JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE COTTON

Sur une généralisation d'un théorème de Reech

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 417-428.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__417_0>

Sur une généralisation d'un théorème de Reech;

PAR ÉMILE COTTON,

Professeur à l'Université de Grenoble.

En étudiant le nombre des normales PM, qu'on peut abaisser d'un point P sur une surface fixe S, et le nombre des maxima et des minima de la distance PM, Reech [1] a fait usage d'une représentation géographique devenue classique, qui l'a conduit à la curieuse proposition suivante :

Le nombre total des normales qu'on peut abaisser d'un point P *sur une surface fermée est pair. Si* μ *désigne le nombre total des normales donnant lieu à un maximum ou à un minimum de la distance* PM *et* σ *celui des autres, on a* $\mu - \sigma = 2$.

Des questions de même nature ont été abordées par Cayley [2] et Maxwell [3], qui ne mentionnent pas l'article de Reech. Mais le travail le plus important est celui de Möbius [4] où l'*Analysis situs* d'une surface S est étudiée à l'aide de ses sections par certaines familles de

---

(1) *Démonstration d'une propriété générale des surfaces fermées* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XXI, 1858, p. 169). Ces questions de Géométrie se posent naturellement dans la recherche des positions d'équilibre des flotteurs et l'étude de leur stabilité (*voir* le tome III du *Traité de Mécanique*, de M. Appell).

(2) *On Contour and Slopes Lines* (*Philosophical Magazine*, 1859; *Œuvres*, t. IV).

(3) *On Hills and Dales* (*Philosophical Magazine*, 1870; *Œuvres*, t. II).

(4) *Theorie der elementaren Verwandschaft* (*Œuvres*, t. II)

surfaces Σ s'enveloppant mutuellement (dans le cas de Reech, ce sont des sphères concentriques). Möbius a montré que la formule de Reech n'était valable que pour les surfaces S simplement connexes et a donné une formule plus générale où interviennent l'ordre de connexion de S et deux nombres μ et σ désignant le nombre des points doubles isolés et celui des points doubles à tangentes réelles que peuvent présenter les lignes d'intersection de S avec les diverses surfaces de la famille Σ.

Il faut mentionner aussi deux Mémoires, l'un de M. W. Dyck (1); l'autre de M. Boy (2), où se trouvent des rapprochements entre la théorie de Möbius et celle des caractéristiques de Kronecker (3).

Au début du présent article, je généralise le théorème de Reech, en remplaçant la distance PM par une fonction uniforme U(M) définie en tous les points M d'une surface fermée S; il est tenu compte de la connexion de S. La formule obtenue est identique à celle de Möbius, mais la signification des lettres est différente, puisque leur définition n'utilise ici aucun élément extérieur à S, les démonstrations ont dû, par suite, être modifiées. Je donne enfin quelques extensions; dans l'une d'elles, la surface S est remplacée par un domaine D à trois dimensions, U restant constant sur les frontières de D.

1. *Hypothèses et définitions.* — Soit S une surface fermée ayant deux côtés distincts, tout entière à distance finie. Nous la supposons sans points singuliers, analytique ou du moins décomposable en un nombre fini de morceaux remplissant la condition suivante : La distance ζ d'un point M au plan tangent P_0 en un point M_0 considérée comme fonction des coordonnées ξ, η de la projection de M sur P_0 est continue et admet des dérivées premières et secondes finies et continues. Ces morceaux sont censés empiéter les uns sur les autres de façon qu'il n'y ait pas à faire d'hypothèses spéciales pour leurs frontières.

A tout point M de S, faisons correspondre un nombre réel; une

(1) *Beitrage zur Analysis situs : I. Mathematische Annalen*, t. XXXII, 1888.

(2) *Ueber die curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen* (*Mathematische Annalen*, t. LVII, 1903).

(3) *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus dem Jahre*, 1869, p. 159 et 688.

fonction uniforme $U(M)$ est ainsi définie sur S. On suppose que $U(M)$ considérée comme fonction des coordonnées ξ, η admet des dérivées des deux premiers ordres, qu'il n'existe qu'un nombre fini de points de S où les dérivées premières s'annulent simultanément et qu'en un tel point l'existence ou l'absence de maximum ou de minimum pour U se reconnaît avec les seules dérivées du second ordre. Ces points sont donc pour les courbes $U = \text{const.}$ qui y passent (courbes de niveau) des points doubles à tangentes distinctes (réelles ou imaginaires conjuguées). Nous supposerons que deux points doubles ne se trouvent pas simultanément sur une partie d'une courbe de niveau qu'on puisse parcourir d'une façon continue.

Toutes les autres courbes $U = \text{const.}$ sont sans points doubles et formées d'une ou de plusieurs parties fermées que nous appellerons *cycles de niveau;* il est commode, en effet, de conserver ce langage topographique et nous désignerons souvent la valeur de U en un point M par les mots « altitude de M ».

Soient L une ligne de niveau admettant un point double O qui est alors à tangentes réelles, et OT l'une de ces tangentes. Un observateur placé d'un côté déterminé de S, suivant la ligne L en partant de O tangentiellement à OT, reviendra en O, mais la tangente à l'arrivée sera nécessairement distincte de OT, car on voit aisément que l'observateur doit avoir toujours d'un même côté (droite ou gauche) les points voisins de lui d'altitude supérieure à la sienne et qu'au voisinage du point double, ces points correspondent à deux angles (formés par les demi-tangentes) opposés par le sommet. Dans le déplacement précédent, l'observateur a donc parcouru un cycle de niveau L_1 avec point anguleux en O. Aux deux autres demi-branches de courbe L, passant en O, correspond un cycle analogue L_2.

Nous appellerons *passages* les points tels que O; soient σ leur nombre et μ celui des fonds et des sommets, c'est-à-dire des points où U est maximum ou minimum.

2. *Régions.* — Traçons sur S les cycles de niveau à points anguleux tels que L_1, L_2; ils divisent S en régions R, chaque région étant la partie de S balayée par un cycle de niveau dont l'altitude varie jusqu'à ce que le cycle se réduise à un point ou aboutisse à un passage en acquérant un point anguleux; à une région correspondent deux points doubles.

Un passage O est à la fois sur les frontières de trois régions. Soient, en effet, L_1 l'un des deux cycles de niveau correspondant à ce passage et A_1 l'angle des deux demi-droites tangentes au point anguleux de L_1, A_3 l'angle opposé par le sommet, et A_2, A_4 les deux angles adjacents aux deux précédents. Appelons U_0 l'altitude de O et ε un nombre positif très petit; admettons, pour fixer les idées, que les points de S voisins de O correspondant à l'intérieur de A_1 aient une altitude supérieure à celle de O. Alors, d'après ce qui précède, en suivant un cycle de niveau d'altitude $U_0 - \varepsilon$, on peut passer en restant au voisinage de L_1 de l'angle A_2 à l'angle A_4 pour revenir ensuite à l'angle A_2 en restant au voisinage de L_2. Au contraire, la partie L'_1 d'une courbe de niveau d'altitude $U_0 + \varepsilon$, infiniment voisine de L_1, forme à elle seule un cycle, L'_1. Un mobile la suivant en restant infiniment voisin de l'observateur qui décrit L_1 comme on l'a dit précédemment (en partant de O pour y revenir en marchant toujours dans le même sens) se trouvera, en effet, à l'arrivée comme au départ à l'intérieur de A_1. Il y a de même un cycle L'_2 d'altitude $U_0 + \varepsilon$ voisin de L_2.

Puisqu'un passage est contigu à trois régions et qu'un fond n'appartient qu'à une seule région et qu'il en est de même pour un sommet, il y en a en tout $\frac{3\sigma+\mu}{2}$ régions, et *le nombre* $\mu+\sigma$ *est pair;* c'est la généralisation du début du théorème de Reech.

3. *Connexion des diverses régions.* — Il est bon de remarquer que les trajectoires orthogonales des lignes de niveau ou encore, comme nous les appellerons plus brièvement, *les lignes de pente rencontrant un cycle de niveau rencontrent aussi tout cycle de niveau suffisamment voisin.*

Cela résulte des théorèmes d'existence des solutions du système différentiel

$$\frac{dq_1}{G\frac{\partial U}{\partial q_1} - F\frac{\partial U}{\partial q_2}} = \frac{dq_2}{E\frac{\partial U}{\partial q_2} - F\frac{\partial U}{\partial q_1}} = \frac{dU}{(EG-F^2)\Delta U},$$

qui détermine ces lignes de pente; q_1, q_2 sont des coordonnées curvilignes d'un point de S (par exemple, les nombres ξ, η considérés plus haut), E, F, G les coefficients du ds^2 de la surface, ΔU le paramètre différentiel du premier ordre; on cherche q_1 et q_2 en fonction de la valeur de U prise comme variable indépendante. Les dérivées $\frac{dq_1}{dU}$, $\frac{dq_2}{dU}$ sont fonctions régulières de q_1, q_2, sauf aux fonds, aux sommets ou aux passages.

Soit R′ un domaine balayé par un cycle de niveau dont l'altitude U varie entre deux limites $U_1, U_2 : U_1 \leqq U \leqq U_2$; on suppose qu'il n'y a ni fond, ni sommet, ni passage dans R′ ou sur sa frontière. Un point M de R′ peut être caractérisé par son altitude U et par un autre paramètre t qui caractérise la position du point où la ligne de pente de M rencontre un cycle de niveau C_0 choisi à l'intérieur de R′. On peut évidemment supposer cette représentation paramétrique de C_0 choisie de façon que t et $t + 2\pi$ donnent le même point de C_0.

En regardant, d'autre part, t et $\alpha U + \beta$ (α et β étant des constantes) comme les coordonnées polaires (longitude et colatitude) d'un point M_1 d'une sphère S_1 de rayon (rayon vecteur) égal à l'unité, nous établissons une correspondance entre la région R′ et une zone R'_1 de cette sphère S_1. Si l'on choisit convenablement α et β, R′ et R'_1 se correspondent point par point de façon qu'à des éléments voisins de l'une des régions correspondent toujours des éléments voisins de l'autre; c'est dire que les deux régions sont applicables (1) l'une sur l'autre au sens de l'*Analysis situs*.

Si l'on fait croître maintenant U_2 et décroître U_1 de façon que les cycles correspondants se réduisent à un point ou contiennent un passage, R′ vient se confondre avec la région R définie comme plus haut sur S; R'_1 tend alors vers une région R_1; mais il faut ici distinguer divers cas : si l'un des cycles C_1 ou C_2 frontières de R′ tend à se réduire à un point (fond ou sommet), il est nécessaire que la base homologue de la zone R'_1 en fasse de même pour que la correspondance des contiguïtés subsiste toujours. De même, à un cycle de niveau contenant un passage doit correspondre sur la sphère un véritable cercle.

Nous serons d'ailleurs conduits plus loin à isoler les passages en

---

(1) JORDAN, *Sur la déformation des Surfaces* (*Journal de Mathématiques*, 1866).

enlevant de petits morceaux de S contenant ces points; nous pourrons, par exemple, pour un passage O d'altitude U_0 enlever la partie ω en forme de croix limitée par des parties de cycle de niveau d'altitudes $U_0 - \varepsilon$, $U_0 + \varepsilon$ (ε positif très petit) et par des lignes de pente passant par quatre points très voisins de O situés sur les deux cycles de niveau passant par O et placés de part et d'autre de O.

Quand on détache ainsi les petits morceaux ω, la région R est elle-même légèrement modifiée; elle devient une région $\overline{R}$ dont l'image $\overline{R}_1$ sur la sphère ne diffère d'une zone que par l'ablation de petits rectangles dont les côtés sont des arcs de méridiens ou de parallèles (de petits arcs étant ainsi enlevés sur l'une au moins des circonférences de base de la zone).

Écartons le cas où la surface S serait simplement connexe et où la fonction U ne présenterait qu'un maximum et qu'un minimum (cas où il n'y aurait qu'une région R dont l'image R_1 comprendrait toute la sphère), il ne reste que deux sortes de régions $\overline{R}$ à considérer : 1° celles dont les frontières correspondent à deux passages d'altitude différente et dont l'ordre de connexion est encore celui d'une zone ou d'un cylindre ouvert aux deux bouts : nous les appellerons régions tubulaires; 2° celles qui, contenant un fond ou un sommet, sont comme les calottes correspondantes simplement connexes.

4. *Formules.* — Appliquons maintenant à S les théorèmes connus concernant la connexion des surfaces ([1]).

Soit N l'ordre de connexion de la surface fermée S, après ablation des σ morceaux simplement connexes contenant les passages, l'ordre de connexion de la surface S' obtenue est $N + \sigma - 1$ (le premier morceau enlevé donnant une frontière; si S avait été ouverte, l'ordre de S' eût été $N + \sigma$).

La surface S' peut être divisée en morceaux simplement connexes par les coupures suivantes : 1° les 2σ cycles de niveau correspondant aux σ passages (grâce à l'ablation préalable des morceaux ω, ces cycles donnent lieu à des coupures dont les extrémités sont situées sur des

([1]) *Voir* le Traité classique de MM. Appell et Goursat : *Théorie des fonctions algébriques*, Chap. V, n^{os} 104 et 107.

bords), et 2° des coupures transversales rendant simplement connexes les parties tubulaires : on peut les pratiquer suivant des lignes de pente.

On a évidemment pour S' $\alpha = \frac{\mu + 3\sigma}{2}$ morceaux correspondant aux régions de S; il y avait μ régions contenant des fonds ou des sommets, et, par suite, $\alpha - \mu$ régions tubulaires; il y a donc en tout

$$\nu = 2\sigma + \alpha - \mu$$

coupures pratiquées dans S', et, d'après un théorème connu, la différence $\nu - \alpha$ est égale à l'ordre de connexion $N + \sigma - 1$ de S' diminué de deux unités, ce qui donne la formule cherchée

$$(1) \qquad \sigma - \mu = N - 3.$$

Par exemple, pour les surfaces simplement connexes

$$N = 1, \qquad \sigma - \mu = -2,$$

c'est le cas où le second théorème de Reech est valable, U(M) est alors la distance de M à un point P; pour les surfaces telles que le tore

$$N = 3, \qquad \sigma - \mu = 0,$$

et plus généralement pour une surface fermée dont le genre de Riemann est p, l'ordre de connexion $N = 2p + 1$, et

$$(2) \qquad \sigma - \mu = 2p - 2.$$

C'est le résultat de Möbius (*loc. cit.*, § 21 : la classe m de Möbius est égale à $p + 1$).

3. *Interprétation mécanique.* — Ces formules trouvent une application dans l'étude des mouvements d'un point matériel mobile sans frottement sur une surface S soumise à une force dont le travail élémentaire est la différentielle de la fonction U(M). A ces mouvements *vrais*, associons les mouvements *conjugués* correspondant à la fonction — U(M); les travaux de M. Appell et ceux de M. Painlevé ont montré l'intérêt de ce rapprochement. Les positions d'équilibre sont les mêmes pour les mouvements vrais et pour les mouvements conjugués; il en est qui sont stables, mais pour une seule des fonctions de forces U(M) et — U(M); d'autres qui sont instables pour les deux fonctions U et — U; l'excès du nombre des positions d'équilibre instables pour les mouvements vrais et pour les mouvements conjugués sur le nombre des positions où il y a stabilité pour l'une des lois de force est égal à l'ordre de connexion N de S diminué de trois unités.

6. *Autres démonstrations.* — M. W. Dyck (*loc. cit.*, § 12, p. 503) et M. Boy (*loc. cit.*, § 1 à 3, p. 154) ont donné des formules rattachant la connexion d'une surface S à un nombre C qu'on appelle parfois sa courbure totale et qu'on peut désigner par courbure intégrale (*curvatura integra* de Gauss), c'est-à-dire l'aire évaluée algébriquement de sa représentation sphérique, en comptant positivement les parties de cette représentation qui correspondent aux parties convexes de S et négativement les autres. Dans le cas d'une surface S fermée de genre p, C est relié aux nombres considérés plus haut par les relations

$$(3) \qquad \frac{C}{2\pi} = 2(1-p) = 3 - N = \mu - \sigma.$$

Des cas particuliers avaient été signalés par Darboux (*Théorie des Surfaces*, t. III, livre VI, Chap. VI). En conservant la méthode de l'illustre Géomètre, on peut appliquer une formule d'Ossian Bonnet à la démonstration de l'une de ces relations ainsi que nous allons l'indiquer très brièvement.

On utilise le réseau orthogonal précédemment considéré, formé par les lignes de niveau et les lignes de pente correspondantes. Les points singuliers P de ce réseau (fonds, sommets et passages) sont à isoler par de petites courbes fermées γ. On prend, par exemple, pour γ une courbe de S se projetant sur le plan tangent en P suivant un cercle de centre P de rayon infiniment petit.

L'intégrale étendue à S donnant C se ramène alors à des sommes d'intégrales curvilignes étendues aux coupures γ. A une coupure γ correspondent deux intégrales, l'une $\int \frac{ds}{\rho_g}$ où ds est d'élément d'arc, ρ_g le rayon de courbure géodésique a pour limite 2π; on démontre que l'autre $-\int d\omega$ où ω est l'angle de la tangente à γ et de la ligne de niveau passant au point de contact, nulle s'il s'agit d'un fond ou d'un sommet, tend vers -4π dans le cas d'un passage. On a ainsi

$$C = 2\pi(\mu - \sigma);$$

les travaux cités plus haut donnent les premières égalités (3).

7. *Généralisations diverses.* — Admettons que la fonction $U(M)$ soit définie sur une *surface ouverte* S, *connexe, dont la frontière se compose de n cycles de niveau.* On peut alors répéter les raisonnements antérieurs; il faut modifier l'expression de α qui est maintenant

$$\alpha = \frac{\mu + 3\sigma + n}{2}$$

et observer que S étant ouverte, l'ordre de connexion de S' est $N + \sigma$, N étant celui de S. Il vient alors

$$(4) \qquad \sigma - \mu = N - 2;$$

la somme $\sigma + \mu$ est alors de même parité que N.

Cette remarque nous permet de supposer que U *devient infinie en certains points de* S *isolés les uns des autres en admettant qu'au voisinage de ces points* P *la fonction* U *garde un signe déterminé.* Les lignes de niveau $U = C$ où C très grand en valeur absolue a le signe en question affectent alors au voisinage de P la forme de cycles entourant P; on voit immédiatement que ces points P où U devient infinie doivent être assimilés aux fonds et aux sommets et figurer avec eux dans l'évaluation de μ.

Par exemple, si la fonction de forces U est définie dans une partie connexe S d'un plan, limitée par certains cycles frontières où U reste constant; si, de plus U satisfait à l'équation de Laplace, la formule (4) donne

$$\sigma = \mu + N - 2;$$

σ est le nombre des positions d'équilibre (qui sont maintenant toutes instables), μ le nombre des infinis de U dans S, ces infinis étant supposés comparables au potentiel logarithmique d'un point isolé, N est l'ordre de connexion de S.

8. *Cas d'un domaine à trois dimensions.* — Les questions analogues à celles de Reech paraissent se compliquer beaucoup quand on augmente le nombre des variables dont dépend la fonction U, autrement dit le nombre de dimensions de la multiplicité où elle se trouve définie.

Nous examinerons seulement le cas où cette multiplicité est une *partie connexe* D *de l'espace ordinaire, limitée par des surfaces de niveau* ($U = \text{const.}$) *tout entières situées à distance finie, sans points multiples.*

On peut alors poser $U(M) = F(x, y, z)$, x, y, z étant des coordonnées rectangulaires du point M, et utiliser pour l'étude des points racines des trois équations

$$(5) \qquad F'_x = 0, \qquad F'_y = 0, \qquad F'_z = 0.$$

une méthode bien connue de Kronecker [1]. (Le procédé du n° **6** est d'ailleurs à rapprocher de cette méthode.) Kronecker utilise l'intégrale

$$I = \int_\Sigma L\, d\sigma$$

étendue à la frontière Σ du domaine D, $d\sigma$ est l'élément d'aire de Σ et la fonction L a l'expression suivante :

$$L = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ F'_x & F''_{x^2} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F'_y & F''_{yx} & F''_{y^2} & F''_{yz} \\ F'_z & F''_{zx} & F''_{zy} & F''_{z^2} \end{vmatrix} \frac{1}{[F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z]^{\frac{3}{2}}};$$

α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à Σ dirigée vers l'intérieur de D. *La valeur de* I *est*

$$I = 4\pi(p - n).$$

p et n sont les nombres des points racines intérieurs à D pour lesquels le hessien de F a respectivement les signes + et —. Nous supposons que F reste finie dans D et admet des dérivées continues des trois premiers ordres.

---

[1] Elle a été donnée dans les Mémoires cités plus haut; elle est exposée aussi dans les tomes I et II du *Traité d'Analyse*, de M. Picard.

Dans le cas actuel, où la frontière Σ de D est composée de surfaces fermées régulières Σ_i (sans points singuliers), à distance finie, sur chacune desquelles F garde une valeur constante, l'intégrale I s'exprime simplement à l'aide des courbures intégrales C_i de ces surfaces. Kronecker l'a montré dans le second des Mémoires cités plus haut, et il a étendu son résultat au cas de n dimensions. Dans ce qui suit, nous donnons une démonstration très simple, et nous précisons une question de signe.

On peut, sur chaque surface Σ_i, appartenant à la frontière Σ, remplacer l'expression L par

$$\Lambda = \varepsilon_i \begin{vmatrix} 0 & F'_x & F'_y & F'_z \\ F'_x & F''_{x^2} & F''_{xy} & F''_{xz} \\ F'_y & F''_{yx} & F''_{y^2} & F''_{yz} \\ F'_z & F''_{zx} & F''_{zy} & F''_{z^2} \end{vmatrix} \frac{1}{(F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z)^2},$$

$\varepsilon_i = +1$ ou $\varepsilon_i = -1$, suivant que la fonction F croît ou décroît quand, partant de Σ_i, on pénètre dans D. Utilisant alors les propriétés invariantes de Λ et de $d\sigma$ vis-à-vis d'un changement d'axes rectangulaires, nous choisirons les axes de façon qu'au point M considéré de $d\sigma$ pris comme origine de ces axes, on puisse écrire le développement de Taylor de F

$$F = A + Bz + \frac{1}{2}[Cx^2 + Dy^2 + Ez^2 + 2Fyz + 2Gzx]$$
$$+ \text{terme complémentaire.}$$

Des formules analogues s'appliquent aux dérivées, et l'on trouve, ainsi qu'au point M,

$$\Lambda = -\varepsilon_i \frac{DC}{B^2}.$$

D'autre part, les premiers termes du développement de Taylor de la fonction implicite z s'annulant en M, définie par $F - A = 0$, sont

$$z = -\frac{Cx^2 + Dy^2}{2B} + \ldots = \frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R'} + \ldots,$$

R et R' étant les rayons de courbure principaux de Σ_i en M. On a donc

$$\Lambda\, d\sigma = -\varepsilon_i \frac{d\sigma}{RR'}.$$

On voit apparaître ainsi l'aire de la représentation sphérique de $d\sigma$; et il vient enfin

$$n - p = \frac{1}{4\pi} \sum \varepsilon_i C_i; \tag{6}$$

la sommation est étendue à toutes les surfaces frontières.

Tel est le résultat que nous voulions établir; on ne peut d'ailleurs pas en donner une interprétation mécanique aussi simple que dans le cas des domaines à deux dimensions.