

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Déformation des surfaces tétraédrales

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 5 (1926), p. 227-295.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1926_9_5_227_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>



Déformation des surfaces tétraédrales ;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

I. *Objet de ce Mémoire.* — M. Tzitzéica a publié, en 1916, au Tome XXXVIII des *Annales de l'Académie roumaine*, Mémoires de la Section scientifique, un article d'une rare élégance où il montre que chaque surface *tétraédrale*

$$(1) \quad x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1$$

peut être déformée en ∞^4 nouvelles surfaces tétraédrales ayant en commun avec la primitive une asymptotique restant rigide au cours de cette déformation, pendant qu'un réseau conjugué reste conjugué permanent; l'asymptotique peut être prise arbitrairement, de sorte que, finalement, on obtient ∞^2 configurations tétraédrales de la surface primitive. M. Tzitzéica montre ensuite que la condition nécessaire et suffisante pour l'applicabilité de deux surfaces tétraédrales (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ est l'égalité des deux expressions numériques correspondantes

$$I = \frac{(\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - 2\beta^3\gamma^3 - 2\gamma^3\alpha^3 - 2\alpha^3\beta^3)^2}{\alpha^3\beta^3\gamma^3}$$

Deux cas peuvent se présenter : I n'est pas nul, ou il est nul. Si I n'est pas nul, soit $\frac{1}{m^2}$ sa valeur; l'élément linéaire de la surface est réductible à la forme

$$(E) \quad ds^2 = \frac{9}{4} [u du^2 + 2m du dv + v dv^2].$$

Dans ce cas on ne sait pas résoudre *complètement* le problème de la déformation, c'est-à-dire intégrer l'équation de Monge-Ampère bien connue dans cette théorie, mais on a su en signaler des intégrales

particulières dépendant de *deux* constantes. La méthode de Weingarten ramène d'ailleurs la recherche de la déformée *générale* à la recherche des surfaces auxiliaires Σ vérifiant la relation

$$(3) \quad R_1 R_2 p' = \text{const.},$$

R_1, R_2 étant les rayons principaux en un point de Σ et p la distance de l'origine au plan tangent de Σ en ce point.

Si l'invariant I est nul, l'élément linéaire de la surface est réductible à la forme

$$(E') \quad v du^2 + 2u du dv + dv^2.$$

et dans ce cas la déformation *générale* de la surface est assurée par la méthode de Weingarten ; les surfaces Σ auxiliaires satisfont à l'équation

$$(4) \quad R_1 + R_2 = 4p.$$

Je reprends la question d'un point de vue plus géométrique que M. Tzitzéica et j'apporte des compléments importants.

1° Par le même procédé qui fait passer d'une quadrique à centre à un paraboloïde, j'obtiens les surfaces *parabolo-tétraédrales* (p, q constantes)

$$(5) \quad p v^{\frac{2}{3}} + q v^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} z,$$

qui admettent l'élément (E) si $pq = m$; la réduction du ds^2 par ce procédé est d'ailleurs immédiate. On obtient ainsi ∞^1 nouvelles déformées, au moins dans le cas où I n'est pas nul.

2° La réduction à la forme (E) peut avoir lieu soit avec des variables u, v réelles (pour un point réel de la surface), soit avec des variables u, v imaginaires conjuguées. Pour les surfaces *hyperboliques à une nappe*, ou *hyperboliques à deux nappes*, ou *paraboliques elliptiques ou hyperboliques*, les variables u, v sont réelles, de sorte que deux surfaces de cette catégorie, ayant bien entendu même invariant I , peuvent se recouvrir dans l'application, soit en totalité, soit en partie, et cela par des portions réelles. Mais, pour les surfaces *tétraédrales elliptiques*, les variables (u, v) sont, suivant le cas, soit réelles sur toute la surface, soit imaginaires conjuguées sur toute la

surface : les deux cas sont distingués par le signe de la quantité

$$D = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\beta^2\gamma^2 - 3\gamma^2\alpha^2 - 3\alpha^2\beta^2.$$

De la sorte on peut réaliser des surfaces de même ds^2 , (E), mais non applicables *physiquement*, l'une des surfaces réalisant (E) en coordonnées curvilignes (u, v) réelles, l'autre en coordonnées imaginaires.

3° Ne prenons d'une surface tétraédrale que la portion située dans le trièdre des coordonnées positives x, y, z : on a ainsi le huitième de la surface, les autres morceaux étant ou égaux ou symétriques; ce huitième admet un pôle P et trois géodésiques, rayonnant à partir de P en faisant entre elles des angles de 60° , partagent ce huitième en six secteurs applicables les uns sur les autres, deux secteurs adjacents s'échangeant dans une auto-application de la surface laissant invariante la géodésique; ces auto-applications tiennent à ce que (E) peut être obtenu de six façons différentes et je donne les formules effectives réduisant le ds^2 à la forme (E); P n'est réel sur la surface que pour les surfaces elliptiques satisfaisant aux inégalités simultanées

$$D < 0, \quad \beta^3 + \gamma^3 - \alpha^3 > 0, \quad \gamma^3 + \alpha^3 - \beta^3 > 0, \quad \alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3 > 0.$$

4° Chaque surface tétraédrale admet des asymptotiques particulières *rectilignes*, donc *géodésiques* ($z = \gamma^{-\frac{2}{3}}$ et $\alpha v^{\frac{2}{3}} + \beta v^{\frac{2}{3}} = 0$, par exemple). Autour d'une telle asymptotique restant *rigide*, donc *rectiligne*, la surface peut être déformée, avec un réseau conjugué permanent, qui est alors le réseau conjugué de Kœnigs, et même doublement de Kœnigs : en effet, le long de chaque section horizontale, il y a un cône circonscrit ayant son sommet sur Oz et le long de chaque section par un plan contenant Oz, il y a un cylindre circonscrit, de génératrices horizontales.

5° Chacune de ces génératrices rigides est représentée sur le plan (u, v) par une *droite*; il y a α^2 surfaces de même ds^2 , donc α^2 génératrices, mais α^1 images seulement, puisque chaque image correspond à α^1 surfaces; il se trouve donc que l'équation différentielle des géodésiques admet, en coordonnées (u, v) , α^1 intégrales *rectilignes*, enveloppant une courbe de troisième classe et quatrième degré : si les coordonnées (u, v) sont réelles, cette courbe est bitangente à la droite

de l'infini aux points où cette droite rencontre l'hyperbole

$$(11) \quad uv - m^2 = 0.$$

Pour plus de clarté, bornons-nous au cas où (u, v) sont imaginaires conjuguées : on écrit

$$(6) \quad u = u' + iv', \quad v = u' - iv',$$

et alors les géodésiques en question enveloppent une hyperboloïde à trois rebroussements tritangente au cercle C

$$(C) \quad u'^2 + v'^2 - m^2 = 0$$

aux sommets d'un triangle équilatéral dont l'un des sommets est $(u' = m, v' = 0)$; et alors nous avons la représentation suivante, particulièrement élégante : considérons les ∞^2 triangles inscrits dans le cercle C, définis par la relation

$$(7) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0,$$

entre les arguments de leurs sommets sur (C); ce sont les images sur le plan $ou'v'$ des ∞^2 surfaces tétraédrales applicables les unes sur les autres : l'intérieur du triangle correspond à la partie réelle de la surface; les ∞^1 paraboles inscrites dans le triangle sont les images des asymptotiques; l'une de ces paraboles, choisie, admet ∞^1 triangles inscrits dans (C) et circonscrits à la parabole : ce sont les images des ∞^1 surfaces tétraédrales ayant en commun l'asymptotique en question.

6° Toute surface, tétraédrale ou non, admettant le ds^2

$$(E) \quad ds^2 = u du^2 + 2m du dv + v dv^2$$

dépend de la recherche d'une surface auxiliaire Σ satisfaisant à la relation entre la courbure totale K et la distance p de l'origine au plan tangent

$$(8) \quad K = \frac{p^4}{m^3}.$$

Or, M. Tzitzéica a montré, du moins implicitement, aux *Rendiconti di Palermo*, 1908, t. XXV, que ces surfaces Σ admettent une transformation à cinq paramètres les échangeant avec une nouvelle surface Σ' , de sorte que toute surface d'élément (E) donne, par des qua-

dratures, ∞^3 surfaces de même élément; c'est là la véritable origine du fait qu'une surface *tétraédrale* est applicable sur ∞^3 autres surfaces tétraédrales; la surface Σ est alors une quadrique à centre Q, et sur les cinq paramètres annoncés, il y en a alors *trois* qui ne donnent qu'une transformation ponctuelle de Q en elle-même; il n'en reste donc plus que *deux* pour la déformation.

7° Enfin toute surface d'élément (E) admet nécessairement des auto-applications : si le pôle P ($u = v = 0$) est *simple* sur la surface, les auto-applications sont en nombre $6p$: pour une surface tétraédrale, $p = 8$.

2. *Étude géométrique et classification des surfaces tétraédrales.*

— Soit la surface tétraédrale

$$(\Sigma) \quad (1) \quad \alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1,$$

α, β, γ sont trois nombres réels; s'ils sont tous trois négatifs, la surface est totalement imaginaire, mais possède des nappes continues où deux coordonnées sont réelles et la troisième imaginaire pure : nous savons que cette circonstance est nécessaire à réaliser pour obtenir des *systèmes cycliques réels*. Si α, β, γ ne sont pas négatifs tous trois, en dehors de certaines nappes de l'espèce précédente, la surface possède des nappes réelles. D'autre part, comme $(\alpha j)x^{\frac{2}{3}}$, où j est une racine cubique imaginaire de l'unité, peut s'écrire $\alpha(jx^{\frac{2}{3}})$, et que $x^{\frac{2}{3}}$ et $(jx^{\frac{2}{3}})$ sont, finalement, des déterminations de la racine cubique de x^2 , le changement de α en αj ou αj^2 est sans influence sur la surface (dans son ensemble) et ceci explique pourquoi les formules rationnelles ne feront intervenir que $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ (valeur de l'invariant I par exemple). La transformation simple

$$(2) \quad x = X^3, \quad y = Y^3, \quad z = Z^3$$

fait correspondre *rationnellement* à (x, y, z) un point qui engendre la quadrique (Q)

$$(Q) \quad (3) \quad \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = 1.$$

De là on conclut immédiatement que Σ est de degré 18 (1). L'équation tangentielle de Σ est

$$(4) \quad \frac{\alpha^3}{u^2} + \frac{\beta^3}{v^2} + \frac{\gamma^3}{w^2} = \frac{1}{h^2}.$$

La classe est 6; chaque plan de coordonnées, et aussi le plan de l'infini, est plan tangent *quadruple*, touchant la surface le long d'une sextique unicursale (développée de conique ou hypocycloïde à quatre rebroussements); cette sextique est arête de rebroussement et asymptotique *singulière* de la surface.

J'appelle la surface : *tétraédrale elliptique* si α, β, γ sont du même signe (le signe + donnant les surfaces elliptiques réelles, le signe — les surfaces elliptiques imaginaires); *tétraédrale hyperbolique à une nappe* si deux coefficients sont positifs, l'autre négatif, *tétraédrale hyperbolique à deux nappes* si deux coefficients α, β, γ sont négatifs et l'autre positif.

Par la transformation (2), les asymptotiques se correspondent sur Σ et Q : donc les surfaces hyperboliques à une nappe ont deux asymptotiques réelles issues de chaque point réel; sur les autres surfaces, les asymptotiques sont entièrement imaginaires. Mais, réelles ou non, ces asymptotiques de Σ sont des cubiques gauches osculatrices aux plans de coordonnées et au plan de l'infini.

Bien d'autres procédés font dériver une surface tétraédrale Σ d'une quadrique Q ; cela tient, au fond, à ce que deux quadriques coaxiales se correspondent par une transformation *affine* réelle ou non. Ainsi le point (X_0, Y_0, Z_0) de Q étant projeté sur les axes de Q , le plan contenant ces projections touche son enveloppe en un point $(\alpha X_0^3, \beta Y_0^3, \gamma Z_0^3)$ et cette enveloppe a pour équation, non pas (1), mais

$$(5) \quad \alpha^{\frac{1}{3}} x^{\frac{3}{2}} + \beta^{\frac{1}{3}} y^{\frac{3}{2}} + \gamma^{\frac{1}{3}} z^{\frac{3}{2}} = 1.$$

Autre construction : en un point M de Q je mène la normale, puis la droite Δ conjuguée (au sens de la théorie des quadriques) de la normale; le plan mené par M , perpendiculairement à Δ , enveloppe une

(1) Un plan contenant l'un des axes Ox, Oy, Oz ou parallèle à l'un des plans de coordonnées coupe la surface suivant *trois* sextiques unicursales, dont une seule, au maximum, peut être réelle.

autre surface tétraédrale, car il a pour équation

$$(6) \quad \frac{\beta - \gamma}{\alpha X_0} X + \frac{\gamma - \alpha}{\beta Y_0} Y + \frac{\alpha - \beta}{\gamma Z_0} Z = \frac{\beta - \gamma}{\alpha} + \frac{\gamma - \alpha}{\beta} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma}.$$

Si l'on applique cette dernière construction à un paraboloidé, elle nous montre que, si Q, d'abord à centre, se transforme par continuité en un paraboloidé, la surface tétraédrale dégénère par continuité en la surface relative au paraboloidé, d'où les surfaces *parabolo-tétraédrales* elliptique ou hyperbolique. On y arrive donc directement en prenant (1), décalant l'origine sur Oz :

$$(7) \quad z = z' - \gamma^{-\frac{2}{3}}, \quad \gamma z^{\frac{3}{2}} = (1 - \gamma^{\frac{2}{3}} z')^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{2}{3} \gamma^{\frac{2}{3}} z' + \dots$$

On suppose γ tendant vers zéro, les termes négligés contiennent des termes en $\gamma^{\frac{2}{3}}$, $\gamma^{\frac{4}{3}}$, ...; supposons que α, β tendent aussi vers zéro, mais que $\alpha\gamma^{-\frac{2}{3}}$ et $\beta\gamma^{-\frac{2}{3}}$ tendent vers des limites finies p, q ; l'équation limite de Σ devient

$$(\Sigma') (8) \quad p x^{\frac{3}{2}} + q y^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} z$$

(en supprimant l'accent de z'). La surface Σ' est dite *parabolo-tétraédrale elliptique* si $pq > 0$, *hyperbolique* si $pq < 0$. La transformation

$$(9) \quad x = X^2, \quad y = Y^2, \quad z = Z$$

fait correspondre à Σ' un paraboloidé (Q')

$$(Q') (10) \quad pX^2 + qY^2 = \frac{2}{3}Z,$$

et aux génératrices de (Q') correspondent encore les asymptotiques de Σ' . L'équation ponctuelle de Σ' est

$$(11) \quad \left(p^2 x^2 + q^2 y^2 - \frac{8}{27} z^3 \right)^2 + 8p^2 q^2 x^2 y^2 z^3 = 0.$$

Le degré est 9; la classe est 5, car l'équation tangentielle est

$$(12) \quad (p^3 v^2 + q^3 u^2) \alpha^3 + 2 h u^2 v^2 = 0.$$

Le plan de l'infini est tangent quadruple et coupe la surface unique-

ment suivant la droite à l'infini du plan horizontal qui est ligne triple de la surface.

Une autre transformation intéressante des surfaces *générales* Σ consiste à écrire

$$(13) \quad x = P^{\frac{2}{3}}, \quad y = Q^{\frac{2}{3}}, \quad z = R^{\frac{2}{3}},$$

de sorte qu'à la surface Σ correspond le plan (P),

$$(P) \quad (14) \quad \alpha P + \beta Q + \gamma R = 1.$$

A un point réel de Σ correspond un seul point réel de (P); mais à un point du plan (P) correspondent huit points de Σ , disposés aux sommets d'un parallélépipède rectangle, se correspondant dans les symétries de Σ . Désormais nous nous bornerons pour Σ au huitième qui est dans le trièdre positif $Oxyz$. Pour que le point de Σ soit réel, il faut que le point de (P) soit dans une région convenable; soit le triangle T découpé sur (P) par les axes; à la surface elliptique réelle (α, β, γ positifs) correspond la région intérieure à T; pour la surface hyperbolique à une nappe, si $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < 0$, la région à conserver est celle dite ex-inscrite à l'angle r , en appelant p, q, r les sommets de T situés sur Ox, Oy, Oz ; pour la surface hyperbolique à deux nappes, si $\alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0$, la région utile est, cette fois, la région opposée par l'angle p au triangle T. Pour les portions réelles mais rejetées de T, le point de Σ a i coordonnées réelles ($i = 0, 1, 2$) et les $3 - i$ autres imaginaires pures.

Les asymptotiques, soit réelles s'il en existe, soit imaginaires, mais coïncidant avec leur courbe imaginaire conjuguée⁽¹⁾, sont représentées sur le plan (P) par les paraboles, formant un faisceau tangentiel, inscrites dans le triangle T: pour la surface hyperbolique à une nappe, $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < 0$, les asymptotiques réelles sont celles dont l'image est une parabole ex-inscrite dans l'angle r . Ce sont toutes ces asymptotiques, réelles ou non, mais d'image réelle qui jouent dans la déformation annoncée de Σ le rôle fondamental.

(1) En réalité, à une parabole correspondent, sur la surface Σ complète, huit cubiques deux à deux égales ou symétriques; dans les cas d'asymptotique imaginaire, coïncidant avec sa conjuguée, il faudra entendre par là une cubique gauche imaginaire réunie à la cubique imaginaire conjuguée.

Nous verrons aussi l'importance pour la déformation de Σ des courbes qui ont pour image sur (P) une droite; on peut définir cette droite, d'abord par le plan (P) lui-même, puis par le plan

$$uP + vQ + wR = 0,$$

contenant cette droite et l'origine; on obtient ainsi un réseau linéaire de courbes sur la surface; chacune d'elles peut, au cours de la déformation à deux paramètres de Σ , devenir arête de rebroussement plane, section de la déformée Σ_1 par un des plans de symétrie de Σ_1 ; une autre propriété est la suivante: une de ces courbes choisie peut, après déformation de Σ en Σ_1 , retrouver chacun de ces points à la même distance de l'origine qu'au départ. Les droites de (P), tangentes à une même parabole, inscrite au triangle T, sont les images d'un réseau conjugué de Σ , qui reste conjugué permanent, si l'asymptotique de Σ ayant la parabole pour image, reste rigide. Quand on fait l'image de Σ sur la quadrique (Q) au lieu de (P), les asymptotiques de Σ ont pour image les génératrices de (Q) et les courbes du réseau signalé sur Σ , au lieu de se transformer en droites, deviennent des biquadratiques, intersections de (Q) avec une quadrique coaxiale; celles qui restent tangentes à une même génératrice de (Q), donc à huit génératrices, sont l'image du réseau conjugué indiqué à l'instant: si (Q) est une sphère, on obtient les systèmes de coniques homofocales situées sur la sphère.

5. *Digression sur les asymptotiques.* — Si l'on considère les équations paramétriques

$$(1) \quad \begin{aligned} x &= A(\lambda + a)^m(\mu + \alpha)^p, & y &= B(\lambda + b)^m(\mu + b)^p, \\ & & z &= C(\lambda + c)^m(\mu + c)^p, \end{aligned}$$

où A, B, C, a, b, c sont des constantes et λ, μ des paramètres variables, x, y, z sont des solutions de l'équation de Laplace

$$(2) \quad (\lambda - \mu) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \lambda \partial \mu} - p \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + m \frac{\partial \theta}{\partial \mu} = 0.$$

Le système (λ, μ) est conjugué sur la surface (on peut, dans ce paragraphe, supposer les axes rectangulaires ou non). Les jacobiens

$\frac{D(y, z)}{D(\lambda, \mu)}, \frac{D(z, x)}{D(\lambda, \mu)}, \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)}$ contiennent en facteur $\lambda - \mu$; les coefficients D, D', D'' de Gauss contiennent en facteur $(\lambda - \mu)^2$.

Si donc $m \neq p$, la représentation (λ, μ) étant propre, la ligne $\lambda = \mu$ est arête de rebroussement de la surface et en même temps ligne asymptotique singulière de la surface : en chaque point de l'arête viennent passer deux asymptotiques tangentes à l'arête. L'équation des asymptotiques est

$$(3) \quad \frac{m(m-1)d\lambda^2}{(\lambda+a)(\lambda+b)(\lambda+c)} = \frac{p(p-1)du^2}{(\mu+a)(\mu+b)(\mu+c)}$$

De la sorte si les exposants m, p sont remplacés par d'autres m_1, p_1 tels que

$$(4) \quad \frac{m(m-1)}{p(p-1)} = \frac{m_1(m_1-1)}{p_1(p_1-1)},$$

tandis que A, B, C, a, b, c reçoivent d'autres valeurs arbitraires, on a deux surfaces avec une correspondance ponctuelle (points de mêmes λ, μ) conservant les réseaux conjugués et les asymptotiques. Si chaque rapport (4) est commensurable avec l'unité, l'équation (3) s'intègre algébriquement en λ, μ .

Si $m = p$, la représentation (λ, μ) est impropre et la singularité de la ligne $\lambda = \mu$ disparaît de la surface pour passer dans la représentation : la ligne $\lambda = \mu$ est asymptotique régulière, sans être arête de rebroussement. L'équation (3) devient l'équation d'Euler, qui se trouve intégrée par ces considérations, puisque, la valeur commune de m et p variant, les asymptotiques se conservent : or, pour $m = p = \frac{1}{2}$, on a les quadriques et leurs génératrices rectilignes.

La décomposition de la fraction rationnelle

$$(5) \quad \frac{(X+\lambda)(X+\mu)}{(X-a)(X-b)(X-c)}$$

nous apprend que la somme des résidus est l'unité; donc la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ admet la représentation paramétrique suivante, cor-

respondant à un système de coniques homofocales

$$(6) \quad X^2 = \frac{(\lambda + a)(\mu + a)}{(a - b)(a - c)}, \quad Y^2 = \frac{(\lambda + b)(\mu + b)}{(b - a)(b - c)}, \quad Z^2 = \frac{(\lambda + c)(\mu + c)}{(c - a)(c - b)}.$$

Une quadrique, quelconque, rapportée à trois diamètres conjugués a donc la représentation

$$(7) \quad X = A(a + \lambda)^{\frac{1}{2}}(a + \mu)^{\frac{1}{2}}, \quad Y = B(b + \lambda)^{\frac{1}{2}}(b + \mu)^{\frac{1}{2}}, \quad Z = C(c + \lambda)^{\frac{1}{2}}(c + \mu)^{\frac{1}{2}}.$$

Une objection se pose : la quadrique ne renferme que trois paramètres ; les formules (7) renferment six constantes A, B, C, a, b, c. Mais on peut multiplier a, b, c, λ, μ par un même facteur et diviser A, B, C par ce même facteur sans rien changer ; on peut augmenter a, b, c d'une même constante, et diminuer λ, μ de cette même constante ; donc, puisque a ≠ b, on peut réduire a - b à l'unité, a à 1, et b à 0 : il ne reste donc en réalité que quatre constantes A, B, C, c (il est commode pour ce qui suit de laisser A, B, C, a, b, c) ; les quatre constantes correspondent aux trois paramètres entrant en jeu pour la quadrique et au paramètre complémentaire qui entre en jeu pour le choix de la représentation particulière (7) c'est-à-dire pour le choix de la génératrice

$$X = A(a + \lambda), \quad Y = B(b + \lambda), \quad Z = C(c + \lambda).$$

Pour la sphère, on retrouve cette propriété qu'il existe ∞¹ systèmes homofocaux de plans principaux donnés, caractérisés chacun par l'écartement angulaire des foyers.

Comme la quadrique (7) a pour équation

$$(8) \quad \frac{1}{(a - b)(a - c)} \frac{X^2}{A^2} + \frac{1}{(b - a)(b - c)} \frac{Y^2}{B^2} + \frac{1}{(c - a)(c - b)} \frac{Z^2}{C^2} = 1,$$

il est nécessaire et suffisant, pour que la quadrique soit réelle ou tout au moins représentée par une équation réelle, que a, b, c soient réelles et que chaque quantité A ou B ou C soit ou réelle ou imaginaire pure ; quand on a donné les valeurs réelles, positives ou négatives, de A², B², C², il y a des relations d'inégalités simples à écrire entre a, b, c pour obtenir une quadrique à points réels. Mêmes

remarques pour la surface tétraédrale (1)

$$(9) \quad \begin{cases} x = A(\lambda + a)^{\frac{2}{3}}(\mu + a)^{\frac{2}{3}}, & y = B(\lambda + b)^{\frac{2}{3}}(\mu + b)^{\frac{2}{3}}, \\ z = C(\lambda + c)^{\frac{2}{3}}(\mu + c)^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

4. *Déformation en surface tétraédrale d'une surface tétraédrale donnée.* — Donnons-nous une surface tétraédrale Σ

$$(1) \quad \alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1$$

et choisissons sur elle une asymptotique, réelle ou non, dont l'image sur le plan (P) est une parabole réelle. Nous avons la représentation particulière

$$(2) \quad \begin{cases} x = A(\lambda + a)^{\frac{2}{3}}(\mu + a)^{\frac{2}{3}}, & A = [\alpha(a-b)(a-c)]^{-\frac{3}{2}}, \\ y = B(\lambda + b)^{\frac{2}{3}}(\mu + b)^{\frac{2}{3}}, & B = [\beta(b-a)(b-c)]^{-\frac{3}{2}}, \\ z = C(\lambda + c)^{\frac{2}{3}}(\mu + c)^{\frac{2}{3}}, & C = [\gamma(c-a)(c-b)]^{-\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

La cubique gauche Γ asymptotique

$$(3) \quad x = A(\lambda + a)^3, \quad y = B(\lambda + b)^3, \quad z = C(\lambda + c)^3$$

(1) Nous avons vu que, m étant fixé, mais *arbitraire*, la transformation

$$x = P^m, \quad y = Q^m, \quad z = R^m$$

fait correspondre au plan $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 1$ une surface dont les asymptotiques ont pour image les paraboles inscrites dans T, tandis que les tangentes à une de ces paraboles définissent sur la surface un réseau conjugué. Modifions légèrement la correspondance en écrivant

$$x = \frac{P^m - 1}{m}, \quad y = \frac{Q^m - 1}{m}, \quad z = \frac{R^m - 1}{m}.$$

Faisons tendre m vers zéro: à la limite nous avons la correspondance

$$x = \log P, \quad y = \log Q, \quad z = \log R,$$

et la surface de translation de Sophus Lie, $\alpha e^x + \beta e^y + \gamma e^z = 1$, avec les ∞^1 réseaux de translation qu'elle possède, rattachés ainsi aux systèmes de coniques homofocales.

admet le plan de l'infini pour plan osculateur (de sorte que le cône directeur des tangentes est de degré 2 seulement, au lieu de 4), puis les plans de coordonnées comme plans osculateurs : le cône directeur des tangentes admet donc un trièdre trirectangle circonscrit, donc ∞^1 ; soit $O'x'y'z'$ un nouveau système de trois plans osculateurs *rectangulaires*; ce trièdre trirectangle $O'x'y'z'$, auquel Γ sera attachée, est déplacé de façon à coïncider avec $Oxyz$; Γ a donc pris une nouvelle position Γ' , définie, dans le système $Oxyz$, par les équations paramétriques

$$(4) \quad x' = A'(\lambda + a')^3, \quad y' = B'(\lambda + b')^3, \quad z' = C'(\lambda + c')^3,$$

l'égalité entre Γ et Γ' ayant lieu par les points de même λ . Or, si λ joue le rôle du temps, il est nécessaire et suffisant pour cela que les quantités scalaires de Γ

$$\left(\frac{dx}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda}\right)^2, \\ \left(\frac{d^2x}{d\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{d\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{d\lambda^2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^3x}{d\lambda^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{d\lambda^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3z}{d\lambda^3}\right)^2$$

soient égales aux quantités analogues de Γ' , pour chaque valeur de λ . Ceci se traduit par les identités (S , symbole sommatoire de Lamé)

$$(5) \quad \begin{cases} SA^2(\lambda + a)^4 \equiv SA'^2(\lambda + a')^4, \\ SA^2(\lambda + a)^3 \equiv SA'^2(\lambda + a')^3, \\ SA^2 \equiv SA'^2. \end{cases}$$

La première identité entraîne les cinq relations

$$(6) \quad A^2 a^i + B^2 b^i + C^2 c^i = A'^2 a'^i + B'^2 b'^i + C'^2 c'^i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4)$$

qui suffisent pour les suivantes. Nous avons bien, A, B, C, a, b, c étant données, *une* arbitraire et une seule pour la solution (A', B', C', a', b', c') des équations (6).

Si l'on considère maintenant la surface Σ' définie par

$$(7) \quad \begin{cases} x' = A'(\lambda + a')^{\frac{3}{2}}(\mu + a')^{\frac{3}{2}}, & y' = B'(\lambda + b')^{\frac{3}{2}}(\mu + b')^{\frac{3}{2}}, \\ z' = C'(\lambda + c')^{\frac{3}{2}}(\mu + c')^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

elle est manifestement, en vertu de (6), applicable sur Σ , car on a

immédiatement pour le ds^2 de Σ

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{9}{4} S A^2 (\lambda + a) (\mu + a)^2, \quad F = \frac{9}{4} S A^2 (\lambda + a)^2 (\mu + a)^2, \\ G = \frac{9}{4} S A^2 (\lambda + a)^2 (\mu + a). \end{array} \right.$$

On a ainsi ∞^1 déformées de Σ , où l'asymptotique Γ reste rigide et où le réseau (λ, μ) reste conjugué ⁽¹⁾. L'image sur (P) de Γ est la parabole réelle

$$(9) \quad P = A^{\frac{2}{3}} (\lambda + a)^2, \quad Q = B^{\frac{2}{3}} (\lambda + b)^2, \quad R = C^{\frac{2}{3}} (\lambda + c)^2.$$

Qu'arrive-t-il si, dans les formules (2), nous supposons C tendant vers zéro et c augmentant indéfiniment de façon que Cc^2 tende vers une limite finie? On a

$$(10) \quad z_1 = z - Cc^2 = Cc^2 \left[1 + \frac{\lambda + \mu}{c} + \frac{\lambda\mu}{c^2} \right]^{\frac{2}{3}} - Cc^2 = \frac{3}{2} Cc^2 (\lambda + \mu) + \dots$$

A la limite, z_1 tend vers $\frac{3}{2} C_1 (\lambda + \mu)$; nous avons donc la surface parabolo-tétraédrale Σ_1 ,

$$(11) \quad x = A (\lambda + a)^{\frac{2}{3}} (\mu + a)^{\frac{2}{3}}, \quad y = B (\lambda + b)^{\frac{2}{3}} (\mu + b)^{\frac{2}{3}}, \quad z = \frac{3}{2} C (\lambda + \mu).$$

où je supprime les indices; l'équation de Σ_1 , obtenue en éliminant $\lambda + \mu$ et $\lambda\mu$ entre $x^{\frac{3}{2}}, y^{\frac{3}{2}}$ et z est bien de la forme annoncée plus haut

$$(12) \quad z = \frac{3}{2} (p x^{\frac{3}{2}} + q y^{\frac{3}{2}}).$$

Nous avons sur Σ_1 un réseau conjugué formé de courbes tangentes à la cubique asymptotique particulière

$$(13) \quad x = A (\lambda + a)^2, \quad y = B (\lambda + b)^2, \quad z = 3 C \lambda.$$

⁽¹⁾ En réalité, Σ et Σ' se touchent tout le long de deux cubiques gauches, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine. Σ possède huit cubiques asymptotiques égales ou symétriques entre elles, provenant des échanges de A, B, C avec $\pm A, \pm B, \pm C$ et Σ' possède également huit cubiques dont chacune est l'égale ou la symétrique de l'une de huit cubiques précédentes.

et les équations, limites de celles trouvées plus haut,

$$(14) \quad \begin{cases} A^2 + B^2 & = A'^2 + B'^2 + C'^2, \\ A^2 a + B^2 b & = A'^2 a' + B'^2 b' + C'^2 c', \\ A^2 a^2 + B^2 b^2 & = A'^2 a'^2 + B'^2 b'^2 + C'^2 c'^2, \\ A^2 a^3 + B^2 b^3 & = A'^2 a'^3 + B'^2 b'^3 + C'^2 c'^3, \\ A^2 a^3 + B^2 b^3 + C^2 & = A'^2 a'^3 + B'^2 b'^3 + C'^2 c'^3, \end{cases}$$

expriment à la fois l'égalité de l'asymptotique (13) et de la cubique Γ donnée plus haut par (4) et l'applicabilité de la surface *parabolo-tétraédrale* Σ_1 et de la surface Σ' définie par (9). Si Σ' est donnée, les équations (14) donnent une surface *parabolo-tétraédrale* (et une seule), sauf un cas d'exception précisé plus bas,

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 0,$$

où cette surface n'existe pas. On peut remarquer que si Σ_1 existe, elle est unique, car les équations

$$A^2 a^i + B^2 b^i = A_1^2 a_1^i + B_1^2 b_1^i \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

où l'on suppose $a \neq b, a_1 \neq b_1$, exigent, on le voit aisément,

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad A^2 = A_1^2, \quad B^2 = B_1^2$$

(ou ce que l'on obtient en permutant B_1 avec A_1 et b_1 avec a_1). Si Σ_1 est donnée, les équations (14) définissent ∞^1 surfaces tétraédrales ordinaires applicables sur Σ_1 . Il faut remarquer qu'une surface tétraédrale et une surface *parabolo-tétraédrale* ne peuvent se raccorder que suivant une cubique *unique*.

On a donc bien trouvé pour chaque surface tétraédrale ou parabolo-tétraédrale ∞^2 surfaces tétraédrales de même ds^2 : en fixant une asymptotique arbitraire, on a ∞^1 déformées avec rigidité de l'asymptotique et un réseau conjugué permanent.

5. Surfaces parabolo-tétraédrales; ds^2 réduit. — Chaque asymptotique de Σ livre en particulier une surface *parabolo-tétraédrale*; on obtient donc ∞^1 surfaces *parabolo-tétraédrales* applicables entre elles. Ceci est évident *a priori*, si l'on remarque que la surface *parabolo-tétraédrale* est de *translation*, les profils de translation étant dans

deux plans rectangulaires; on sait que de telles surfaces de translation admettent ∞^1 déformées de même espèce. Effectivement, soit la surface Σ_1 ,

$$(\Sigma_1) \quad (1) \quad z = \frac{3}{2}(p x^{\frac{2}{3}} + q y^{\frac{2}{3}})$$

et posons

$$(2) \quad x = P^{\frac{3}{2}}, \quad y = Q^{\frac{3}{2}}, \quad z = \frac{3}{2}(pP + qQ),$$

on a aussitôt

$$(3) \quad ds^2 = \frac{9}{4}[(P + p^2) dP^2 + 2pq dP dQ + (Q + q^2) dQ^2],$$

et en prenant

$$P + p^2 = u, \quad Q + q^2 = v$$

comme nouveaux paramètres, on a

$$(4) \quad x = (u - p^2)^{\frac{3}{2}}, \quad y = (v - q^2)^{\frac{3}{2}}, \quad z = \frac{3}{2}[p(u - p^2) + q(v - q^2)],$$

et le ds^2 réduit

$$(5) \quad ds^2 = \frac{9}{4}[u du^2 + 2m du dv + v dv^2],$$

m désignant la constante pq ; si p et q varient en gardant un produit constant, on a les ∞^1 surfaces parabolo-tétraédrales annoncées; l'asymptotique rigide est alors la droite triple à l'infini.

Nous avons déjà remarqué que changer p en $p_1 = pj$, où j est une racine cubique imaginaire de l'unité, ne change pas Σ_1 , mais remplace m par $m_1 = mj$; d'ailleurs, dans les formules (4), remplacer u par $u_1 = j^2 u$ et p par $p_1 = pj$ ne change pas x, y, z ; on aperçoit donc les seules auto-applications de Σ_1 (réduite au quart situé dans le dièdre $x > 0, y > 0$):

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 = u, & v_1 = v, \\ u_2 = ju, & v_2 = j^2 v, \\ u_3 = j^2 u, & v_3 = jv; \end{cases} \quad (6') \quad \begin{cases} u_4 = v, & v_4 = u, \\ u_5 = j^2 v, & v_5 = ju, \\ u_6 = jv, & v_6 = j^2 u. \end{cases}$$

Les trois points qui se correspondent par les formules (6) contiennent au moins deux points imaginaires; dans ces correspondances,

il y a un seul point invariant

$$u = v = 0 \quad \text{ou} \quad x = ip^3, \quad y = iq^3, \quad z = -\frac{3}{2}(p^3 + q^3).$$

Dans les correspondances (U'), il y a au contraire une ligne qui reste invariante, à savoir soit $u = v$, soit $u = jv$, soit $u = j^2v$; la première seule est réelle; en vertu des principes connus sur la conservation de $\frac{\sin \theta}{R}$, chacune de ces lignes doit être ou asymptotique ou géodésique, et l'on vérifie sans peine que c'est le dernier cas qui est réalisé. (On remarque d'ailleurs que le point (u, v) de Σ_1 étant réel, on a

$$u \geq p^2, \quad v \geq q^2;$$

si donc on suppose $p^2 > q^2$, pour toute la région de Σ_1 définie par $p^2 \geq v \geq q^2$, le point homologue (u_1, v_1) devient imaginaire (v imaginaire pure, y et z réels); la région définie par $v \geq p^2$ a au contraire sa transformée réelle; quand le point (u, v) décrit la courbe frontière $v = p^2$, le point (u_1, v_1) décrit l'arête de rebroussement située dans le plan yOz .

J'ai laissé dans le ds^2 réduit (5) le facteur numérique $\frac{9}{4}$; on peut le supprimer en écrivant

$$u = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} u_1, \quad m = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} m_1, \quad v = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} v_1,$$

mais on doit prendre garde que, dans les deux formes réduites

$$(E) \quad \frac{9}{4} [u du^2 + 3m du dv + v dv^2],$$

$$(E') \quad u du^2 + 3m du dv + v dv^2,$$

le symbole m a un sens différent; M. Tzitzéica emploie la seconde forme; j'ai préféré, pour simplifier certains calculs, garder la première.

Remarquons que, u et v étant variables indépendantes, d'où

$$d^2u = d^2v = 0,$$

on a, avec la fonction $\Theta(u, v)$,

$$(7) \quad \Theta(u, v) = \frac{3}{8}(u^3 + v^3 + 6muv),$$

$$(8) \quad ds^2 = d^2\Theta.$$

Si donc on effectue, sur u et v , une substitution *linéaire*, homogène ou non,

$$(9) \quad \begin{cases} u = p u_1 + q v_1 + r \\ v = p_1 u_1 + q_1 v_1 + r_1 \end{cases} \quad [\Theta(u, v) = \Theta_1(u_1, v_1)],$$

on aura encore

$$d^2 u_1 = d^2 v_1 = 0$$

et par suite

$$(10) \quad d^2\Theta = d^2\Theta_1 = ds^2.$$

C'est ce point de départ que M. Tzitzéica a adopté pour faire la réduction de l'élément linéaire des surfaces tétraédrales. J'y suis arrivé directement par la découverte des surfaces parabo-tétraédrales et je vais poursuivre en faisant effectivement le calcul de u, v en fonction de $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$.

6. *Réduction du ds^2 de la surface tétraédrale générale.* — Les coordonnées λ, μ ont l'inconvénient de ne pas constituer une représentation *propre*: elles ont donc la particularité d'être, pour les points réels, tantôt réelles, tantôt imaginaires, suivant que du point image dans (P) on peut mener des tangentes réelles, ou non, à la parabole image de l'asymptotique en jeu. Si donc on pose

$$(1) \quad \lambda + \mu = U, \quad \lambda\mu = V,$$

on aura la représentation paramétrique de la surface tétraédrale Σ :

$$(2) \quad \begin{cases} P = x^{\frac{2}{3}} = A_1[V + aU + a^2] & (A_1 = A^{\frac{2}{3}}), \\ Q = y^{\frac{2}{3}} = B_1[V + bU + b^2] & (B_1 = B^{\frac{2}{3}}), \\ R = z^{\frac{2}{3}} = C_1[V + cU + c^2] & (C_1 = C^{\frac{2}{3}}). \end{cases}$$

On peut donc tirer, des deux premières équations (2), U et V en

fonction *linéaire, non homogène de P et Q* : la relation

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 1$$

permet de transformer ces expressions en fonctions linéaires *homogènes de P, Q, R*, et cela d'une façon unique. On y arrive aussitôt en résolvant les équations (2) par rapport aux inconnues V, U et 1, ce qui donne

$$(3) \quad \begin{cases} U = l P + m Q + n R = l' P' + m' Q' + n' R', \\ V = l_1 P + m_1 Q + n_1 R = l'_1 P' + m'_1 Q' + n'_1 R', \\ 1 = \alpha P + \beta Q + \gamma R = \alpha' P' + \beta' Q' + \gamma' R' \end{cases}$$

équations, où j'ai ajouté les expressions semblables de U, V obtenues pour l'une quelconque des ∞^2 surfaces Σ' applicables sur Σ [on suppose alors que l'asymptotique mise en évidence par les formules (2) est celle qui est commune à Σ et Σ' ; mais le rôle de cette asymptotique disparaît aussitôt la liaison faite entre P, Q, R et P', Q', R' par les formules (3)]. Les formules (3) montrent que l'application de Σ et Σ' revient à faire subir au plan auxiliaire (P) une transformation *affine*, le transformant en le plan auxiliaire (P') relatif à la nouvelle surface. On pourra, en résolvant (3), écrire les formules importantes pour la suite

$$(4) \quad \begin{cases} P' = H P + K Q + L R, \\ Q' = H' P + K' Q + L' R, \\ R' = H'' P + K'' Q + L'' R. \end{cases}$$

Bien entendu, on pourra ne garder que les variables P et Q, de sorte que P', Q', R' seraient cette fois des expressions linéaires non homogènes de P et Q. Si l'on considère maintenant la déformée Σ , parabolotétraédrale de Σ [relative à l'asymptotique particulière mise en évidence par (2) en y faisant $V = \frac{U^2}{4}$], on a pour cette surface, avec les paramètres (u, v) du paragraphe précédent,

$$(5) \quad \begin{cases} x_1^{\frac{2}{3}} = A_1 [V + a_1 U + a_1^2] = u - p^2, \\ y_1^{\frac{2}{3}} = B_1 [V + b_1 U + b_1^2] = v - q^2, \\ z_1 = C_1 U, \end{cases}$$

et cela prouve que U et V , et par suite P, Q, R , sont des fonctions linéaires non homogènes des coordonnées curvilignes (u, v) de l'élément linéaire réduit

$$(6) \quad dv^2 = \frac{9}{4} [u du^2 + 2m du dv + v dv^2].$$

Il est intéressant de trouver la forme de l'expression

$$\Theta \equiv \frac{3}{8} (u^3 + v^3 + 6m uv)$$

quand on y remplace (u, v) par les fonctions P, Q seules, ou mieux par P, Q, R , de façon à obtenir une fonction homogène de degré 3. Le calcul est immédiat, car

$$(7) \quad dx = \frac{3}{2} P^{\frac{1}{2}} dP, \quad dx^2 = \frac{9}{4} P dP^2 = d^2 \left(\frac{3P^3}{8} \right);$$

on a donc la relation remarquable

$$(8) \quad P^3 + Q^3 + R^3 \equiv u^3 + v^3 + 6m uv + au + bv + c.$$

où a, b, c sont des constantes : les différences secondes sont en effet les mêmes pour $P^3 + Q^3 + R^3$ et Θ . L'expression $P^3 + Q^3 + R^3$ a d'ailleurs une signification géométrique simple, à savoir $x^2 + y^2 + z^2$, carré de la distance de l'origine au point de Σ . De la sorte, entre

$$P^3 + Q^3 + R^3 \quad \text{et} \quad P'^3 + Q'^3 + R'^3,$$

fonctions estimées aux points homologues dans l'application de Σ et Σ' , n'existe qu'une différence linéaire (non homogène) en P et Q , quand P et Q sont employées seules; cela se traduit par l'identité homogène

$$(9) \quad P^3 + Q^3 + R^3 + (aP + bQ + cR)(\alpha P + \beta Q + \gamma R)^2 \equiv P'^3 + Q'^3 + R'^3,$$

où P', Q', R' sont trois fonctions linéaires et homogènes de P, Q, R .

Réciproquement, si cela a lieu, les fonctions P', Q', R' seront définies par les formules (4); la transformation affine correspondante fait correspondre au plan (P) un plan (P') d'équation

$$\alpha' P' + \beta' Q' + \gamma' R' = 1$$

et la surface Σ' est appliquée sur Σ , précisément par les formules (4), où P, Q, \dots, R' sont remplacées par $x^{\frac{2}{3}}, y^{\frac{2}{3}}, \dots, z'^{\frac{2}{3}}$.

Nous avons donc un moyen nouveau, indépendant, sinon comme démonstration, du moins comme exécution, de tout ce qui précède : supposons que P, Q, R désignent cette fois des coordonnées homogènes dans un plan (par exemple $\frac{P}{R}$ et $\frac{Q}{R}$ pourront être des coordonnées cartésiennes ordinaires relatives à deux axes $\omega P, \omega Q$); je suppose les constantes numériques α, β, γ données et les constantes numériques a, b, c inconnues. Pour un choix de a, b, c , l'équation

$$(10) \quad P^3 + Q^3 + R^3 + (aP + bQ + cR)(\alpha P + \beta Q + \gamma R)^2 = 0$$

définit une cubique plane; on sait qu'une substitution linéaire de la forme (4) ramène l'équation de cette cubique à la forme

$$(11) \quad P'^3 + Q'^3 + R'^3 + 6\mu P'Q'R' = 0,$$

et cela de quatre façons différentes : la constante μ , en général, n'est pas nulle. Le problème de l'espace est maintenant ramené à un problème plan connexe; comment choisir a, b, c quand α, β, γ sont données, de sorte que μ soit nul? Il suffit d'égaliser à zéro l'invariant bien connu S attaché à la cubique (10); je renvoie par exemple au *Traité de Géométrie analytique* de Salmon, traduit par Chemin, pages 273 et suivantes (Gauthier-Villars, 1884). Réciproquement, si $S = 0$, les valeurs de μ sont $0, 1, j, j^2$ pour les quatre réductions annoncées; on a donc une réduction et une seule à la forme (9). L'invariant S est assez long à écrire; α, β, γ donnés, et a, b, c étant regardées comme coordonnées d'un point de l'espace à trois dimensions, l'équation $S = 0$ définit une surface de degré 4, ayant pour plan tangent à l'origine

$$(12) \quad \beta\gamma a + \gamma\alpha b + \alpha\beta c = 0.$$

A tout point de la surface S , autre que l'origine, correspond une déformation tétraédrale de Σ et l'on retrouve tout ce qui a été expliqué. L'interprétation de l'équation (9) est évidente.

La courbe de Σ , d'équation $aP + bQ + cR = 0$, ou, si l'on préfère,

$$ax^{\frac{2}{3}} + by^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{3}} = 0,$$

possède cette propriété qu'une fois la déformation achevée, la distance à l'origine de chaque point de cette courbe a repris la même valeur: le cône de degré 6 ayant son sommet à l'origine et cette courbe pour directrice, relatif à Σ , et le cône analogue relatif à Σ' sont applicables l'un sur l'autre. Si

$$hP + kQ + R = 0$$

est une droite arbitraire du plan (P), on peut déterminer a, b, c par les égalités

$$\frac{a}{h} = \frac{b}{k} = \frac{c}{1},$$

ce qui revient à couper la surface S par une droite arbitraire issue de l'origine: on voit donc qu'une courbe de l'espèce indiquée sur Σ peut, en général, et de trois façons différentes, offrir la propriété en question. On obtient ainsi sur Σ un réseau ∞^2 linéaire de courbes, que nous allons retrouver à l'instant, à un autre point de vue: ces courbes sont de degré 12, de genre 1, ont pour images: sur (P) des droites, sur (Q) les biquadratiques intersections de (Q) avec une quadrique coaxiale.

Si la droite $(h, k, 1)$ n'est pas tangente à S, on a trois déformations de Σ dont une au moins est réelle. Si la droite $(h, k, 1)$ est tangente à S, ou si l'on préfère, si la droite du plan (P) passe par le point $\frac{1}{3\alpha}, \frac{1}{3\beta}, \frac{1}{3\gamma}$, il n'y a plus que deux déformations de cette espèce; pour les deux tangentes asymptotiques (réelles ou imaginaires) de S à l'origine, il n'y a plus qu'une telle déformation de S.

7. *Invariant de la surface Σ .* — Ce qui précède ne suffit pas pour réaliser complètement l'application de Σ sur Σ' , car nous n'avons pas calculé les coefficients de la transformation affine (P), (P'), nous n'avons pas non plus trouvé l'expression du coefficient m en fonction de α, β, γ . Il va être beaucoup plus simple, au lieu d'appliquer Σ sur Σ' , de calculer en fonction de P, Q, R les variables u, v de l'élément

linéaire

$$(1) \quad ds^2 = \frac{9}{4} [u du^2 + 2m du dv + v dv^2].$$

Le point (u, v) d'un plan ωuv sert d'image au point de Σ ; la surface Σ a ainsi pour image un triangle du plan ωuv ; de même la surface Σ' et les régions de Σ et Σ' qui se recouvrent sont les régions dont les images sur le plan ωuv se recouvrent.

Calculons la courbure totale et ses invariants, d'une part, sous la forme réduite (1), de l'autre sous la forme

$$(2) \quad ds^2 = \frac{9}{4} [P dP^2 + Q dQ^2 + R dR^2].$$

On trouve aisément, par application de formules connues,

$$(3) \quad \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{m}{9(uv - m^2)^2}.$$

Posons donc

$$(4) \quad \varphi = \frac{uv - m^2}{\sqrt{m}} = \frac{1}{3} \sqrt{R_1 R_2};$$

aux points homologues dans l'application de Σ sur Σ' , φ doit être le même, au moins en valeur absolue (si α, β, γ deviennent fonctions d'une variable complexe auxiliaire t , une circulation convenable de t peut faire revenir α, β, γ à leurs valeurs initiales et changer de signe \sqrt{m} suivi par continuité); mais si φ , exprimé au moyen de $\alpha, \beta, \gamma, P, Q$, contient un radical (portant uniquement sur α, β, γ), $\Delta\varphi$ est rationnel en m . On trouve

$$(5) \quad \frac{9}{4} \Delta\varphi = \frac{u^3 - 3m uv + v^3}{m(uv - m^2)}.$$

Ceci donne l'idée d'introduire des combinaisons simples, invariantes dans l'application, de φ et $\Delta\varphi$, soit

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi \equiv \frac{9}{4} \Delta\varphi + 2 \equiv \frac{u^3 + v^3 - 2m^3}{m(uv - m^2)}, \\ \chi \equiv \varphi\psi \equiv \frac{9}{4} \varphi \Delta\varphi + 2\varphi \equiv \frac{u^3 + v^3 - 2m^3}{m^2} \dots \end{array} \right.$$

Pour la même raison, $\Delta\chi$ est rationnel en m :

$$(7) \quad \Delta\chi = \frac{4}{m^3} \frac{uv(u^3 + v^3 - 2muv)}{uv - m^2} = \frac{9uv}{m^2} \Delta\varphi.$$

Si l'on pose $\frac{uv}{m^2} = \omega$, ω est donc un invariant rationnel en m , et l'on peut écrire

$$(8) \quad \omega = \frac{uv}{m^2} = \frac{\Delta\chi}{9\Delta\varphi}, \quad m^{\frac{3}{2}} = \frac{\varphi}{\omega - 1}.$$

Les formules que l'on vient d'écrire résolvent la question : il suffit de calculer successivement φ , $\Delta\varphi$, ψ , χ , ω pour trouver rationnellement en α , β , γ la quantité m^3 ou $\frac{\varphi^2}{(\omega - 1)^2}$; ensuite, on calcule u et v par les formules

$$(9) \quad \begin{cases} uv = \varphi\sqrt{m} + m^2, \\ u^3 + v^3 = \chi m^{\frac{3}{2}} + 2m^{\frac{3}{2}}, \end{cases}$$

qui déterminent pour le couple (u, v) les six solutions déjà signalées précédemment correspondant aux auto-applications de la surface Σ ('). Comme vérification, l'expression

$$(10) \quad \zeta = (m^{\frac{3}{2}}\chi + 2m^{\frac{3}{2}})^2 - 4(\varphi\sqrt{m} + m^2)^2 = (u^3 - v^3)^2$$

doit se réduire au carré d'un polynôme de degré 3 en P , Q et chaque expression

$$(11) \quad m^{\frac{3}{2}}\chi + 2m^{\frac{3}{2}} \pm \sqrt{\zeta}$$

doit être le cube d'un polynôme en P et Q .

Calculons d'abord φ ; on a

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{9}{4} \left[P dP^2 + Q dQ^2 + \frac{R}{\gamma^2} (\alpha dP + \beta dQ)^2 \right] \\ &\equiv E dP^2 + 2F dP dQ + G dQ^2, \\ E &= \frac{9}{4} \frac{P\gamma^2 + R\alpha^2}{\gamma^2}, \quad F = \frac{9}{4} \frac{\alpha\beta R}{\gamma^2}, \quad G = \frac{9}{4} \frac{Q\gamma^2 + R\beta^2}{\gamma^2}, \end{aligned} \right.$$

$$(13) \quad EG - F^2 = \frac{9^2}{4^2\gamma^2} [\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ].$$

(') Je rappelle que l'on a convenu de borner Σ au huitième contenu, par exemple dans le trièdre des coordonnées positives x, y, z .

On calcule ensuite $DD'' - D'^2$ soit en se servant des formules connues qui donnent $DD'' - D'^2$ en fonction de E, F, G, soit, ce qui est finalement plus simple ici, en calculant séparément D, D', D''; on obtient

$$(14) \quad DD'' - D'^2 = \frac{9^3}{16^2} \frac{\alpha\beta}{\gamma^3},$$

d'où le résultat élégant

$$(15) \quad \frac{9}{R_1 R_2} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ)^2},$$

puis

$$(16) \quad \varphi = \frac{\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}.$$

J'ouvre ici une parenthèse pour faire remarquer que les calculs précédents ne tiennent pas compte de la forme linéaire des relations liant (P, Q, R) et (u, v). Si l'on tient compte de cette circonstance particulière on peut écrire, grâce aux relations linéaires et homogènes en (P, Q, R) et (P', Q', R'),

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha P + \beta Q + \gamma R = \alpha' P' + \beta' Q' + \gamma' R', \\ \frac{\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = \frac{\alpha'^2 Q' R' + \beta'^2 R' P' + \gamma'^2 P' Q'}{\sqrt{\alpha' \beta' \gamma'}}. \end{array} \right.$$

Il résulte de là que le discriminant de la forme quadratique

$$(18) \quad (\alpha P + \beta Q + \gamma R)^2 + \lambda \frac{(\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ)}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}$$

est un invariant *relatif*: ce discriminant contient un terme en λ^2 et un terme en λ^3 , de sorte que la racine non nulle de ce discriminant est un invariant *absolu*; d'ailleurs, l'expression (18) est égale à

$$(19) \quad 1 + \frac{\lambda(uv - m^2)}{\sqrt{m}},$$

de sorte que la racine du discriminant est $|\lambda| = m^{-\frac{3}{2}}$, valeur qui donne à (18) ou (19) la valeur

$$\omega = \frac{uv}{m^2}.$$

On trouve ainsi

$$(20) \quad \frac{1}{m^2} = \frac{\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - 3\beta^2\gamma^2 - 3\gamma^2\alpha^2 - 3\alpha^2\beta^2}{(x\beta\gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

ou plus simplement

$$(20') \quad m^2 = \frac{x^2\beta^2\gamma^2}{(\alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - 3\beta^2\gamma^2 - 3\gamma^2\alpha^2 - 3\alpha^2\beta^2)^{\frac{2}{3}}}.$$

Remarquons que, si l'on a une fonction homogène $Z(P, Q, R)$, on peut la mettre sous la forme $Z\left(P, Q, \frac{1-xP-\beta Q}{\gamma}\right)$ pour calculer ΔZ ; mais il vaut mieux revenir à la forme homogène et un calcul simple donne, avec le symbole sommatoire S de Lamé,

$$(21) \quad \Delta Z = \frac{4}{9} \frac{S(Q\gamma^2 + R\beta^2) \left(\frac{\partial Z}{\partial P}\right)^2 - 2S\beta\gamma P \frac{\partial Z}{\partial Q} \frac{\partial Z}{\partial R}}{x^2QR + \beta^2RP + \gamma^2PQ}.$$

On aura ainsi

$$(22) \quad \Delta\varphi = \frac{4}{9x\beta\gamma} \frac{S(\beta^3 - \gamma^3)^2 P^3 + Sx^2\beta(\beta\beta^3 - 3\gamma^3)P^2Q - 3x\beta\gamma(x^3 + \beta^3 + \gamma^3)PQR}{x^2QR + \beta^2RP + \gamma^2PQ},$$

$$(23) \quad \chi = \frac{S(\beta^3 - \gamma^3)^2 P^3 + 3S\beta^2 Q x^2 \beta^3}{(x\beta\gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on continuait par cette méthode, on retrouverait $\omega = \frac{uv}{m^2}$ comme quotient de $\frac{1}{9}\Delta\chi$ par $\Delta\varphi$; $\Delta\chi$ est un polynôme de degré 5 en P, Q, R et $\Delta\varphi$ un polynôme de degré 3; donc ω est un polynôme de degré 2 et le terme en P^2 donne par identification le coefficient de P^2 dans ω , le terme en P^1Q de $\Delta\chi$ donne ensuite le terme en PQ de ω ; la symétrie achève le reste : on retrouve ainsi l'expression (18) où λ a été remplacée par la valeur $\frac{1}{m^{\frac{3}{2}}}$ donnée par (20) : c'est une vérification des calculs. Le calcul explicite de χ est nécessaire pour ce qui suit.

8. *Calcul effectif de u et v .* — Nous avons indiqué que tout est ramené à calculer uv et $u^3 + v^3$, donnés par φ et χ . Nous avons eu, par φ ,

$$(1) \quad \frac{3}{\sqrt{R_1 R_2}} = \frac{\sqrt{x\beta\gamma}}{\alpha^2QR + \beta^2RP + \gamma^2PQ} = \frac{\sqrt{m}}{uv - m^2}.$$

Si nous remplaçons R par $\frac{1-\alpha P-\beta Q}{\gamma}$, nous détruisons la symétrie mais arrivons plus aisément à calculer u et v ; on a donc

$$(2) \quad \frac{-\beta^2\alpha P^2 - \beta\alpha^2 Q^2 + (\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3)PQ + \beta^2 P + \alpha^2 Q}{\gamma\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = \frac{uv - m^2}{\sqrt{m}}.$$

Comme u, v sont des fonctions *linéaires* de P, Q, tout est ramené à réduire l'équation d'une conique à la forme $uv - m^2 = 0$; ce calcul fournit d'ailleurs la valeur de m en fonction de α, β, γ [du reste c'est ce qui a été fait en somme au paragraphe précédent, formules (17) à (20)]. Le problème est *impossible* si la conique est du genre *parabole*; u et v seront *imaginaires conjugués* si la conique est du genre *ellipse*; u et v seront réelles si la conique est du genre *hyperbole*. On forme donc le discriminant; posons

$$(3) \quad D \equiv (\alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3)^2 - 4\alpha^3\beta^3 \equiv \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - 2\beta^3\gamma^3 - 2\gamma^3\alpha^3 - 2\alpha^3\beta^3.$$

Nous avons reconnu déjà au paragraphe précédent que la réduction à la forme de ds^2

$$(4) \quad \frac{9}{4} [u du^2 + 2m du dv + v dv^2]$$

était impossible si D est nul, mais nous n'avons pas l'interprétation du signe de D; $D < 0$ donne des coordonnées u, v imaginaires pures pour tous les points réels de la surface; $D > 0$ donne u, v réelles pour tous les points réels (1). En vertu des identités

$$(5) \quad \begin{aligned} D &\equiv (\beta^3 + \gamma^3 - \alpha^3)^2 - 4\beta^3\gamma^3 \equiv (\gamma^3 + \alpha^3 - \beta^3)^2 - 4\gamma^3\alpha^3 \\ &\equiv (\alpha^3 + \beta^3 - \gamma^3)^2 - 4\alpha^3\beta^3, \end{aligned}$$

on voit que les surfaces *hyperboliques* donnent toujours $D > 0$, donc u, v réelles; nous avons reconnu directement qu'il en est de même pour les surfaces *paraboliques*. Quant aux surfaces *elliptiques*, elles se partagent en deux groupes, suivant que $D > 0$ ou $D < 0$; d'ailleurs, si l'on fixe m , l'équation, obtenue en remplaçant α^3 par A,

(1) Ou du moins, comme u et v ne sont connus jusqu'ici qu'à un facteur de proportionnalité, il faudra encore s'assurer que ce facteur est *réel*; la fin du calcul montrera que ce facteur est effectivement réel.

β^3 par B, γ^3 par C,

$$(6) \quad m^3(A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB)^2 - ABC = 0$$

représente une surface de degré 4, (σ) , telle qu'à tout point réel de (σ) corresponde une surface tétraédrale réelle, ou à coefficients réels, ayant le ds^2 (1). L'origine étant point triple de (σ) , chaque sécante issue de l'origine donne un point et un seul, sauf si $D = 0$, auquel cas le point est rejeté à l'infini. Se donner la sécante, issue de l'origine, c'est définir la surface tétraédrale à une homothétie près; la surface (σ) intervient, m fixé, pour déterminer le rapport d'homothétie. On voit donc que, pour $m > 0$, nous aurons ∞^2 surfaces hyperboliques à deux nappes, puis ∞^2 surfaces elliptiques du type $D > 0$ et ∞^2 surfaces elliptiques du type $D < 0$: en prenant une de ces dernières et une surface, ou hyperbolique, ou elliptique du type $D > 0$, nous avons un exemple frappant de surfaces réelles, applicables, point réel pour point imaginaire, sur toute leur étendue.

Continuons le calcul de u et v ; la conique obtenue en égalant à zéro chaque membre de (2) se compose de deux droites issues du centre de cette conique, centre défini par

$$(7) \quad P = \frac{\alpha^2(\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3)}{D}, \quad Q = \frac{\beta^2(\beta^3 - \gamma^3 - \alpha^3)}{D}, \quad R = \frac{\gamma^2(\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3)}{D},$$

la pente de la droite étant donnée par l'équation

$$(8) \quad \beta^2 \alpha \left(\frac{P}{Q}\right)^2 - (\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3) \left(\frac{P}{Q}\right) + \beta \alpha^2 = 0.$$

On peut donc écrire, avec deux coefficients indéterminés λ, μ ,

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{u}{\lambda} \equiv \alpha \left[P - \frac{\alpha^2(\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3)}{D} \right] - \frac{\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3 + \sqrt{D}}{2\beta^2} \left[Q - \frac{\beta^2(\beta^3 - \gamma^3 - \alpha^3)}{D} \right], \\ \frac{v}{\mu} \equiv \alpha \left[P - \frac{\alpha^2(\alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3)}{D} \right] - \frac{\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3 + \sqrt{D}}{2\beta^2} \left[Q - \frac{\beta^2(\beta^3 - \gamma^3 - \alpha^3)}{D} \right]. \end{cases}$$

L'identité (2) fournit, par le coefficient de P^2 , la condition

$$(10) \quad \lambda\mu = \frac{-\beta^2}{\alpha\gamma} \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = \frac{-1}{D^{\frac{1}{3}}} \frac{\beta^2}{\alpha\gamma}.$$

Rappelons-nous maintenant la valeur de χ :

$$(11) \quad \chi = \frac{u^3 + v^3 - 3m^3}{m^3} = \frac{S(\beta^3 - \gamma^3)^2 P^3 + 3SP^2 Q \alpha^2 \beta^3}{(\alpha\beta\gamma)^3}.$$

Je remplace R par $\frac{1 - \alpha P - \beta Q}{\gamma}$ et j'égalé les termes en P^3 : on a ainsi

$$\alpha^3(\lambda^3 + \mu^3) = \frac{m^3}{(\alpha\beta\gamma)^3} \left[(\beta^3 - \gamma^3)^2 - (\alpha^3 - \beta^3)^2 \frac{\alpha^2}{\gamma^3} - 3\alpha^2\gamma^3 + 3\alpha^6 \right]$$

et, en réduisant le second membre, on a le résultat simple

$$(12) \quad \lambda^3 + \mu^3 = \frac{\gamma^3 - \alpha^3}{\alpha^2\gamma^3}.$$

Si, au moyen de (10) et (12), on forme $(\lambda^3 - \mu^3)^2$, on constate sans peine que le numérateur de la fraction obtenue,

$$(\gamma^3 - \alpha^3)^2 D + 4\beta^6 \alpha^2 \gamma^3,$$

ordonné en β , est précisément le carré de

$$\beta^3(\gamma^3 + \alpha^3) - (\gamma^3 - \alpha^3)^2.$$

On aura donc finalement, pour calculer λ et μ , le système où ε désigne ± 1 ,

$$(13) \quad \begin{cases} \lambda^3 + \mu^3 = \frac{\gamma^3 - \alpha^3}{\alpha^2\gamma^3} \\ \lambda^3 - \mu^3 = \varepsilon \frac{\beta^3(\gamma^3 + \alpha^3) - (\gamma^3 - \alpha^3)^2}{\alpha^2\gamma^3 D^{\frac{1}{3}}} \end{cases} \quad \left(\lambda\mu = \frac{-1}{D^{\frac{1}{3}}} \frac{\beta^2}{\alpha\gamma} \right);$$

λ^3 et μ^3 sont obtenus par addition et soustraction; les racines cubiques λ et μ ont leurs déterminations associées de sorte que le produit $\lambda\mu$ ait la valeur voulue (la détermination de $D^{\frac{1}{3}}$ correspond à la détermination adoptée pour m ; quand α, β, γ sont réels, on prend $D^{\frac{1}{3}}$ et m réels; le changement de m en mj ou mj^2 serait, nous le savons, indifférent). Nous avons six solutions pour le couple (λ, μ) ou pour (u, v) : c'est conforme à ce que nous savions et, de plus, nous avons vérifié que $D > 0$ donne effectivement un premier couple (u, v) réel, puis la

solution (v, u) qui provient de l'échange de u avec v (changement de signe de ε) et les couples imaginaires

$$(uj, vj^2), (uj^2, vj) \quad \text{ou} \quad (vj^2, uj), (vj, uj^2)$$

indiqués plus haut: pour $D < 0$, chaque point réel de Σ donne six solutions (u, v) où u et v sont imaginaires conjuguées.

Dans le cas de $D > 0$, la courbe, invariante dans l'une des auto-applications de Σ , $u = v$, peut avoir une portion réelle sur Σ : elle est définie par l'équation

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} (\lambda - \mu) \left\{ \alpha \left[P - \frac{\alpha^2(x^3 - \beta^3 - \gamma^3)}{D} \right] - \frac{\gamma^3 - x^3 - \beta^3}{\alpha \beta^2} \left[Q - \frac{\beta^2(\beta^3 - \gamma^3 - x^3)}{D} \right] \right\} \\ - \frac{(\lambda + \mu) \sqrt{D}}{\alpha \beta^2} \left[Q - \frac{\beta^2(\beta^3 - \gamma^3 - x^3)}{D} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Ceci définit dans le plan (P) une droite réelle, et il suffira, pour savoir si une portion de la courbe correspondante de Σ est réelle, de voir si la droite (14) franchit la région convenable du triangle T déjà étudié, où P, Q, R sont positifs tous trois. Le point $u = v = 0$ est celui qui reste invariant dans les diverses auto-applications de Σ (réduite au huitième déjà indiqué); du moment que $D > 0$, ce point est imaginaire sur Σ : il correspond aux valeurs (7) de P, Q, R . Si la surface Σ est elliptique imaginaire ($\alpha < 0, \beta < 0, \gamma < 0$), c'est évident: si Σ est effectivement réelle, l'un des coefficients α, β, γ au moins, α par exemple, est positif: or $\beta^3 - \gamma^3 - \alpha^3$ et $\gamma^3 - \alpha^3 - \beta^3$ ont pour somme le nombre négatif $(-2\alpha^3)$ et cela montre que l'un des deux nombres Q, R , au moins, est négatif.

Si $D < 0$, le point Ω , que j'appelle pôle de Σ , défini par (7), peut être réel; pour le voir, il est commode de considérer, comme plus haut, les quantités

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} A = \alpha^3, \quad B = \beta^3, \quad C = \gamma^3, \\ D = A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB \end{aligned} \right.$$

et les coordonnées de P, Q, R de Ω qui sont

$$(16) \quad P = \frac{\alpha^2}{-D} (B + C - A), \quad Q = \frac{\beta^2}{-D} (C + A - B), \quad R = \frac{\gamma^2}{-D} (A + B - C).$$

Ayant pris trois axes de coordonnées rectangulaires OA, OB, OC, la demi-droite δ joignant l'origine au point (A, B, C) est contenue non seulement à l'intérieur du trièdre positif OA, OB, OC, mais encore à l'intérieur du cône $D=0$: ce cône est coupé par le plan $A+B+C=1$ suivant le cercle inscrit au triangle formé par les points pris à l'unité de distance sur OA, OB, OC: soient a, b, c ces trois points et a', b', c' les milieux de bc, ca, ab : si δ passe à l'intérieur du triangle équilatéral $a'b'c'$, le point Ω est réel sur Σ : si δ passe dans l'un des trois segments, intérieurs au cercle $a'b'c'$ mais extérieurs au triangle $a'b'c'$, le point Ω est imaginaire. Si Ω est réel, les trois courbes $u=c, u=jv, u=j^2v$ rayonnent à partir de Ω sur Σ en formant six secteurs d'angle en Ω égal à 60° : deux secteurs contigus sont applicables l'un sur l'autre, leur frontière restant invariante dans cet échange; ces trois courbes frontières sont géodésiques. Si l'on suppose

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{m\sqrt{9}},$$

on a une surface particulière Σ pour laquelle les auto-applications en question se bornent à des symétries planes relatives aux trois plans

$$y - z = 0, \quad z - x = 0, \quad x - y = 0;$$

si deux des nombres α et β sont égaux et différents de γ , l'une des auto-applications en question est encore une symétrie relative au plan $x - y = 0$: mais si l'on suppose les trois différences $\alpha - \beta, \beta - \gamma, \gamma - \alpha$ toutes non nulles, les auto-applications en question ne se réduisent pas à des symétries. Naturellement, on ne garantit pas que, dans les auto-applications *réelles*, deux secteurs contigus se recouvrent *complètement*: cela n'a lieu que pour $\alpha = \beta = \gamma$ (ou pour $\alpha = \beta$ et deux secteurs convenablement associés).

Remarquons enfin que P, Q, R sont des fonctions linéaires non homogènes de u et v ; si donc, en supposant u et v réelles ($D > 0$), on prend deux axes rectangulaires $\omega u, \omega v$, à toute droite du plan (P) correspond une droite du plan ωuv , et inversement, les droites à l'infini se correspondant.

Donc la région du plan (P) correspondant aux points réels de Σ , limitée par deux ou trois droites, côtés du triangle T, a pour homo-

logue dans le plan ωuv une région de même nature relative au triangle (t) transformé de (T) : les sommets du triangle (t) sont sur l'hyperbole équilatère (H) $uv - m^2 = 0$, car cette hyperbole a aussi pour équation, trilinéaire dans le plan ωuv ,

$$\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ = 0.$$

Le ds^2 n'est défini positif que si $u > 0, v > 0, uv - m^2 > 0$: nous avons donc uniquement à considérer la région intérieure à l'hyperbole dans le premier quadrant; les trois sommets de (t) sont sur la branche d'hyperbole de ce quadrant si Σ est *elliptique réelle*: deux seuls s'y trouvent pour Σ *hyperbolique à une nappe*: un seul pour Σ *hyperbolique à deux nappes*: pour une surface *parabolo-tétraédrale*, on a une région de ωuv limitée par deux demi-droites parallèles à ωu et ωv , issues d'un point de la branche utile de l'hyperbole. Nous préciserons un peu plus loin la variation des triangles ainsi inscrits dans l'hyperbole (H) , triangles qui ne dépendent que de *deux* paramètres et non de *trois*.

Si $D < 0$, on pose

$$u = u' + iv', \quad v = u' - iv',$$

et la conique fondamentale réelle devient le cercle

$$(C) \quad u'^2 + v'^2 - m^2 = 0,$$

la région utile du cercle étant la région intérieure; Σ correspond à l'intérieur d'un certain triangle inscrit dans C .

Cette représentation faite pour Σ et Σ' sur le plan ωuv (ou $\omega u'v'$ suivant le cas), on voit aisément si les deux régions utiles de ωuv (ou $\omega u'v'$) relatives à Σ et Σ' empiètent l'une sur l'autre ou non, donc si Σ et Σ' se recouvrent ou non, en partie, dans leur application (ou du moins dans l'une des *six* applications de Σ sur Σ').

Nous démontrerons plus loin qu'une droite *quelconque* du plan ωuv ou $\omega u'v'$ appartient comme côté à un *seul* triangle; donc nous retrouvons le réseau linéaire de courbes de degré 12 déjà étudié sur les surfaces Σ , courbes ayant pour images les droites du plan (P) . Chacune est susceptible de devenir *une fois, et une fois seulement*, frontière

de rebroussement d'une déformée Σ' de Σ ; elle est alors devenue plane et de degré 6 seulement.

J'attire ici l'attention sur une particularité qui pourrait amener une confusion : donnons α et β et cherchons γ de façon que m ait une valeur donnée à l'avance; il revient au même de se donner $A = \alpha^3$, $B = \beta^3$ et de chercher $C = \gamma^3$. On a l'équation déjà écrite

$$m^3(A^2 + B^2 + C^2 - 2BC - 2CA - 2AB)^2 - ABC = 0,$$

qui est de degré 4 en C ; donc ce calcul, appliqué à une surface Σ déjà connue, lui fait correspondre *trois* nouvelles surfaces Σ' , dont une au moins est réelle, ayant en commun avec elle l'arête de rebroussement $z = 0$, et applicable sur Σ : mais alors *l'arête de rebroussement ne se correspond pas à elle-même dans l'applicabilité*; cela deviendra tout à fait clair après l'étude des triangles inscrits dans la conique fondamentale (H) ou (C) du plan $\omega u v$ ou $\omega u' v'$.

9. Système doublement conjugué de Kœnigs. Déformation avec une droite rigide. — Nous pourrions dès maintenant préciser la relation existant entre les trois sommets du triangle (t) du plan $\omega u v$ ou $\omega u' v'$. Mais nous allons être automatiquement conduits à la propriété caractéristique de ces triangles par l'étude du cas où le réseau conjugué permanent, quand une asymptotique choisie reste rigide, dégénère. Nous avons déjà signalé, de deux points de vue différents, l'intérêt des courbes de Σ qui ont pour image sur (P) une droite, et par suite aussi une droite sur le plan $\omega u v$. Si l'on imagine une telle courbe, elle définit immédiatement l'asymptotique qui lui est tangente : en effet, dans le plan (P) on aura à tracer la parabole unique (toujours réelle) tangente aux trois côtés du triangle T et à la droite image; le réseau conjugué contenant cette courbe est celui qui a pour image les tangentes à cette parabole; si la surface est elliptique ou hyperbolique à deux nappes, il y a, quel que soit le choix du réseau, deux courbes réelles du réseau se croisant en chaque point réel; si la surface est hyperbolique à une nappe, il en sera de même si l'asymptotique est imaginaire (mais d'équation réelle), sinon l'asymptotique partage la surface en deux régions, l'une où les courbes du réseau sont

réelles et l'autre où elles sont imaginaires. Ayant donc tracé le triangle T , considérons l'une quelconque des paraboles inscrites à T . Dans ce faisceau *tangentiel*, il y a exactement *trois* paraboles qui dégèrent en un système de deux points; l'une est constituée par le sommet r et le point à l'infini du côté pq du triangle T . Le réseau conjugué correspondant a pour image sur (P) les droites concourant en r d'une part (sections planes de Σ par un plan contenant Oz), et d'autre part les droites parallèles à pq : sur une telle droite R reste constant, donc aussi z sur Σ . Ceci suffit à prouver que le réseau est le réseau de Kœnigs relatif à Oz sur Σ et même qu'il est doublement de Kœnigs; car le second système de courbes doit, d'après la définition du premier, se composer des courbes de contact des cônes circonscrits ayant leur sommet sur Oz , tandis que le premier, d'après la définition, $z = \text{const.}$ du second, doit se composer des courbes de contact des cylindres circonscrits ayant leurs génératrices parallèles au plan yOx . Il n'est donc pas douteux que nous ne devions trouver ∞^1 déformées de Σ où l'asymptotique particulière, enveloppe des courbes du réseau, reste rigide; or, au point de vue ponctuel, l'asymptotique en question est représentée par la droite du plan ωuv menée de r , parallèlement à pq : cette droite participe de deux définitions (passer par r , être parallèle à pq), donc la courbe obtenue sur Σ est une *droite* G , parallèle à yOx et rencontrant Oz : on la trouve immédiatement en écrivant

$$(1) \quad \alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} = 0, \quad \gamma z^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Cela donne en réalité quatre droites, réelles si $\gamma > 0$ et $\alpha\beta < 0$. En permutant le rôle des axes, on obtient ainsi 12 droites; seule, la surface hyperbolique à une nappe en possède 8 *réelles*: sur la surface parabolique, en dehors de la droite triple à l'infini, il y en a *deux* réelles si la surface est parabolico-hyperbolique. Or on sait, d'après Peterson (voir DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, 2^e édition, p. 180 et suiv.), que les surfaces qui admettent un tel réseau de Kœnigs, doublement de Kœnigs, admettent une déformation à un paramètre où ce réseau conserve cette propriété; avec la méthode de Peterson, les quadratures à effectuer semblent, au premier abord, du type elliptique; mais en réalité, elles s'achèvent complètement. Nous

allons écrire les formules suivantes :

$$\Sigma \begin{cases} x = A(t+a)^{\frac{2}{3}} \vartheta^{\frac{2}{3}}, \\ y = B(t+b)^{\frac{2}{3}} \vartheta^{\frac{2}{3}}, \\ z = C(\vartheta+c)^{\frac{2}{3}}; \end{cases} \quad \Sigma' \begin{cases} x' = A'(t+a')^{\frac{2}{3}} \vartheta^{\frac{2}{3}}, \\ y' = B'(t+b')^{\frac{2}{3}} \vartheta^{\frac{2}{3}}, \\ z' = C'(\vartheta+c')^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

Comme $x^{\frac{3}{2}}, y^{\frac{3}{2}}, z^{\frac{3}{2}}$ sont fonctions linéaires de $t\theta$ et θ , Σ est bien surface tétraédrale; les équations

$$(3) \quad \begin{cases} A^2 a^i + B^2 b^i = A'^2 a'^i + B'^2 b'^i & (i = 0, 1, 2), \\ C^2 + A^2 a^3 + B^2 b^3 = A'^2 a'^3 + B'^2 b'^3 + C'^2, \\ C^2 c = C'^2 c' \end{cases}$$

définissent la déformation à un paramètre annoncée; les trois premières équations donnent en effet A', B', a', b' avec un paramètre arbitraire; la droite s'obtient pour θ nul et $(t\theta)$ arbitraire; on constate que $(t\theta)$ et θ sont fonctions linéaires des coordonnées (u, v) de l'élément linéaire réduit. On obtient d'ailleurs une surface parabolotétraédrale Σ_1 en faisant tendre C' vers zéro, croître indéfiniment c' , le produit $C' \sqrt{c'}$ tendant vers une valeur finie; le décalage de l'axe des z permet d'écrire pour Σ_1 les équations

$$\Sigma_1 \begin{cases} x_1 = A_1(t+a_1)^{\frac{2}{3}} \vartheta^{\frac{2}{3}}, \\ y_1 = B_1(t+b_1)^{\frac{2}{3}} \vartheta^{\frac{2}{3}}, \\ z_1 = \frac{2}{3} C_1 \vartheta \end{cases}$$

et les équations entraînant l'applicabilité de Σ_1 sur Σ sont

$$(4) \quad \begin{cases} A^2 a^i + B^2 b^i = A_1^2 a_1^i + B_1^2 b_1^i & (i = 0, 1, 2), \\ C^2 + A^2 a^3 + B^2 b^3 = A_1^2 a_1^3 + B_1^2 b_1^3, \\ C^2 c = C_1^2. \end{cases}$$

10. Triangles représentatifs des surfaces Σ sur le plan (u, v) ou (u', v') . — Voici maintenant le renseignement précieux qui découle de cette détermination : la droite G de Σ a pour image sur le plan uw la droite g issue de r parallèlement à pq ; d'ailleurs, G est géodésique

sur Σ ; donc l'équation des géodésiques, formée avec les variables (u, v) , admet ∞^1 intégrales *rectilignes* qui sont les images des ∞^1 droites G situées sur l'ensemble des ∞^2 surfaces Σ de même ds^2 ; il y a ∞^2 surfaces Σ , sur chacune un nombre fini de droites, mais il n'y a que ∞^1 droites G , car chaque droite G appartient à ∞^1 surfaces Σ . Cherchons l'équation générale des droites g ; il est facile d'écrire l'équation différentielle des géodésiques du ds^2

$$(1) \quad \frac{1}{4} [u du^2 + 2m du dv + v dv^2]$$

en regardant v comme fonction de u . On a ainsi

$$(2) \quad 2(uv - m^2)v'' = m(1 - v'^2) + v'(v - uv').$$

En cherchant une intégrale linéaire $v = Cu + D$, on trouve aussitôt

$$m(1 - C^2) + CD = 0,$$

d'où l'équation générale

$$(3) \quad C^2u - Cv + m(C^2 - 1) = 0$$

avec un paramètre C ; ces droites g enveloppent donc une courbe unicursale Γ de classe 3 et degré 4, bitangente à la droite de l'infini aux points à l'infini sur ωu et ωv . L'hyperbole (H) est le lieu du point $(u = mt, v = \frac{m}{t})$; la droite g coupe (H) aux deux points $t = -C$ et $t = \frac{1}{C}$. Quand on définit une droite du plan par les deux points où elle perce (H), l'équation tangentielle de Γ devient donc

$$(4) \quad (t^2\theta - 1)(t^2\theta^2 - 1) = 0$$

ou simplement

$$(5) \quad t^2\theta - 1 = 0$$

en introduisant une *dissymétrie*; pour chaque point de (H), l'équation cubique fournissant les trois tangentes menées de ce point à Γ , se décompose *rationnellement* en une équation de degré 1 et une équation de degré 2.

Soit donc un triangle pqr dont les sommets ont pour paramètres

t_1, t_2, t_3 sur (H); r restant fixe et le côté pq se déplaçant parallèlement à lui-même, le triangle pqr reste inscrit dans (H) et circonscrit à une parabole dégénérée fixe (point r : point à l'infini sur pq); ces divers triangles donnent les images de surfaces Σ déformées sur une droite fixe G ; le produit $t_1 t_2$ reste constant, donc aussi $t_1 t_2 t_3$. Or, si q se rapproche indéfiniment de r , la droite pq tend vers la tangente issue de r à l'et donnée par une équation du premier degré ($t_3^2 0 - 1 = 0$); donc la valeur constante de $t_1 t_2 t_3$ est l'unité; cette relation nous livre les ∞^2 triangles images des ∞^2 surfaces Σ de même ds^2 . Ceci nous prouve aussi que la donnée du côté pq donne r d'une façon unique; sur Σ , chacune des ∞^2 courbes, $hx^{\frac{2}{3}} + ky^{\frac{2}{3}} + lz^{\frac{2}{3}} = 0$, devient donc, une fois et une fois seulement, arête plane de rebroussement.

Ceci nous permet aussi de résoudre avec précision le problème suivant : Σ et Σ_1 sont applicables l'une sur l'autre de six façons différentes; on a choisi l'un des six modes; existe-t-il sur chaque surface une portion réelle ayant pour homologue une portion réelle aussi? La réponse est basée sur la construction de Γ .

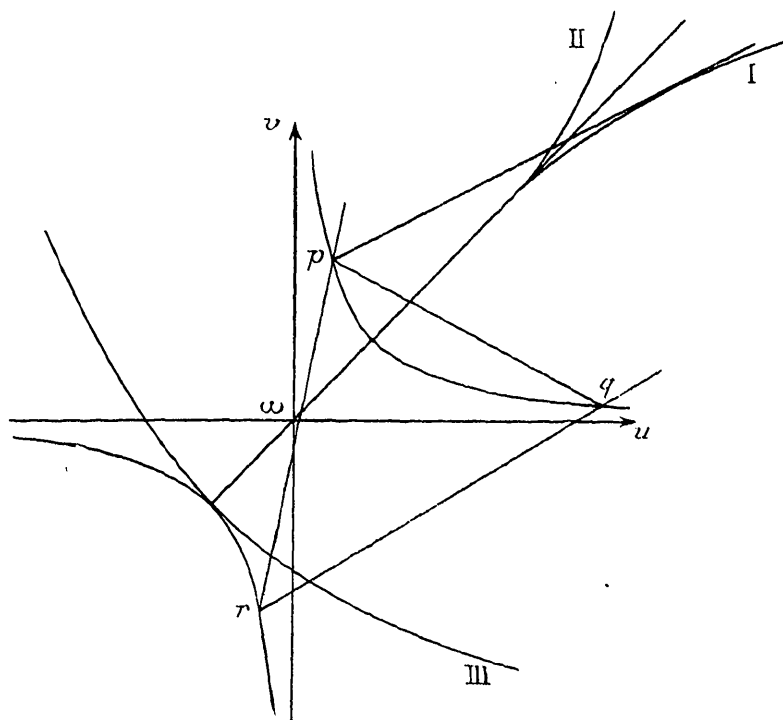
Supposons d'abord $m < 0$, donc Σ hyperbolique à une nappe. Le paramètre t est négatif pour la branche utile de (H); le triangle pqr a deux sommets sur cette branche (fig. 1) et l'autre r sur la branche du troisième quadrant. L'enveloppe Γ a pour équations paramétriques

$$(6) \quad u = -m \left(2C + \frac{1}{C^2} \right), \quad v = -m \left(C^2 + \frac{2}{C} \right),$$

où C est la pente de la tangente; C variant de 0 à 1, on a la branche I; C variant de 1 à $+\infty$, la branche II; pour C négatif, la branche III. Le plan se trouve partagé par Γ en trois régions : celle comprise entre (I, II) et III, où est située la branche utile de (H), fournit pour chaque point de cette région une seule tangente [C positif, égal à $-t$, où t est le paramètre du point de la branche utile de (H)]; une seconde, comprise entre I et II, pour laquelle existent trois tangentes réelles (les trois valeurs de C positives); enfin la région convexe de III, où est la portion non utile de (H), fournissant aussi trois tangentes réelles (deux valeurs de C négative, une positive). Considérons donc le triangle pqr ; la parallèle à qr issue de p est l'unique tangente réelle

issue de p à Γ et elle est l'image de la génératrice issue du point P de Σ (sur le huitième étudié de Σ); la partie utile de cette droite est la demi-droite issue de p vers le point de contact avec la courbe (I, II); la portion utile du triangle pqr est la région ex-inscrite dans l'angle r . Si l'on considère maintenant un autre triangle $p_1q_1r_1$, la parallèle menée de p_1 à q_1r_1 coupe, d'après l'étude géométrique faite, la paral-

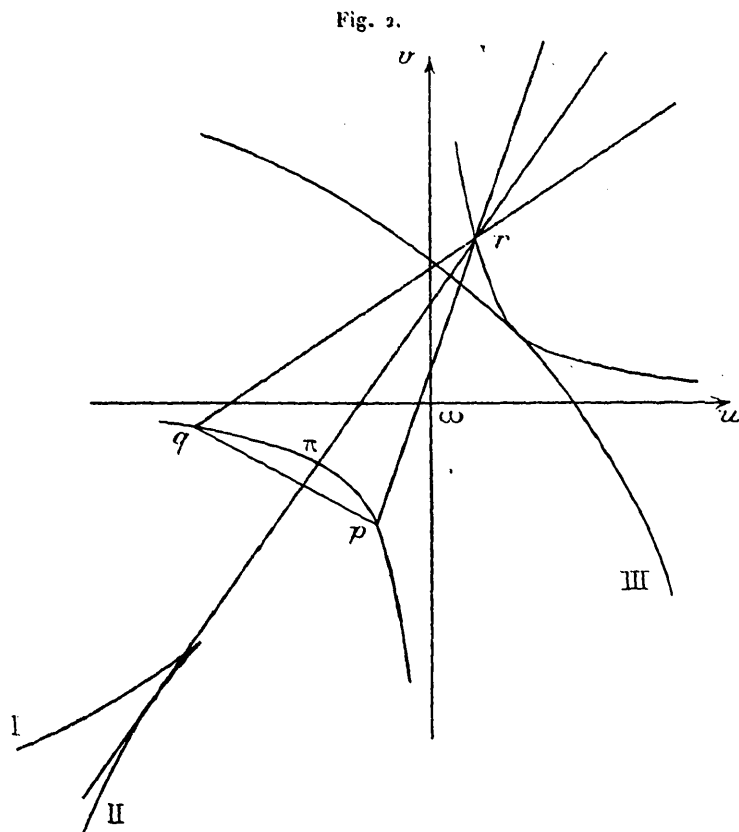
Fig. 1.



lèle à qr menée de p en un point de la région (I, II) et cela suffit pour prouver que les régions utiles de pqr et $p_1q_1r_1$ ont une portion commune; l'une des régions ne peut d'ailleurs être contenue tout entière dans l'autre, car dans la région utile de pqr , il n'y a plus aucun point de (II); donc, dans l'application de Σ sur Σ_1 (et cela quel que soit celui des deux modes réels de correspondance adopté), chaque surface Σ ou Σ_1 recouvre une portion de l'autre, chaque surface débordant sur la région commune. A signaler que l'on peut d'autre part établir quatre correspondances différentes où chaque point réel de l'une a

pour homologue un point imaginaire de l'autre (sans que les coordonnées du point imaginaire soient imaginaires pures). Ici, si par chaque point p de la portion utile de (H) on mène les parallèles aux asymptotes (positives), on a la portion correspondant à une surface parabolo-tétraédrale hyperbolique.

Quand on suppose m positif, il faut recommencer la figure en rem-



plaçant Γ par la courbe symétrique relativement à l'origine (*fig. 2*). Il existe des surfaces hyperboliques à deux nappes, des surfaces parabolo-elliptiques, des surfaces elliptiques (du type $D > 0$). Soit d'abord une surface Σ hyperbolique; r est sur la branche de (H) du premier quadrant; p, q sur l'autre; si la sécante pq se déplace parallèlement à elle-même, de façon que p, q , restant sur la branche de (H) du troisième quadrant, arrivent à se confondre en π , la droite $r\pi$ est tangente

à la branche (I, II) et la demi-droite opposée pénètre dans l'angle opposé par l'angle r au triangle pqr , région utile pour Σ ; recommençons la construction avec un autre point r_1 et la droite $r_1\pi_1$; les deux demi-droites opposées, l'une à $r\pi$, l'autre à $r_1\pi_1$, ne se coupent pas; donc si p et q sont suffisamment voisins de π et p_1, q_1 de π_1 , les deux surfaces Σ, Σ_1 correspondantes ne se recouvrent pas dans le mode adopté (ni dans l'autre, puisque notre raisonnement est indépendant de la position relative de r et r_1 et que l'autre mode revient à faire une symétrie de p, q, r_1 relativement à la première bissectrice). D'autre part, pqr étant tracé, on sait que l'on peut tracer une droite p, r_1 arbitrairement, sauf la restriction qu'elle doit couper (II) sur chaque branche; on peut donc réaliser deux surfaces hyperboliques se recouvrant, chacune partiellement l'autre. Le seul cas où Σ_1 puisse recouvrir totalement Σ , tandis que Σ ne recouvre Σ_1 que partiellement, s'obtient alors en laissant r fixe et remplaçant pq par une droite parallèle p_1q_1 située par rapport à pq du côté opposé à r .

Si maintenant on veut avoir une surface elliptique Σ , il suffit de prendre t_1, t_2, t_3 positifs tous trois, vérifiant $t_1 t_2 t_3 = 1$. Comme la droite pq est arbitraire, sauf qu'elle doit couper la branche de (H) du premier quadrant, on peut, si Σ_1 (hyperbolique, parabolique ou elliptique) est donnée *a priori*, trouver une surface elliptique Σ la recouvrant en partie. Si le triangle p, q, r_1 relatif à Σ_1 n'a aucun sommet confondu avec le point $t = 1$, on peut prendre p, q, r tous très voisins de $t = 1$, de sorte que Σ ne recouvre pas Σ_1 (on arrive au même résultat si Σ_1 est elliptique en prenant t_1 et t_2 très grands positifs et t_3 très petit positif).

II. Surfaces elliptiques du type $D < 0$. — Dans ce cas, il y a avantage à écrire

$$(1) \quad u = u' + iv', \quad v = u' - iv',$$

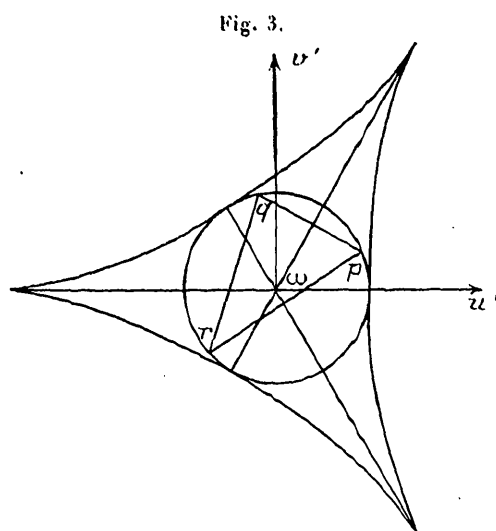
le ds^2 devient

$$(2) \quad ds^2 = \frac{9}{2} [(u' + m) du'^2 - 2v' du' dv' + (m - u') dv'^2],$$

m bien entendu est positif. La surface Σ est représentée tout entière

par une portion du plan $\omega u'v'$ intérieur au cercle fondamentale (fig. 3)

(C)
$$u'^2 + v'^2 - m^2 = 0.$$



A Σ correspondent six portions obtenues en prenant d'abord la symétrie de l'une par rapport à $\omega u'$, puis faisant tourner ces deux portions de 120° dans un sens ou l'autre autour de ω . La courbe Γ devient une hypocycloïde à trois rebroussements tritangente à (C) aux points de paramètre angulaire φ ($u' = m \cos \varphi$, $v' = m \sin \varphi$) égal à 0 , 120° , 240° .

Étant donnés une surface Σ et le triangle pqr correspondant, les sommets p, q, r ayant respectivement pour argument $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, on a la relation *nécessaire et suffisante*

(3)
$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0 \pmod{2\pi}$$

(ces résultats se déduisent de ceux du paragraphe précédent en remplaçant t_1, t_2, t_3 par $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}$). Si donc le triangle pqr n'a aucun sommet aux points de contact de C et Γ , on peut construire un triangle p_1, q_1, r_1 , dont les arguments sont voisins de zéro, représentatif d'une surface Σ_1 ; ce triangle p_1, q_1, r_1 et les cinq associés par symétries ou rotations n'auront, si p_1, q_1, r_1 est suffisamment petit, aucun point commun avec pqr ; donc Σ_1 ne recouvrira Σ dans aucun des six modes

d'application. On peut, au contraire, puisque p, q, r peut être tracé arbitrairement, construire une infinité de surfaces Σ_i qui recouvrent Σ partiellement (Σ_i réciproquement, recouvrant Σ_i partiellement). Les trois droites joignant l'origine aux points de rebroussement de Γ et aux points de contact de C et Γ sont les images de ces géodésiques particulières qui sont lignes invariantes sur Σ dans une auto-application.

Le centre ω est l'image du pôle Ω de Σ ; si le triangle pqr est acutangle, Ω est réel sur Σ ; Ω devient imaginaire si le triangle pqr acquiert un angle obtus.

Il est bon de se rendre compte de la correspondance exacte entre la géométrie et les opérations analytiques effectuées. Les surfaces Σ que nous avons obtenues dans ce paragraphe ou le précédent forment une famille ∞^2 et l'on obtient toutes les ∞^3 surfaces tétraédrales (sauf une famille ∞^2 caractérisée par $D = 0$) en faisant une homothétie arbitraire. Donnons-nous donc un plan, qui sera celui de la représentation $\omega u' v'$ si $D < 0$, et un triangle pqr dans ce plan; je dis que le reste en résulte, pourvu que l'on ait donné l'unité de longueur. En effet, ω est le centre du cercle circonscrit C et m est la valeur numérique du rayon de ce cercle. Ensuite, inscrivons une parabole (ϖ) dans pqr (il existe ∞^1 paraboles de cette espèce, formant un faisceau tangentiel); C et ϖ déterminent ∞^1 triangles circonscrits à ϖ , inscrits dans C ; recommençons avec une autre parabole ϖ' du faisceau déterminé par pqr ; nous avons les ∞^2 triangles images de nos ∞^2 surfaces tétraédrales, connues dans leur ensemble, puisque m est connu. On a obtenu exactement ∞^2 triangles, tandis qu'il y a ∞^3 triangles simplement assujettis à être inscrits à C . Les ∞^1 triangles considérés en premier lieu, inscrits dans C et circonscrits à ϖ , déterminent chacun un faisceau tangentiel de paraboles, soit un total de ∞^2 paraboles; or il y a ∞^3 paraboles simplement assujetties à admettre, avec C , ∞^1 triangles inscrits dans C et circonscrits à cette parabole. Donc il est clair que nos ∞^2 triangles, nos ∞^2 paraboles deviendraient respectivement les ∞^3 triangles inscrits dans C , les ∞^3 paraboles annoncées (ayant, en d'autres termes, leur foyer sur C), par une simple rotation autour de ω ; or, nous n'avons pas indiqué les axes $\omega u' v'$: c'est leur indétermination provisoire qui équivaut à la rotation annoncée.

Je prends en effet deux axes ωx , ωy rectangulaires issus du centre ω de C; un point courant de C est représenté par son argument φ ; une parabole ϖ *quelconque* a pour équation tangentielle

$$(4) \quad (Um \cos \omega + Vm \sin \omega + W)(U \cos \psi + V \sin \psi) + \lambda(U^2 + V^2) = 0$$

en mettant en évidence son foyer ($m \cos \omega$, $m \sin \omega$) situé sur C et la direction $(\cos \psi, \sin \psi)$ de son axe. La condition pour que la corde (φ_1, φ_2) de C soit tangente à ϖ s'obtient aisément, car pour cette corde

$$(5) \quad U = \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad V = \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad W = -m \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

On obtient aisément la condition de contact sous la forme

$$(6) \quad \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - \omega - \psi) + \cos(\psi - \omega) - \cos(\varphi_1 - \psi) - \cos(\varphi_2 - \psi) + \frac{2\lambda}{m} = 0.$$

Cette équation, de la forme

$$(7) \quad A \cos \varphi_2 + B \sin \varphi_2 + C = 0,$$

admet pour racines φ_2 et φ_3 ; elle exprime que φ_2 et φ_3 sont sur la droite

$$Ax + By + Cm = 0$$

de pente $-\frac{A}{B}$, de sorte que, par les propriétés de la bissectrice,

$$\text{tang} \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2} = \frac{B}{A}.$$

Ici on a aisément, en développant (6),

$$\frac{B}{A} = \frac{\sin(\omega + \psi - \varphi_1) - \sin \psi}{\cos(\omega + \psi - \varphi_1) - \cos \psi} = -\cot\left(\psi + \frac{\omega - \varphi_1}{2}\right).$$

Finalement, on a

$$(8) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = (2k + 1)\pi + 2\psi + \omega.$$

Cette relation, grâce à sa forme symétrique en φ_1 et φ_2 , montre que, si (φ_1, φ_2) et (φ_1, φ_3) sont les deux tangentes à ϖ issues du point φ_1 de C, les droites (φ_2, φ_1) et (φ_2, φ_3) seront les tangentes à ϖ issues de φ_2 , de sorte que la propriété de Poncelet se trouve bien vérifiée. Cela prouve que, pour nos ∞^2 triangles, la somme $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$ reste

constante : ceci se voit, d'abord en laissant ω fixe et prenant les ∞^1 triangles pqr correspondants, puis en remplaçant ω par une autre ω du faisceau inscrit dans pqr . Le coefficient constant, $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, peut recevoir la valeur que l'on veut, en faisant tourner les axes. Le point φ_1 restant fixe sur C, la corde $\varphi_2\varphi_3$ peut prendre ∞^1 positions, toutes parallèles entre elles ; en supposant qu'elle se déplace de façon à passer en p , on aura $\varphi_3 = \varphi_1$, et l'on aura les droites particulières d'équation tangentielle

$$(9) \quad 2\varphi_1 + \varphi_2 = (2k + 1)\pi + 2\psi + \omega.$$

Elles enveloppent la courbe Γ rencontrée plus haut, hypocycloïde à trois rebroussements, tangente à C aux sommets d'un triangle équilatéral. Le problème a été achevé en supposant

$$(10) \quad \begin{cases} \pi + 2\psi + \omega = 0, \\ \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0, \end{cases}$$

ce qui revient à faire passer $\omega u'$ par l'un des points de contact de C et Γ .

Cela se voit aussitôt en formant, comme au paragraphe précédent, l'équation différentielle du second ordre des géodésiques : les intégrales rectilignes sont données par l'équation

$$(11) \quad u' \sin \lambda - v' \cos \lambda + m \sin 3\lambda = 0.$$

C'est la droite joignant les points

$$\varphi_1 = \pi - 2\lambda \quad \text{et} \quad \varphi_2 = 4\lambda.$$

Cette analyse a montré qu'il y a une surface Σ et une seule dont le triangle image sur le plan $\omega u v$ ou $\omega u' v'$ a une *forme* donnée : en supposant u', v' réelles, on vient de voir en effet que la donnée de pqr détermine ω , puis $\omega u'$ et $\omega v'$ (sauf rotation de 120° qui n'a aucune importance). Il reste à montrer comment ce triangle pqr étant donné, on trouve α, β, γ . On fixe m, ω et $\omega u'$. Soient alors $\bar{P}, \bar{Q}, \bar{R}$ les premiers membres des équations des côtés qr, rp, pq dans le système $\omega u' v'$. On a, avec des coefficients h, k, l constants, mais inconnus,

$$(12) \quad P \equiv h \bar{P}, \quad Q \equiv k \bar{Q}, \quad R \equiv l \bar{R}.$$

D'autre part, il existe des coefficients connus H, K, L, H_1, K_1, L_1 tels que

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} H\bar{P} + K\bar{Q} + L\bar{R} \equiv 1, \\ H_1\bar{Q}\bar{R} + K_1\bar{R}\bar{P} + L_1\bar{P}\bar{Q} \equiv \frac{u'^2 + v'^2 - m^2}{\sqrt{m}}. \end{array} \right.$$

Cela entraîne, en vertu de $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 1$ et de l'expression de la courbure totale, les six équations à six inconnues :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha h = H, & \beta k = K, & \gamma l = L; \\ \frac{\alpha^2 kl}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = H_1, & \frac{\beta^2 lh}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = K_1, & \frac{\gamma^2 hk}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = L_1. \end{array} \right.$$

En multipliant les équations de la première colonne, on a

$$\alpha^3 \frac{hkl}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = H H_1.$$

Or, des multiplications donnent

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (\alpha\beta\gamma) (hkl) = HKL, & \frac{hkl}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}} = \frac{H_1 K_1 L_1}{HKL}, \\ (\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}} (h^2 k^2 l^2) = H_1 K_1 L_1, & \end{array} \right.$$

On a donc simplement

$$(16) \quad \alpha^3 = \frac{H^2 KL}{K_1 L_1}, \quad \beta^3 = \frac{HK^2 L}{L_1 H_1}, \quad \gamma^3 = \frac{HKL^2}{H_1 K_1}$$

et l'on vérifie une fois de plus que, seules, les quantités $\alpha^3, \beta^3, \gamma^3$ sont obtenues rationnellement; on remarquera même que l'on peut écrire les équations (13) en prenant deux axes rectangulaires quelconques $\omega x, \omega y$ issus de ω .

Si les variables u, v sont réelles, on opère d'une façon semblable avec l'hyperbole $uv - m^2 = 0$; mais ici, l'analogue de la rotation pour le cercle est une transformation $\left[(u, v), \left(u\lambda, \frac{v}{\lambda} \right) \right]$ dont la vision géométrique est moins nette.

Il reste maintenant à donner l'interprétation géométrique de la condition $D > 0$ ou $D < 0$; je rappelle que

$$(17) \quad D = \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 - 2\beta^3\gamma^3 - 2\gamma^3\alpha^3 - 2\alpha^3\beta^3.$$

On a vu plus haut que l'on a, avec des constantes α, β, γ inconnues,

$$(18) \quad \begin{cases} P^3 + Q^3 + R^3 \equiv u^3 + v^3 + 6muv + au + bv + c, \\ \alpha P + \beta Q + \gamma R \equiv 1; \end{cases}$$

il résulte de là que les points communs à la cubique et à la droite

$$P^3 + Q^3 + R^3 = 0, \quad \alpha P + \beta Q + \gamma R = 0,$$

si l'on raisonne en coordonnées linéaires, ou si l'on raisonne dans l'espace, les génératrices communes au cône du troisième ordre et au plan issu de l'origine, sont toutes les trois réelles si $D < 0$ (u et v imaginaires conjuguées) et une réelle, deux imaginaires conjuguées si $D > 0$ (u et v réelles); elles sont, en effet, fournies par les points à l'infini des droites $u^3 + v^3 = 0$. En même temps apparaît le cône auxiliaire du second ordre $\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ = 0$ qui est coupé par le plan suivant deux génératrices imaginaires si $D < 0$, et suivant deux génératrices réelles si $D > 0$: car les génératrices s'obtiennent pour $u = 0, v = 0$. On reconnaît le lien de toute cette théorie avec la théorie des cubiques et de l'équation de degré 3.

$D = 0$ exprime le contact du plan $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$ avec chacun des cônes $P^3 + Q^3 + R^3 = 0$ et $\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ = 0$. L'équation $D = 0$ n'est autre que l'équation tangentielle du cône $P^3 + Q^3 + R^3 = 0$. Si l'on revient aux coordonnées x, y, z , le plan $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$ est remplacé par le cône asymptote (de degré 6 seulement) $\alpha x^{\frac{2}{3}} + \beta y^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{\frac{2}{3}} = 0$ de la surface Σ , et le cône $P^3 + Q^3 + R^3 = 0$ par le cône $x^2 + y^2 + z^2 = 0$; $D = 0$ exprime donc que le cône directeur de la surface est tangent (suivant 4 génératrices, eu égard aux symétries) au cône isotrope. Appelons surfaces tétraédrales *isotropiques* ces surfaces (elles sont toutes *elliptiques*).

12. Surfaces tétraédrales isotropiques ($D = 0$). — La discussion qui précède a montré que, dans le cas $D = 0$, il est impossible d'obtenir le $ds^2 : \frac{9}{4}(u du^2 + 2mu dv + v dv^2)$. Le résultat géométrique qui précède prouve que le plan $\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$ est alors tangent au cône $P^3 + Q^3 + R^3 = 0$; il n'y a pas d'autres cas à examiner, car trois génératrices d'intersection confondues donneraient l'un des plans

tangents inflexionnels

$$\begin{aligned} & P = 0, \quad Q + R = 0, \\ \text{ou} & P = 0, \quad Q + j R = 0, \\ \text{ou} & P = 0, \quad Q + j^2 R = 0, \end{aligned}$$

ou ceux qui en résultent par permutation circulaire; mais dans ce cas, un des coefficients α, β, γ est nul; on a un cylindre et un ds^2 de plan. Nous écartons ce cas.

Ce qui a été dit aux paragraphes 1, 2, 5, 4 s'applique : une surface de ce type se déforme en surface encore *isotropique* (car l'invariant $\frac{D^2}{\alpha^3 \beta^3 \gamma^3}$ reste nul) autour d'une asymptotique arbitraire rigide [imaginaire, représentée par une parabole réelle du plan (P)]. L'application de Σ sur Σ' s'effectue encore par une transformation affine entre P, Q, R et P', Q', R'. Seule, la surface parabolé-tétraédrale cesse d'exister, donc aussi le ds^2 réduit étudié jusqu'ici. Mais l'expression $\Theta = \frac{3}{8} (P^3 + Q^3 + R^3)$, ou celles qui n'en diffèrent que par une fonction linéaire de P, Q, R, donne encore la relation

$$\alpha^2 \Theta = ds^2,$$

pourvu que les variables indépendantes soient toujours *linéaires* en P, Q, R. Dans le cas général, on avait pu prendre

$$(1) \quad \Theta \equiv \frac{3}{8} [u^3 + v^3 + 6m uv + au + bv + c]$$

(a, b, c constantes quelconques).

Effectuons le changement de variables

$$(2) \quad u = \lambda V + \mu U, \quad v = \lambda V - \mu U,$$

l'expression (1) devient

$$(3) \quad \Theta \equiv AV^3 + BVU^3 + CV^2 + DU^2 + a'U + b'V + c',$$

où A, B, C, D, a', b', c' sont des constantes. On a la dégénérescence en supposant que A devient nul, B étant différent de 0. En remplaçant

$V + \frac{D}{B}$ par V , on fait disparaître D , et finalement on peut se borner à

$$(4) \quad \Theta \equiv BVU^2 + CV^2.$$

Si l'on remplace maintenant V par λv et U par μu avec

$$B\lambda\mu^2 = \frac{1}{3}, \quad C\lambda^2 = \frac{1}{2},$$

qui déterminent λ et μ , si C est lui aussi différent de zéro (1), on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Theta \equiv \frac{1}{3}(u^2v + v^2), \\ ds^2 = v du^2 + 2u du dv + dv^2. \end{array} \right.$$

Calculons maintenant $DD'' - D'^2$ au moyen de l'élément linéaire; on trouve

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} DD'' - D'^2 = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{4(v - u^2)^2}. \end{array} \right.$$

Prenons donc comme fonction invariante (au signe près)

$$(7) \quad \varphi = v - u^2.$$

On calcule aussitôt

$$(8) \quad \psi \equiv \varphi \Delta \varphi = 8u^2 + v;$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \Delta \psi = v + 224u^2, \\ \varphi \Delta(\varphi, \psi) = v - 60u^2. \end{array} \right.$$

On voit aussitôt que, si φ reprend la même valeur, u^2 et v reprennent la même valeur; si φ change de signe, u^2 et v changent de signe; on a ainsi les auto-applications de la surface

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_1 = u, & v_1 = v, \\ u_2 = -u, & v_2 = v, \\ u_3 = iu, & v_3 = -v, \\ u_4 = -iu, & v_4 = -v. \end{array} \right.$$

(1) C nul conduirait à une surface applicable sur le plan, comme le montre le calcul de $DD'' - D'^2$.

Un point de la surface pourra, s'il est réel, être obtenu par u et v réels ou u imaginaire pure, v réel.

On voit aussitôt le moyen de calculer u et v : on a, en effet,

$$(11) \quad \psi - \varphi = 9u^2, \quad \psi + 8\varphi = v.$$

En utilisant les calculs du paragraphe 7

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{2} = \frac{3}{2} \frac{\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}, \\ \Delta\varphi &= \frac{1}{\alpha\beta\gamma} \frac{S(\beta^3 - \gamma^3)^2 P^2 + S\alpha^2\beta(3\beta^3 - 2\gamma^3)P^2Q - 2\alpha\beta\gamma(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)PQR}{\alpha^2 QR + \beta^2 RP + \gamma^2 PQ}, \\ \psi &= \frac{3}{2(\alpha\beta\gamma)^{\frac{3}{2}}} [S(\beta^3 - \gamma^3)^2 P^2 + S\alpha^2\beta(3\beta^3 - 2\gamma^3)P^2Q - 2\alpha\beta\gamma(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)PQR]. \end{aligned} \right.$$

Pour qu'il n'y ait pas de contradiction, comme u et v sont des fonctions linéaires, homogènes de P, Q, R , l'expression $\psi - \varphi$ doit s'abaisser au second degré et cela ne peut arriver que si ψ contient en facteur $\alpha P + \beta Q + \gamma R$, que l'on remplace par 1. En effet ici

$$(13) \quad (\beta^3 - \gamma^3)^2 = 2x^3(\beta^3 + \gamma^3) - \alpha^6, \quad (\gamma^3 - \alpha^3)^2 = \dots,$$

et en tenant compte de ces relations, on met immédiatement ψ sous la forme

$$(14) \quad \psi = \frac{3}{2(\alpha\beta\gamma)^{\frac{3}{2}}} [S\alpha^2(2\beta^3 + 2\gamma^3 - \alpha^3)P^2 + S\beta\gamma(\beta^3 + \gamma^3 - 4\alpha^3)QR].$$

Si l'on forme $\psi + 8\varphi$ qui est égal à $9v$, on fait encore disparaître le facteur $\alpha P + \beta Q + \gamma R$ et l'on a

$$(15) \quad v = \frac{1}{6(\alpha\beta\gamma)^{\frac{3}{2}}} [\alpha(2\beta^3 + 2\gamma^3 - \alpha^3)P + \beta(2\gamma^3 + 2\alpha^3 - \beta^3)Q + \gamma(2\alpha^3 + 2\beta^3 - \gamma^3)R].$$

D'autre part, on a

$$(16) \quad 9u^2 = \psi - \varphi = \frac{3}{2(\alpha\beta\gamma)^{\frac{3}{2}}} [S\alpha^2(2\beta^3 + 2\gamma^3 - \alpha^3)P^2 + S\beta\gamma(\beta^3 + \gamma^3 - 5\alpha^3)QR].$$

Or on vérifie aisément les égalités

$$(17) \quad 4(2\gamma^3 + 2\alpha^3 - \beta^3)(2\alpha^3 + 2\beta^3 - \gamma^3) - (\beta^3 + \gamma^3 - 5\alpha^3)^2 = -9D = 0,$$

de sorte que l'expression (16) est bien carré parfait. On remarque qu'en vertu des égalités (17) les expressions

$$2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2, \quad 2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2, \quad 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2.$$

sont de même signe : leur somme est $3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$ qui est positive, car $D = 0$ entraîne $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ pour les surfaces réelles (on écarte les surfaces elliptiques imaginaires); elles sont donc positives; on écrira donc, et u sera réel et non imaginaire pure,

$$(18) \quad u = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{a}} \frac{1}{(2\beta\gamma)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}} \left[x(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2)P + \frac{1}{2}(x^2 + \beta^2 - 2\gamma^2)Q + \frac{2}{3}(\gamma^2 + x^2 - 2\beta^2)R \right].$$

C'est une vérification de constater que u^4 et v^2 se calculent seuls rationnellement (en x, β, γ) ainsi que u^2v . Chaque surface admet une auto-application et une seule, réelle en u, v , à savoir l'échange de u en $-u$, v restant fixe; la ligne $u = 0$ est une géodésique particulière de la surface, qui reste invariante dans l'échange des deux secteurs qu'elle borde.

Si l'on figure le plan ωw et la parabole $v = u^2$ (fig. 4) la surface Σ est représentée par un triangle inscrit dans cette parabole : on découvre comme précédemment la relation liant les sommets en s'adressant aux géodésiques rectilignes de Σ , qui ont pour image une droite du plan ωw . On trouve aisément que ces droites ont pour équation

$$(19) \quad v = Cu + 2C^2.$$

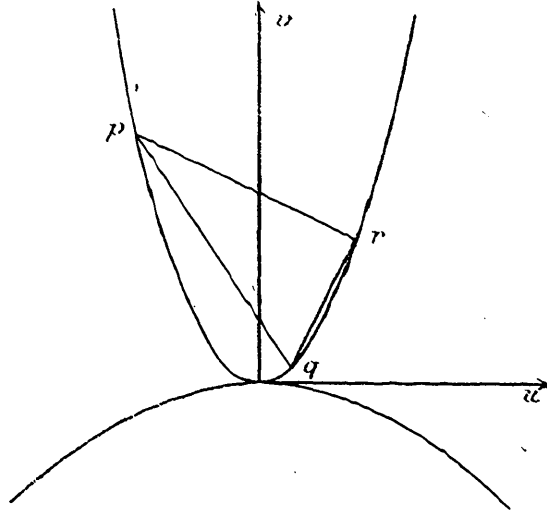
Elles enveloppent une parabole $u^2 + 8v = 0$. D'autre part, quand le sommet p du triangle pqr reste fixe, le côté qr se déplace parallèlement à lui-même, de sorte que si u_1, u_2, u_3 sont les u des sommets p, q, r , la somme $u_1 + u_2 + u_3$ est constante pour tous les triangles; or si u_2 tend vers u_1 , u_3 est le second point où l'image de la génératrice issue de P perce la parabole $v = u^2$; la droite (19) perce la parabole aux points $u = 2C, u = -C$ de sorte que la relation cherchée est

$$(20) \quad u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Le centre de gravité de chaque triangle décrit l'axe ωv .

On voit comme plus haut que deux surfaces Σ , Σ' de cette espèce peuvent se recouvrir *partiellement*: jamais l'une ne peut recouvrir l'autre totalement; elles peuvent ne pas se recouvrir. Il y a d'ailleurs deux modes d'application de Σ sur Σ' , car à chaque surface correspondent deux triangles symétriques l'un de l'autre relativement à $\omega\rho$.

Fig. 4.



L'axe $\omega\rho$ perce nécessairement chaque triangle, puisqu'il contient le centre de gravité. Mais, sauf les surfaces admettant un plan de symétrie ($x = y$ si $\alpha = \beta$), dans l'auto-application de Σ sur elle-même elle ne se recouvre pas totalement.

Les asymptotiques de toutes ces surfaces sont imaginaires, celles qui ont pour image les paraboles réelles inscrites dans pqr coïncident avec leur conjuguée et sont celles qui restent rigides au cours de la déformation de Σ avec réseau conjugué permanent. Il faut remarquer que nous obtenons ici ∞^2 surfaces applicables entre elles, comprenant en particulier les ∞^1 surfaces homothétiques à une surface Σ donnée; donc Σ étant donnée et une asymptotique Γ étant choisie sur Σ , au cours de la déformation à un paramètre relative à cette asymptotique Γ , on doit trouver une surface Σ' homothétique à Σ (ou un nombre fini); mais alors, dans l'homothétie transformant Σ en Σ' , la cubique Γ , supposée appartenant à Σ' , a pour homothétique une asymptotique Γ ,

située sur Σ ; donc les asymptotiques d'une surface Σ se correspondent une à une, les asymptotiques correspondantes étant homothétiques.

Il est intéressant de signaler un criterium géométrique simple, nécessaire et suffisant, pour qu'il existe ∞^1 triangles circonscrits à une parabole ω et inscrits dans une autre conique (c) : la droite de l'infini, tangente particulière de ω , coupe (c) en deux points a, b : de a on mène la nouvelle tangente à ω ; de b , aussi; ces deux tangentes doivent se couper sur (c) . Dans le cas $D > 0$, (c) est l'hyperbole équilatère (H), de sorte que les tangentes à ω parallèles aux asymptotes de (H) concourent sur (H); dans le cas $D < 0$, (c) est le cercle (C) de sorte que le foyer de ω est sur (C); dans le cas $D = 0$, (c) est une parabole π ; a et b sont confondus et alors la tangente à ω , parallèle à l'axe de π , touche ω en un point d'intersection de ω et π .

15. Déformation et méthode de Weingarten. Surfaces isotropiques. — La méthode, un peu mystérieuse, mais si féconde de Weingarten, conduit M. Tzitzéica, dans le cas des surfaces, tétraédrales ou non, de ds^2

$$(E') \quad ds^2 = cdu^2 + 2u\,du\,dv + dv^2,$$

à considérer les surfaces auxiliaires Σ solution de l'équation du second ordre

$$(1) \quad \rho' + \rho'' = \frac{2q}{p},$$

où x, y, z sont les coordonnées du point courant de Σ ; c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, p la distance de l'origine au plan tangent, $2q$ le carré $x^2 + y^2 + z^2$ de la distance du point courant à l'origine, ρ' et ρ'' les rayons de courbure principaux. On pose

$$(2) \quad u = p^2, \quad v = 2qp^2,$$

et les quadratures de différentielle totale

$$(3) \quad dX = px\,du + c\,dv, \quad dY = py\,du + c'\,dv, \quad dZ = pz\,du + c''\,dv$$

donnent une surface $S(X, Y, Z)$ d'élément (E') ; le plan tangent à S est parallèle au plan contenant la normale et le rayon vecteur de Σ .

Comme on a

$$(3') \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\partial X}{\partial u}, & y = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\partial Y}{\partial u}, & z = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\partial Z}{\partial u}, \\ c = \frac{\partial X}{\partial v}, & c' = \frac{\partial Y}{\partial v}, & c'' = \frac{\partial Z}{\partial v}, \end{cases}$$

on voit qu'à deux surfaces S se raccordant le long d'une asymptotique Γ correspondent deux surfaces Σ tangentes entre elles le long d'une courbe γ correspondant à l'asymptotique commune; γ est donc caractéristique de (1); réciproquement à deux surfaces Σ se raccordant, correspondent deux surfaces S se raccordant le long d'une asymptotique. Or on sait trouver toutes les intégrales de (1), donc toutes les surfaces d'élément E' .

Les surfaces isotropiques sont donc une solution très particulière correspondant aux quadriques Q à centre (confondu avec l'origine) dont le cône asymptote est inscrit à ∞' trièdres trirectangles

$$(Q) \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} - 1 = 0 \quad (a + b + c = 0).$$

Faire tourner Q autour d'un axe issu de l'origine ne fait que faire tourner la surface isotropique du même angle autour du même axe. Ce résultat permet de signaler *a priori* l'existence de ∞' surfaces isotropiques se raccordant le long d'une asymptotique. En effet, pour que deux quadriques (Q), convenablement déplacées autour de l'origine, se raccordent, il est nécessaire que le plan de la conique de contact soit plan de raccord pour les cônes asymptotes. Or la propriété caractéristique du cône asymptote peut être transformée ainsi : ce cône est conjugué par rapport à ∞' trièdres inscrits dans le cône isotrope; donc la quadrique (Q) étant donnée en grandeur et position, prenons une génératrice G du cône isotrope, le plan diamétral π de G relativement à (Q): le faisceau des quadriques se raccordant avec (Q) tout le long de la section diamétrale correspondante donne ∞' surfaces isotropiques se raccordant le long d'une cubique asymptotique commune.

Pour intégrer l'équation (1) on rapporte Σ à ses lignes de longueur nulle et on la considère comme enveloppe du plan.

$$(4) \quad (\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z - p(1 + \alpha\beta) = 0,$$

et l'on a

$$(5) \quad 2q = p^2 + (1 + \alpha\beta)^2 \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial \beta}, \quad \rho' + \rho'' = -2p - \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \beta} (1 + \alpha\beta)^2.$$

L'équation (1) devient

$$(6) \quad p \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial \beta} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial \beta} + \frac{3p^2}{(1 + \alpha\beta)^2} = 0,$$

et si l'on pose

$$(7) \quad \omega = p^2,$$

on a, au lieu de (6), l'équation équivalente, *intégrable par la méthode de Laplace*

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial \beta} = - \frac{6\omega}{(1 + \alpha\beta)^2}.$$

Mais alors il est indiqué d'associer à Σ la surface Σ_1 qui lui correspond par plans tangents parallèles comme enveloppe du plan

$$(9) \quad (\alpha + \beta)x + \iota(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z - \omega(1 + \alpha\beta) = 0,$$

et l'on voit d'après les formules (5) que Σ_1 est solution de l'équation

$$(10) \quad \rho^2 + \rho_1'' = 4\rho_1,$$

où je mets l'indice 1 pour Σ_1 , de sorte que $p_1 = \omega = p^2$. Chercher Σ ou Σ_1 est équivalent. Les équations aux dérivées partielles des surfaces Σ et Σ_1 en coordonnées cartésiennes où z, p, q, r, s, t ont les sens habituels depuis Monge (ne pas confondre $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ avec les notations précédentes) sont

$$(\Sigma) \quad (rt - s^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (z - px - qy)[r(1 + q^2) + \iota(1 + p^2) - 2pqs],$$

$$(\Sigma_1) \quad 4(rt - s^2)(z - px - qy) = (1 + p^2 + q^2)[r(1 + q^2) + \iota(1 + p^2) - 2pqs].$$

Les radicaux $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ disparaissent et l'ambiguïté de signe qui pourrait intervenir se lève aussitôt avec l'exemple de la quadrique Q.

On remarquera que si l'on pose

$$(11) \quad \frac{u^2}{2} + v = u_1, \quad \frac{u}{\sqrt{2}} = v_1,$$

le ds^2 (E') devient

$$(12) \quad (E') \quad ds^2 = du_1^2 + 2(u_1 - 3v_1^2)dv_1^2,$$

et l'on retombe précisément sur un type général signalé par Weingarten : déterminer la surface d'élément

$$(13) \quad ds^2 = du_1^2 + 2[u_1 + \psi'(v_1)]dv_1^2,$$

revient à chercher les surfaces Σ , telles que

$$(14) \quad \rho'_1 + \rho''_1 = -2\rho_1 - \psi''(\rho_1),$$

ou encore à intégrer l'équation

$$(15) \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial \beta} = \frac{\psi''(v_1)}{(1 + x\beta)^2}.$$

Or pour

$$(16) \quad \psi'(v_1) = \frac{m(1-m)v_1^2}{3},$$

où m est un entier, l'équation (14) s'intègre par la méthode de Laplace en formules finies et ici $m = 3$.

Cette méthode de transformation substitue à la quadrique (Q) enveloppe du plan

$$(17) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0,$$

la surface enveloppe du plan

$$(18) \quad \begin{cases} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad (a + b + c = 0). \end{cases}$$

On trouve comme équation tangentielle de cette surface Σ

$$(19) \quad (au^2 + bv^2 + cw^2)^2 = (u^2 + v^2 + w^2)k^2.$$

Or d'après un résultat signalé par Darboux (*Théorie des surfaces*, t. 1, 2^e édition, pages 286-288), on voit que si l'on suppose de plus u, v, w liées par la relation $u^2 + v^2 + w^2 = 1$, le pied de la normale à Σ a

pour coordonnées

$$(h - 2a)u, \quad (h - 2b)v, \quad (h - 2c)w$$

et les segments algébriques compris entre ce pied et les rencontres avec Oyz , Oyx et Oxy ont pour valeur

$$2a - h, \quad 2b - h, \quad 2c - h.$$

On en conclut que les points d'intersection de la normale à Σ avec les trois plans de coordonnées forment un système invariable; réciproquement, toute droite assujettie à cette double condition reste normale à une famille de surfaces parallèles d'équation tangentielle

$$[(A + \lambda)u^2 + (B + \lambda)v^2 + (C + \lambda)w^2]^2 = (u^2 + v^2 + w^2)h^2,$$

et parmi elles, une et une seule, est l'une des surfaces Σ utilisées ici; Σ a pour image sphérique de ses lignes de courbure une famille de coniques homofocales dont l'une est la section de la sphère par le cône asymptote de (Q).

14. Méthode de Weingarten. Surfaces tétraédrales générales.

— Je réunis ici des résultats énoncés par M. Tzitzéica, en 1916, aux *Annales de l'Académie roumaine*, en 1908, au Tome 25 des *Rendiconti di Palermo*. Il y a des conclusions importantes à signaler que M. Tzitzéica n'a pas pu ne pas remarquer, bien qu'il ne les ait pas explicitées; il est revenu sur des sujets connexes aux *Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. 28 et 41, 1911 et 1925. On détermine une surface $\Sigma(x, y, z)$ qui, en conservant les notations du paragraphe précédent et désignant par K la courbure totale, satisfait à l'équation

$$(1) \quad K = \frac{1}{\rho' \rho''} = \frac{\rho^4}{m^3},$$

ou, en coordonnées cartésiennes, à l'équation équivalente

$$(1) \quad m^3(rt - s^2) = \left(z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

Les trois quadratures

$$(2) \quad \begin{cases} X = \int c \sqrt{u} du + x dv, & c = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\partial X}{\partial u}, & x = \frac{\partial X}{\partial v}, \\ Y = \int c' \sqrt{u} du + y dv, & c' = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\partial Y}{\partial u}, & y = \frac{\partial Y}{\partial v}, \\ Z = \int c'' \sqrt{u} du + z dv, & c'' = \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{\partial Z}{\partial u}, & z = \frac{\partial Z}{\partial v}; \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(3) \quad v = x^2 + y^2 + z^2, \quad \sqrt{u} = \frac{m}{\rho} = cx + c'y + c''z,$$

donnent une surface $S(X, Y, Z)$ d'élément linéaire

$$(E) \quad ds^2 = u du^2 + 2m du dv + v dv^2.$$

Or on voit aussitôt que le point (ξ, η, ζ) ,

$$(4) \quad \xi = c\sqrt{u}, \quad \eta = c'\sqrt{u}, \quad \zeta = c''\sqrt{u},$$

est le pôle du plan tangent à Σ par rapport à la sphère

$$(5) \quad x^2 + y^2 + z^2 = m.$$

De la sorte on pourra écrire

$$(2') \quad \begin{cases} X = \int \xi du + x dv, & v = x^2 + y^2 + z^2, \\ Y = \int \eta du + y dv, & u = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \\ Z = \int \zeta du + z dv, \end{cases}$$

et les deux surfaces polaires réciproques (Σ, Σ_1) relativement à la sphère (4) jouent un rôle réciproque vis-à-vis de la surface S ; l'échange de Σ et Σ_1 est indifférent, de sorte que Σ_1 doit aussi être solution de (1).

Le plan tangent à S est encore parallèle au rayon vecteur de Σ et à la normale de Σ (rayon vecteur de Σ_1) de sorte que, comme au paragraphe précédent, deux surfaces S tangentes le long d'une asymptotique commune (caractéristique de la déformation) doivent donner deux surfaces Σ tangentes entre elles le long d'une caractéristique

de (1) et réciproquement. Or cette fois les caractéristiques de (1) sont asymptotiques des surfaces Σ . Cela explique pourquoi il est naturel d'employer les formules de Lelievre; soit une surface Σ provisoirement quelconque

$$(2) \quad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial x} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) dx - \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_3}{\partial \xi} - \theta_3 \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right) d\xi, \\ y = \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right) dx - \int \left(\theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} - \theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right) d\xi, \\ z = \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) dx - \int \left(\theta_1 \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} - \theta_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \right) d\xi. \end{cases}$$

On sait que

$$(6) \quad \begin{cases} \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \sqrt{1 - \rho^2 \rho''}, \\ \rho = cx + c'y + c''z = \frac{\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z}{\sqrt{1 - \rho^2 \rho''}} = \frac{\rho}{\sqrt{1 - K}} = \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z. \end{cases}$$

La surface Σ_1 polaire réciproque de Σ relativement à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ (au lieu de $x^2 + y^2 + z^2 = m$, ce qui n'introduit sur Σ_1 qu'une homothétie) est le lieu d'un point (ξ, η, ζ) défini par les formules déduites de Σ par remplacement de x, y, z en ξ, η, ζ et $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ en $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ avec

$$(7) \quad \begin{cases} \Theta_1 = \frac{-x}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, & \Theta_2 = \frac{-y}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, & \Theta_3 = \frac{-z}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, \\ \Theta_1 = \frac{-\xi}{\xi\Theta_1 + \eta\Theta_2 + \zeta\Theta_3}, & \Theta_2 = \frac{-\eta}{\xi\Theta_1 + \eta\Theta_2 + \zeta\Theta_3}, & \Theta_3 = \frac{-\zeta}{\xi\Theta_1 + \eta\Theta_2 + \zeta\Theta_3}. \end{cases}$$

On a donc pour Σ_1

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\rho_1}{\sqrt{1 - K_1}} = S_1 \Theta_1 = \frac{-S_1 x \xi}{S_1 \theta_1} = \frac{1}{x\theta_1 + y\theta_2 + z\theta_3}, \\ \frac{\rho}{\sqrt{1 - K}} = \frac{\rho_1}{\sqrt{1 - K_1}} = 1. \end{cases}$$

Si donc Σ est solution de (1), la polaire réciproque de Σ relativement à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = m$ est aussi solution de (1).

D'autre part, supposant toujours Σ quelconque, effectuer la subs-

titution

$$(9) \quad \begin{cases} \theta'_1 = A_1 \theta_1 + B_1 \theta_2 + C_1 \theta_3, \\ \theta'_2 = A_2 \theta_1 + B_2 \theta_2 + C_2 \theta_3, \\ \theta'_3 = A_3 \theta_1 + B_3 \theta_2 + C_3 \theta_3, \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

où les A_i, B_i, C_i sont des constantes, remplace Σ par une surface Σ' , le point (x', y', z') de Σ' correspondant à celui de Σ par la transformation affine

$$(10) \quad x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z, \quad y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z, \quad z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

où a_i, b_i, \dots, c_i sont les coefficients de A_i, \dots, C_i dans Δ . On trouve aussitôt pour Σ'

$$(11) \quad \frac{p'}{\sqrt{-k'}} = \theta'_1 x' + \theta'_2 y' + \theta'_3 z' = \Delta(\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z) = \Delta \frac{p}{\sqrt{-k}}.$$

C'est un résultat fondamental : une transformation affine de déterminant δ multiplie $\frac{p}{\sqrt{-k}}$ par $\sqrt{\delta}$, donc si la substitution (10) est de module égal à ± 1 , on remplace une solution Σ de l'équation (1) par une autre solution. Un déplacement autour de l'origine (ou une symétrie relativement à l'origine) effectué sur Σ donne la même transformation pour S ; donc, de toute surface applicable sur une surface tétraédrale générale, on déduit par différentiations, éliminations, puis quadratures une nouvelle surface de même définition, dont les asymptotiques correspondent à celles de la première; cette transformation, du moins en général, dépend de cinq paramètres de forme et grandeur (elle n'est pas une déformation).

Ce résultat est la véritable source de toutes les propriétés obtenues pour la déformation des surfaces tétraédrales; en effet, une sphère de centre O est évidemment solution d'une équation (1); si une surface Σ de révolution autour d'un axe issu de O est inutilisable pour obtenir une surface S (à cause de ce fait que u et v ne peuvent être prises comme variables indépendantes sur Σ), la transformation affine donne une quadrique de centre O ; à une telle quadrique correspond une surface tétraédrale. Si l'on considère un plan π tangent au cône asymptote de Q , le faisceau (tangential ou ponctuel) de quadriques,

déterminé par Q et le plan π double, se compose de quadriques se raccordant le long de deux génératrices parallèles; les surfaces S correspondantes sont deux surfaces tétraédrales se raccordant le long de deux cubiques, asymptotiques de ce système ∞^1 . Faisant varier π , on obtient les ∞^2 surfaces tétraédrales déjà étudiées.

Il est facile d'expliquer pourquoi la transformation appliquée à une surface tétraédrale donne simplement ∞^2 surfaces et non ∞^3 : en effet, soit sur une quadrique à centre un premier système de diamètres conjugués $OABC$, puis un second $OA'B'C'$; il existe une transformation affine convertissant $OABC$ en $OA'B'C'$, donc Q en Q , et comme S ne dépend que de Σ dans son ensemble, toute transformation affine échangeant Σ avec elle-même diminue le nombre des paramètres; on a donc ici ∞^{3-1} ou ∞^2 surfaces tétraédrales.

Dans le faisceau de quadriques étudié à l'instant, il y en a une qui dégénère en deux génératrices δ et δ' symétriques relativement à O ; or δ prise seule, liée à δ_1 , sa polaire réciproque relativement à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = m$, conduit par les formules (2') à une surface de translation qui est la surface parabolo-tétraédrale découverte plus haut (δ' donne une surface symétrique relativement à O); les ∞^1 surfaces tétraédrales obtenues ici ont entre elles toutes deux cubiques de raccord, dont une et une seule donne raccord avec l'une des deux surfaces parabolo-tétraédrales.

M. Tzitzéica a indiqué (*Rendiconti di Palermo*) le moyen d'obtenir toutes les surfaces réglées solutions de (1); soit G une génératrice d'une telle surface réglée Σ ; il y a une quadrique Q , et une seule, de centre O , se raccordant avec Σ le long de G ; à Σ et Q correspondent une surface S non tétraédrale et une surface tétraédrale (q) se raccordant tout le long d'une cubique asymptotique commune, applicables l'une sur l'autre avec rigidité de cette asymptotique; Σ peut être considérée comme l'enveloppe de ∞^1 quadriques Q : donc S est l'enveloppe (ou du moins une fraction, car il faudrait ajouter la symétrique de S relativement à O) de ∞^1 surfaces tétraédrales (q); S possède ∞^1 asymptotiques qui sont des cubiques gauches et la recherche des asymptotiques du système opposé se ramène à une équation de Riccati, tout comme celles de Σ . On a ainsi un exemple intéressant de surfaces dont ∞^1 asymptotiques appartiennent à un complexe linéaire

chacune (complexe variable de l'une à l'autre); j'ai étudié ces surfaces dans une Note des *Comptes rendus* (15 juin 1925).

Je n'ai pas fait état du fait important que, pour une surface *quelconque*, les fonctions $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ sont solutions de l'une ou l'autre des équations

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial \beta} = h(x, \beta) \theta, \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial \beta} = k(x, \beta) \Theta,$$

distinctes en général, mais équivalentes au point de vue de l'intégration; les surfaces Σ actuelles sont caractérisées par ce fait que h et k coïncident; $x, y, z, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ satisfont à la même équation et $\theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z$ est une constante (¹).

M. Tzitzéica a signalé des surfaces, autres que des quadriques, satisfaisant à l'équation (1), en particulier, la surface cubique

$$(13) \quad xyz = 1,$$

pour laquelle on a aisément

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho' \rho'' &= \frac{3}{(y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2)^2}, & \rho &= \frac{3}{\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}}, & m &= 3, \\ u &= y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2}, & v &= x^2 + y^2 + z^2, \\ X &= \int \frac{du}{x} + x dv = \frac{u}{x} + vx - \int u d\left(\frac{1}{x}\right) + v dx. \end{aligned} \right.$$

(¹) On en déduit ce résultat intéressant que si $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont connues, la surface Σ s'obtient *sans quadratures*: en effet on a

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \alpha \partial \beta} = h(x, \beta) x = \frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha},$$

d'où

$$x = \frac{1}{h(x, \beta)} \left[\frac{\partial \theta_2}{\partial \beta} \frac{\partial \theta_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial \theta_3}{\partial \beta} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha} \right]$$

et formules analogues pour y et z ; d'ailleurs on doit s'y attendre, car une *translation* de Σ lui ferait perdre sa définition géométrique, *par rapport à l'origine*.

Un calcul simple donne

$$(15) \quad \begin{cases} X = \frac{2}{3} \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + 2 \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \\ Y = \frac{2}{3} \left(y^3 + \frac{1}{y^3} \right) + 2 \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \\ Z = \frac{2}{3} \left(z^3 + \frac{1}{z^3} \right) + 2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \end{cases} \quad (xyz = 1).$$

La normale au point (X, Y, Z) , perpendiculaire aux vecteurs (x, y, z) et $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ a pour paramètres directeurs

$$\frac{y}{z} - \frac{z}{y}, \quad \frac{z}{x} - \frac{x}{z}, \quad \frac{x}{y} - \frac{y}{x},$$

S et Σ admettent Ox, Oy, Oz pour axes de symétrie; les six plans $Y \pm Z = 0, Z \pm X = 0, X \pm Y = 0$, comme plans de symétrie; on a donc sur S vingt-quatre secteurs égaux ou symétriques, provenant des points $(x, y, z); (x, -y, -z), (-x, y, -z); (-x, -y, z)$ et de ceux qui en proviennent par permutations des coordonnées. La représentation paramétrique (15) est *impropre* ⁽¹⁾ pour S , car le changement de (x, y, z) en $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ ou en (jx, jy, jz) laisse (X, Y, Z) inchangé: la composition des deux opérations donne six points de Σ pour un point de S . Aussi ne faut-il pas s'étonner qu'un point de S puisse être *réel*, soit pour (x, y, z) réels d'où u et v réels, soit pour x, y, z chacun *imaginaire* et de module un, d'où u et v imaginaires conjugués.

(1) Si l'on pose $\xi = \frac{y}{z} + \frac{z}{y}, \eta = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}, \zeta = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, le point (ξ, η, ζ) décrit une surface (s) de degré 3, d'équation $\xi\eta\zeta = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + 4 = 0$ et à un point de S correspond cette fois un seul point de (s) . D'ailleurs on a *identiquement* $\eta\zeta = \xi = \frac{y^2z}{x^2} + \frac{x^2}{y^2z}$, et si l'on tient compte de l'équation $xyz = 1$ de Σ on a $\eta\zeta = \xi = x^3 + \frac{1}{x^3}$ et, par suite,

$$X = \frac{2}{3} \left[2\xi + \eta\zeta \right], \quad Y = \frac{2}{3} \left[2\eta + \zeta\xi \right], \quad Z = \frac{2}{3} \left[2\zeta + \xi\eta \right]$$

de sorte que S et (s) se correspondent birationnellement.

La surface S obtenue représente donc 24 fois l'élément

$$u du^2 + 6 du dv + v dv^2$$

et cela aussi bien pour les valeurs réelles de u, v , que pour les valeurs imaginaires conjuguées. Les géodésiques invariantes sont des cubiques unicursales situées dans les plans de symétrie; on obtient l'une, par exemple, pour $x = 1, yz = 1$ (y et z ou réels, ou de module égal à l'unité); la section plane par le plan $Y - Z = 0$ s'obtient, en exprimant dans (15) Y et Z uniquement en y et z par l'équation

$$(y^2 z^2 - 1)(y - z)^2 = 0,$$

ce qui donne pour $yz = 1, j$ ou j^2 la cubique géodésique déjà citée, *une seule fois*, la représentation étant impropre, puis pour $y = z = 0$, une *parabole* qui est arête de rebroussement; la surface S admet donc *six* paraboles, arête de rebroussement, dont l'ensemble est représenté par l'équation $(y^2 - z^2)(z^2 - x^2)(x^2 - y^2) = 0$, c'est-à-dire, par le discriminant, égal à zéro, de l'équation qui a pour racines x^2, y^2, z^2 soit

$$(16) \quad x^2 - v z^2 + u^2 - 1 = 0.$$

Le résultat indiqué montre aussi que la surface S est de degré 9 exactement. Les géodésiques invariantes se coupent aux points $X = Y = Z = -\frac{2}{3}$ et aux symétriques de ce point par rapport aux trois axes: ils sont simples sur S et correspondent à $u = v = 0$. La séparation entre les deux nappes de S, correspondant à u, v réels, ou à u, v imaginaires, ne peut avoir lieu que pour x, y, z égaux à ± 1 , d'où $u = v = 3$; on trouve ainsi le point $X = Y = Z = \frac{16}{3}$ et les trois points symétriques relativement aux axes; ces points sont singuliers et communs à trois arêtes de rebroussement. On remarquera que, u, v donnés, on calcule x, y, z par l'intermédiaire des racines de (16) et en extrayant ensuite les racines carrées associées de sorte que le produit xyz soit égal à $+ 1$.

On remarquera que la surface Σ'

$$(17) \quad (a_1 x + b_1 y + c_1 z)(a_2 x + b_2 y + c_2 z)(a_3 x + b_3 y + c_3 z) = 1,$$

où l'on suppose $|abc|$ égal à un , n'introduit que *trois* paramètres de forme, à savoir les valeurs numériques des faces du trièdre des trois plans explicités au premier membre de (17). On peut en particulier prendre, avec un plan réel et deux imaginaires conjugués,

$$(18) \quad z(x^2 + a^2 y^2) = 1, \quad m = -3(4a^2)^{-\frac{1}{3}}$$

en évitant de prendre $a = \pm 1$, sinon la surface serait de révolution et inutilisable, car u et v ne sont plus alors *indépendants*.

On remarquera que si les faces du trièdre sont inégales, il y a des auto-applications qui, sur la surface S déduite de $xyz = 1$, étaient de simples symétries, mais qui, ici, deviennent de véritables déformations.

15. Rappel de résultats sur les surfaces auto-applicables. — On peut poser les questions suivantes :

A. Toute surface de ds^2 (E)

$$ds^2 = u du^2 + 2m du dv + v dv^2$$

possède-t-elle des auto-applications ?

B. Les paramètres (u, v) donnent-ils une représentation *propre* de la surface ? (Pour une surface tétraédrale, c'est le cas à condition de considérer les géodésiques invariantes de la surface comme des *coupures*, et de même leurs images sur le plan uvw ou $u'v'$.)

J'applique la méthode que j'ai indiquée au *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. 44 et 45. Je pose

$$(1) \quad uv = S, \quad u^3 + v^3 = 3H$$

et les équations

$$(2) \quad v du + u dv = dS, \quad u^2 du + v^2 dv = dH,$$

résolues en du et dv transforment (E) en un élément plus compliqué

$$(3) \quad ds^2 = \frac{S(3H - 2mS) dS^2 + 2(3mH - 2S^2) dS dH + (3H - 2mS) dH^2}{9H^2 - 4S^3},$$

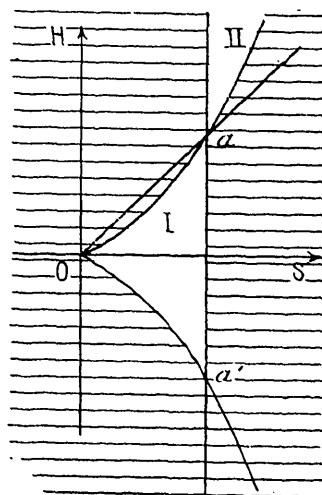
qui fait réapparaître les invariants déjà calculés; à tous les points se correspondant dans une auto-application correspond un unique système (S, H) , réel quand le point est réel; si (x, y, z) sur une surface

de $ds^2(E)$ sont fonctions uniformes de S et H , il n'y a pas d'auto-application et de plus la représentation (u, v) serait impropre. Les auto-applications se manifestent si (x, y, z) sont des fonctions à plusieurs branches de S, H . Si l'on prend un système d'axes OSH rectangulaires dans un plan, le point (S, H) vérifie les inégalités

$$(5) \quad S > 0, \quad \frac{3H - 2mS}{9H^2 - 4S^3} > 0, \quad (S - m^2)(9H^2 - 4S^3) > 0.$$

Il y a à construire les deux droites $S - m^2 = 0, 3H - 2mS = 0$ et la cubique Γ d'équation $9H^2 - 4S^3 = 0$ qui passe en leur point commun; j'ai, pour $m > 0$ (*fig. 5*), indiqué les deux régions, non hachurées, que peut balayer le point (S, H) .

Fig. 5.



Pour $m < 0$ (*fig. 6*), il n'y a plus qu'une région. Le cas $m > 0$ donne donc des surfaces de deux types, comme nous le savions déjà, mais de deux types seulement : $m < 0$ donne un seul type. Pour $m > 0$ la région I donne u, v imaginaires conjugués, la région II, u et v réels. Pour $m < 0, u$ et v sont toujours réels.

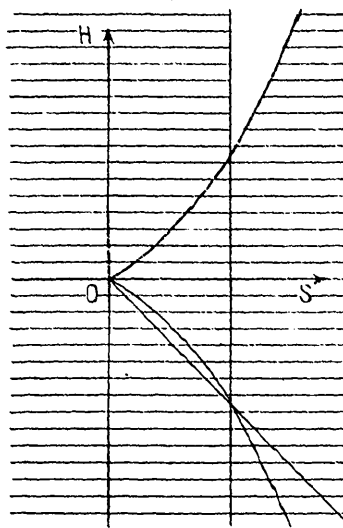
Quand le point (u, v) décrit dans le plan uv une droite $v = cu + d,$

le point (S, H) décrit une cubique unicursale

$$(6) \quad S = u(cu + d), \quad 3H = u^3 + (cu + d)^2.$$

Cette cubique passe au point à l'infini de OS , où la droite de l'infini

Fig. 6.



est tangente inflexionnelle; le point double s'obtient pour $u = \frac{dj}{c}$ ou $u = \frac{dj^2}{c}$ et a pour coordonnées

$$(7) \quad S = -\frac{d^2}{c}, \quad 3H = d^3 \left(\frac{1}{c^3} - 1 \right).$$

Cette cubique est tritangente à la cubique fondamentale Γ aux points racines de

$$(8) \quad u^3 - (cu + d)^2 = 0.$$

Il y a exception : pour $c^3 = -1$, on a une droite d'équation

$$(9) \quad 3H = d^3 - 3dS,$$

tangente à la cubique Γ . Interprétons tout cela pour la région I du cas $m > 0$, en posant $u = u' + iv'$, $v = u' - iv'$, u' et v' étant réels; prenons comme exemple une surface tétraédrale S , du type $D < 0$; supposons le pôle Ω réel sur S ; le triangle pqr (fig. 7) est découpé par

les trois géodésiques invariantes en six secteurs, les uns (1, 3, 4) triangulaires, les autres (2, 5, 6) quadrangulaires; la droite $A\omega$ a pour

Fig. 7.

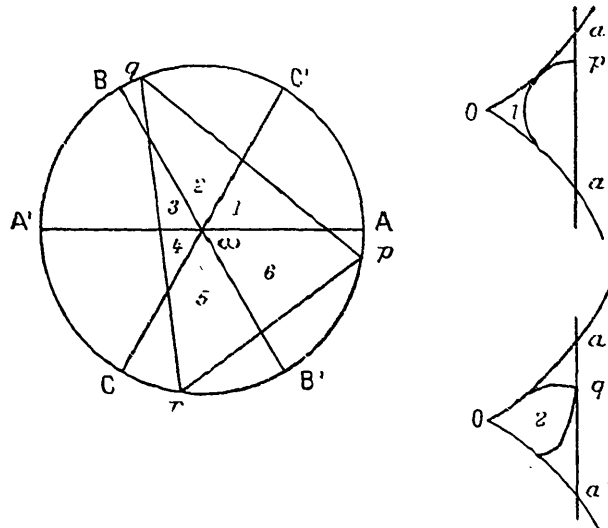
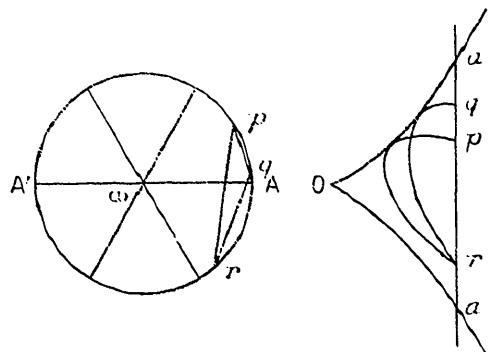


image l'arc aO de Γ et $\omega A'$ l'arc Oa' ; les images des secteurs 1, 2, ..., 6 viennent se loger, indépendamment les unes des autres, dans la région I et j'ai figuré l'image des secteurs 1 et 2.

Fig. 8.



J'indique le même résultat (*fig. 8*) pour une surface tétraédrale ne chevauchant que sur une géodésique invariante.

La surface tétraédrale particulière, $\alpha = \beta = \gamma$, réduite à son hui-

tième, est partagée en six secteurs égaux ou symétriques, ayant tous pour image la portion de l comprise entre Γ et la tangente en a (*fig. 5*). La surface de degré 9 étudiée au paragraphe précédent a son image limitée par Γ et une parabole d'équation

$$13H = S^2 + 18S - 27$$

(on a supposé $m = 3$, de sorte que a a pour coordonnées $S = 9$, $H = 18$). La parabole est osculatrice en a à Γ et coupe de nouveau Γ au point $S = 1$, $H = -\frac{3}{3}$; le point a est l'image des points singuliers tels que $Y = Y = Z = \frac{16}{3}$ déjà signalés et $S = 1$, $H = -\frac{3}{3}$ donne $u = v = -1$ et $x = 1$, $y = i$, $z = -i$, $X = -\frac{8}{3}$, $Y = Z = 0$: c'est un point commun à la cubique géodésique située dans le plan $Y - Z = 0$ et à l'arête de rebroussement parabolique située dans le plan $Y + Z = 0$.

Ces exemples ayant été donnés, nous remarquerons qu'il n'existe pas de surface représentant complètement la région I ni la région II par nappes réelles; si une surface S représente une portion de I, par exemple, qui n'a aucun point commun avec la frontière, cette surface S admet nécessairement un bord, qui est asymptotique singulière, ou une arête de rebroussement, également asymptotique singulière. Dans le premier cas, il peut arriver que la surface ne représente qu'une fois la portion envisagée; dans le second cas, l'arête de rebroussement est frontière de deux régions *isométriques* (non applicables entre elles, pour employer un langage tout à fait précis, sauf si la courbure totale est négative), et alors S représente plusieurs fois le plan OSH .

Si la surface S est analytique, et n'a pas de ligne d'arrêt, elle représente *totale*ment, par ses nappes réelles ou imaginaires, le plan OSH ; si le point Ω , d'image O , est *simple* sur S , qu'il soit réel ou non, il est le sommet de six secteurs s'échangeant entre eux par auto-applications; de la sorte, la surface représente $6p$ fois le plan OSH , p étant un entier (égal à 8 pour les surfaces tétraédrales, à 4 pour les surfaces parabolotétraédrales ou la surface étudiée au paragraphe précédent; la représentation de S sur le plan $\omega u v$ ou $\omega u' v'$ peut alors être *propre*).

On peut imaginer que le point Ω soit multiple : par exemple le secteur, dont l'image sur le plan $\omega u' v'$ (*fig. 7*) est ωAB , peut se trouver

replié, Ω étant conique, de sorte que les bords congruents ωA et ωB coïncident; ce bord unique, prolongé par la ligne d'image $\omega C'$ (congruente à $\omega A'$ ou $\omega B'$), partage l'espèce de cornet ainsi étudié en deux régions isométriques entre elles et si Ω n'est pas un point d'arrêt, le cornet, opposé par le sommet, est isométrique au précédent (qu'il en soit ou non le symétrique); on aurait ainsi une surface représentant $4p$ fois le plan $\omega u'v'$ au lieu de $6p$ comme précédemment: la représentation sur le plan $\omega u'v'$ serait nécessairement impropre, car pour 4 points de la surface on a 6 images sur le plan $\omega u'v'$. On a ainsi constaté que, sauf cas de lignes d'arrêt, la surface d'élément

$$u du^2 + 2m du dv + c dv^2$$

admet nécessairement des auto-applications et une arête de rebroussement.

