JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. SOULA

Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 4 (1925), p. 339-353.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1925_9_4__339_0>

Sur les fonctions définies par des séries de Dirichlet;

PAR J. SOULA.

Les séries de Dirichlet de la forme

$$f(s) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

où λ_n est réel et positif et croît indéfiniment avec n, ont été étudiées à divers points de vue; en particulier, on a pu leur appliquer la plupart des théorèmes connus qui établissent des relations entre les coefficients d'une série de Taylor et les particularités de la fonction analytique que cette série détermine.

Ainsi, il est démontré [1] que si la limite inférieure de $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ est supérieure à zéro et si $\frac{\lambda_n}{n}$ tend vers l'infini, la droite de convergence est coupure pour la fonction $f(s)$; des propriétés relatives aux signes des coefficients a_n ont été également généralisées [2].

On sait encore comparer les fonctions

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s} \qquad \text{et} \qquad \varphi(s) = \Sigma a_n G(\lambda_n) e^{-\lambda_n s}$$

lorsque $G(v)$ est une fonction entière de v telle que

$$|G(v)| < e^{\varepsilon |v|}$$

(1) WENNBERG *dissertation*, Upsal, 1920, OTTO SZASZ, *Sur les singularités des séries de puissances et des séries de Dirichlet* (*Math. Annalen*, t. 85, 1922). — CARLSON et LANDAU, *Nouvelle démonstration et généralisation du théorème de Fabry sur les lacunes* (*Göttingue Nachrichten*, 1921).

(2) LANDAU, *Un théorème de Tchebycheff* (*Math. Annalen*, t. 61, 1905). — OTTO SZASZ, *loc. cit.*

dès que $|v|$ est assez grand, ε étant un nombre positif arbitraire ([1]). Dans ce cas, $\varphi(s)$ ne peut admettre à distance finie de points singuliers autres que ceux de $f(s)$.

Je me propose de démontrer un théorème plus général que celui de M. Cramer; je ne supposerai pas que la fonction $G(v)$ soit entière, j'admettrai seulement qu'elle est définie dans un angle qui contient l'axe réel positif et que l'on a dans cet angle $|G(v)| < e^{\varepsilon|v|}$.

Dans le cas particulier des séries de Taylor, le théorème que j'ai en vue résulterait de deux théorèmes bien connus :

1° Le théorème de M. Hadamard sur la multiplication des singularités. [On voit tout de suite qu'il ne s'applique pas aux séries de Dirichlet proprement dites; ainsi, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^s}$ représente une fonction entière et $\zeta(s) = \sum \frac{1}{n^s}$ possède un pôle.]

2° Le théorème suivant lequel la série $\Sigma G(n) x^n$ représente une fonction qui n'a que le point singulier 1 sur son cercle de convergence pourvu que la fonction $G(v)$ de la variable $v = Re^{i\varphi}$ soit holomorphe dans l'angle défini par

$$-\alpha \leq \varphi \leq \alpha \qquad \alpha < \frac{\pi}{2},$$

et que l'on ait dans cet angle

$$|G(v)| < e^{\varepsilon R}$$

dès que R est assez grand et pour si petit que soit ε.

Cet énoncé, qui résume de nombreux résultats antérieurs, est dû, sous sa forme générale, à M. Fabry ([2]).

Je signalerai, enfin, que M. Cramer a donné un énoncé où il suppose seulement que l'on a

$$|G(v)| < e^{k|v|},$$

([1]) CRAMER, *Sur les séries de Dirichlet* (*Arkir för Matematick*, Bd 13, n° 22, 1919).

([2]) FABRY, *Sur les points singuliers d'une série de Taylor* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. 4, 1898). J'ai donné une autre démonstration qui est généralisée ici (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 8e série, t. 4, fasc. 2, 1921). *Voir* aussi l'importante Thèse de M. Carlson (Upsal, 1920).

k étant un nombre positif déterminé. Le procédé que j'emploie montre qu'il serait facile, mais sans importance, de se placer dans cette hypothèse plus générale.

1. Je me propose donc de comparer les deux séries

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s} \qquad \text{et} \qquad \varphi(s) = \sum_1^\infty g\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) a_n e^{-\lambda_n s}$$

au point de vue de la recherche des points singuliers des fonctions qu'elles définissent. Incidemment nous aurons aussi à comparer les abscisses de convergence de ces séries. A la fonction $G(v)$ considérée pour les valeurs de v voisines de l'infini, j'ai substitué la fonction $g(u) = G\left(\frac{1}{u}\right)$ que je considère au voisinage de $u = 0$.

$g(u)$ sera une fonction analytique de la variable $u = re^{i\theta}$, holomorphe dans le domaine en forme de secteur circulaire S défini par

$$(\mathrm{S}) \qquad -\alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2, \qquad r \leq r_0 \qquad \left(0 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2},\ 0 < \alpha_2 < \frac{\pi}{2}\right).$$

Elle sera aussi holomorphe sur le contour γ de ce secteur, sauf, peut-être, à l'origine; enfin elle sera jusqu'à nouvel ordre supposée bornée dans le domaine ainsi défini.

Le secteur S contient les points $\frac{1}{\lambda_p}, \frac{1}{\lambda_{p+1}}, \cdots$ dès que p est assez grand et l'on peut supposer sans inconvénient que ceci a lieu pour $p = 1$.

Je supposerai que $f(s)$ admet une droite de convergence d'abscisse l; elle converge alors dans le domaine de la variable s défini par

$$\mathrm{R}(s) > l.$$

$\mathrm{R}(s)$ désignant, suivant l'usage, la partie réelle de s. Je supposerai, de plus, que cette droite de convergence n'est pas coupure essentielle pour la fonction $f(s)$ définie par la série et je me propose de montrer que $\varphi(s)$ est holomorphe dans une région qui fait partie du domaine d'holomorphie de $f(s)$ et qui est située à gauche de la droite de convergence de $f(s)$.

Pour préciser, je dois porter mon attention sur un domaine Δ où $f(s)$ est holomorphe, domaine qui ne comprendra pas, en général, la totalité de la région où $f(s)$ est holomorphe. Ce domaine sera d'un seul tenant; une portion sera dans la région de convergence de $f(s)$, une autre portion dans la région de divergence. Je me propose de montrer que, *sous réserve de conditions supplémentaires relatives à la forme de* Δ, $\varphi(s)$ est, tout comme $f(s)$, holomorphe dans Δ. Je signale, dès maintenant, une des conditions à imposer à Δ : tout point s de la partie de Δ, qui est dans la région de divergence de $f(s)$, peut être joint à un point de la région de convergence par un segment de droite parallèle à l'axe réel et situé tout entier dans Δ. Les autres conditions à imposer à Δ sont un peu plus compliquées et il sera préférable de ne les donner que quand elles se présenteront d'une façon naturelle.

2. *Convergence de* $Q(s, u)$. — Je désigne par $Q(s, u)$ la fonction définie par la série

$$Q(s, u) = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n e^{-\lambda_n s}}{\frac{1}{u} - \lambda_n}$$

qui est une fonction $\varphi(s)$ particulière.

Je commence par supposer s à l'intérieur de la région de convergence de $f(s)$; j'admets que l'on a

$$R(s) > l + \varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ positif})$$

et je n'étudie la fonction $Q(s, u)$ que lorsque le point d'affixe u décrit le contour γ du secteur circulaire S (je suppose cependant u différent de zéro). La convergence de $Q(s, u)$ se traite aisément à l'aide d'un lemme analogue à celui d'Abel et dont je reproduis l'énoncé [1].

Soient deux suites indéfinies de quantités

$$\begin{gathered} \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ \ldots, \\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_n\ \ldots. \end{gathered}$$

Supposons que :

1° Le module de $A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ reste fini quand n augmente indéfiniment;

2° La série B, formée des quantités $b_1 - b_2$, $b_2 - b_3$, est absolument convergente;

---

(1) *Voir* CAHEN, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. **11**, p. 79.

3° b_n tend vers zéro.

Dans ces conditions la série

$$Q = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n + \dots$$

est convergente.

Supposons de plus les $b_1 b_2 \dots b_n \dots$ fonctions d'une variable u, $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ étant indépendants de u. Si b_n tend uniformément vers zéro et si la série

$$B = |b_1 - b_2| + |b_2 - b_3| + \dots$$

est uniformément convergente, la série Q est aussi uniformément convergente en u.

Soit H la borne supérieure des $|A_n|$, soient B_n et Q_n la somme des n premiers termes des séries B et Q; on constate aisément que l'on a

$$(1) \qquad |Q_{n+p} - Q_n| < H(B_{n+p} - B_n) + H|b_{n+p+1}| + H|b_n|.$$

Appliquons ce lemme à la série $Q(s, u)$ en posant

$$\alpha_n = a_n e^{-\lambda_n s}, \qquad b_n = \frac{1}{\frac{1}{u} - \lambda_n},$$

et montrons que les trois conditions d'application du lemme sont bien remplies :

1° On sait que si $R(s) > l + \varepsilon$, la série $\alpha_1 = \alpha_2 + \dots + \alpha_n \dots$ converge, de sorte que le module de $A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ est bien borné. Je note, en passant, que cette borne de A_n peut être prise indépendante de s si s est à la fois dans Δ et dans la région où

$$R(s) > l + \varepsilon.$$

On sait, en effet (¹), que $f(s)$ converge uniformément *dans cette région bornée*. On a, pour n assez grand,

$$|f(s) - A_n| < \delta \qquad (\delta < 0).$$

Or $f(s)$ est borné, δ est indépendant de s. On voit donc que A_n a une borne indépendante de s et de n.

(¹) *Voir* CAHEN, *Mémoire cité*, p. 82.

2° Je dois étudier la série

$$B = \sum |b_n - b_{n+1}| = \sum \left| \frac{1}{\frac{1}{u} - \lambda_n} - \frac{1}{\frac{1}{u} - \lambda_{n+1}} \right|$$

$$= \sum \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\left|\lambda_n - \frac{1}{u}\right| \left|\lambda_{n+1} - \frac{1}{u}\right|}.$$

Supposons d'abord que u soit situé sur la partie circulaire du contour γ. On a une inégalité telle que

$$\left| u - \frac{1}{\lambda_n} \right| > a \qquad (n = 1, 2, \ldots; a \text{ positif})$$

d'où

$$\left| \lambda_n - \frac{1}{u} \right| > \frac{a\lambda_n}{|u|}$$

et la série B admet pour majorante

$$\frac{|u^2|}{a^2} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n \lambda_{n+1}},$$

série qui converge évidemment et dont la somme a une borne indépendante de u.

Supposons, en deuxième lieu, que u soit sur la droite issue de o et d'argument α_2. En traçant la figure on verra que l'on a

$$\left| u - \frac{1}{\lambda_n} \right| < |u| \sin \alpha_2,$$

$$\left| \lambda_n - \frac{1}{u} \right| < \lambda_n \sin \alpha_2$$

et la série B admet pour majorante $\frac{1}{\sin^2 \alpha_2} \sum \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\lambda_n \lambda_{n+1}}$.

On aurait un résultat analogue quand u décrit le segment de droite d'argument $-\alpha_1$, de sorte que B admet une majorante qui est une série à termes positifs, indépendante de u et convergente, lorsque u décrit le contour γ.

3° Il nous reste à montrer que $\frac{1}{\frac{1}{u} - \lambda_n}$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Je traite seulement le cas où u est sur le segment de droite d'argument α_2. On a

$$\left|\frac{1}{\frac{1}{u}-\lambda_n}\right| < \frac{1}{\lambda_n \sin\alpha_2} < \frac{1}{\lambda_1 \sin\alpha_2},$$

ce qui donne la démonstration cherchée.

Ainsi $b_n = \dfrac{1}{\frac{1}{u}-\lambda_n}$ tend uniformément vers zéro quand u est sur γ.

Il est donc établi que $Q(s, u)$ converge uniformément en u pour $R(s) > l + \varepsilon$ et pour u sur le contour γ.

J'aurai besoin de quelque chose de plus : je dis que $|Q(s, u)|$ admet une borne indépendante de s et de u lorsque s est dans la partie de Δ pour laquelle $R(s) > l + \varepsilon$ et lorsque u est sur γ.

Je me reporte à l'inégalité (1),

$$(1) \qquad |Q_{n+p} - Q_n| < H(B_{n+p} - B_{n-1}) + H\,|b_{n+p+1}| + H\,|b_n|.$$

J'ai déjà fait observer que H, borne des A_n, peut être choisi indépendamment de la valeur de s, c'est donc une constante absolue. On vient de voir que $B_{n+p} - B_{n-1}$, $|b_{n+p+1}|$, $|b_n|$ peuvent être pris aussi voisins de zéro qu'on le veut et cela indépendamment de la valeur de u et de celle de p, pourvu que n soit assez grand.

Le deuxième membre de (1) a donc une borne indépendante de p, de s, de u. Donc

$$|Q(s, u) - Q_n|$$

a une borne indépendante de s et de u pour n assez grand; n étant choisi une fois pour toutes, $|Q_n|$ est borné : c'est en effet la somme d'un nombre fini de termes

$$\frac{a_q e^{-\lambda_q s}}{\frac{1}{u}-\lambda_q}$$

dont le module est borné si s est dans Δ et u sur γ.

$|Q - Q_n|$ et $|Q_n|$ sont bornés, $|Q(s, u)|$ est donc borné.

Nous conclurons donc :

La série $Q(s, u) = \sum \dfrac{a_n e^{-\lambda_n s}}{\frac{1}{u}-\lambda_n}$ est convergente dans le domaine de convergence de $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ lorsque u parcourt le contour γ (le point $u = 0$ étant mis à part).

Si, de plus, on a $R(s) > l + \varepsilon$ et si s est dans Δ, la série converge uniformément et le module de sa somme admet une borne qui ne dépend ni de s ni de u.

3. *Étude de $Q(s, u)$ quand s est dans Δ et quand u décrit un arc de cercle dont le centre est l'origine et dont le rayon est r_0.* — Je vais maintenant effectuer le prolongement analytique de $Q(s, u)$ dans tout le domaine Δ de la variable s; u est un point quelconque de γ et je commence par supposer qu'il est sur la partie circulaire de ce contour.

Dans ce but, je considérerai l'intégrale

$$J(s, u) = \int_{\xi}^{1} t^{-\frac{1}{u}-1} f(s - \log t)\, dt.$$

ξ est un nombre positif, réel, *inférieur à* 1, u est sur l'arc de cercle, t parcourt le chemin rectiligne $(1, \xi)$ et reste réel, enfin $t^{-\frac{1}{u}-1}$ désigne $e^{-\left(\frac{1}{u}+1\right)\log t}$ avec $\log t$ réel.

Je suppose, pour un instant, que tout en restant dans Δ, s vérifie

$$R(s) > l + \varepsilon;$$

on a

$$R(s - \log t) \geq R(s) > l + \varepsilon. \tag{2}$$

Je puis donc remplacer $f(s - \log t)$ par la série de Dirichlet uniformément convergente qui lui correspond et je puis intégrer terme à terme. J'obtiens

$$J(s, u) = Q(s, u) - \xi^{-\frac{1}{u}} Q(s - \log \xi, u). \tag{3}$$

Je reviens maintenant à l'hypothèse plus générale que s est quelconque dans Δ et qu'on n'a plus nécessairement $R(s) > l + \varepsilon$. Je vais montrer que les deux termes $J(s, u)$ et $Q(s - \log \xi, u)$ sont des fonctions holomorphes de s, tout au moins si ξ est convenablement choisi. Il résultera de l'équation (3) que $Q(s, u)$ est prolongeable analytiquement dans tout le domaine Δ.

Tout d'abord, $J(s, u)$ est fonction holomorphe de s si s est dans Δ. Pour le prouver, je remarquerai que $\log t$ est réel et négatif, $s - \log t$ a pour affixe un point qui est, soit dans la région Δ, soit dans la région de convergence de $f(s)$, quand t parcourt le segment rectiligne $(1, \xi)$ et cela en vertu de la supposition donnée explicitement à la fin du n° **1**.

D'autre part, $t^{-\frac{1}{u}-1}$ est fonction finie et continue de t si u est sur l'arc de cercle. L'élément différentiel de l'intégrale $J(s, u)$ est donc une fonction holomorphe de s quel que soit t; cette fonction admet une borne indépendante de s, de t et de u; on peut en déduire que $J(s, u)$ est holomorphe en s.

Je vais en second lieu étudier $Q(s - \log\xi, u)$. Je remarque que, puisque Δ ne s'étend pas indéfiniment dans la direction négative de l'axe réel, on a une inégalité de la forme

$$R(s) > A \qquad (A \text{ réel, inférieur à } l + \varepsilon)$$

pour s dans Δ.

Prenons alors

$$\xi < e^{A-(l+\varepsilon)} \qquad \text{ou} \qquad \log\xi < A - (l + \varepsilon);$$

on a

$$R(s - \log\xi) > A - \log\xi > l + \varepsilon.$$

Le point $s - \log\xi$ est donc dans la région de convergence de $Q(s, u)$ d'après l'énoncé obtenu à la fin du n° **2**; $Q(s - \log\xi, u)$ est donc fonction holomorphe de s dans Δ.

Il est ainsi établi que $Q(s, u)$ est prolongeable dans tout le domaine Δ, lorsque u est sur la partie circulaire de γ.

Il y a plus : je dis que l'on peut assigner une borne à $|Q(s, u)|$ pour u sur cet arc de cercle et pour s dans Δ. En se reportant à l'équation (3), on voit qu'il suffira de vérifier que

$$J\,|(s, u)|, \left|\xi^{-\frac{1}{u}}\right| \quad \text{et} \quad |Q(s - \log\xi, u)|$$

sont bornés.

En ce qui concerne $\left|\xi^{-\frac{1}{u}}\right|$, qui prend la valeur $\xi^{\frac{1}{r_0}\cos\theta}$ si $u = r_0 e^{i\theta}$, le résultat est évident. Pour $|Q(s - \log\xi, u)|$, il a déjà été démontré, étant donné que $s - \log\xi$ occupe une partie limitée de la région telle que

$$\mathrm{R}(s - \log\xi) > l + \varepsilon.$$

Il reste à étudier :

$$|\mathrm{J}(s, u)| = \left| \int_{\xi}^{1} t^{-\frac{1}{u}-1} f(s - \log t)\, dt \right|.$$

On a observé que $s - \log t$ est dans Δ. $|f(s - \log t)|$ admet une borne, $\left|t^{-\frac{1}{u}-1}\right|$ en admet une autre et le résultat est démontré.

En résumé, $\mathrm{Q}(s, u)$ est holomorphe et de module borné, si s est dans Δ et si u est sur la partie circulaire du contour γ.

4. *Étude de* $\mathrm{Q}(s, u)$ *pour* u *situé sur un segment rectiligne* OA *issu de l'origine* O *et faisant avec l'axe réel un angle aigu* α *positif ou négatif*, s restant dans la région Δ. Je considère encore l'intégrale

$$\mathrm{J}(s, u) = \int_{\xi}^{1} t^{-\frac{1}{u}-1} f(s - \log t)\, dt,$$

mais je ne choisis plus le point fixe ξ sur l'axe réel. Le chemin C joignant 1 à ξ sera un arc de la spirale logarithmique dont l'équation en coordonnées polaires (ρ, ω) est

$$\rho = e^{-\omega \operatorname{tang} \alpha};$$

on a donc

$$t = e^{(i - \operatorname{tang} \alpha)\omega}$$

et ρ positif est le module de t.

On posera $u = re^{i\alpha}$, et les fonctions multiformes qui figurent dans l'intégrale sont exactement définies par

$$t^{-\frac{1}{u}-1} = e^{-\left(1+\frac{1}{u}\right)(\log\rho + i\omega)}; \qquad \log t = \log\rho + i\omega.$$

On prendra $\omega = 0$ pour $t = 1$, ω variant d'une façon continue.

Enfin, l'arc C sera tel que l'on ait constamment sur lui

$$\mathrm{R}[\log(t)] = \log|t| = \log\rho < 0.$$

On a donc

$$\omega \operatorname{tang} \alpha > 0.$$

En particulier, le point ξ, extrémité de l'arc C, est tel que $|\xi| < 1$; ce point sera choisi plus loin.

La raison qui dicte le choix de la courbe C est que, si t est sur l'arc de spirale que j'ai défini, on a

$$\left| t^{-\frac{1}{u}} \right| = e^{-\frac{1}{u}(\cos\alpha \log\rho + \omega \sin\alpha)} = 1,$$

de sorte qu'on peut faire tendre u vers zéro, sans que l'intégrale croisse indéfiniment.

Cela posé, je suppose, pour un instant, que s, tout en restant dans Δ vérifie

$$\mathrm{R}(s) > l + \varepsilon.$$

On a

$$\mathrm{R}(s - \log t) \geqq \mathrm{R}(s) > l + \varepsilon. \tag{4}$$

Je puis donc remplacer $f(s - \log t)$ par la série de Dirichlet qui lui correspond. Cette série est uniformément convergente en t et je puis intégrer terme à terme. J'obtiens

$$\mathrm{J}(s, u) = \mathrm{Q}(s, u) - \xi^{-\frac{1}{u}} \mathrm{Q}(s - \log\xi, u). \tag{5}$$

Je reviens maintenant à l'hypothèse plus générale que s est quelconque dans Δ et que l'on n'a plus nécessairement $\mathrm{R}(s) > l + \varepsilon$. Je vais montrer que $\mathrm{J}(s, u)$ et $\mathrm{Q}(s - \log\xi, u)$ sont des fonctions holomorphes de s, pourvu, toutefois, que ξ soit convenablement choisi et que le domaine Δ vérifie une condition supplémentaire que je n'ai pas encore donnée explicitement.

Je dois supposer que J garde un sens, que le domaine Δ est tel que $s - \log t$ reste, soit dans Δ, soit dans la région de convergence de $f(s)$, lorsque t parcourt l'arc de spirale C et cela, quel que soit s dans Δ. On a

$$s' = s - \log t = s + \omega \operatorname{tang}\alpha - i\omega.$$

Ce point s' parcourt un segment de droite qui fait avec l'axe réel l'angle $\alpha - \frac{\pi}{2}$ si α est positif et $\frac{\pi}{2} + \alpha$ si α est négatif. (On n'oubliera pas, pour vérifier ces résultats, que ω a le signe de α sur l'arc C.)

La condition à imposer à Δ est donc la suivante : si, de chaque point de Δ, on mène la demi-droite qui fait avec l'axe réel l'angle

$\alpha - \frac{\pi}{2}$ (si α est positif) ou l'angle $\frac{\pi}{2} + \alpha$ (si α est négatif), cette demi-droite doit être tout entière, soit dans Δ, soit dans la région de convergence de $f(s)$.

Si nous supposons cette condition vérifiée, la démonstration se poursuit comme au paragraphe précédent.

Tout d'abord, $J(s, u)$ est une fonction holomorphe de s quel que soit le point u du segment OA ($u \neq 0$). En effet, $f(s - \log t)$ est fonction holomorphe de s et de t pour s dans Δ et pour t sur le chemin C et $t^{\frac{1}{u}-1}$ est continu en t et de module borné.

En second lieu, on a une inégalité telle que

$$R(s) > A \qquad (A \text{ réel},\ A < l + \varepsilon).$$

On choisira ξ tel que

$$|\xi| < e^{A-(l+\varepsilon)};$$

ceci est possible, en effet, puisque ξ est un point de la spirale; on a

$$\xi = e^{-\omega_0 \operatorname{tang} \alpha + i\omega_0},$$

et il suffit de prendre $-\omega_0 \operatorname{tang} \alpha < A - (l + \varepsilon)$. On a, par suite,

$$R(s - \log \xi) = R(s) - R(\log \xi) > R(s) + (l + \varepsilon) - A > l + \varepsilon.$$

Le point $s - \log \xi$ est dans la région de convergence de $Q(s, u)$; $Q(s - \log \xi, u)$ est donc fonction holomorphe de s, si s est dans Δ. Grâce aux deux résultats obtenus et en se reportant à l'équation (3), on voit que $Q(s, u)$ est fonction holomorphe de s, si s est dans Δ, et cela quel que soit u sur le segment OA (le point O mis à part).

On verra encore aisément que l'on peut assigner une borne à $|Q(s, u)|$ pour s dans Δ et u sur OA. Il suffit de trouver une borne pour les modules des termes de l'équation (3).

D'abord $|\xi^{\frac{1}{u}}| = 1$, comme on l'a vu, ξ étant sur l'arc C.

Ensuite $|Q(s - \log \xi, u)|$ admet une borne; cette propriété est contenue dans l'énoncé du n° 2.

Reste l'intégrale $J(s, u)$. On a

$$\left| t^{\frac{1}{u}-1} \right| = \frac{1}{|t|} < \frac{1}{|\xi|};$$

enfin, il est admis que le point $s' = s - \log t$ décrit une région bornée comprenant Δ et une partie de la région de convergence de $f(s)$. Donc $|f(s')|$ admet une borne et l'intégrale en admet une aussi.

5. Soit un domaine Δ d'un seul tenant, traversé par la droite de convergence de $f(s)$; je le suppose tel que si, par chacun de ses points, je mène les deux demi-droites dirigées vers la droite et qui font avec l'axe réel les angles $\frac{\pi}{2} - \alpha_1$ et $\alpha_2 - \frac{\pi}{2}$, ces demi-droites ne sortent pas de la région formée par Δ et par la région de convergence de $f(s)$.

Dans ces conditions, si $f(s)$ est holomorphe dans Δ et sur son contour et si u parcourt le contour γ du secteur circulaire S, la fonction définie par la série $Q(s, u)$ est prolongeable dans Δ. De plus, on peut trouver une borne pour $|Q(s, u)|$ qui ne dépende ni de s, ni de u. Il sera facile de passer maintenant de $Q(s, u)$ à $\varphi(s)$.

La fonction

$$\Phi(s, u) = u\, f(s) - Q(s, u)$$

possède les propriétés que nous avons trouvées à $Q(s, u)$.

L'intégrale

$$I(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \Phi(s, u)\, g(u)\, du$$

représente une fonction de s holomorphe dans Δ; la démonstration de ce fait a été donnée plusieurs fois; de toutes façons, il était essentiel de montrer que $|\Phi(s, u)\, g(u)|$ était borné.

Supposons maintenant $R(s) > l + \varepsilon$; on peut développer $\Phi(s, u)$ en série uniformément convergente en u et l'on peut intégrer terme à terme. On a, dans ces conditions,

$$\Phi(s, u) = \sum \frac{u^2}{u - \frac{1}{\lambda_n}} a_n e^{-\lambda_n s},$$

$$I(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} \int_\gamma \frac{u^2 g(u)\, du}{u - \frac{1}{\lambda_n}}.$$

On peut appliquer le calcul des résidus bien que $u^2 g(u)$ ne soit pas partout holomorphe sur le contour γ, le point $u = 0$ pouvant être singulier; mais son module est borné à l'intérieur du secteur S et il est bien facile de montrer que cela suffit. On obtient

$$I(s) = \sum \frac{a_n}{\lambda_n^2} g\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda_n s},$$

et le prolongement analytique de cette fonction est effectué dans Δ. La série obtenue en dérivant celle-là deux fois représentera donc aussi une fonction holomorphe dans Δ; ce sera d'ailleurs une série convergente pour $R(s) > l$.

Cette dérivée n'est autre que

$$\varphi(s) = \sum a_n g\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda_n s}.$$

6. *Généralisation, cas particuliers.* — Ne supposons plus que $|g(u)|$ soit borné dans le secteur S. Il nous suffira d'admettre que

$$|g(u)| e^{-\frac{\varepsilon}{|u|}}$$

admet une borne M à l'intérieur de S ou sur le contour, et cela, pour si petit que soit ε; M dépend de ε, en général.

La fonction

$$g_1(u) = e^{-\frac{\lambda}{u}} g(u)$$

est de module borné quel que soit le nombre positif λ, car

$$|g_1(u)| = |g(u)| e^{-\frac{\lambda}{r}\cos\alpha} \qquad (\text{si } u = r e^{i\alpha}),$$

et cette expression est inférieure à

$$|g(u)| e^{-\frac{\lambda}{r}\cos\alpha'},$$

α' étant le plus grand des deux arcs α_1 et α_2; cette dernière expression est bornée.

La fonction $\sum a_n g\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda\lambda_n} e^{-\lambda_n s}$ est holomorphe dans Δ d'après ce qui précède. Il revient au même de dire que $\sum a_n g\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda_n s}$ est holomorphe dans Δ_λ, Δ_λ étant un domaine qui se déduit de Δ en augmentant l'affixe de chaque point de la quantité positive λ. Comme λ est arbitrairement petit, $\sum a_n g\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda_n s}$ est holomorphe dans Δ.

On peut, d'une manière générale, donner l'énoncé suivant :

Soit une série de Dirichlet $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$ pourvue d'une droite de convergence à distance finie, soit une fonction $g(u)$ analytique dans le secteur S décrit au n° 1 et sur son contour, sauf, peut-être, à l'origine : $|g(u)|e^{-\frac{\varepsilon}{u}}$ est supposé borné dans ce domaine, quel que soit ε positif.

La série $\varphi(s) = \Sigma a_n g\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) e^{-\lambda_n s}$ converge dans la région de convergence de $f(s)$. (Cela résulte du calcul du n° 5.)

Supposons ensuite que la fonction $f(s)$ soit holomorphe au point s_0 situé dans la région de divergence de la série $f(s)$. Il est certain que $\varphi(s)$ sera holomorphe au même point, pourvu que $f(s)$ soit holomorphe dans tout le triangle dont un sommet est le point s_0, dont un côté est la droite de convergence de $f(s)$ et dont les deux autres côtés font avec cette droite les angles α_1 et α_2, ainsi que sur les côtés de ce triangle.

En particulier, si $f(s)$ est régulière en un point s_0 de sa droite de convergence, $\varphi(s)$ est régulière au même point.

Si $f(s)$ n'a qu'un point singulier s_0, $\varphi(s)$ est holomorphe dans la région

$$-\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_1\right) < \arg(s - s_0) < \frac{\pi}{2} + \alpha_2.$$