JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GASTON JULIA

Sur une suite double de polynomes liée à la représentation conforme des aires planes simplement connexes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 381-407.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__381_0>

Sur une suite double de polynomes liée à la représentation conforme des aires planes simplement connexes ;

PAR GASTON JULIA.

---

1. L'aire D dont on s'occupera ici sera supposée bornée; elle contient l'origine O du plan z. On considère parmi tous les polynomes P_n. de degré n, normaux en O (¹), celui pour lequel la moyenne d'ordre p dans D de la valeur absolue est minimum, c'est-à-dire pour lequel $\int\int_D |P_n|^p d\sigma$ est minimum ($d\sigma = dx\,dy$ est l'élément d'aire de D). On démontre que ce polynome minimant est unique, on l'appelle $\Pi_{n,p}$. On pose

$$M_{n,p} = \int\int_D |\Pi_{n,p}|^p d\sigma \qquad \text{et} \qquad \mu_{n,p} = \left[\frac{1}{\sigma}\cdot M_{n,p}\right]^{\frac{1}{p}},$$

$\mu_{n,p}$ est la moyenne d'ordre p de $|\Pi_{n,p}|$. On se propose d'étudier ici la suite double des $\Pi_{n,p}$ dépendant des deux indices n, p. L'indice n est évidemment entier. L'indice $p \geqq 1$ est, *a priori*, quelconque; on reconnaîtra aisément que les raisonnements qui vont suivre, et dans lesquels nous supposons pour simplifier, p entier positif, seraient valables pour $p \geqq 1$ mais par ailleurs quelconque.

L'existence du polynome $\Pi_{n,p}$, correspondant à deux indices n et p donnés est établie au Chapitre I; on y établit aussi que ce polynome est unique. Au Chapitre II on étudie d'abord comment varie $\Pi_{n,p}$

(¹) C'est-à-dire tels que $P_n(0) = 0$, $P'_n(0) = 1$.

lorsque n varie p restant fixe et l'on montre que

$$\lim_{n=\infty} \Pi_{n,p} = f_p(z) = f(z).[f'(z)]^{\frac{2}{p}},$$

$f(z)$ étant la fonction normale en O, qui fournit la représentation conforme de D sur un cercle $|Z| < \rho$; la convergence de $\Pi_{n,p}$ vers $f_p(z)$ est d'ailleurs uniforme dans tout domaine intérieur à D. Pour établir ces résultats on se sert d'un lemme intéressant en lui-même et qui peut servir d'ailleurs à bien d'autres applications : *si une famille de fonctions $u(z)$ holomorphes dans* D, *est telle que les* moyennes *d'ordre quelconque $p \geqq 1$ des $|u|$ dans* D *sont bornées supérieurement par un même nombre* M, *alors les maxima des $|u|$ dans tout domaine Δ intérieur à* D *sont bornés supérieurement par un même nombre* M(Δ, M) dépendant seulement de Δ et de M.

On étudie ensuite comment varie $\Pi_{n,p}$ quand p augmente indéfiniment, n restant fixe; l'on montre que

$$\lim_{n=\infty} \Pi_{n,p}(z) = \Pi_n(z),$$

Le polynome $\Pi_n(z)$, normal en O, étant celui que j'ai étudié en détail dans un précédent Mémoire [*A. E. N. S.*, 1927. *Développement en série de polynomes de la fonction $f(z)$ qui fournit la représentation conforme sur un cercle d'un domaine borné simplement connexe*]. La convergence précédente est uniforme dans tout domaine borné du plan z. Pour la démontrer, on fait usage de la proposition suivante qui me paraît nouvelle aussi : *Pour toute famille de fonctions* Q(z) *holomorphes dans* D, *uniformément bornées dans* D (¹), *également continues dans* D + F (F *frontière de* D), *la différence entre le maximum de* $|Q|$ *dans* D + F *et la moyenne d'ordre p de* $|Q|$ *dans* D *tend vers zéro avec* $\frac{1}{p}$, *et uniformément quelle que soit la fonction* Q *choisie dans la famille*. Au Chapitre III on étudie la variation simultanée des deux indices n et p et l'on prouve que

$$\lim_{n=\infty\ p=\infty} \Pi_{n,p}(z) = f(z);$$

(¹) C'est-à-dire $|Q| < M$ dans D, M ne dépendant pas de la fonction Q choisie dans la lamille.

n et p devenant infinis indépendamment l'un de l'autre. Si l'on remarque que la détermination des coefficients de $\Pi_{n,2p}$ se fait par des équations algébriques par rapport aux coefficients, on a là un moyen théorique de déterminer $f(z)$ par un passage à la limite en prenant par exemple $\lim\limits_{p=\infty} \Pi_{2p,2p}$.

Au Chapitre IV on examine la détermination effective des $\Pi_{n,p}$ pour des domaines particuliers : d'abord le cercle de centre O où tous les $\Pi_{n,p}$ sont identiques à z, ensuite les domaines pour lesquels tous les $\Pi_{n,p}$ correspondant à une certaine valeur de p sont identiques, à partir d'un certain indice k; un exemple effectif de tel domaine s'obtient pour $p = 2$ et $k = 3$ avec une ovale de Cassini ayant un foyer à l'origine lorsque le module de l'ovale est inférieur à la valeur critique pour laquelle l'ovale acquiert un point double. On montre enfin que les symétries de D simplifient le polynome $\Pi_{n,p}$, une symétrie par rapport à l'axe réel lui donnant des coefficients réels, une symétrie par rapport à O le rendant impair.

La question n'est pas close avec les recherches précédentes. D'abord l'analyse faite s'étend [comme on l'a déjà indiqué au Mémoire des *A. E. N. S.* 1927 précédemment cité, *voir* Chapitre V], aux fonctions rationnelles qui permettent l'approximation indéfinie des fonctions holomorphes dans D [fonctions rationnelles à pôles simples ou multiples, fixes ou mobiles dans une aire extérieure à D]. L'existence d'une (ou plusieurs suivant les cas) fraction rationnelle, normale en O, dont le nombre des pôles ne surpasse pas n, et qui rend minimum l'intégrale $\int\int_{\mathrm{D}} |\mathrm{R}_{n,p}(z)|^p d\sigma$ se démontre comme au Chapitre I. Les passages à la limite des Chapitres II et III s'établissent pour ces fractions rationnelles comme pour les polynomes; il suffira de rapprocher les analyses du Mémoire précédemment cité et de celui-ci pour s'en rendre compte aussitôt. Je signale seulement ici que la réciprocité signalée au n° 26 du Mémoire précédent est valable avec une appropriation convenable : *Parmi tous les polynomes de degré n nuls en* O, *pour lesquels la moyenne d'ordre p dans* D *de la valeur absolue a une valeur donnée, il y en a un et un seul ayant une dérivée positive en* O *supérieure aux valeurs absolues des dérivées en* O *de tous les* *polynomes considérés*, c'est le polynome $\frac{\Pi_{n,p}}{\mu_{n,p}}$ dont la dérivée à l'origine est le nombre $\frac{1}{\mu_{n,p}}$. Ces $\frac{\Pi_{n,p}}{\mu_{n,p}}$, par passage à la limite ($p = \infty, n = \infty$), donnent la fonction $\frac{f(z)}{\rho}$ qui donne la représentation conforme de D sur le *cercle unité* avec conservation de l'origine et des directions à l'origine.

En deuxième lieu il reste à étudier la dépendance entre $\Pi_{n,p}$ et le domaine D pour des indices n et p déterminés. Comment varie $\Pi_{n,p}$ quand D se déforme, quand O tend vers la frontière F ou bien quand la frontière F de D se rapproche indéfiniment de O. Qu'arrive-t-il lorsque D se déforme en enfermant un continu linéaire ouvert vers lequel il tend à la limite. Ce sont autant de questions sur lesquelles je reviendrai ultérieurement.

CHAPITRE I.

EXISTENCE DU POLYNOME $\Pi_{n,p}$.

2. Nous démontrerons d'abord un lemme que nous aurons l'occasion d'appliquer plusieurs fois dans cette recherche [*voir* par exemple Chapitre II, n° **6**].

Lemme. — *Si une famille de fonctions* $u(z)$, *holomorphes dans* D, *est telle que les* moyennes *d'ordre quelconque* $p \geqq 1$ *des* $|u(z)|$ *dans* D *sont bornées supérieurement par un même nombre* M, *alors les* maxima *des* $|u(z)|$ *dans tout domaine* Δ *intérieur à* D *sont bornés supérieurement par un même nombre* $M_1(\Delta, M)$, *dépendant seulement de* Δ *et de* M, *et bien entendu de* D.

Il est clair d'abord que la moyenne, d'ordre $k > 0$, d'une fonction continue positive dans D, étant une fonction *croissante de* k, les moyennes d'ordre *un* des $|u(z)|$ dans D seront inférieures à M, si les moyennes d'ordre $p \geqq 1$ le sont. Soit donc une famille de fonctions $u(z)$ holomorphes dans D, les moyennes dans D des $|u|$ (moyennes d'ordre *un*) étant bornées et $< M$. Envisageons la transformation conforme $z = \varphi(Z)$ qui fait passer de D au cercle $C[|Z| < \rho]$. On a

$$\sigma M > \int\int_D |u| \, d\sigma = \int\int_C |u[\varphi(Z)]| \, |\varphi'(Z)|^2 \, d\Sigma.$$

Posons

$$u[\varphi(Z)] = U(Z).$$

On aura

$$\int\int_C |U(Z)| \, |\varphi'(Z)|^2 \, d\Sigma < \sigma M.$$

Dans tout cercle $|Z| \leqq \rho - \varepsilon$, $|\varphi'(Z)|$ restant différente de zéro a un minimum positif $q \neq 0$. On a donc dans ce cercle

$$q^2 \int\int_{|Z| \leqq \rho - \varepsilon} |U(Z)| \, d\Sigma < \int\int_C |U(Z)| \, |\varphi'(Z)|^2 \, d\Sigma < \sigma M.$$

Donc

$$\int\int_{|Z| \leqq \rho - \varepsilon} |U(Z)| \, d\Sigma < \frac{\sigma M}{q^2} < m_1.$$

C'est-à-dire que, dans tout domaine Δ_1 intérieur à $|Z| < \rho$, les intégrales $\int\int_{\Delta_1} |U(Z)| \, d\Sigma$ sont inférieures à un nombre m_1, dépendant seulement de M, Δ_1, D. On va en déduire que les $|U(Z)|$ sont bornées supérieurement dans Δ_1 par un même nombre dépendant seulement de M, Δ_1, D. On peut, sans restreindre la généralité, supposer que D_1 est le cercle $|Z| \leqq \rho - \varepsilon$.

On a

$$m_1 > \int_0^{\rho - \varepsilon} r \, dr \int_0^{2\pi} |U| \, d\theta.$$

D'autre part, on aura

$$U(Z) = a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + a_3 Z^3 + \ldots$$

avec

$$a_p = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_1} \frac{U(Z)}{Z^{p+1}} \, dZ,$$

C_1 étant un cercle quelconque $|Z| = \rho_1 < \rho - \varepsilon$

$$|a_p| < \frac{1}{2\pi\rho_1^p} \int_0^{2\pi} |U(\rho_1 e^{i\theta})| \, d\theta.$$

Or de l'inégalité

$$m_1 > \int_0^{\rho-\varepsilon} r\,dr \int_0^{2\pi} |U(re^{i\theta})|\,d\theta > \int_{\rho_1}^{\rho-\varepsilon} r\,dr \int_0^{2\pi} |U(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

résulte qu'en posant

$$\int_0^{2\pi} |U(re^{i\theta})\,d\theta = g(r),$$

et remarquant que $\frac{1}{2\pi} g(r)$, moyenne sur $|Z| = r$ de la valeur absolue de la fonction analytique $U(Z)$, est croissante avec r [*voir* G. Julia, *Sur les moyennes des modules de fonctions analytiques* (*Bull. Sc. math.*, juillet 1927)], on a

$$m_1 > g(\rho_1) \int_{\rho_1}^{\rho-\varepsilon} r\,dr = g(\rho_1) \cdot \frac{1}{2} [(\rho-\varepsilon)^2 - \rho_1^2],$$

c'est-à-dire

$$g(\rho_1) < \frac{2m_1}{(\rho-\varepsilon)^2 - \rho_1^2}.$$

Les $g(\rho)$ sont donc *uniformément bornés* dans tout cercle

$$|Z| \leqq \rho_1 < \rho - \varepsilon.$$

On peut poser

$$\int_0^{2\pi} |U(\rho_1 e^{i\theta})|\,d\theta < \mathfrak{M},$$

le nombre $\mathfrak{M}$ dépendant seulement de ρ_1, $\rho - \varepsilon$, m_1.

On a alors

$$|a_p| < \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\rho_1^p},$$

et par suite, dans tout cercle $|Z| \leqq \rho_2 < \rho_1$,

$$|U(Z)| < \sum_p |a_p|\,r^p < \sum_p \frac{\mathfrak{M}}{2\pi\rho_1^p} \cdot \rho_2^p = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi} \sum_p \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^p = \frac{\mathfrak{M}}{2\pi} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Ceci démontre que, dans tout cercle $|Z| \leqq \rho_2 < \rho_1 < \rho - \varepsilon$, les $|U(Z)|$ sont bornés supérieurement; et puisque, ρ_2 étant un nombre quelconque $< \rho$ donné *a priori*, on peut toujours choisir ρ_1 et ε de manière que $\rho_2 < \rho_1 < \rho - \varepsilon$, il en résulte que dans tout domaine Δ_1 intérieur à $|Z| < \rho$, les $|U(Z)|$ sont bornés supérieurement par un même nombre dépendant seulement de M, Δ_1, D. Il en est donc de même pour les $|u(z)|$ qui dans tout domaine Δ intérieur à D seront bornés supérieurement par un même nombre M_1 dépendant seulement de M, Δ, D.

3. Considérons maintenant l'intégrale

$$(1) \qquad I_p(P_n) = \int\int_D |P_n|^p dx\, dy,$$

relative au polynome

$$P_n = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n, \text{ de degré } n, \text{ normal en O.}$$

C'est une fonction *continue et toujours positive* des coefficients complexes $a_2, \ldots, a_n$; lorsque p est un entier pair, c'est même un polynome par rapport aux a_k et aux a'_k. Cette fonction admet donc un minimum $M_{n,p}$ lorsque les a_i prennent toutes les valeurs complexes possibles. On peut voir aisément que ce *minimum n'est atteint que pour des valeurs finies de a_i*. En effet, soit

$$I_p(z) = \int\int_D |z|^p dx\, dy = M,$$

la valeur acquise par I_p lorsqu'on choisit pour P_n le polynome z (normal en O), et considérons tous les polynomes P_n, normaux en O, qui, substitués dans $I_p(P_n)$, lui donnent une valeur inférieure ou égale à $M[I_p(P_n) \leq M]$. Il résulte du lemme du n° **2** que, dans toute aire Δ intérieure à D, le maximum des $|P_n|$ sera limité supérieurement par un même nombre $M_1(\Delta, M)$, indépendant des paramètres qui figurent dans P_n. En vertu de la formule de Cauchy

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{P_n(z)\,dz}{z^{k+1}},$$

étendue à un cercle γ de centre O, intérieur à Δ, les $|a_k|$ de tous les P_n considérés seront aussi limités supérieurement par un même nombre A_k, dépendant seulement de Δ, D, M, k. En d'autres termes, les P_n d'un même degré n qui font acquérir à I_p des valeurs $\leq M$ *ont tous leurs coefficients bornés en valeur absolue* par un même nombre A. Les valeurs des a_k qui feront acquérir à I_p sa valeur minimum sont donc finies et inférieures en module à A. L'existence d'un polynome P_n au moins faisant acquérir à I_p sa valeur minimum $M_{n,p}$, en résulte aussitôt. Appelons $\Pi_{n,p}$ un tel polynome et posons, bien entendu,

$$M_{n,p} = \iint_D |\Pi_{n,p}|^p d\sigma.$$

On va montrer que *ce polynome* $\Pi_{n,p}$ *est unique*.

3 *bis*. Soit en effet $R_{n,p}$ un autre polynome de degré n, différent de $\Pi_{n,p}$ et qui fasse acquérir à $I_p(P_n)$ sa valeur minimum $M_{n,p}$. Il est clair que, λ et μ étant deux constantes positives quelconques de somme 1 ($\lambda + \mu = 1$), le polynome

$$\lambda . \Pi_{n,p} + \mu . R_{n,p}$$

appartiendra à la même classe que $\Pi_{n,p}$ et $R_{n,p}$; il sera normal en O, de degré n.

Or il est clair qu'en tout point de D on a

$$|\lambda \Pi_{n,p} + \mu R_{n,p}| \leqq \lambda |\Pi_{n,p}| + \mu |R_{n,p}|, \tag{2}$$

le signe égal n'étant acquis que si $\Pi_{n,p}$ et $R_{n,p}$ sont des nombres complexes de même argument.

Le signe égal *ne peut donc être valable en tout point de* z que si $\Pi_{n,p}$, $R_{n,p}$ ont en chaque point de D le même argument; mais alors $\log \Pi_{n,p}$ et $\log R_{n,p}$ auraient même partie imaginaire et par conséquent ne différeraient que par une constante réelle. On aurait

$$R_{n,p} = a \Pi_{n,p},$$

a étant une constante réelle positive. D'où il résulterait que

$$I_p[R_{n,p}] = a^p I_p[\Pi_{n,p}],$$

c'est-à-dire

$$M_{n,p} = a^p M_{n,p}$$

et par suite $a = 1$.

On ne peut donc avoir dans (2) le signe égal en chaque point de D que si $R_{n,p} \equiv \Pi_{n,p}$.

Si donc, on suppose $R_{n,p}$ différent de $\Pi_{n,p}$ l'inégalité (2) ne deviendra égalité dans (1) que sur certaines lignes [celles pour lesquelles le rapport $R_{n,p}:\Pi_{n,p}$ est *réel* positif].

Considérons maintenant les moyennes dans D, des trois polynomes $\Pi_{n,p}$, $R_{n,p}$, $\lambda\Pi_{n,p}+\mu R_{n,p}$. On aura

$$\left[\iint_D |\lambda\Pi_{n,p}+\mu R_{n,p}|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} < \left[\iint_D [\lambda|\Pi_{n,p}|+\mu|R_{n,p}|]^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}}$$

sans égalité possible puisque $\Pi_{n,p}$ et $R_{n,p}$ sont différents. On a ensuite en vertu d'une propriété classique des *moyennes d'ordre* $p>1$ [la moyenne d'une somme est au plus égale à la somme des moyennes]

$$\left\{\frac{1}{\sigma}\iint_D [\lambda|\Pi_{n,p}|+\mu|R_{n,p}|]^p d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqq \left[\frac{1}{\sigma}\iint_D \lambda^p|\Pi_{n,p}|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\frac{1}{\sigma}\iint_D \mu^p|R_{n,p}|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{pour } p\geqq 1.$$

En définitive on aurait pour $p\geqq 1$

$$\left\{\frac{1}{\sigma}\iint_D |\lambda\Pi_{n,p}+\mu R_{n,p}|^p d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}} < \lambda\left[\frac{1}{\sigma}\iint_D |\Pi_{n,p}|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} + \mu\left[\frac{1}{\sigma}\iint_D |R_{n,p}|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= (\lambda+\mu)\left[\frac{M_{n,p}}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{M_{n,p}}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}},$$

c'est-à-dire

$$\iint_D |\lambda\Pi_{n,p}+\mu R_{n,p}|^p d\sigma < M_{n,p}.$$

Le polynome $\lambda\Pi_{n,p}+\mu R_{n,p}$ normal en O et de degré n ferait aussi acquérir à l'intégrale $I_p[\lambda\Pi_{n,p}+\mu R_{n,p}]$ une valeur inférieure au minimum $M_{n,p}$, ce qui est impossible. Il en résulte que $\Pi_{n,p}$ *est bien unique*.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DES $\Pi_{n,p}$ LORSQUE L'UN DES INDICES n OU p VARIE.

1° *Variation du degré n.* — Étudions d'abord la suite des moyennes

$$\mu_{n,p} = \left[\frac{1}{\sigma}\iint_D |\Pi_{n,p}|^p dx\,dy\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\frac{M_{n,p}}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

4. Lorsque le degré croît et passe de n à $n+1$, comme tout polynome de degré n normal en O peut être considéré comme un polynome de degré $(n+1)$ dont le coefficient a_{n+1} est nul, il est clair que $\mu_{n,p} \geqq \mu_{n+1,p}$, l'égalité pouvant avoir lieu pour certains domaines particuliers, comme on le verra plus loin (Chap. IV, nº **16**). J'ai, d'autre part, montré ailleurs [G. Julia, *Sur quelques questions de minimum*... (*Bull. Sc. math.*, 1927)] que, pour toutes les fonctions $\lambda(z)$ holomorphes dans D, normales en O, il en existe une et une seule pour laquelle la moyenne d'ordre p dans D acquiert sa plus petite valeur possible, c'est la fonction

$$f_p(z) = f(z).[f'(z)]^{\frac{2}{p}}.$$

La valeur minimum de la moyenne envisagée est

$$\mu_p = \rho^{1+\frac{2}{p}} \left[\frac{2\pi}{\sigma(p+2)}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Il en résulte que, tout polynome $\Pi_{n,p}$ étant une fonction de la classe des $\lambda(z)$ envisagées, on aura nécessairement

$$\mu_{n,p} \geqq \mu_p,$$

l'égalité n'ayant pas lieu en général puisque $f_p(z)$ n'est pas, en général, un polynome. En définitive, lorsque n croît indéfiniment, p restant fixe, les $\mu_{n,p}$ vont en décroissant et restent $\geqq \mu_p$. Il y a donc une limite pour les $\mu_{n,p}$ lorsque $n = \infty$ et l'on a

$$\lim_{n=\infty} \mu_{n,p} \geqq \mu_p.$$

5. Montrons que l'on a, plus précisément,

$$\lim_{n=\infty} \mu_{n,p} = \mu_p.$$

Pour cela nous supposons que le domaine D soit tel qu'ou puisse en faire l'approximation *par l'extérieur*, au sens que j'ai indiqué dans un Mémoire antérieur [*A. E. N. S.*, 1927, p. 215, nᵒˢ **8**, **12** et suivants...]. On peut alors trouver un domaine D' contenant D à son intérieur, et dont le rayon ρ' relatif à O, supérieur à ρ, est arbitrairement voisin de P; posons

$$\rho' = \rho + \varepsilon$$

[ε arbitrairement petit positif].

Pour ce domaine D', le minimum des moyennes d'ordre p relatives aux $\lambda(z)$ holomorphes dans D' sera

$$\mu'_p = \rho'^{1+\frac{2}{p}} \left[\frac{2\pi}{\sigma'(p+2)} \right]^{\frac{1}{p}};$$

σ', aire de D', tend vers σ, aire de D lorsque D' tend vers D; ρ' tend alors vers ρ. Donc μ'_p tend vers μ_p lorsque D' tend vers D. On a donc

$$\mu'_p = \mu_p + \varepsilon',$$

ε' tendant vers zéro quand D' tend vers D.

Soit $F_p(z)$ la fonction du type $\lambda(z)$, holomorphe dans D' et qui fournit la moyenne minima μ'_p. Il est possible de trouver un polynome P_k normal en O qui, dans D, diffère de $F_p(z)$ de moins de η (η étant arbitrairement petit) [*voir* par exemple *A. E. N. S.*, 1927, p. 297, n° 9]

$$P_k(z) = F_p(z) + \varepsilon_k \qquad \text{avec} \qquad |\varepsilon_k| < \eta \text{ dans D}.$$

On aura alors, puisque

$$|P_k| \leqq |F_p| + |\varepsilon_k| < |F_p| + \eta,$$

et en vertu de la propriété des moyennes d'ordre $p \geqq 1$ rappelée au n° 3,

$$\left[\frac{1}{\sigma} \int\int_D |P_k|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} < \left[\frac{1}{\sigma} \int\int_D |F_p|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} + \eta.$$

Mais on a

$$\int\int_D |F_p|^p d\sigma < \int\int_{D'} |F_p|^p d\sigma = \sigma' \mu'^p_p.$$

Il en résulte que

$$\left[\frac{1}{\sigma} \int\int_D |P_k|^p d\sigma \right]^{\frac{1}{p}} < \eta + \left(\frac{\sigma'}{\sigma} \right)^{\frac{1}{p}} \mu'_p.$$

Puisqu'on peut choisir D' assez voisin de D pour que $\frac{\sigma'}{\sigma}$ soit arbitrairement voisin de 1 et μ'_p de μ_p on voit que

$$\left[\frac{1}{\sigma}\int\int_{D} |P_k|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} < \mu_p + \eta_1,$$

η_1 arbitrairement petit positif.

Or, si k est le degré du polynome P_k on aura certainement

$$\mu_{k,p} = \left[\frac{1}{\sigma}\int\int_{D} |\Pi_{k,p}|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \left[\frac{1}{\sigma}\int\int_{D} |P_k|^p d\sigma\right]^{\frac{1}{p}},$$

c'est-à-dire

$$\mu_{k,p} < \mu_p + \eta_1.$$

En définitive, η_1 étant arbitrairement petit et positif, on pourra toujours choisir D′ assez voisin de D et le nombre K assez grand pour que $\mu_{k,p}$ devienne inférieur à $\mu_p + \eta_1$. Il en résulte que

$$\boxed{\lim_{n=\infty} \mu_{n,p} = \mu_p}.$$

6. Je dis maintenant que *les* $\Pi_{n,p}(z)$ *convergent vers* $f_p(z)$, *uniformément dans tout domaine* Δ *intérieur à* D. Montrons d'abord pour cela que les $|\Pi_{n,p}(z)|$ sont *uniformément bornés dans tout domaine* Δ *intérieur à* D, c'est-à-dire qu'à tout domaine Δ correspond un nombre $\mathfrak{M}(\Delta)$, dépendant de Δ, indépendant de n, tel que, dans Δ, on ait

$$|\Pi_{n,p}(z)| < \mathfrak{M}(\Delta).$$

Nous savons en effet que les moyennes $\mu_{n,p}$ d'ordre p, des $|\Pi_{n,p}|$, dans D sont *toutes inférieures à* $\mu_{1,p}$. Il en résulte que leurs moyennes d'ordre $1 \leqq p$ seront aussi toutes inférieures à μ_{1p}, et en vertu du lemme démontré au n° **2**, les maxima des $|\Pi_{n,p}|$ dans tout domaine Δ intérieur à D seront bornés supérieurement par un même nombre $\mathfrak{M}(\Delta)$ [dépendant de Δ, de μ_{1p}, de D MAIS NON DE n].

Les $|\Pi_{n,p}|$ étant bornés snpérieurement dans Δ, on peut choisir une suite infinie d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, telle que la suite des $\Pi_{n_k,p}(z)$ converge uniformément dans Δ vers une fonction holomorphe $F(z)$. Si ensuite Δ' est un domaine quelconque intérieur à D et contenant Δ, puisque les $|\Pi_{n,p}|$ sont bornés dans Δ', la suite des $\Pi_{n_k,p}$ convergera aussi uniformément dans Δ' vers la fonction $F(z)$ qui sera ainsi holomorphe dans tout D et sera, dans tout D, la limite des $\Pi_{n_k,p}$ pour $n_k = \infty$. On va prouver que $F(z) \equiv f_p(z)$.

7. En effet, à cause de la convergence uniforme des $\Pi_{n_k,p}$ vers $F(z)$ dans Δ on aura

$$\int\int_{\Delta} |F(z)|^p d\sigma = \lim_{n_k=\infty} \int\int_{\Delta} |\Pi_{n_k,p}(z)|^p d\sigma.$$

Or

$$\int\int_{\Delta} |\Pi_{n_k,p}|^p d\sigma < \int\int_{D} |\Pi_{n_k,p}|^p d\sigma = \sigma.(\mu_{n_k,p})^p.$$

D'où résulte

$$\lim_{n_k=\infty} \int\int_{\Delta} |\Pi_{n_k,p}|^p d\sigma \leqq \lim_{n_k=\infty} \sigma(\mu_{n_k,p})^p = \sigma.(\mu_p)^p.$$

et, par conséquent,

$$\int\int_{\Delta} |F(z)|^p d\sigma \leqq \sigma.(\mu_p)^p.$$

Ceci étant vrai quel que soit Δ intérieur à D, l'intégrale $\int\int_{\Delta} |F|^p d\sigma$ aura une limite lorsque Δ tend vers D, par conséquent $\int\int_{D} |F(z)|^p d\sigma$ aura un sens et l'on aura

$$\int\int_{D} |F|^p d\sigma \leqq \sigma.(\mu_p)^p,$$

c'est-à-dire

$$\left\{\frac{1}{\sigma}\int\int_{D} |F|^p d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \mu_p.$$

Ainsi F est une fonction holomorphe dans D, normale en O (comme les $\Pi_{n_k,p}$ dont elle est la limite) et la moyenne d'ordre p de sa valeur absolue dans D est $\leqq \mu_p$. F ne peut donc différer de $f_p(z)$ (*voir* n° 4 précédent). La famille des $\Pi_{n,p}(z)$ n'a donc pas d'autre fonction limite que $f_p(z)$; il en résulte que

$$\lim_{n=\infty} \Pi_{n,p}(z) = f_p(z) = f(z).[(f'(z)]^{\frac{2}{p}},$$

la convergence étant uniforme dans tout domaine intérieur à D.

2° *Variation de l'indice p.* — **8.** Le polynome $\Pi_{n,p}$ est, de tous les polynomes de degré n normaux en O, celui pour lequel la moyenne d'ordre p de $(\Pi_{n,p})$ dans D est minimum. Lorsqu'on fait croître indéfiniment l'ordre p de la moyenne, l'application du ***principe du plus petit maximum*** que j'ai signalé dans des publications antérieures [*voir* par exemple *Sur quelques questions*... (*Bull. Soc. math.*, décembre 1927)] nous conduit à penser que $\Pi_{n,p}$ aura une limite pour $p=\infty$, cette limite étant le polynome $\Pi_n(z)$ de degré n, normal en O, pour lequel le maximum de $|\Pi_n|$ dans O est minimum. J'ai étudié en détail ce polynome Π_n dans un Mémoire antérieur [voir *Développement en série de polynomes*... (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1927)].

Démontrons maintenant l'exactitude de cette conjecture.

Envisageons la suite des

$$\mu_{n,p}=\left\{\frac{1}{\sigma}\int\int_{D}|\Pi_{n,p}|^p\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{1}{\sigma}\,M_{n,p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

lorsque, n restant fixe, p grandit.

Le polynome $\Pi_{n,p+1}$ ne coïncide pas en général avec $\Pi_{n,p}$; dans tous les cas sa moyenne d'ordre p dans D sera $\geqq$ celle de $\Pi_{n,p}$ qui est $\mu_{n,p}$; on a donc

$$\left\{\frac{1}{\sigma}\int\int_{D}|\Pi_{n,p+1}|^p\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}}\geqq\mu_{n,p}.$$

Or la moyenne d'ordre $p+1$ de $|\Pi_{n,p+1}|$ est $\geqq$ la moyenne d'ordre p de $|\Pi_{n,p+1}|$.

Donc,

$$\mu_{n,p+1}\geqq\left\{\frac{1}{\sigma}\int\int_{D}|\Pi_{n,p+1}|^p\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}}\geqq\mu_{n,p},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\mu_{n,p+1}\geqq\mu_{n,p}.}$$

Les $\mu_{n,p}$ croissent lorsque p croît.

Soit d'autre part m_n le maximum dans D de la valeur absolue du polynome Π_n de degré n. Il est clair qu'en tout point de D, la valeur de $|\Pi_n|$ étant $\leqq m_n$, la moyenne d'ordre p de $|\Pi_n|$ dans D sera $\leqq m_n$. Et, puisque $\Pi_{n,p}$ est le polynome dont la valeur absolue a la plus petite moyenne d'ordre p dans D, on aura

$$\mu_{n,p} \leqq \left\{ \frac{1}{\sigma} \int\int_{D} |\Pi_n|^p d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq m_n.$$

Les $\mu_{n,p}$, tous $\leqq m_n$, croissent avec p. Ils ont donc une limite

$$\lim_{p=\infty} \mu_{n,p} \leqq m_n.$$

Je dis que $\lim\limits_{p=\infty} \mu_{n,p} = m_n$, cela va résulter de l'analyse suivante.

9. Les $\Pi_{n,p}$ quand p varie forment une famille de polynomes (normaux en O) dont les moyennes $\mu_{n,p}$ sont $\leqq m_n$. L'indice n restant le même, nous poserons pour simplifier les notations $\Pi_{n,p} = P_p$.

P_p a dans D une moyenne d'ordre un $<$ sa moyenne d'ordre p. Il en résulte que toutes les intégrales $\frac{1}{\sigma}\int\int |P_p| d\sigma$ sont inférieures au nombre fixe m_n. L'analyse du nº **6** montre que les $|P_p|$ sont bornés supérieurement (et uniformément en p) dans tout domaine intérieur à D. Il en résulte, en exprimant tous les P_p par la formule d'interpolation de Lagrange à l'aide de leurs valeurs en $n - 1$ points intérieurs à D que les $|P_p|$ sont *uniformément bornés dans tout domaine fini du plan*, et que leurs coefficients sont bornés en module. Les polynomes P_p forment donc une famille *également continue* dans tout domaine borné, c'est-à-dire que, à tout nombre ε positif correspond un δ tel que $|z - z'| < \delta$ entraîne $|P_p(z) - P_p(z')| < \varepsilon$ quels que soient l'indice p et la position des z et z' dans l'aire bornée considérée. Nous choisirons D pour ce domaine d'égale continuité en adjoignant bien entendu à D sa frontière F.

Ceci va nous permettre de montrer que, pour p assez grand, la *moyenne d'ordre p dans* D *de* $|P_p(z)|$ *et le maximum* m'_p *de* $|P_p|$ *dans* D *diffèrent d'une quantité* ε_p *infiniment petite quand p devient infini*. Il est à remarquer que tous les m'_p sont $\geqq m_n$ car m_n est la plus petite valeur que puisse acquérir le maximum dans D de la valeur absolue d'un polynome de degré n normal en O.

10. Remarquons d'abord que si, comme on le suppose, le domaine D est d'aire σ, la partie de D intérieure à un cercle de rayon δ, dont le centre z est intérieur à D ou situé sur F, a une aire toujours $\geqq \sigma'(\delta)$, $\sigma'(\delta)$ n'étant nulle pour aucune valeur de δ. En effet l'hypothèse contraire équivaudrait à l'existence d'une valeur δ et d'une suite infinie de points $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ appartenant à $D + F$ et pour lesquels l'aire commune à D et au cercle $|z - z_i| \leqq \delta$ aurait des valeurs respectives $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ tendant vers zéro. Les z_n ont au moins un point limite ζ appartenant à $D + F$; on peut sans nuire à la généralité supposer que ζ est la limite de z_n, et l'aire commune à D et à $|z - z_n| \leqq \delta$ aura pour limite l'aire commune à D et au cercle $|z - \zeta| \leqq \delta$, laquelle n'est pas nulle et a une valeur positive σ_0. σ_n ayant pour limite $\sigma_0 \neq 0$, ceci contredit l'hypothèse d'après laquelle σ_n tendrait vers zéro. L'existence de $\sigma'(\delta)$ est ainsi démontrée. Considérons alors l'intégrale $\int\int_D |P_p|^p \, d\sigma$ et soit maintenant z_p un point de F où $|P_p|$ atteint son maximum m'_p. La famille des P_p étant également continue on peut trouver δ (indépendant de p) tel que $|z - z'| \leqq \delta$ entraîne $|P_p(z) - P_p(z')| < \varepsilon$ quel que soit p.

En tout point de D intérieur au cercle $|z - z_p| \leqq \delta$ on aura

$$|P_p(z) - P_p(z_p)| < \varepsilon,$$

et par suite

$$|P_p(z)| > m'_p - \varepsilon \qquad \text{car} \qquad |P_p(z_p)| = m'_p.$$

L'intégrale $\int\int_D |P_p|^p \, d\sigma$ est certainement $< \sigma (m'_p)^p$. Elle est certainement supérieure à l'intégrale de $\int\int |P_p|^p \, d\sigma$ étendue à l'aire commune à D et au cercle $|z - z_p| < \delta$. Dans cette aire $|P_p|$ est $> m'_p - \varepsilon$ et la valeur de cette aire est quel que soit $p \geqq \sigma'(\delta)$. On a donc

$$\int\int_D |P_p|^p \, d\sigma > \sigma'(\delta).(m'_p - \varepsilon)^p.$$

Il en résulte que

$$m'_p > \left\{ \frac{1}{\sigma} \int\int_D |P_p|^p \, d\sigma \right\}^{\frac{1}{p}} > \left[\frac{\sigma'(\delta)}{\sigma} \right]^{\frac{1}{p}} (m'_p - \varepsilon).$$

D'où résulte pour la différence ε_p entre le maximum m'_p et la moyenne d'ordre p de $|P_p|$ dans D la limitation

$$m'_p - \left\{\frac{1}{\sigma}\int\int_D |P_p|^p d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}} < m'_p - \left[\frac{\sigma'(\delta)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}}(m'_p - \varepsilon)$$
$$= m'_p\left[1 - \left(\frac{\sigma'(\delta)}{\sigma}\right)^{\frac{1}{p}}\right] + \varepsilon\left[\frac{\sigma'(\delta)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Or on a vu que tous les $|P_p|$ étaient uniformément bornés dans tout domaine fini; quel que soit p, on aura donc $m'_p < M$ et puisque $\sigma'(\delta)$ est $\leqq \sigma$ on pourra écrire encore

$$\varepsilon_p = m'_p - \left\{\frac{1}{\sigma}\int\int_D |P_p|^p d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}} < M\left\{1 - \left[\frac{\sigma'(\delta)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}}\right\} + \varepsilon.$$

Dans le deuxième membre M, $\sigma'(\delta)$, σ, ε *sont indépendants de p.*

Lorsque p devient infini $\left[\frac{\sigma'(\delta)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}}$ tend vers *un*, le deuxième membre est donc de la forme $\eta_p + \varepsilon$, $\eta_p = M\left\{1 - \left[\frac{\sigma'(\delta)}{\sigma}\right]^{\frac{1}{p}}\right\}$ étant infiniment petit avec $\frac{1}{p}$, et ε étant une quantité arbitrairement petite choisie *a priori*. Il en résulte que, ε' étant donné *a priori* on pourra prendre $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$, d'où résulteront δ et $\sigma'(\delta)$ indépendants de p; on pourra ensuite choisir p assez grand pour que η_p soit $< \frac{\varepsilon'}{2}$ et par conséquent

$$\varepsilon_p = m'_p - \left\{\frac{1}{\sigma}\int\int_D |P_p|^p d\sigma\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon',$$

ce qui prouve que ε_p est bien infiniment petit avec $\frac{1}{p}$.

11. Ceci posé, les P_p formant une famille également continue, on pourra toujours en extraire une suite $P_{p_1}, P_{p_2}, \ldots, P_{p_k}, \ldots$ qui dans toute aire bornée convergera uniformément vers un polynome P. Cela peut résulter aussi du fait que tous les P_p étant de degrés n et ayant leurs coefficients bornés, on pourra extraire des P_p une suite P_{p_k}, tous les coefficients de P_{p_k} ayant des limites pour $k = \infty$. Le polynome P est normal en O comme les P_p; ses coefficients et sa valeur absolue ont les mêmes limites que les coefficients et la valeur absolue des P_p. La convergence uniforme des P_{p_k} dans $D+F$ vers P entraîne que le maximum dans D ou $D+F$ de $|P_{p_k}|$ tend vers le maximum m' de $|P|$ dans le même domaine

$$\lim_{p_k=\infty} m'_{p_k} = m'.$$

La moyenne d'ordre p_k de $|P_{p_k}|$ dans D différant de m'_{p_k} par une quantité ε_{p_k} qui tend vers zéro avec $\frac{1}{p_k}$, on a aussi

$$\lim_{p_k=\infty} \left\{ \frac{1}{\sigma} \int\int_{D} |P_{p_k}|^{p_k} d\sigma \right\}^{\frac{1}{p_k}} = m'.$$

12. Revenons aux notations primitives. Les P_{p_k} sont les Π_{n,p_k}, on aura donc

$$\lim_{p_k=\infty} \mu_{n,p_k} = m',$$

d'où résulte : puisque les $\mu_{n,p}$ n'ont qu'une seule limite pour $p=\infty$,

$$\lim_{p=\infty} \mu_{n,p} = m'.$$

Si m' était $< m_n$, le polynome P vers lequel convergeaient les P_{p_k} serait normal en O, de degré n, et le maximum dans D de sa valeur absolue $|P|$ serait $m' < m_n$. Or ceci contredit le fait que m_n est la plus petite valeur que puisse acquérir le maximum dans D de la valeur absolue d'un polynome de degré n normal en O. Et cette contradiction prouve deux choses :

1° On aura nécessairement $m' = m_n$, c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{p=\infty} \mu_{n,p} = m_n ;}$$

2° Le polynome P ne peut différer de Π_n. Par conséquent, tout polynome limite pour la suite des $\Pi_{n,p}$ (p variable) se confondant avec Π_n, on aura

$$\boxed{\lim_{p=\infty} \Pi_{n,p}(z) = \Pi_n(z),}$$

uniformément dans tout domaine borné

13. L'analyse du n° **10** s'étend à toute famille de fonctions $Q(z)$ holomorphes dans D également continues dans $D+F$ puisque nous n'avons pas là fait intervenir le caractère polynomial de $P_p(z)$: il suffit de supposer que les maxima de toutes les $|Q|$ dans D admettent une même borne supérieure M.

Pour une telle famille *la différence entre le maximum de* $|Q|$ *dans* $D+F$ *et la moyenne d'ordre* p *de* $|Q|$ *dans* D *tend vers zéro avec* $\frac{1}{p}$ *et uniformément quelle que soit la fonction de la famille que l'on considère.*

L'analyse du n° **10** s'étendrait évidemment à toute famille de fonction d'une ou plusieurs variables réelles également continues dans un domaine borné et le théorème précédent est valable pour ces familles.

14. Ainsi se trouve confirmée l'exactitude du *principe du plus petit maximum* dans le cas qui nous occupe : $\lim\limits_{p=\infty} \Pi_{n,p} = \Pi_n$. Le polynome Π_n qui minime le maximum de la valeur absolue dans D des polynomes de degré n normaux en O est la limite pour $p=\infty$ du polynome $\Pi_{n,p}$ qui minime la moyenne d'ordre p dans D de la valeur absolue des polynomes de degré n normaux en O.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES $\Pi_{n,p}$ LORSQUE n ET p DEVIENNENT SIMULTANÉMENT INFINIS.

15. Envisageons les deux tableaux à double entrée suivants qui résument le Chapitre II :

$$(T_1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
\mu_{1,1} & > & \mu_{2,1} & > & \mu_{3,1} & > & \ldots & > & \mu_{n,1} & > & \ldots & \to & \mu_1. \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & & & \wedge \\
\mu_{1,2} & > & \mu_{2,2} & > & \mu_{3,2} & > & \ldots & > & \mu_{n,2} & > & \ldots & \to & \mu_2. \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & & & \wedge \\
\mu_{1,3} & > & \mu_{2,3} & > & \mu_{3,3} & > & \ldots & > & \mu_{n,3} & > & \ldots & \to & \mu_3. \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & & & \wedge \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & & & \wedge \\
\mu_{1,p} & > & \mu_{2,p} & > & \mu_{3,p} & > & \ldots & > & \mu_{n,p} & > & \ldots & \to & \mu_p. \\
\wedge & & \wedge & & \wedge & & & & \wedge & & & & \wedge \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
m_1 & > & m_2 & > & m_3 & > & \ldots & > & m_n & > & \ldots & \to & \rho
\end{array}\right.$$

et

$$(T_2)\quad\left\{\begin{array}{cccccccc}
\Pi_{1,1} & \Pi_{2,1} & \Pi_{3,1} & \ldots & \Pi_{n,1} & \ldots & \to & f_1(z), \\
\Pi_{1,2} & \Pi_{2,2} & \Pi_{3,2} & \ldots & \Pi_{n,2} & \ldots & \to & f_2(z), \\
\Pi_{1,3} & \Pi_{2,3} & \Pi_{3,3} & \ldots & \Pi_{n,3} & \ldots & \to & f_3(z), \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Pi_{1,p} & \Pi_{2,p} & \Pi_{3,p} & \ldots & \Pi_{n,p} & \ldots & \to & f_p(z). \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
\Pi_1 & \Pi_2 & \Pi_3 & \ldots & \Pi_n & \ldots & \to & f(z).
\end{array}\right.$$

On a ajouté dans (T_1) et (T_2) certains résultats démontrés dans des Mémoires antérieurs [*voir* G. Julia, *Sur quelques questions*... (*Bull. Sc. math.*, décembre 1927) et *Développement en série de polynomes*... (*Annales de l'Éc. Norm. sup.*, 1927)].

Dans (T_1) on a mentionné que les m_n tendent, en décroissant, vers le rayon ρ de l'aire D relatif à O lorsque D est soumis aux restrictions précédemment énoncées. On a marqué aussi la croissance vers ρ des moyennes minima μ_p pour les fonctions holomorphes dans D normales en O. Dans ce tableau (T_1) les signes $<$ peuvent dans certains cas être remplacés par des signes $\leqq$. Les flèches indiquent des passages à la limite.

Dans (T_2) on a mentionné que les Π_n ont pour limite $f(z)$ lorsque $n = \infty$, et il en est de même des $f_p(z)$ pour $p = \infty$, et ces limites sont uniformément atteintes dans tout domaine intérieur à D.

A l'inspection du tableau (T_1) on reconnaît d'abord que

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ p=\infty}} \mu_{n,p} = \rho.$$

On a en effet

$$\mu_p < \mu_{n,p} < m_n,$$

$$\mu_p < \rho < m_n.$$

Donc

$$|\mu_{n,p} - \rho| < m_n - \mu_p = (m_n - \rho) - (\mu_p - \rho),$$

d'où résulte

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ p=\infty}} \mu_{n,p} = \rho,$$

n et p tendant vers l'infini indépendamment l'un de l'autre.

A l'inspection de T_2 on conjecture que

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ p=\infty}} \Pi_{n,p} = f(z).$$

Démontrons-le en toute rigueur. La valeur absolue du polynome $\Pi_{n,p}$ a une moyenne $\mu_{n,p}$ d'ordre p dans D qui reste $< m_1$. Sa moyenne d'ordre *un* est donc aussi $< m_1$. Il résulte donc de l'analyse du n° **2** que les $|\Pi_{n,p}|$ sont, dans tout domaine Δ intérieur à D uniformément bornés quels que soient n et p. On peut donc, de toute suite infinie formée de polynomes $\Pi_{n,p}$, extraire une suite partielle uniformément convergente dans tout domaine intérieur à D. Soit $F(z)$ la fonction, holomorphe dans D, vers laquelle tend cette suite partielle Π_{n_i,p_i}.

Posons

$$\Pi_{n_i,p_i} = F(z) + \varepsilon_{n_i,p_i}.$$

On aura, dans Δ, $|\varepsilon_{n_i,p_i}| < \varepsilon$ [ε arbitrairement petit donné *a priori*] dès que n_i, p_i sont assez grands.

On a successivement

$$|\Pi_{n_i,p_i}| < |F(z)| + \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad \begin{matrix} n_i \\ p_i \end{matrix} > N(\varepsilon).$$

Donc, ainsi qu'on l'a indiqué précédemment,

$$\begin{aligned} &\text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |\Pi_{n_i,p_i}| \text{ dans } \Delta \\ &\quad < \text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |F| + \text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } \varepsilon \\ &\quad < \text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |F| + \varepsilon, \end{aligned}$$

on aurait de même

$$\text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |F| \text{ dans } \Delta \leq \text{moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |\Pi_{n_i,p_i}| + \varepsilon,$$

car

$$F = \Pi_{n_i,p_i} - \varepsilon_{n_i,p_i}.$$

On conclut de là

$$\begin{aligned} \text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |F| \text{ dans } \Delta - \varepsilon &< \text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |\Pi_{n_i,p_i}| \text{ dans } \Delta \\ &< \text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } (F) \text{ dans } \Delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &[\text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |\Pi_{n_i,p_i}| \text{ dans } \Delta]^{p_i} \\ &\quad = \frac{1}{\sigma_\Delta}\iint_\Delta |\Pi_{n_i,p_i}|^{p_i}\, d\sigma < \frac{1}{\sigma_\Delta}\iint_D |\Pi_{n_i,p_i}|^{p_i}\, d\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_\Delta}\left\{\mu_{n_i,p_i}\right\}^{p_i}, \end{aligned}$$

où σ_Δ désigne l'aire de Δ.

On en déduit

$$\text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |\Pi_{n_i,p_i}| \text{ dans } \Delta < \left[\frac{\sigma}{\sigma_\Delta}\right]^{\frac{1}{p_i}} . \mu_{n_i,p_i}$$

et, par suite,

$$\text{Moyenne d'ordre } p_i \text{ de } |F| \text{ dans } \Delta < \varepsilon + \left[\frac{\sigma}{\sigma_\Delta}\right]^{\frac{1}{p_i}} \cdot \mu_{n_i, p_i}.$$

Faisons grandir n_i et p_i vers l'infini; le premier membre a pour limite le maximum dans Δ de $|F(z)|$; dans le deuxième membre $\left[\frac{\sigma}{\sigma_\Delta}\right]^{\frac{1}{p_i}} \cdot \mu_{n_i, p_i}$ a pour limite ρ. On a donc

$$\text{Max} \, |F(z)| \text{ dans } \Delta \leqq \rho + \varepsilon;$$

ε étant arbitrairement petit, cela veut dire que l'on a

$$\text{Max} \, |F(z)| \text{ dans } \Delta \leqq \rho,$$

et cela est vrai dans tout domaine Δ intérieur à D. En faisant tendre Δ vers D on conclut de là

$$\text{Max} \, |F(z)| \text{ dans } D \leqq \rho.$$

$F(z)$ holomorphe dans D, limite de polynomes Π_{n_i, p_i} normaux en O, est elle-même normale en O. Elle est donc identique à la fonction $f(z)$ normale en O qui donne la représentation conforme de D sur un cercle $|Z| < \rho$ puisque $f(z)$ est la seule fonction dont la valeur absolue a pour maximum ρ dans D. La conclusion est $F(z) \equiv f(z)$.

Ainsi toute suite convergente de polynomes Π_{n_i, p_i}, dont les deux indices grandissent indéfiniment, a pour limite $f(z)$, uniformément dans tout domaine intérieur à D. La conclusion est donc bien

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ p=\infty}} \Pi_{n,p}(z) = f(z),$$

uniformément dans tout domaine intérieur à D, les indices n et p grandissant indéfiniment, indépendamment l'un de l'autre.

En particulier, *la suite diagonale* $\Pi_{n,n}$ a pour limite $f(z)$.

En prenant $n = 2p$ la suite $\Pi_{2p,2p}$ est une suite de polynomes dont les coefficients se déterminent par des équations algébriques puisque l'intégrale $\int\int_D |\Pi_{2p,2p}|^{2p} \, d\sigma$, à rendre minimum, est un polynome par rapport aux coefficients de $\Pi_{2p,2p}$ et à leurs conjugués. On a donc ici une méthode, purement théorique d'ailleurs, de trouver $f(z)$ comme limite d'une suite de polynomes qui se déterminent, indépendamment les uns des autres, par des calculs algébriques.

CHAPITRE IV.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES POLYNOMES. $\Pi_{n,p}(z)$.

16. *Détermination de ces polynomes dans le cas des suites* $\Pi_{n,p} \equiv \Pi_{n+1,p}$ *pour* $n > n_0$. — On a dit au n° 4 que les $\Pi_{n,p}$ pouvaient être tous identiques, pour une même valeur de p, quel que soit $n > n_0$. En voici un exemple.

On a vu au n° 7 que, sous les restrictions indiquées pour le domaine D, $\Pi_{n,p}$ avait pour limite

$$f_p(z) = f(z).[f'(z)]^{\frac{2}{p}}.$$

uniformément dans tout Δ intérieur à D.

Soit alors $P(z)$ un polynome normal en O donné *a priori*

$$P(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k,$$

et considérons la fonction $f(z)$ nulle en O, holomorphe en O, définie au voisinage de O par l'équation différentielle

$$f(z).[f']^{\frac{2}{p}} = P$$

ou encore

$$f'.f^{\frac{p}{2}} = P^{\frac{p}{2}}.$$

Cela s'écrit

$$\frac{1}{\frac{p}{2}+1}\frac{d}{dz}\left[f^{\frac{p}{2}+1}\right] = P^{\frac{p}{2}}$$

et, par suite,

$$\boxed{f^{\frac{p}{2}+1} = \frac{p+2}{2}\int_0^z P^{\frac{p}{2}}dz.}$$

Au voisinage de O, on peut écrire

$$P^{\frac{p}{2}} = z^{\frac{p}{2}}[1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots]$$

et, par suite,

$$\frac{p+2}{2}\int_0^z \mathrm{P}^{\frac{p}{2}}dz = z^{\frac{p}{2}+1}[1+p'_1 z + p'_2 z^2 + \ldots],$$

c'est-à-dire

$$f^{\frac{p}{2}+1} = z^{\frac{p}{2}+1}\mathrm{H}(z),$$

H(z) étant holomorphe et égale à un en O. On tirera de là

$$f = z\mathrm{H}_1(z),$$

$\mathrm{H}_1(z)$ étant, comme H, holomorphe et égale à un en O.

La fonction f *est alors holomorphe et normale en* O.

Considérons alors le domaine $|f| \leqq \rho$ contenant O; tant que ρ est suffisamment petit [1] il est bien défini, simplement connexe, et limité par une courbe analytique. Prenons-le pour domaine D. La transformation $Z = f(z)$ transforme D en un cercle C, $|Z| \leqq \rho$. J'appelle $z = \varphi(Z)$ la fonction inverse de $f(z)$. Elle est holomorphe dans $|Z| \leqq \rho$.

Envisageons un polynome $\mathrm{P}_{n.p}$ normal en O, de degré $n \geqq k$. Dans l'intégrale

$$\mathrm{I}_{n,p} = \int\int_{\mathrm{D}} |\mathrm{P}_{n,p}|^p \, dx\, dy,$$

à rendre minimum, remplaçons $z = x + iy$ par $z = \varphi(Z)$. Elle devient, en posant

$$\mathrm{P}_{n,p}[\varphi(Z)] = \mathfrak{P}_{n,p}(Z),$$

$$\mathrm{I}_{n,p} = \int\int_{\mathrm{C}} |\mathfrak{P}_{n,p}|^p \, |\varphi'|^2 d\Sigma,$$

$d\Sigma = dX\,dY$ étant l'élément d'aire du cercle C.

Or, en posant $z = \varphi(Z)$ dans $f'^2 f^p = \mathrm{P}^p$, qui est la relation différentielle définissant f, et en remarquant que

$$f'[\varphi(Z)] = \frac{1}{\varphi'(Z)},$$

---

[1] On suppose évidemment que dans D, on a $f \neq 0$; alors P ne s'annule pas dans D hors de O.

on obtient, en notant $P[\varphi(Z)] = \mathfrak{P}(Z)$, la relation

$$\varphi'^2 = \left[\frac{Z}{\mathfrak{P}}\right]^p$$

et, par suite,

$$I_{n,p} = \int\int_C |Z|^p \left|\frac{\mathfrak{P}_{n,p}}{\mathfrak{P}}\right|^p dZ.$$

Prenant $Z = Re^{i\theta}$ il vient

$$I_{n,p} = \int_0^\rho R^{p+1} dR \int_0^{2\pi} \left|\frac{\mathfrak{P}_{n,p}(Re^{i\theta})}{\mathfrak{P}(Re^{i\theta})}\right|^p d\theta.$$

On a vu que P ne s'annule pas hors de O dans D; $\frac{1}{\mathfrak{P}(Z)}$ n'admet dans C que le pôle simple $Z = 0$ qui disparaît dans $\frac{\mathfrak{P}_{n,p}}{\mathfrak{P}}$. La fonction $\frac{\mathfrak{P}_{n,p}}{\mathfrak{P}}$ est holomorphe dans C et s'y développe par

$$\frac{\mathfrak{P}_{n,p}}{\mathfrak{P}} = 1 + p_1'' Z + p_2'' Z^2 + \ldots.$$

En vertu d'un lemme établi dans le Mémoire précédemment cité [G. Julia, *Sur quelques questions...*, n° 2 (*Bull. des Sc. math.*, décembre 1927)], le minimum de $\int_0^{2p} \left|\frac{\mathfrak{P}_{n,p}(Re^{i\theta})}{\mathfrak{P}(Re^{i\theta})}\right|^p d\theta$ n'est réalisé que pour $\frac{\mathfrak{P}_{n,p}}{\mathfrak{P}} \equiv 1$ et c'est 2π. Le minimum de $I_{n,p}$ est donc atteint pour $\Pi_{n,p}(z) \equiv P(z)$ pour toute valeur de $n \geq k$.

Le domaine D *considéré est donc bien tel que, pour $n \geq k$; tous les $\Pi_{n,p}$ sont identiques à un même polynome* $P(z)$, *lequel, bien entendu, est égal à leur limite $f_p(z) = f.[f']^{\frac{2}{p}}$.*

L'exemple le plus simple de ce cas s'obtient avec $P(z) = z$. Il vient alors aussitôt $f = z$ et le domaine D est un cercle de centre O de rayon quelconque ρ. Tous les $\Pi_{n,p}$ sont alors, *quel que soient n et p*, identiques à z.

Prenons, comme deuxième exemple,

$$p = 2 \quad \text{et} \quad P = z - 3a_2 z^2 + 2a_2^2 z^3,$$

a_2 nombre complexe quelconque, on aura pour définir f

$$\frac{1}{2}f^2=\int_0^z \mathrm{P}\,dz=\frac{z^2}{2}-a_2z^3+a_2^2\frac{z^4}{2};$$

d'où

$$f^2=z^2-2a_2z^3+a_2^2z^4 \quad \text{et} \quad f=z-a_2z^2.$$

Le domaine D *défini par* $|f|\leqq\rho$ *sera limité par une ovale de Cassini de foyers* $z=0$ *et* $z=\frac{1}{a_2}$ *et remplira les conditions requises tant que* $\rho\leqq\frac{1}{4|a_2|}$. En effet $\varphi(\mathrm{Z})$, fonction inverse de $f(z)$, n'admet pour point critique à distance finie que le point $\mathrm{Z}=\frac{1}{4a_2}$ [provenant de $z=\frac{1}{2a_2}$ où s'annule $f'(z)$]. Pour ce domaine D et pour tout indice $n\geqq 3$ on aura

$$\Pi_{n,2}=z-3a_2z^2+2a_2^2z^3.$$

On remarquera que, à part le cas où D est un cercle $|z|\leqq\rho$, les domaines D dont nous venons de parler sont distincts de ceux pour lesquels tous les Π_n sont identiques à partir d'un certain rang μ_0, et qui sont définis par $|\mathrm{P}|\leqq\rho$, P étant un polynome quelconque normal en O, et ρ suffisamment petit.

17. *Symétrie de* D *par rapport à une droite issue de* O. — On peut, par une transformation $[z|ze^{i\theta}]$, supposer que la droite est l'*axe réel*. Alors *tous les* $\Pi_{n,p}$ *ont leurs coefficients réels*.

En effet, dans le cas contraire, posons

$$\Pi_{n,p}=z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n$$

et considérons le polynome à coefficients conjugués

$$\mathrm{R}_{n,p}=z+\bar{a}_2z^2+\ldots+\bar{a}_nz^n.$$

On a

$$\mathrm{R}_{n,p}(\bar{z})=\overline{\Pi_{n,p}(z)}.$$

Les valeurs de $\mathrm{R}_{n,p}$ en $\bar{z}$ et de $\Pi_{n,p}$ en z sont conjuguées. Par suite, D étant symétrique par rapport à l'axe réel, on aura évidemment

$$\int\int_{\mathrm{D}}|\Pi_{n,p}(z)|^p\,dx\,dy=\int\int_{\mathrm{D}}|\mathrm{R}_{n,p}(z)|^p\,dx\,dy.$$

Il y aurait deux polynomes distincts normaux en O, de degré n, faisant acquérir à $I_{n,p}$ sa valeur minimum. Cela est impossible. Donc $R_{n,p}$ est confondu avec $\Pi_{n,p}$ qui a par suite des coefficients réels.

18. *Symétrie de* D *par rapport à* O. — Dans ce cas tous les $\Pi_{n,p}$ sont *impairs*.

En effet, dans le cas contraire, considérons

$$R_{n,p}(z) = -\Pi_{n,p}(-z).$$

C'est un polynome de degré n normal en O et l'on aura évidemment à cause de la symétrie de D par rapport à O

$$\int\int_{D} |R_{n,p}(z)|^p dx\,dy = \int\int_{D} |\Pi_{n,p}(z)|^p dx\,dy.$$

$R_{n,p}$ et $\Pi_{n,p}$ seraient deux polynomes minimants distincts : c'est impossible, donc $R_{n,p} \equiv \Pi_{n,p}(z)$, c'est-à-dire que $\Pi_{n,p}$ *est impair*.