JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE FRÉCHET

Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 281-297.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__281_0>

Sur une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale;

PAR MAURICE **FRÉCHET**.

PREMIÈRE PARTIE.

1. *Sens et utilité d'une représentation paramétrique intrinsèque.* — Lorsqu'une courbe continue est rectifiable, la représentation paramétrique de cette courbe obtenue en choisissant *l'arc pour paramètre* fournit la représentation paramétrique la plus simple à défaut d'autres renseignements sur la courbe. Elle a surtout l'avantage d'employer un paramètre dont la signification géométrique est simple et ne dépend que de la courbe elle-même, indépendamment de sa position dans l'espace. On peut dire que c'est une représentation paramétrique *intrinsèque* de la courbe.

Mais cette représentation n'est possible que pour une courbe rectifiable. Il serait intéressant d'obtenir une représentation paramétrique intrinsèque applicable aussi bien aux courbes non rectifiables, lesquelles peuvent être comme on sait d'une nature assez simple.

Parmi les avantages d'une pareille représentation, on doit citer en particulier le suivant : c'est qu'en cherchant à étudier les propriétés de la courbe supposée connue par sa représentation paramétrique, on risque moins d'être gêné par des particularités, des singularités dues à la représentation paramétrique donnée et qui n'ont rien de commun avec les particularités de la courbe elle-même.

Il semble qu'une représentation paramétrique intrinsèque devrait rendre des services dans certaines questions comme la représentation conforme ou le calcul d'une aire plane, dont le champ de validité n'est pas limité au cas où le contour de l'aire est une courbe rectifiable.

2. *Exemple d'une représentation intrinsèque applicable à des courbes non nécessairement rectifiables.* — Nous allons dans ce qui suit indiquer la définition et citer quelques propriétés d'une certaine représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue la plus générale, c'est-à-dire d'un ensemble *ordonné* de points qui est l'image continue et univoque d'un segment de droite. (Nous supposons qu'il s'agit d'arcs de courbe, le cas de courbes fermées se traiterait de façon analogue.) On sait qu'on peut alors représenter cet ensemble sous la forme

$$x = a(t), \qquad y = b(t), \qquad z = c(t) \qquad \text{avec } 0 \leq t \leq 1,$$

a, b, c étant trois fonctions de t, uniformément continues et qui ne sont à la fois constantes dans aucun intervalle ([1]). On sait ([1]) aussi qu'on passe d'une représentation à une autre en faisant dans les formules précédentes le changement de variable $t = h(\sigma)$ où $h(\sigma)$ est une fonction continue croissant avec σ de 0 à 1.

Appelons *oscillation d'un arc* de la courbe, la longueur de la plus plus grande des cordes limitées à deux points de cet arc.

Nous allons montrer qu'on peut choisir la fonction $h(\sigma)$, de sorte que *dans la nouvelle représentation en fonction de σ, la courbe soit partagée par le point correspondant à $\sigma = \frac{1}{2}$ en arcs dont l'oscillation est la même, chacun de ces arcs partagé par le point correspondant à $\sigma = \frac{1}{4}$ ou $\sigma = \frac{3}{4}$ en deux arcs d'égale oscillation, etc.*

3. *Propriétés de l'oscillation d'un arc de courbe.* — Pour simplifier les raisonnements, il est bon d'indiquer d'avance quelques propriétés de l'oscillation.

Pour énoncer ces propriétés et pour la suite, il y aura avantage à donner à la représentation paramétrique la plus générale d'une courbe C la forme plus ramassée

$$M = f(t) \qquad (0 \leq t \leq 1),$$

où la position du point M de la courbe est considérée comme une fonc-

([1]) *Voir* Fréchet, *Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, t. 22, 1906, p. 59.

tion du paramètre t. On peut aussi envisager $M = f(t)$ comme l'équation qui représente la transformation géométrique des points t d'un segment linéaire I en les points M d'une courbe C. Dire que $f(t)$ est une fonction continue signifiera que cette transformation supposée univoque est continue. Nous savons que l'on peut supposer que le point $f(t)$ n'est fixe dans aucun intervalle de I.

Nous pourrons alors représenter par $Os_c M'M''$ ou $Os_{f(t)}(t', t'')$, l'oscillation de la courbe C sur l'arc $M'M''$ joignant les points M', M'' correspondant aux valeurs t', t'' du paramètre. (On négligera l'indice C ou $f(t)$ quand il n'y aura pas de doute sur la courbe ou la représentation dont il s'agit.)

I. La condition nécessaire et suffisante pour que $Os(t', t'') = 0$ est que $t' - t'' = 0$.

II. On voit alors facilement que pour trois points continus quelconques M, M', M'', pris dans un ordre quelconque sur un même courbe continue, on a

$$|Os\, M'M - Os\, MM''| \leqq Os\, M'M'' \leqq Os\, M'M + Os\, MM''.$$

Si M''' est un quatrième point quelconque sur la même courbe, on a

$$|Os\, M''M''' - Os\, MM'| \leqq Os\, MM'' + Os\, M'M'''.$$

III. Appelons $\theta(\lambda)$ et $\Theta(\lambda)$ les bornes inférieure et supérieure de l'oscillation d'un arc de la courbe C, correspondant à un intervalle de variation du paramètre, de longueur constante λ. Il est manifeste que $\theta(\lambda)$ et $\Theta(\lambda)$ sont des fonctions non décroissantes de λ. Ces fonctions ne sont nulles pour aucune valeur positive de λ, mais elles tendent vers zéro avec λ.

IV. Il résulte de II et III que si $|t'' - t| < \lambda$ et $|t''' - t'| < \lambda$, on a

$$|Os(t, t') - Os(t'', t''')| \leqq 2\Theta(\lambda).$$

Donc, la quantité $Os(t, t')$ est une fonction uniformément continue de t et de t'.

En particulier si t varie en restant supérieur à une quantité fixe t_0, $Os(t_0, t)$ est une fonction de t continue et non décroissante.

V. Établissons entre deux courbes continues C et Γ, une homéomorphie où à un point M de C correspond un point μ de Γ. Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe sur C deux points MM′ tels que

$$\mathrm{O}s\,\mathrm{C} - \varepsilon < \mathrm{MM}'.$$

On a d'autre part

$$\mathrm{MM}' \leqq \mathrm{M}\mu + \mu\mu' + \mu'\mathrm{M}' \leqq 2d + \mathrm{O}s\,\Gamma,$$

en désignant par d le maximum de la distance de deux points correspondants de C et de Γ. On a donc

$$\mathrm{O}s\,\mathrm{C} - \mathrm{O}s\,\Gamma \leqq 2d + \varepsilon,$$

et en faisant tendre ε vers zéro et en permutant les rôles de C et de Γ, on a

$$|\mathrm{O}s\,\mathrm{C} - \mathrm{O}s\,\Gamma| \leqq 2d.$$

Si l'on appelle distance de C et de Γ la borne inférieure des quantités d qui correspondent aux différentes homéomorphies de C et de Γ et si l'on désigne cette borne par (C, Γ), on voit même qu'on a finalement pour deux courbes continues quelconques C et Γ :

$$|\mathrm{O}s\,\mathrm{C} - \mathrm{O}s\,\Gamma| \leqq 2(\mathrm{C}, \Gamma).$$

4. *Construction de la représentation paramétrique intrinsèque.* Nous avons remarqué que pour une courbe déterminée C et une réprésentation paramétrique déterminée $\mathrm{M} = f(t)$ de C, $\mathrm{O}s(t_0, t)$ est une fonction continue de t qui varie sans décroître. Ceci va nous permettre de définir la fonction $h(\sigma)$ qui conduit à la représentation intrinsèque annoncée.

En effet, il y a au moins une valeur de t distincte de 0 et de 1, que nous pouvons désigner par $h\left(\frac{1}{2}\right)$, telle que $\mathrm{O}s(0, t) - \mathrm{O}s(t, 1)$ s'annule en passant par cette valeur [pour varier de $-\mathrm{O}s(0, 1)$ à $+\mathrm{O}s(0, 1)$] (¹). De même il y a au moins une valeur de t que nous

(¹) Il pourra arriver que l'on ne trouve pas pour $h\left(\frac{1}{2}\right)$ une seule valeur, nous indiquerons plus loin comment on peut fixer celle-ci par une condition supplémentaire que nous n'utiliserons pas pour le moment.

pouvons désigner par $h\left(\frac{1}{4}\right)$ telle que $Os(0, t) = Os\left|t, h\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ et une valeur de t que nous pouvons désigner par $h\left(\frac{3}{4}\right)$, telle que

$$Os\left|h\left(\frac{1}{2}\right), t\right| = Os(t, 1), \ldots.$$

Finalement, en désignant par R l'ensemble des fractions dont les dénominateurs sont des puissances de 2, on voit qu'on arrivera à définir la fonction $h(\sigma)$ en tout point σ de R.

Sur cet ensemble R, $h(\sigma)$ est évidemment croissante. On définira $h(\sigma)$ pour σ quelconque entre 0 et 1, comme la borne supérieure de $h(r)$ quand r appartient à R et reste $\leqq \sigma$. La fonction ainsi définie sera évidemment croissante sur tout l'intervalle (0, 1). Si nous parvenons à démontrer qu'elle est aussi uniformément continue sur cet intervalle, le changement de variable $t = h(\sigma)$ sera admissible et fournira la représentation intrinsèque annoncée.

5. *Continuité de $h(\sigma)$.* — Pour cela, désignons d'abord par Ω_n la plus grande des oscillations des arcs de la courbe C qui sont limités par deux points donnés par des valeurs successives de $t = h(r)$ correspondant à deux valeurs de r de la forme $\frac{k}{2^n}$, $\frac{k+1}{2^n}$ (k, n étant des entiers quelconques, k variable, n fixe). Il est manifeste que quand n croît Ω_n ne croît pas et tend vers une limite α : cette limite est nulle.

En effet, dans le cas contraire, soit (r'_n, r''_n) l'intervalle (ou un des intervalles) où l'oscillation est $\Omega_n \geqq \alpha > 0$. Soit σ_0 une des limites de la suite r'_n : ce sera alors aussi un point vers lequel tend une suite d'intervalles extraite de la suite des intervalles (r'_n, r''_n). Soient maintenant ρ'_p, ρ''_p les points le plus près à gauche et à droite de σ_0 parmi ceux de R qui ont le dénominateur 2^p. Pour chaque valeur de p, il y a une infinité d'intervalles r'_n, r''_n qui seront compris dans ρ'_p, ρ''_p. Donc

$$h(\rho''_p) - h(\rho'_p) \geqq \alpha.$$

D'où $t'' - t' \geqq \alpha > 0$ et par suite $t'' > t'$ en appelant t', t'' les limites de $h(\rho'_p)$, $h(\rho''_p)$ quand p croît indéfiniment.

Supposons d'abord que σ_0 n'appartient pas à R; alors $\rho''_p - \rho'_p = \frac{1}{2^p}$

et en passant de p à $p+1$, on a

$$h(\rho'_p) = h(\rho'_{p+1}) \leqq t' < t'' \leqq h(\rho''_{p+1}) < h(\rho''_p)$$

ou

$$h(\rho'_p) < h(\rho'_{p+1}) \leqq t' \leqq t'' \leqq h(\rho''_{p+1}) = h(\rho''_p).$$

Donc dans le premier cas l'oscillation de $f(t)$ de t' à t'' est au plus égale à celle de $h(\rho'_{p+1})$ à $h(\rho''_{p+1})$ laquelle est égale par définition de h à celle de $h(\rho''_{p+1})$ à $h(\rho''_p)$. Donc $Os(t', t'')$ est au plus égale, par définition de Θ (§ 3, III, p. 283) à $\Theta(\lambda_p)$ en appelant λ_p la plus grande des quantités $h(\rho'_{p+1}) - h(\rho'_p)$ et $h(\rho''_p) - h(\rho''_{p+1})$. On obtiendrait le même résultat dans le second cas. Or λ_p tend vers zéro, donc aussi $\Theta(\lambda_p)$; et $Os(t', t'')$ qui est indépendant de p devrait être nul alors que $t' \neq t''$. Nous arrivons donc à la contradiction prévue.

Dans le cas où σ_0 appartiendrait à R une légère modification du raisonnement conduit à la même conclusion.

Ainsi Ω_n tend dans tous les cas vers zéro avec $\frac{1}{n}$. L'oscillation de $h(\sigma)$ dans un intervalle quelconque de longueur égale à $\frac{1}{2^n}$ étant au plus égale à $2\Omega_n$, il en résulte finalement que $h(\sigma)$ est une fonction uniformément continue de σ pour $0 \leqq \rho \leqq 1$.

En définitive $t = h(\sigma)$ constitue une transformation biunivoque et bicontinue du segment $(0, 1)$ sur lui-même, et si l'on pose

$$f[h(\sigma)] = F(\sigma),$$

l'équation

$$(M = F(\sigma) \qquad (0 \leqq \sigma \leqq 1)$$

constitue une représentation paramétrique intrinsèque de la courbe continue $M = f(t)$ supposée la plus générale de son espèce.

DEUXIÈME PARTIE.

PROPRIÉTÉS DE LA REPRÉSENTATION INTRINSÈQUE QUI VIENT D'ÊTRE DÉFINIE.

6. *Suite convergente de courbes.* — Nous dirons qu'une courbe orientée C_n tend vers une courbe orientée C si l'on peut établir entre les points de ces deux courbes une homéomorphie (conservant l'ordre) dans laquelle la distance MM_n de deux points correspondants converge vers zéro et cela uniformément quand M varie sur C. C'est dire que si l'on considère deux représentations paramétriques quelconques

$$\begin{aligned} M_n &= F_n(\sigma) \qquad \text{de } C_n, \\ M &= F(u) \qquad \text{de } C, \end{aligned}$$

il existe une fonction $u = \varphi_n(\sigma)$ continue et croissante telle que la distance des points $F_n(\sigma)$ et $F[\varphi_n(\sigma)]$ converge vers zéro quand n croît indéfiniment et cela uniformément quand $0 \leq \sigma \leq 1$.

Il peut très bien arriver que ni la suite $F_n(\sigma)$, ni aucune suite extraite des fonctions $F_n(\sigma)$ ne converge uniformément vers une représentation paramétrique déterminée de C.

Mais si $F_n(\sigma)$ est pour chaque valeur de n une représentation intrinsèque de l'espèce définie plus haut de C_n :

I. On peut extraire de la suite des $F_n(\sigma)$ au moins une suite uniformément convergente.

II. Toute suite uniformément convergente extraite de la suite des F_n a pour limite une fonction réalisant une représentation intrinsèque de C de l'espèce définie plus haut.

Démontrons d'abord la proposition II. Si $F_{n_1}(\sigma)$, $F_{n_2}(\sigma)$, ... convergent uniformément vers $\Phi(\sigma)$, la distance des points $F[\varphi_{n_i}(\sigma)]$ et $\Phi(\sigma)$ étant inférieure à la somme des distances de $F[\varphi_{n_i}(\sigma)]$ à $F_{n_i}(\sigma)$ et de $F_{n_i}(\sigma)$ à $\Phi(\sigma)$ convergera uniformément vers zéro. Donc (¹) les équations $M = F(u)$ et $M = \Phi(\sigma)$ sont celles d'une même courbe qui est C.

Il reste à prouver que la seconde équation est une représentation intrinsèque de l'espèce considérée plus haut, c'est-à-dire que les oscillations de $\Phi(\sigma)$ de $\sigma = 0$ à $\sigma = \frac{1}{2}$ et de $\sigma = \frac{1}{2}$ à 1 sont égales; qu'il en est de même de celles de Φ de $\sigma = 0$ à $\sigma = \frac{1}{4}$ et de $\sigma = \frac{1}{4}$ à $\sigma = \frac{1}{2}$; etc. Il suffira d'indiquer la preuve pour le premier stade. Celle-ci résulte immédiatement de la formule établie au paragraphe 3, V, p. 284.

(¹) *Loc. cit.*, p. 54.

La démonstration de la propriété I est un peu moins simple. On peut d'abord extraire de la suite des $\varphi_n(\sigma)$, une suite $\varphi_{n_1}(\sigma)$, $\varphi_{n_2}(\sigma)$, ... qui converge en chaque point de l'ensemble R. Posons, pour simplifier l'écriture, $\Phi_i(\sigma) \equiv F_{n_i}(\sigma)$, et de même $\psi_i(\sigma) \equiv \varphi_{n_i}(\sigma)$. Si l'on peut démontrer que $\psi_1(\sigma)$, $\psi_2(\sigma)$, ... convergent non seulement sur R mais quel que soit σ et cela uniformément vers une certaine fonction $\psi(\sigma)$, la distance des points $F[\psi_i(\sigma)]$ et $F[\psi(\sigma)]$ convergera uniformément vers zéro tout comme celle des points $\Phi_i(\sigma)$ et $F[\psi_i(\sigma)]$. Il en sera donc de même de celle des points $F[\psi(\sigma)]$ et $\Phi_i(\sigma)$, de sorte que l'on aura bien extrait de la suite des $F_i(\sigma)$ une suite $\Phi_i(\sigma)$ uniformément convergente.

Or, d'après la même formule du paragraphe 5, V, si l'on suppose que $\psi_1(\sigma)$, $\psi_2(\sigma)$, ... convergent sur l'ensemble R et si l'on appelle $\psi(\sigma)$ leur limite actuellement définie seulement sur R, la différence des oscillations de $F(u)$ de o à $\psi_i\left(\frac{1}{2}\right)$ et de $\psi_i\left(\frac{1}{2}\right)$ à 1 est inférieure ou égale à quatre fois la distance de C à C_{n_i}. Elle tend donc vers zéro avec $\frac{1}{i}$ et alors comme nous avons vu que l'oscillation de u' à u'' est une fonction continue de u' et de u'', à la limite les oscillations de $F(u)$ de o à $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$ et de $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$ à 1 sont égales. Il en sera de même des oscillations de F, de o à $\psi\left(\frac{1}{4}\right)$ et de $\psi\left(\frac{1}{4}\right)$ à $\psi\left(\frac{1}{2}\right)$, etc. Mais alors nous avons vu qu'il existe une fonction $h(\sigma)$ continue et croissante qui est égale sur R à $\psi(\sigma)$. On a donc $h(\sigma) = \lim \psi_i(\sigma)$ sur R; il suffit de démontrer que cela a lieu partout et uniformément. On voit facilement que cela a lieu partout en encadrant chaque point σ de deux nombres r', r'' de R tels que $h(r'') - h(r') < \varepsilon$, en prenant i assez grand pour que $|\psi_i(r'') - h(r'')|$ et $|\psi_i(r') - h(r')|$ soient $< \varepsilon$, d'où $\psi_i(r'') - \psi_i(r') < 3\varepsilon$ et alors $\psi_i(\sigma) - \psi_i(r') < 3\varepsilon$, $h(\sigma) - h(r') < \varepsilon$, d'où enfin $|\psi_i(\sigma) - h(\sigma)| < 5\varepsilon$, pour i assez grand.

Si la convergence de $\psi_i(\sigma)$ vers $h(\sigma)$ n'était pas uniforme, il existerait un nombre $\eta > 0$, tel que $|\psi_i(\sigma) - h(\sigma)| > \eta$ pour une infinité de valeurs de i et une infinité correspondante de valeurs de σ. On pourrait extraire de cette suite de valeurs de σ une suite convergente $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_i, \ldots$ et en appelant $\alpha_1(\sigma)$, $\alpha_2(\sigma)$, ... la suite correspondante des ψ_i, on voit qu'on aurait

$$|\alpha_i(\sigma_i) - h(\sigma_i)| < \eta.$$

Si l'on encadre encore la limite σ_0 des σ_i par deux nombres r', r'' de R, de sorte que $h(r'') - h(r') < \varepsilon$, ces deux nombres encadreront σ_i pour i assez grand et alors, en répétant le raisonnement précédent en y remplaçant σ par σ_i et ψ_i par α_i, on obtient

$$|\alpha_i(\sigma_i) - h(\sigma_i)| < 5\varepsilon$$

pour i assez grand. On arrive à la contradiction annoncée en prenant $\varepsilon = \frac{\eta}{5}$.

7. *Ensembles compacts de courbes.* — Un ensemble E de courbes continues est dit compact si, étant donnée une infinité de courbes quelconques de l'ensemble E, il existe une suite de ces courbes qui est convergente.

Nous savons d'après Arzela que si l'on prend au hasard une représentation paramétrique $M = f(t)$ pour chaque courbe de l'ensemble E, il suffit pour que cet ensemble soit compact que ces fonctions soient bornées dans leur ensemble et également continues, c'est-à-dire que :

1° Le point $f(t)$ reste dans un domaine borné indépendant de t et de la courbe C de E représentée par $M = f(t)$.

2° Quel que soit $\eta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'oscillation de $f(t)$ dans un intervalle de valeurs de t de longueur $< \varepsilon$ reste $< \eta$ quel que soit l'intervalle et quel que soit C de E.

Mais si on laisse arbitraire le choix de la représentation paramétrique, ces conditions suffisantes ne sont pas toutes deux nécessaires.

La condition 1° qui s'exprime géométriquement indépendamment de la représentation adoptée reste nécessaire; mais non la condition 2°.

Par contre, on peut dire : pour qu'un ensemble E de courbes, données par une représentation paramétrique arbitraire $M = f(t)$ de chacune d'entre elles, soit compact, il faut et il suffit qu'il existe pour chacune d'entre elles un changement de variable $t = \varphi(\sigma)$, telle que les fonctions $f[\varphi(\sigma)]$ soient dans leur ensemble bornées et également continues.

Seulement *toute la difficulté*, quand on connaît les fonctions $f(t)$ *est de savoir déterminer l'ensemble de ces changements de variable* ou plutôt de savoir s'il en existe un.

On peut donc compter *parmi les avantages de la représentation intrinsèque que nous avons décrite*, celui qui consiste en ce que :

Si c'est une telle représentation $M = F(\sigma)$ qui est donnée pour chaque courbe C de E, la condition suffisante *et nécessaire* pour que l'ensemble E soit compact est que les fonctions $F(\sigma)$ soient dans leur ensemble bornées et également continues. Autrement dit, on peut prendre, pour les fonctions $\varphi(\sigma)$ dont il était question plus haut, les fonctions $h(\sigma)$ au moyen desquelles on rend intrinsèque une représentation arbitraire.

En effet, si les $F(\sigma)$ supposées bornées dans leur ensemble n'étaient pas également continues, E étant compact, il existerait un nombre $\eta > 0$, tel que, quel que soit le nombre $\varepsilon_n > 0$, l'oscillation de l'une au moins $F_n(\sigma)$ des $F(\sigma)$ soit supérieure à η dans un intervalle (σ_n, σ'_n) de longueur $< \varepsilon_n$ au moins. Comme on peut extraire de la suite des σ_n une suite convergente et supposer $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$, on peut admettre que σ_n et σ'_n tendent vers un point σ_0. Enfin, comme E est compact, on peut supposer que les courbes $M = F_n(\sigma)$ forment une suite convergente de courbes. D'après le paragraphe **6**, on peut extraire des $F_n(\sigma)$ une suite de fonctions uniformément convergente. Cette suite sera compacte et par conséquent également continue, de sorte que pour ε_n assez petit, l'oscillation de $F_n(\sigma)$ dans (σ_n, σ'_n) sera inférieure à η. D'où la contradiction annoncée.

TROISIÈME PARTIE

8. *Remarque.* — De même que la représentation paramétrique d'une courbe rectifiable présente des propriétés analytiques plus simples quand on prend l'arc pour paramètre, de même il est vraisemblable que pour une courbe continue quelconque les propriétés de continuité, de dérivabilité de la représentation paramétrique sont plus précises quand on choisit le paramètre de la façon indiquée dans ce qui précède. Il ne serait peut-être pas sans intérêt d'étudier ces propriétés.

Nous nous contenterons de signaler la suivante qui faciliterait sans doute la recherche des autres.

9. *Propriété analytique de la représentation paramétrique proposée.* — Soit $M = F(\sigma)$ une représentation paramétrique intrinsèque (de l'espèce proposée plus haut) d'une courbe continue C. *Nous allons montrer que le rapport* $\frac{Os_{F(\sigma)}(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2}$ *a une borne inférieure positive quand* σ_1, σ_2 *varient en restant distincts, entre* o *et* 1.

Soit, en effet, ω_n la plus petite des oscillations des arcs de C qui sont limités par deux points correspondant à deux valeurs de σ de la forme $\frac{k}{2^n}$, $\frac{k+1}{2^n}$ (k et n entiers, k quelconque).

Si σ_1, σ_2 sont distincts, il y a une valeur de n assez grande pour qu'entre ces deux points σ_1, σ_2 il y ait deux points $\frac{k}{2^n}$, $\frac{k+1}{2^n}$ et deux seulement, de sorte que

$$\frac{k-1}{2^n} < \sigma_1 \leqq \frac{k}{2^n} < \frac{k+1}{2^n} \leqq \sigma_2 < \frac{k+2}{2^n}.$$

On a alors

$$\frac{1}{2^n} \leqq \sigma_2 - \sigma_1 < \frac{3}{2^n}$$

et d'autre part

$$Os_{F(\sigma)}(\sigma_1, \sigma_2) \geqq \omega_n,$$

d'où

$$\frac{Os_{F(\sigma)}(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} < \frac{2^n \omega_n}{3}.$$

Or il y a deux arcs consécutifs MP, PN de C où l'oscillation de C est égale à ω_{n+1}; l'oscillation de C sur l'arc MN est une corde M′N′ de cet arc et l'on a $\omega_n \leqq M'N' \leqq M'P + PN' \leqq 2\omega_{n+1}$. D'où

$$2^{n+1}\omega_{n+1} \geqq 2^n \omega_n \geqq \ldots \geqq 2\omega_1$$

et finalement $\frac{Os_{F(\sigma)}(\sigma_1, \sigma_2)}{\sigma_1 - \sigma_2} > \frac{2\omega_1}{3}$ quantité fixe positive.

10. *Application.* — A titre de première application, nous ferons la remarque suivante. On sait qu'une courbe continue sans point multiple et ayant une tangente déterminée en chaque point peut avoir une représentation paramétrique constituée de fonctions dérivables $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, mais dont les dérivées peuvent exceptionnellement s'annuler à la fois, ce qui empêche de prendre en chaque point pour paramètres directeurs de la tangente les dérivées x'_t, y'_t, z'_t. C'est par exemple ce qui a lieu à l'origine pour le segment de droite

$$x = t^3, \qquad y = 0, \qquad z = 0 \qquad (-1 \leq t \leq +1).$$

Une telle singularité de la représentation paramétrique peut être être gênante : elle *ne se présente pas pour la représentation intrinsèque* définie ci dessus.

En d'autre termes, soit

$$x = u(\sigma), \qquad y = v(\sigma), \qquad z = w(\sigma)$$

une représentation intrinsèque, de l'espèce définie ci-dessus, d'une courbe C : si en un point σ_0, x, y, z sont dérivables, les trois dérivées x'_0, y'_0, z'_0 ne peuvent être nulles toutes trois.

En effet :

$$\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2} = \lim_{\sigma \to \sigma_0} \sqrt{\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}{(\sigma - \sigma_0)^2}}$$

$$= \lim \frac{r}{\mathrm{Os}_C(\sigma_0, \sigma)} \times \frac{\mathrm{Os}_C(\sigma_0, \sigma)}{|\sigma_0 - \sigma|}.$$

Le second facteur est plus grand qu'un nombre fixe; étudions le premier.

Considérons une suite d'arcs encadrant le point σ_0, le $n^{\text{ième}}$ étant $|\sigma_0 - \sigma| \leq \varepsilon_n$, ε_n tendant vers zéro. Soit maintenant R_n le maximum de la corde joignant le point σ_0 à un point quelconque du $n^{\text{ième}}$ arc; la valeur R_n est par exemple obtenue en joignant σ_0 à σ_n et l'on a $|\sigma_0 - \sigma_n| \leq \varepsilon_n$. De sorte que σ_n tend vers σ_0. Or il est manifeste que l'on a

$$\mathrm{Os}_C(\sigma_0, \sigma_n) \leq 2 R_n$$

ou

$$\frac{R_n}{\mathrm{Os}_C(\sigma_0, \sigma_n)} \geq \frac{1}{2}.$$

De sorte que pour une suite de valeurs de σ, σ_1, σ_2, ..., σ_n, ... tendant vers zéro, l'expression $\frac{r}{Os(\sigma_0, \sigma)}$ reste $\geq \frac{1}{2}$. Dès lors, on ne peut avoir

$$x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = 0.$$

Ainsi *pour la représentation paramétrique intrinsèque considérée, il suffit* qu'en un point σ_0, *les trois coordonnées soient dérivables* pour qu'on soit assuré de *l'existence d'une tangente* (définie géométriquement comme limite d'une corde) et pour qu'on puisse en prendre *les dérivées des coordonnées comme paramètres directeurs*. Circonstance qui, on l'a vu plus haut, *n'a pas nécessairement lieu* pour une représentation paramétrique *quelconque*. Elle n'a même pas lieu pour des représentations aussi simples que la représentation des courbes rectifiables en fonction de l'arc et cela même en des points pourvus d'une tangente.

11. *Question à résoudre.* — Ce qui précède nous encourage à proposer la question suivante, dont la solution à première vue ne paraît pas douteuse :

Si une courbe continue est douée partout (ou en un point) *d'une tangente, peut-on la représenter paramétriquement par des fonctions dérivables partout* (ou au point correspondant)? Bien entendu, dans cet énoncé, la tangente est définie géométriquement, c'est-à-dire comme limite d'une corde.

Il est d'abord évident que les représentations d'une courbe douée partout d'une tangente ne sont pas *toutes* partout dérivables. Par exemple en prenant pour $a(t)$ une fonction continue croissante, on aura sous la forme $x = a(t)$ la représentation paramétrique continue la plus générale d'une droite. Cette droite a partout une tangente et $a(t)$ peut cependant n'être pas partout dérivable.

Mais la question qui nous occupe est celle-ci : parmi les représentations paramétriques d'une courbe douée partout d'une tangente, y en a-t-il au moins une (et alors il y en aura évidemment une infinité) qui soit partout dérivable. Cela a lieu pour l'exemple précédent de la droite. Mais cela a-t-il lieu pour toute autre courbe continue?

Il semble à première vue que cela ne soit pas douteux. Si cela était, il semble que les représentations paramétriques les plus fidèles, en particulier les représentations intrinsèques, devraient être les premières choisies : ce sont elles qui reflètent analytiquement le mieux les propriétés géométriques de la courbe.

L'exemple que nous allons présenter peut donc éveiller un doute. Nous allons en effet construire *une courbe de Jordan qui possède une tangente en chacun de ses points, qui est rectifiable et dont la représentation paramétrique en fonction de l'arc n'est pas partout dérivable.* (Rappelons que d'après un théorème de M. Lebesgue, sans savoir si une courbe a des tangentes ou non, le seul fait pour la courbe d'être rectifiable lui assure une représentation paramétrique dérivable *presque* partout par rapport à l'arc.)

L'exemple annoncé est constitué par un arc plan AB formé d'un segment rectiligne AO et par un arc OB formé d'une suite infinie de demi-circonférences BB_1, B_1B_2, ..., B_nB_{n+1}, ..., situées alternativement de chaque côté de la droite OB, et tendant vers le point O (qui est aligné avec A, B, entre A et B). Soient r_1, r_2, ... les rayons de ces cercles; la série

$$r_1+r_2+\ldots=\frac{BB_1}{2}+\frac{B_1B_2}{2}+\ldots$$

converge évidemment vers $\frac{BO}{2}$. La courbe considérée est donc rectifiable, sa longueur étant

$$AO+\pi r_1+\pi r_2+\ldots=AO+\pi\frac{OB}{2}.$$

Alors le rapport de la corde OB_n à l'arc $\widehat{OB}_n$ sera

$$\frac{\overline{OB_n}}{\widehat{OB_n}}=\frac{2r_{n+1}+2r_{n+2}+\ldots}{\pi r_{n+1}+\pi r_{n+2}+\ldots}=\frac{2}{\pi}.$$

De sorte que le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta s}$ qui doit fournir la dérivée de l'abscisse x (en prenant AOB pour axe Ox) tend vers $\frac{2}{\pi}$ quand on le calcule aux points B_n, alors qu'il tend évidemment vers l'unité quand on fait tendre s vers zéro par valeurs négatives. Ainsi sur cette courbe, x n'a pas à l'origine une dérivée déterminée par rapport à l'arc.

Pourtant la courbe a évidemment une tangente en chacun de ses points, sauf peut être au point O. Elle aura aussi une tangente au point O si le rapport $\frac{r_{n-1}}{r_n + r_{n+1} + \ldots}$ tend vers zéro, ce qui a lieu en prenant par exemple $r_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

L'exemple précédent [1] pourrait nous mettre en doute au sujet de la réponse à donner à la question posée. Donner une réponse affirmative, c'est affirmer implicitement qu'il peut exister des représentations intrinsèques plus fidèles que la représentation en fonction de l'arc. On pourrait hésiter à adopter ce point de vue. Mais nous avons montré que la représentation paramétrique intrinsèque envisagée dans ce Mémoire est déjà dépourvue d'une première singularité que peut présenter la représentation en fonction de l'arc.

Il n'est donc pas excessif de se demander si la seconde singularité dont nous venons de donner un exemple dans la représentation en fonction de l'arc ne pourrait être éliminée par l'emploi d'une autre représentation.

Pour essayer si la représentation intrinsèque que nous avons proposée résout la question, peut-être serait-il nécessaire d'en assurer préalablement l'unicité.

12. *Unicité de la représentation intrinsèque.* — Tout ce que nous avons dit s'applique quand, pour définir la fonction $h(\sigma)$, (*voir* § **4**), on prend pour $h\left(\frac{1}{2}\right)$ n'importe quelle valeur de t annulant

$$Os(0, t) - Os(t, 1).$$

Cette fonction est continue et non décroissante; par conséquent, elle prend la valeur zéro, soit pour une seule valeur de t, soit pour toutes les valeurs de t comprises dans un certain intervalle fermé t', t'' intérieur à l'intervalle $0, 1$. De même pour chacune des valeurs $h\left(\frac{1}{4}\right)$, $h\left(\frac{3}{4}\right)$, $h\left(\frac{1}{8}\right)$, ... ou bien cette valeur est déterminée ou bien elle peut être arbitrairement choisie dans un certain intervalle fermé.

---

[1] Dans cet exemple, la courbe a partout une tangente qui varie continûment sauf au point O. Ne serait-il pas possible d'éviter la singularité en imposant partout non seulement l'existence de la tangente mais aussi sa continuité?

Il est important de montrer qu'on peut préciser la définition de $h(\sigma)$ de façon à faire cesser cette indétermination. Un moyen simple consisterait à prendre systématiquement pour $h\left(\frac{1}{2}\right)$, $h\left(\frac{1}{4}\right)$, … à chaque fois la plus petite des valeurs possibles. Mais on introduirait ainsi une certaine dissymétrie qu'il vaut mieux éviter.

On y arrivera de la façon suivante. Il suffit de faire le raisonnement pour $h\left(\frac{1}{2}\right)$. Supposons que l'on ait $Os(0, t) = Os(t, 1)$ pour plus d'une valeur de t. L'ensemble des points vérifiant cette égalité sera un certain intervalle $t'_1 \leqq t \leqq t''_1$ avec $0 < t'_1 < t''_1 < 1$. Opérons maintenant sur (t'_1, t''_1) comme sur $(0, 1)$. S'il y a une seule valeur de t telle que $Os(t'_1, t) = Os(t, t''_1)$, on prendra cette valeur pour $h\left(\frac{1}{2}\right)$. Sinon soit t'_2, t''_2 l'intervalle où a lieu cette égalité. On opérera sur (t'_2, t''_2) de même que sur (t'_1, t''_1), etc. On obtient ainsi une suite d'intervalles $(t'_1, t''_1)(t'_2, t''_2), \ldots, (t'_n, t''_n), \ldots$, chacun intérieur au précédent. Ou bien au bout d'un certain nombre fini d'opérations, on arrive à un intervalle t'_p, t''_p pour lequel il y a un seul point t_0 tel que $Os(t'_p, t_0) = Os(t_0, t''_p)$; et l'on prendra $h\left(\frac{1}{2}\right) = t_0$. Ou bien la suite de ces intervalles (t'_1, t''_1), (t'_2, t''_2), … est illimitée. Les nombres $t'_1, t'_2, \ldots$ vont en croissant et ont une limite t'_0; les nombres $t''_1, t''_2, t''_3, \ldots$ vont en décroissant et ont une limite t''_0. Et l'on a

$$Os(t'_0, t''_0) \leqq Os(t'_0, t'_n) + Os(t'_n, t''_0).$$

Or $Os(t'_n, t''_0) = Os(t''_0, t''_n)$ puisque $t'_{n+1} < t''_0 < t''_{n+1}$.
Donc

$$Os(t'_0, t''_0) \leqq Os(t'_0, t'_n) + Os(t''_0, t''_n).$$

Le second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc $t'_0 = t''_0$.

Ainsi en opérant de cette manière la fonction $h(\sigma)$ est entièrement définie par la courbe indépendamment en outre de la position de celle-ci dans l'espace.

Il y a lieu de remarquer que l'indétermination que nous avons cherché à éviter ne se présentera que pour des courbes présentant des sinuosités. Par exemple si l'on applique la méthode à un segment de droite ou à un arc de cercle, l'indétermination de $h(\sigma)$ ne se présente pas et la représentation intrinsèque que nous avons définie est celle qu'on obtient directement en prenant un paramètre proportionnel à la longueur de l'arc correspondant.

15. *Nature géométrique des courbes de Jordan.* — Il est bon de remarquer que la conception d'une courbe de Jordan est indépendante de la représentation paramétrique qui a pu lui donner naissance. Pour mettre ce point en évidence, on peut poser le problème suivant :

Soit S une suite ordonnée de points, suite dont on sait par hypothèse que c'est une courbe de Jordan. On sait, par suite, qu'elle est susceptible d'une infinité de représentations paramétriques où la croissance du paramètre place les points dans l'ordre adopté sur S. *Est-il possible de citer l'une, au moins, de ces représentations paramétriques* — dont aucune n'est supposée donnée — et de la déterminer, *connaissant seulement* : 1° *l'ensemble de points* qui sert de support à la suite; 2° *l'ordre* dans lequel sont rangés ces points dans la suite S?

D'après ce qui précède, la réponse est *affirmative*. Pour attacher à chaque point de la suite S une valeur du paramètre *intrinsèque* σ défini plus haut, il suffit évidemment de connaître la suite ordonnée S.