes, et que l'on pose, par exemple,

$$(48)\qquad \begin{cases} \delta = \mathcal{O}_3(\alpha, \beta, \gamma), & \theta = \mathcal{C}_3(\alpha, \beta, \gamma), \\ \lambda = \mathcal{L}_3(\alpha, \beta, \gamma), & \mu = \mathfrak{M}_3(\alpha, \beta, \gamma), \end{cases}$$

d'où résulte que les déterminants du quatrième ordre extraits du tableau (26) seront tous identiquement nuls. Puis, considérons la famille de figures définie par les relations

$$(49)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \mathcal{O}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathcal{C}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathcal{L}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{M}_3(\alpha, \beta, \gamma)] = 0, \\ \mathrm{H}[x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \mathcal{O}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathcal{C}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathcal{L}_3(\alpha, \beta, \gamma), \mathfrak{M}_3(\alpha, \beta, \gamma)] = 0, \end{cases}$$

et supposons qu'elle admette une enveloppe : je dis que cette enveloppe ne peut manquer d'être une figure intégrale de (4).

Effectivement, les mêmes notations étant adoptées que dans le quatrième cas de l'alinéa I, il résulte de ce qui a été vu au n° **51** qu'en désignant par α, β, γ trois fonctions convenablement choisies de x, y, z, s n'ayant pas leurs déterminants différentiels (d'ordre 3) tous identiquement nuls, cette enveloppe se trouve définie par les relations (49), résolubles par rapport à u, v, et qu'en adjoignant à α, β, γ les fonctions u, v obtenues par cette résolution, les cinq fonctions u, v, α,

β, γ vérifient les relations (49), ainsi que celles,

$$(50)\qquad \begin{cases} \Psi'_{1,1}=0, & \Psi'_{1,2}=0, & \Psi'_{1,3}=0, \\ \Psi'_{2,1}=0, & \Psi'_{2,2}=0, & \Psi'_{2,3}=0, \end{cases}$$

qui s'en déduisent par les dérivations partielles du premier ordre relatives à α, β et γ. Or, les relations (50) entraînent manifestement les relations (36), lesquelles, si l'on tient compte de (48), entraînent, à leur tour, (19), (20), (21) et (22). En conséquence, les neuf fonctions

$$u,\quad v,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta=\mathcal{O}_3(\alpha,\beta,\gamma),\quad \theta=\mathfrak{T}_3(\alpha,\beta,\gamma),$$
$$\lambda=\mathfrak{L}_3(\alpha,\beta,\gamma),\quad \mu=\mathfrak{M}_3(\alpha,\beta,\gamma),$$

prises conjointement, vérifient le système

$$[(2),\ (19),\ (20),\ (21),\ (22)],$$

d'où résulte, en vertu du n° **44**, que les deux premières, u, v, fournissent une figure intégrale de (4). Pour cette figure intégrale, les déterminants du quatrième ordre extraits du tableau (26) sont tous identiquement nuls, sans que ceux du troisième ordre le soient tous.

Cinquième et dernier groupe. — Supposons que, dans les relations (2), on remplace trois des quantités α, β, γ, δ, θ, λ μ par autant de fonctions composées des quatre quantités restantes, et que l'on pose, par exemple,

$$(51)\qquad \theta=\mathfrak{T}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\qquad \lambda=\mathfrak{L}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\qquad \mu=\mathfrak{M}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta).$$

Puis, considérons la famille de figures définie par les relations

$$(52)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}[x,y,z,s,u,v,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathfrak{T}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\mathfrak{L}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\mathfrak{M}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta)]=0, \\ \mathrm{H}[x,y,z,s,u,v,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\mathfrak{T}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\mathfrak{L}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\mathfrak{M}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta)]=0, \end{cases}$$

et supposons qu'elle admette une enveloppe : je dis que cette enveloppe ne peut manquer d'être une figure intégrale de (4).

Effectivement, les mêmes notations étant adoptées que dans le cinquième et dernier cas de l'alinéa I, il résulte de ce qui a été vu au n° **31** qu'en désignant par α, β, γ, δ quatre fonctions convenablement choisies de x, y, z, s n'ayant pas leur déterminant différentiel (d'ordre 4) identiquement nul, cette enveloppe se trouve définie par les relations (52), résolubles par rapport à u, v, et qu'en adjoignant à α, β, γ, δ les fonctions u, v obtenues par cette résolution, les six fonctions u, v, α, β, γ, δ vérifient les relations (52), ainsi que celles,

$$(53)\qquad \left\{\begin{array}{llll} \Omega_{1,1}=0, & \Omega_{1,2}=0, & \Omega_{1,3}=0, & \Omega_{1,4}=0, \\ \Omega_{2,1}=0, & \Omega_{2,2}=0, & \Omega_{2,3}=0, & \Omega_{2,4}=0, \end{array}\right.$$

qui s'en déduisent par les dérivations partielles du premier ordre relatives à α, β, γ et δ. Or, les relations (53) entraînent manifestement les relations (39), lesquelles, si l'on tient compte de (51), entraînent, à leur tour, (19), (20), (21) et (22). En conséquence, les neuf fonctions

$$u,\quad v,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,\quad \theta=\varpi_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),$$
$$\lambda=\mathfrak{L}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\quad \mu=\mathfrak{M}_4(\alpha,\beta,\gamma,\delta),$$

prises conjointement, vérifient le système

$$[(2),(19),(20),(21),(22)],$$

d'où résulte, en vertu du n° **44**, que les deux premières, u, v, fournissent une figure intégrale de (4). Pour cette figure intégrale, les déterminants du quatrième ordre extraits de (26) ne sont pas tous identiquement nuls.

46. Considérons encore le système partiel du premier ordre

$$(54)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_x=\mathrm{U}_x(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \\ u_y=\mathrm{U}_y(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \\ u_z=\mathrm{U}_z(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \\ u_s=\mathrm{U}_s(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \\ v_x=\mathrm{V}_x(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \\ v_y=\mathrm{V}_y(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \\ v_z=\mathrm{V}_z(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \\ v_t=\mathrm{V}_t(x,y,z,s,t,u,v,u_t,v_s), \end{array}\right.$$

impliquant les deux fonctions inconnues u, v des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t; ce système, dont le damier se trouve figuré ci-après,

	(u)	(v)
(x)	$u_x = U_x$	$v_x = V_x$
(y)	$u_y = U_y$	$v_y = V_y$
(z)	$u_z = U_z$	$v_z = V_z$
(s)	$u_s = U_s$	
(t)		$v_t = V_t$

est supposé complètement intégrable dans le sens indiqué au début du n° **39**.

En adoptant les mêmes notations générales que dans l'alinéa VI de l'Introduction, on a actuellement $k = 2$, $h = 5$, $l = 2$, d'où $p = 2$: toute famille complète de figures intégrales doit donc dépendre de quatre constantes arbitraires, et la double relation

$$k + l - p \leqq j \leqq k + l$$

devient $2 \leqq j \leqq 4$, d'où $j = 4, 3, 2$. Cela étant, on peut formuler l'énoncé suivant :

Les relations

$$(55)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, s, t, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0, \\ H(x, y, z, s, t, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0 \end{cases}$$

étant supposées définir une famille complète de figures intégrales ordinaires du système (54), *il suffit, pour avoir sans aucune figure étrangère toutes les figures intégrales ordinaires de ce système, d'effectuer de toutes les manières possibles l'opération consistant à remplacer, dans les relations* (55), j *des* 4 *paramètres* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *par autant de fonctions arbitraires des* $4-j$ *paramètres restants, et à prendre, lorsqu'elles existent, les enveloppes des sous-familles ainsi obtenues.*

L'entier j recevant tour à tour les trois valeurs 4, 3, 2, on pourra partager en *trois groupes* correspondants les figures intégrales ordinaires du système (54) : or, ces trois groupes se distinguent par les caractères que nous allons indiquer, tirés de la considération du tableau

$$(56)\qquad \left|\begin{array}{llll} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial x}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial y}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial z}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial z}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial s}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial s}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial s}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial t}, & \dfrac{\partial\beta}{\partial t}, & \dfrac{\partial\gamma}{\partial t}, & \dfrac{\partial\delta}{\partial t}; \end{array}\right.$$

ce dernier a pour éléments les dérivées premières des quatre inconnues adjointes du système spécifié au n° 44, c'est-à-dire, ici, du système

$$(55)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, s, t, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0, \\ H(x, y, z, s, t, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta) = 0; \end{cases}$$

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$(58)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

$$(59)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial z} = 0; \end{cases}$$

$$(60)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial s} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial s} = 0; \end{cases}$$

$$(61)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial t} = 0, \\ \dfrac{\partial H}{\partial\alpha}\dfrac{\partial\alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial H}{\partial\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial t} + \dfrac{\partial H}{\partial\gamma}\dfrac{\partial\gamma}{\partial t} + \dfrac{\partial H}{\partial\delta}\dfrac{\partial\delta}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Et voici par quels caractères se distinguent les trois groupes de figures intégrales :

Pour une figure intégrale du premier groupe, le tableau (56) *a tous ses éléments identiquement nuls.*

Pour une figure intégrale du deuxième groupe, les déterminants du second ordre extraits de (56) *sont tous identiquement nuls, sans que les éléments le soient tous.*

Enfin, *pour une figure intégrale du troisième groupe, les déterminants du second ordre extraits de* (56) *ne sont pas tous identiquement nuls.*

Les groupes successifs n'ont ainsi deux à deux aucune figure commune.

I. *Les diverses figures intégrales ordinaires du système* (54) *peuvent toutes s'obtenir par la méthode indiquée, en attribuant à j les trois valeurs successives* 4, 3, 2.

Supposons en effet que les relations (55) définissent une famille complète de figures intégrales du système (54); il résulte alors du n° **44** :

1° Que, pour obtenir sans aucune figure étrangère les diverses figures intégrales (ordinaires) de ce système, il suffit d'adjoindre à ses deux inconnues u, v les quatre inconnues auxiliaires α, β, γ, δ, et d'assujettir ces six inconnues à vérifier le système

$$[(55), (57), (58), (59), (60), (61)],$$

que nous désignerons, plus simplement, par Ξ.

2° Qu'à chaque figure intégrale du système (54) correspond, pour les quatre inconnues adjointes du système Ξ, un groupe déterminé de fonctions.

Or, je dis tout d'abord que si l'on considère le groupe de fonctions correspondant à une figure intégrale quelconque de (54), les déterminants du troisième ordre extraits du tableau (56) ne peuvent manquer d'être tous identiquement nuls.

Nous reportant en effet à la définition des familles complètes de figures intégrales (nº 39), exécutons sur les relations (55) les diverses différentiations premières relatives à x, y, z, s, t en traitant u, v comme des fonctions de x, y, z, s, t, α, β, γ, δ ; il vient ainsi

$$(62)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial u}u_x+\dfrac{\partial F}{\partial v}v_x=0, & \dfrac{\partial H}{\partial x}+\dfrac{\partial H}{\partial u}u_x+\dfrac{\partial H}{\partial v}v_x=0,\\
\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial u}u_y+\dfrac{\partial F}{\partial v}v_y=0, & \dfrac{\partial H}{\partial y}+\dfrac{\partial H}{\partial u}u_y+\dfrac{\partial H}{\partial v}v_y=0,\\
\dfrac{\partial F}{\partial z}+\dfrac{\partial F}{\partial u}u_z+\dfrac{\partial F}{\partial v}v_z=0, & \dfrac{\partial H}{\partial z}+\dfrac{\partial H}{\partial u}u_z+\dfrac{\partial H}{\partial v}v_z=0,\\
\dfrac{\partial F}{\partial s}+\dfrac{\partial F}{\partial u}u_s+\dfrac{\partial F}{\partial v}v_s=0, & \dfrac{\partial H}{\partial s}+\dfrac{\partial H}{\partial u}u_s+\dfrac{\partial H}{\partial v}v_s=0,\\
\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial F}{\partial u}u_t+\dfrac{\partial F}{\partial v}v_t=0, & \dfrac{\partial H}{\partial t}+\dfrac{\partial H}{\partial u}u_t+\dfrac{\partial H}{\partial v}v_t=0.
\end{array}\right.$$

Le système [(55), (62)] étant, d'après la définition posée, résoluble par rapport à

$$u_x,\quad u_y,\quad u_z,\quad u_s,\quad v_x,\quad v_y,\quad v_z,\quad v_t,\quad \alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta,$$

et les relations (55) ne contenant pas

$$u_x,\quad u_y,\quad u_z,\quad u_s,\quad v_x,\quad v_y,\quad v_z,\quad v_t,$$

il résulte de la théorie générale des déterminants que les déterminants du second ordre extraits du tableau

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial F}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial F}{\partial \beta}, & \dfrac{\partial F}{\partial \gamma}, & \dfrac{\partial F}{\partial \delta},\\
\dfrac{\partial H}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial H}{\partial \beta}, & \dfrac{\partial H}{\partial \gamma}, & \dfrac{\partial H}{\partial \delta}
\end{array}$$

ne peuvent avoir à la fois des valeurs fondamentales nulles : supposons, pour fixer les idées, que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial F}{\partial \gamma} & \dfrac{\partial F}{\partial \delta}\\
\dfrac{\partial H}{\partial \gamma} & \dfrac{\partial H}{\partial \delta}
\end{vmatrix}$$

ait une valeur fondamentale différente de zéro ; il restera par là même différent de zéro pour toutes valeurs numériques de x, y, z, s, t, u, v, α, β, γ, δ, suffisamment voisines de leurs valeurs fondamentales. Cela étant, les cinq couples d'équations (57), (58), (59), (60), (61), linéaires et homogènes par rapport aux éléments des cinq lignes respectives du tableau (56), seront résolubles, conformément à l'algorithme de Cramer, par rapport aux cinq couples respectifs

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial\delta}{\partial x}; \\[2mm] \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial\delta}{\partial y}; \\[2mm] \dfrac{\partial\gamma}{\partial z}, \quad \dfrac{\partial\delta}{\partial z}; \\[2mm] \dfrac{\partial\gamma}{\partial s}, \quad \dfrac{\partial\delta}{\partial s}; \\[2mm] \dfrac{\partial\gamma}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial\delta}{\partial t}; \end{array}$$

et, comme il ont tous cinq les mêmes coefficients, les formules de résolution auront la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\gamma}{\partial x} = A' \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + B' \dfrac{\partial\beta}{\partial x}, \\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial x} = A'' \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + B'' \dfrac{\partial\beta}{\partial x}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\gamma}{\partial y} = A' \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + B' \dfrac{\partial\beta}{\partial y}, \\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial y} = A'' \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + B'' \dfrac{\partial\beta}{\partial y}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\gamma}{\partial z} = A' \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} + B' \dfrac{\partial\beta}{\partial z}, \\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial z} = A'' \dfrac{\partial\alpha}{\partial z} + B'' \dfrac{\partial\beta}{\partial z}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\gamma}{\partial s} = A' \dfrac{\partial\alpha}{\partial s} + B' \dfrac{\partial\beta}{\partial s}, \\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial s} = A'' \dfrac{\partial\alpha}{\partial s} + B'' \dfrac{\partial\beta}{\partial s}; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\gamma}{\partial t} = A' \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} + B' \dfrac{\partial\beta}{\partial t}, \\[2mm] \dfrac{\partial\delta}{\partial t} = A'' \dfrac{\partial\alpha}{\partial t} + B'' \dfrac{\partial\beta}{\partial t}, \end{array}\right.$$

où A', B' et A'', B'' désignent certaines fonctions (olotropes) des quantités

$$x,\ y,\ z,\ s,\ t,\ u,\ v,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta.$$

Nous grouperons comme il suit les relations obtenues :

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\gamma}{\partial x} &= A'\frac{\partial\alpha}{\partial x} + B'\frac{\partial\beta}{\partial x},\\
\frac{\partial\gamma}{\partial y} &= A'\frac{\partial\alpha}{\partial y} + B'\frac{\partial\beta}{\partial y},\\
\frac{\partial\gamma}{\partial z} &= A'\frac{\partial\alpha}{\partial z} + B'\frac{\partial\beta}{\partial z},\\
\frac{\partial\gamma}{\partial s} &= A'\frac{\partial\alpha}{\partial s} + B'\frac{\partial\beta}{\partial s},\\
\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= A'\frac{\partial\alpha}{\partial t} + B'\frac{\partial\beta}{\partial t};
\end{aligned}\right.$$

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial x} &= A''\frac{\partial\alpha}{\partial x} + B''\frac{\partial\beta}{\partial x},\\
\frac{\partial\delta}{\partial y} &= A''\frac{\partial\alpha}{\partial y} + B''\frac{\partial\beta}{\partial y},\\
\frac{\partial\delta}{\partial z} &= A''\frac{\partial\alpha}{\partial z} + B''\frac{\partial\beta}{\partial z},\\
\frac{\partial\delta}{\partial s} &= A''\frac{\partial\alpha}{\partial s} + B''\frac{\partial\beta}{\partial s},\\
\frac{\partial\delta}{\partial t} &= A''\frac{\partial\alpha}{\partial t} + B''\frac{\partial\beta}{\partial t}.
\end{aligned}\right.$$

Des relations ainsi groupées, (63) et (64), il ressort manifestement que les déterminants du troisième ordre extraits du tableau (56) sont bien, comme nous l'avions annoncé, tous identiquement nuls.

En conséquence, pour une solution quelconque, $(u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$, du système Ξ, trois cas seulement sont à considérer :

Ou bien les éléments du tableau (56) sont tous identiquement nuls;

Ou bien les déterminants du second ordre extraits de (56) sont tous identiquement nuls, sans que les éléments le soient tous;

Ou bien, enfin, les déterminants du second ordre extraits de (56) ne sont pas tous identiquement nuls.

Et, cela posé, le raisonnement se poursuivra comme à l'alinéa I du n° **45**.

II. *La méthode indiquée par notre énoncé ne donne que des figures intégrales du système* (54), *et les trois groupes de figures qui correspondent respectivement aux trois valeurs* 4, 3, 2 *de l'entier* j *se distinguent les uns des autres à l'aide des caractères fondés sur la considération du tableau* (56).

Voir n° **45**, alinéa II.

47. Considérons, comme dernier exemple, le cas d'un système *passif* d'équations différentielles totales du premier ordre, impliquant les k fonctions inconnues $u_1, u_2, \ldots, u_k$ des h variables indépendantes $x, y, \ldots$: un pareil système est, en vertu du n° **37**, complètement intégrable dans les conditions spécifiées au début du n° **39**. On a d'ailleurs, en adoptant les mêmes notations générales que dans l'alinéa VI de l'Introduction, $l = 0$, d'où $p = 0$: toute famille complète de figures intégrales doit donc dépendre de k constantes arbitraires, et la double relation

$$k + l - p \leqq j \leqq k + l$$

se réduit à $j = k$. Cela étant, on peut formuler l'énoncé suivant :

Les relations

$$(65) \qquad \begin{cases} F_1(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0, \\ F_2(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_k(x, y, \ldots, u_1, u_2, \ldots, u_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) = 0 \end{cases}$$

étant supposées définir une famille complète de figures intégrales ordinaires du système différentiel total proposé, toutes les figures intégrales ordinaires de ce système pourront se déduire de (65) *par l'attribution aux constantes arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *de valeurs numériques choisies à volonté.*

Effectivement, le système spécifié au n° **44** devient, dans le cas actuel,

$$(66)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial x} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_k}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \ldots + \dfrac{\partial F_k}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \ldots + \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \ldots + \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial y} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial F_k}{\partial \alpha_1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \dfrac{\partial F_k}{\partial \alpha_2}\dfrac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \ldots + \dfrac{\partial F_k}{\partial \alpha_k}\dfrac{\partial \alpha_k}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

etc....

Et, comme les conditions requises par la définition du n° **39** entraînent, ici, la non-nullité du déterminant différentiel de F_1, F_2, ..., F_k par rapport à α_1, α_2, ..., α_k, les relations (66), (67), etc. entraînent à leur tour, de toute nécessité,

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial x} = 0, & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial x} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial y} = 0, & \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial y} = 0, & \ldots, & \dfrac{\partial \alpha_k}{\partial y} = 0, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots; \end{array}$$

il en résulte que α_1, α_2, ..., α_k doivent se réduire à de simples constantes numériques.

48. D'une manière générale, supposons que les nombres h, k, l soient quelconques, et considérons le tableau, $\mathcal{A}$, qui a pour éléments les dérivées premières des inconnues adjointes du système spécifié au n° **44**; ce tableau comprend $k+l$ colonnes, correspondant à ces $k+l$ inconnues, et h lignes, correspondant aux h variables indépendantes; enfin, parmi les $k+l$ colonnes, il en existe k, convenablement choisies, jouissant de la propriété que chacune d'elles ait tous ses éléments exprimables à l'aide d'une même fonction linéaire et homogène des éléments homologues des l colonnes restantes (*voir* à ce sujet le raisonnement fait au n° **46**).

Cela étant, deux hypothèses sont à envisager, suivant les grandeurs relatives de l et h :

1° $l \geqq h$, d'où $p = h$ (p désigne, comme ci-dessus, le plus petit des deux entiers h, l).

Dans cette première hypothèse, les divers déterminants que l'on peut extraire du tableau $\mathcal{A}$ sont d'ordres $1, 2, \ldots, h$, et ceux d'ordre h ne sont pas forcément tous identiquement nuls : en raisonnant comme au n° **45**, la considération de ce tableau conduira à distinguer $h+1$ cas, ou, ce qui revient au même, $p+1$ cas, et l'entier j, dont la plus grande valeur, $k+l$, correspond au cas où les éléments du tableau sont tous identiquement nuls, pourra recevoir tour à tour les $p+1$ valeurs vérifiant la double relation

$$k+l-p \leqq j \leqq k+l. \tag{68}$$

2° $l < h$, d'où $p = l$.

Dans cette deuxième hypothèse, $l+1$ est au plus égal à h, et, à cause de la propriété, ci-dessus énoncée, dont jouissent k colonnes convenablement choisies du tableau $\mathcal{A}$, les déterminants d'ordre $l+1$ extraits de ce tableau sont tous identiquement nuls, sans que ceux d'ordre l le soient forcément tous : en raisonnant comme au n° **46**, la considération du tableau dont il s'agit conduira à distinguer $l+1$ cas, ou, ce qui revient au même, $p+1$ cas, et l'entier j pourra, ici encore, recevoir tour à tour les $p+1$ valeurs vérifiant la double relation (68).

49. Un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre étant donné, supposons que les diverses colonnes de son damier (n° **38**) présentent toutes la même disposition de cases pleines et vides : une double remarque est, en pareil cas, à noter.

I. Un système de cette espèce a nécessairement la forme orthonome.

Effectivement, les lignes de son damier sont, de toute évidence, les unes entièrement pleines, les autres entièrement vides; cela étant, si l'on désigne par $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues, par $x, y, \ldots$ les variables qui correspondent aux lignes pleines, et par z, s, ... celles qui correspondent aux lignes vides, il suffit, pour apercevoir la nature orthonome du système, d'attribuer aux variables et aux inconnues les cotes suivantes :

	x, y, ...	z, s, ...	u, v, ...
cotes premières	1	1	0
cotes secondes	1	0	0

En conséquence (nos **35**, **36** et **37**), la passivité du système entraîne son intégrabilité complète, et cela dans les conditions spécifiées au début du n° **39**.

II. On peut, en outre, dans le cas actuellement considéré, formuler d'une façon un peu plus simple la définition posée au n° **39**.

Supposons, pour fixer les idées, que le système considéré implique les deux fonctions inconnues u, v des quatre variables indépendantes x, y, z, s, et qu'il soit résolu par rapport aux quatre dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou u_x, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ou u_y, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ou v_x, $\frac{\partial v}{\partial y}$ ou v_y,

	(u)	(v)
(x)	$u_x = \ldots$	$v_x = \ldots$
(y)	$u_y = \ldots$	$v_y = \ldots$
(z)		
(s)		

les seconds membres étant fonctions des diverses quantités x, y, z, s, u, v, $\frac{\partial u}{\partial z}$ ou u_z, $\frac{\partial u}{\partial s}$ ou u_s, $\frac{\partial v}{\partial z}$ ou v_z, $\frac{\partial v}{\partial s}$ ou v_s; il présentera alors la forme

$$(69)\quad \begin{cases} u_x = \mathrm{U}_x(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_z, v_s), & v_x = \mathrm{V}_x(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_z, v_s), \\ u_y = \mathrm{U}_y(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_z, v_s), & v_y = \mathrm{V}_y(x, y, z, s, u, v, u_z, u_s, v_z, v_s), \end{cases}$$

et le nombre des cases vides de son damier, augmenté du nombre des fonctions inconnues, donnera pour total 6. Nous supposerons, comme de raison, que le système (69) est passif.

Cela étant, considérons, en même temps que le système (69), les deux relations

$$(70)\qquad \begin{cases} F(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda) = 0, \\ H(x, y, z, s, u, v, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda) = 0, \end{cases}$$

où figurent, avec x, y, z, s, u, v, six constantes arbitraires, α, β, γ, δ, θ, λ; le système (70) étant supposé résoluble par rapport à u, v conformément au principe général des fonctions implicites, exécutons sur les deux relations qui le composent les diverses différentiations premières relatives à x, y, z, s, en traitant u, v comme des fonctions de $x, y, z, s, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \lambda$; il vient ainsi

$$(71)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial u} u_x + \dfrac{\partial F}{\partial v} v_x = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial x} + \dfrac{\partial H}{\partial u} u_x + \dfrac{\partial H}{\partial v} v_x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u} u_y + \dfrac{\partial F}{\partial v} v_y = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial u} u_y + \dfrac{\partial H}{\partial v} v_y = 0; \end{cases}$$

$$(72)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial u} u_z + \dfrac{\partial F}{\partial v} v_z = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial z} + \dfrac{\partial H}{\partial u} u_z + \dfrac{\partial H}{\partial v} v_z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial s} + \dfrac{\partial F}{\partial u} u_s + \dfrac{\partial F}{\partial v} v_s = 0, & \dfrac{\partial H}{\partial s} + \dfrac{\partial H}{\partial u} u_s + \dfrac{\partial H}{\partial v} v_s = 0. \end{cases}$$

Pour que le système [(70), (71), (72)] soit résoluble par rapport aux quantités u_x, u_y, v_x, v_y, α, β, γ, δ, θ, λ, il est manifestement nécessaire et suffisant que le système [(70), (72)] le soit par rapport aux quantités α, β, γ, δ, θ, λ. En conséquence, nous pourrons, dans le cas actuel, formuler comme il suit notre définition du n° **59** :

Considérant, avec les relations (70), les relations (72), qui s'en déduisent par les différentiations premières relatives aux seules variables, z, s, des lignes vides, nous dirons que les relations (70) définissent une famille *complète* de figures intégrales (ordinaires) du système (69), si les deux conditions suivantes se trouvent à la fois satisfaites :

1° En même temps que les relations (70) sont résolubles par rapport aux inconnues u, v, le système [(70), (72)] est résoluble par rapport aux arbitraires α, β, γ, δ, θ, λ;

2° Par l'attribution à α, β, γ, δ, θ, λ de toutes valeurs numériques, les relations (70) donnent des figures intégrales (ordinaires) du système (69).

Et la théorie générale exposée dans ce qui précède sera entièrement applicable.

Réduction d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles à un système complètement intégrable du premier ordre.

50. *Un système quelconque (non impossible) d'équations aux dérivées partielles* (¹) *peut*, en général, *se ramener à un système du premier ordre jouissant de la propriété d'être complètement intégrable dans le sens indiqué au début du n°* **39**.

I. *Étant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut*, en général, et *sauf la rencontre de relations non identiques entre les seules variables indépendantes (indiquant l'impossibilité du système), en déduire, sans changement de variables ni intégration, un système orthonome passif tel, que l'intégration du proposé se ramène à celle du système orthonome passif.*

(Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. XIV.)

Il est d'ailleurs toujours permis de supposer que, *dans ce dernier système, aucun des premiers membres n'est une dérivée de quelque autre.*

(*Ibid.*, n° 113.)

II. *Lorsque, dans un système orthonome*, S (passif ou non), *aucun des premiers membres n'est une dérivée de quelque autre, son intégration se ramène à celle d'un système du premier ordre*, Σ, *dont la structure est telle, que la passivité de* S, *si elle a lieu*,

---

(¹) Où les équations soient en nombre limité, et dont les premiers membres, après réduction des seconds à zéro, soient développables dans quelque domaine.

entraîne, dans le sens indiqué au début du n° 59, l'intégrabilité complète de Σ.

A. Lorsque, dans un système orthonome, S (passif ou non), *aucun des premiers membres n'est une dérivée de quelque autre, on peut*, par un mécanisme fort simple, *mettre les conditions initiales sous une forme telle, que les diverses circonstances suivantes s'y trouvent réalisées :*

1° *En désignant par* Γ *la cote première maxima des premiers membres des conditions initiales, toute condition initiale dont le premier membre est de cote première inférieure à* Γ *a pour second membre une constante schématique.*

2° *Si, sur chaque premier membre des conditions initiales, on exécute tour à tour les différentiations premières n'intéressant aucune des variables dont dépend la fonction schématique (dégénérée ou non) qui figure dans le second membre correspondant, on obtient, entre autres résultats, d'une part, les divers premiers membres qui, dans les conditions initiales, sont d'ordre supérieur à zéro, d'autre part, les divers premiers membres de* S.

(*Ibid.*, n° 158.)

B. Formation du système Σ. — Aucun des premiers membres de S n'étant, par hypothèse, une dérivée de quelque autre, nous commencerons par mettre les conditions initiales de S sous la forme spécifiée dans *A*.

Considérant ensuite, parmi les dérivées principales de S, celles dont la cote première est inférieure ou égale à $\Gamma + 1$, nous extrairons du système S, indéfiniment prolongé par les différentiations de tous ordres relatives aux variables indépendantes $x, y, \ldots$, un groupe, T, d'équations, en même nombre que les dérivées principales en question, et qui les aient respectivement pour premiers membres; nous conviendrons d'ailleurs expressément, lorsque l'une de ces dérivées coïncidera avec le premier membre de quelque équation de S (non prolongé), de *prendre, pour la faire figurer dans le groupe* T, *l'équation de* S *dont il s'agit;* nous opérerons enfin la résolution successive (toujours possible) des équations de T par rapport aux dérivées principales qui figurent dans leurs premiers membres : le groupe, Ψ, des formules de résolution nous fournira, pour chacune des dérivées principales de cote première inférieure ou égale à $\Gamma+1$, une expression déterminée, à la fois indépendante, et de toute dérivée principale quelle qu'elle soit, et de toute dérivée paramétrique ou fonction inconnue dont la cote première surpasserait la sienne propre.

Cela fait, et le système du premier ordre, Σ, qu'il s'agit de former, étant, comme nous allons le voir, résolu par rapport à diverses dérivées (premières) des inconnues qui s'y trouveront engagées, nous en écrirons les diverses équations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire (n° 38) conformément aux indications ci-après, en ne nous occupant tout d'abord que des premiers membres.

Désignons par u l'une des inconnues engagées dans S, par $\frac{\partial^{a+b+\dots}u}{\partial x^a\,\partial y^b\dots}$ l'un des premiers membres qui figurent dans le groupe de conditions initiales relatif à u, et par $F_{a,b,\dots}$ le second membre correspondant. Cela étant, nous prendrons dans Σ, pour l'une de nos inconnues, la quantité $\frac{\partial^{a+b+\dots}u}{\partial x^a\,\partial y^b\dots}$, que nous désignerons par $u_{a,b,\dots}$; puis, en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait cinq variables indépendantes, x, y, z, s, t, et que la fonction schématique $F_{a,b,\dots}$ dépende de s, t, nous écrirons dans les cases (x), (y), (z) de la colonne $(u_{a,b,\dots})$ les premiers membres

$$\frac{\partial u_{a,b,\dots}}{\partial x}=\dots,\qquad \frac{\partial u_{a,b,\dots}}{\partial y}=\dots,\qquad \frac{\partial u_{a,b,\dots}}{\partial z}=\dots,$$

et nous laisserons vides les cases (s) et (t) de cette même colonne; au cas où $F_{a,b,\dots}$ se réduirait à une simple constante schématique, les cases de la colonne considérée seraient ainsi toutes pleines. Ce que nous venons de faire pour l'une des conditions initiales appartenant au groupe relatif à u, nous le ferons pour toutes les autres du même groupe; et ce que nous aurons fait pour l'inconnue u, nous le ferons successivement pour toutes. Nous aurons ainsi un damier contenant des cases pleines et des cases vides; d'ailleurs, quelques seconds membres que nous écrivions ultérieurement dans les cases pleines, on voit, dès maintenant, que si l'on forme tour à tour, dans l'ancien système, puis dans le nouveau, un ensemble composé des inconnues et de leurs dérivées paramétriques, les deux ensembles ainsi obtenus se correspondront terme à terme, et que le second se déduira du premier par de simples changements de notations; de même, et toujours *aux notations près, l'économie des conditions initiales sera identique dans les deux systèmes*. Quant aux dérivées principales du nouveau système, elles coïncideront, aux notations près, les unes avec des dérivées principales, les autres avec des derivées paramétriques de l'ancien.

Il va sans dire que nous conservons aux variables indépendantes et aux anciennes inconnues les cotes respectives de tous rangs qu'elles avaient dans le système orthonome S, et que nous attribuons aux inconnues adjointes des cotes respectivement égales à celles des dérivées anciennes qu'elles admettent pour homonymes. Cela étant, il convient d'observer que les fonctions inconnues du système Σ dont la cote première tombe au-dessous de Γ n'ont, dans le système Σ, aucune dérivée paramétrique, puisqu'elles se trouvent, dans les conditions initiales, égalées à de simples constantes schématiques (voir *A*), et que, par suite, toutes les cases de leurs colonnes sont pleines. En conséquence, toute dérivée paramétrique du système Σ possède une cote première au moins égale à $\Gamma+1$, et toute dérivée paramétrique de cote première $\Gamma+1$ ne peut appartenir qu'à une fonction inconnue de cote première Γ, par suite, est du premier ordre.

Occupons-nous maintenant des seconds membres du système Σ, et considérons, pour fixer les idées, l'équation qui, dans Σ, a pour premier membre $\frac{\partial u_{a,b,\ldots}}{\partial x}$. A la notation près, ce premier membre coïncide avec une dérivée ancienne,

$$\frac{\partial^{(a+1)+b+\ldots} u}{\partial x^{a+1}\,\partial y^{b}\ldots},\tag{1}$$

dont la cote première ne surpasse pas $\Gamma+1$, et qui peut être, relativement à S, ou paramétrique, ou principale.

1° Si la dérivée (1) est paramétrique par rapport à S, il existe, dans le nouveau système, une dérivée paramétrique ou fonction inconnue, et une seule, qui, à la notation près, coïncide avec elle; nous égalerons alors $\frac{\partial u_{a,b,\ldots}}{\partial x}$ à cette quantité, et la relation résultante sera nécessairement du premier ordre : car, si la dérivée (1) est de cote première inférieure à $\Gamma+1$, le second membre, qui a même cote première, sera une inconnue adjointe, et, si elle est de cote première $\Gamma + 1$, le second membre, pour la même raison, sera une dérivée paramétrique première du système Σ.

2° Si la dérivée (1) est principale par rapport à S, nous remplacerons, dans son expression tirée du groupe Ψ, toutes les dérivées paramétriques de S par les dérivées paramétriques ou fonctions inconnues de Σ qui leur correspondent respectivement, et nous égalerons $\frac{\partial u_{a,b,\ldots}}{\partial x}$ à l'expression ainsi modifiée. Or, il est facile de voir que, ici encore, la relation résultante est nécessairement du premier ordre : car, si la dérivée (1) est de cote première inférieure à $\Gamma + 1$, le second membre ne peut contenir (outre les variables indépendantes) que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote première inférieure à $\Gamma + 1$, ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles; et, si la dérivée (1) est de cote première $\Gamma + 1$, il ne peut contenir que les inconnues anciennes et les expressions nouvelles de leurs dérivées paramétriques de cote première inférieure ou égale à $\Gamma + 1$, ou, en d'autres termes, que les inconnues anciennes et nouvelles avec des dérivées paramétriques premières.

Tel est le système du premier ordre, Σ, auquel fait allusion l'énoncé de l'alinéa II.

C. Soient :

H l'ensemble des relations obtenues en égalant chaque inconnue adjointe de Σ à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme;

${}^{(C)}S$ l'ensemble des relations qui, dans le système S indéfiniment prolongé par les différentiations de tous ordres relatives à $x, y, \ldots$, possèdent une cote première inférieure ou égale à l'entier (algébrique) C;

${}^{(C)}\Sigma$ l'ensemble des relations semblablement déduites de Σ;

${}^{(C)}H$ l'ensemble des relations semblablement déduites de H.

Cela étant, *les deux systèmes*

$${}^{(C)}\Sigma, \quad [{}^{(C)}H, {}^{(C)}S]$$

sont en corrélation multiplicatoire.

(*Ibid.*, n^{os} 143 à 147, puis 154 à 159).

D. Désignons par (S *bis*) et (Σ *bis*) deux systèmes respectivement identiques à S et Σ quant à l'écriture, mais où les inconnues seront supposées dépendre, non plus seulement, comme dans S et Σ, des variables x, y, ..., mais encore d'autres variables, α, β, ..., en nombre quelconque, qui ne figurent dans S et Σ, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation : l'économie des conditions initiales étant, comme nous l'avons constaté plus haut (*B*), identique, aux notations près, dans les deux systèmes S et Σ, les deux systèmes (S *bis*) et (Σ *bis*) jouiront l'un par rapport à l'autre de la même propriété. Désignons en outre par (H *bis*) le système, identique à H quant à l'écriture, que l'on obtient en égalant chaque inconnue adjointe de (Σ *bis*) à la dérivée ancienne qu'elle admet pour homonyme.

Cela étant, *si, dans les systèmes respectifs* (S *bis*), (Σ *bis*), *on impose aux fonctions inconnues des conditions initiales qui, aux notations près, soient de part et d'autre identiques, il arrive nécessairement de deux choses l'une :*

Ou bien aucun des deux systèmes n'admet de solution correspondante;

Ou bien chacun d'eux en admet une et une seule, les inconnues anciennes ayant, de part et d'autre, les mêmes valeurs, et les inconnues nouvelles se déduisant des anciennes à l'aide des relations (H *bis*).

Ce point se déduira sans peine de l'ensemble des suivants :

1° Le système (S *bis*), étant orthonome, ne peut admettre plus d'une solution répondant à des conditions initiales données.

2° A toute solution de (S *bis*) correspond manifestement une solution de (Σ *bis*), qui s'en déduit par la simple adjonction aux inconnues anciennes des dérivées servant d'inconnues nouvelles; aux notations près, les conditions initiales sont, pour l'une et l'autre, identiques.

3° Inversement, à toute solution de (Σ *bis*) correspond une solution de (S *bis*), qui s'en déduit en faisant abstraction des inconnues nouvelles; ces dernières se déduisent des anciennes à l'aide des relations (H *bis*); enfin, pour l'une et l'autre des deux solutions considérées, les conditions initiales sont, aux notations près, identiques.

[Car, si l'on prolonge indéfiniment le système (Σ *bis*) par les différentiations de tous ordres relatives à x, y, ..., le système

$$[(S\ bis), (H\ bis)]$$

est, en vertu de C, une combinaison multiplicatoire de diverses équations extraites du groupe illimité résultant.]

E. Si, en particulier, on suppose inexistant le groupe des variables α, β, ..., considérées dans D, on voit que *l'intégration de l'un quelconque des deux systèmes* S, Σ *se ramène à celle de l'autre*.

F. *La passivité du système orthonome* S *entraîne l'intégrabilité complète du système* (Σ *bis*).

Tout d'abord, la passivité de S entraîne, en vertu du n° **37**, l'intégrabilité complète de (S *bis*); le système (S *bis*) admet donc une solution (unique) répondant à des conditions initiales arbitrairement choisies; il en résulte, en vertu de D, que le système (Σ *bis*) possède, lui aussi, cette propriété, et, par suite, qu'il est complètement intégrable.

G. *Le simple rapprochement de* **E** *et* **F** *suffit à établir l'exactitude de l'énoncé formulé au début de l'alinéa* II.

III. Enfin, *le simple rapprochement des alinéas* I *et* II *suffit à établir l'exactitude de l'énoncé formulé au début du présent numéro* **30**.