JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. ANDOYER

Sur la théorie analytique du mouvement de la Lune

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 7 (1928), p. 61-73.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1928_9_7__61_0>

Sur la théorie analytique du mouvement de la Lune;

PAR H. ANDOYER.

Au Tome XVII du *Bulletin astronomique* (p. 87 et 167), et au Chapitre XXIX de la deuxième Partie du Tome II des *Leçons de Mécanique céleste*, H. Poincaré a indiqué une nouvelle méthode extrêmement intéressante pour effectuer le développement analytique des coordonnées de la Lune dans son mouvement relatif autour de la Terre. On peut étendre la portée du principe très simple sur lequel il s'appuie, et, procédant d'une façon un peu différente, obtenir, ainsi que nous allons le montrer, des résultats entièrement satisfaisants pour celui qui se propose le calcul effectif des divers éléments dont dépend la théorie solaire analytique du mouvement de la Lune.

1. Soient les équations canoniques

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \tag{1}$$

où H est fonction de t, des x_i, y_i, et d'un certain nombre de paramètres (p). Après solution, x_i et y_i sont des fonctions de t, des (p) et des constantes arbitraires d'intégration (c) : les quantités (p) et (c), dans leur ensemble, seront les (q).

La fonction H, après remplacement des x_i, y_i par leurs valeurs, devient une fonction de t et des (q), et il en est de même des dérivées partielles par rapport à t et aux (p) de la forme primitive de H, dérivées que, pour éviter toute confusion, nous marquerons de la caractéristique δ.

Dans ces conditions, on a

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\delta H}{\delta q} + \frac{\partial}{\partial t}\sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial q}\sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial t},$$

la dérivée $\frac{\delta H}{\delta q}$ n'existant pas si q est l'une des constantes (c).

Faisons

$$S = \int \left(H + \sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial t} \right) dt, \qquad H_q = \int \frac{\delta H}{\delta q} dt,$$

ces quadratures n'étant définies qu'à des constantes près (par rapport à t). En considérant S comme fonction de t et des (q), et désignant par (C_q) des fonctions des seules variables (q), on a donc

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H + \sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial t}, \qquad \frac{\partial S}{\partial q} = H_q + C_q + \sum x_i \frac{\partial y_i}{\partial q},$$

ou bien, finalement,

$$dS = H\, dt + \sum x_i dy_i + \sum (H_q + C_q)\, dq. \tag{2}$$

Tel est le principe général qu'il s'agit maintenant d'appliquer à la théorie de la Lune.

2. Il est nécessaire de rappeler d'abord, aussi brièvement que possible, les conditions du problème.

Si X, Y, Z sont les coordonnées rectangulaires de la Lune par rapport à la Terre, avec r comme rayon vecteur correspondant, son mouvement est celui d'un point matériel de masse égale à l'unité, sous l'action d'une fonction de forces

$$U = \frac{\beta}{r} + n'^2 R,$$

la fonction R étant elle-même de la forme

$$R_2 + \beta'_1 R_3 + \beta'_2 R_4 + \ldots :$$

les quantités n', β, β'_1, β'_2, ... sont des constantes, et les R_k sont des polynomes homogènes en X, Y, Z, de degré k. Ces polynomes dépendent encore des arguments

$$N' = n't + l', \qquad G' = N' - \varpi',$$

et d'une nouvelle constante ε' : t désignant le temps, n', ε', l', ϖ' sont respectivement le moyen mouvement, l'excentricité, la longitude moyenne de l'époque et la longitude du périgée dans l'orbite purement képlérienne du Soleil autour du centre de gravité du système Terre-Lune, le plan de cette orbite étant normal à l'axe des Z; les paramètres restants, β, β'_1, β'_2, ... dépendent d'une façon simple du coefficient de l'attraction universelle, des masses des corps en présence, et du demi-grand axe a' de l'orbite solaire. Bien entendu, la fonction U a pour dimensions le carré d'une longueur multiplié par celui d'une vitesse angulaire.

L'intégration fait apparaître six constantes arbitraires n, ε, γ, l_0, ϖ_0, ϑ_0, dont la première est le moyen mouvement de la longitude lunaire; les cinq autres seraient respectivement, si l'on supposait nulle la constante n' (et si l'on néglige les carrés et le produit de ε, γ), l'excentricité, l'inclinaison, la longitude moyenne de l'époque, la longitude du périgée et la longitude du nœud ascendant dans l'orbite alors purement képlérienne de la Lune. Le temps t et les angles l_0, ϖ_0, ϑ_0 ne figurent dans les expressions des coordonnées X, Y, Z, et dans celles de leurs dérivées par rapport au temps, X', Y', Z', que par les arguments

$$N = nt + l_0, \qquad G = gn - \varpi_0, \qquad H = hn - \vartheta_0,$$

les coefficients g, h dépendant eux-mêmes de n, ε, γ, n', ε', β, β'_1, β'_2, ... Ajoutons que les expressions des coordonnées sont périodiques par rapport aux arguments N, N', G, G', H, et qu'il en est de même de celle de R par rapport à N' et G', le temps t n'y figurant pas autrement.

Les équations du mouvement ont la forme canonique (1) en faisant

$$H = U - \frac{1}{2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2),$$

et prenant les x_i pour X', Y', Z', les y_i pour X, Y, Z; donc, avec les variables t, (q), c'est-à-dire ici

$$t,\ n,\ \varepsilon,\ \gamma,\ l_0,\ \varpi_0,\ \vartheta_0,\ n',\ \varepsilon',\ l',\ \varpi',\ \beta,\ \beta'_1,\ \beta'_2,\ \ldots,$$

on a

$$(3) \qquad dS = \left[U - \frac{1}{2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)\right] dt + X'dX + Y'dY + Z'dZ$$
$$+ \sum \left(C_q + \int \frac{\delta U}{\delta q} dt\right) dq;$$

et l'on voit que la fonction S pourra être prise sous la forme $S_0 t + S_1$, en désignant par S_0 une constante, et par S_1 une fonction purement périodique (c'est-à-dire sans partie constante). Nous conviendrons d'ailleurs de prendre sous la même forme toutes les quadratures $\int \frac{\delta U}{\delta q} dt$.

Il est avantageux de développer la relation fondamentale (3) en faisant usage d'autres variables. Posons d'abord

$$m = \frac{n'}{n}, \qquad n^2 a^3 = \beta, \qquad \beta_1 = a\beta'_1, \qquad \beta_2 = a^2 \beta'_2, \; \ldots,$$

de sorte que a est une longueur, tandis que m, β_1, β_2, ... sont de purs nombres. Puis attribuant aux lettres e et i la signification habituelle en analyse, faisons encore

$$\theta = e^{i(N-N')}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} e^{iG}, \qquad \gamma_1 = \frac{\gamma}{2} e^{iH}, \qquad \varepsilon'_1 = \frac{\varepsilon'}{2} e^{iG'},$$
$$\varepsilon_{-1} = \frac{\varepsilon}{2} e^{-iG}, \qquad \gamma_{-1} = \frac{\gamma}{2} e^{-iH}, \qquad \varepsilon'_{-1} = \frac{\varepsilon'}{2} e^{-iG'};$$

nos nouvelles variables seront, avec t,

$$n,\; a,\; N,\; m,\; \theta,\; \varepsilon_1,\; \varepsilon_{-1},\; \gamma_1,\; \gamma_{-1},\; \varepsilon'_1,\; \varepsilon'_{-1},\; \beta_1,\; \beta_2,\; \ldots.$$

D'autre part, remplaçons X, Y, Z par p, q, ζ, à l'aide des formules

$$X + iY = ape^{iN}, \qquad X - iY = aqe^{-iN}, \qquad iZ = a\zeta,$$

et désignons aussi par ρ le rapport $\frac{a}{r}$; employons la caractéristique D comme signe de dérivation par rapport à la variable (iN) remplaçant t [la notation inverse $D^{-1}F$ représentera la quadrature $\int F\, d(iN)$], et faisons

$$p' = Dp + p, \qquad q' = Dq - q, \qquad \zeta' = D\zeta,$$

de sorte que

$$X' + iY' = ianp'e^{iN}, \qquad X' - iY' = ianq'e^{-iN}, \qquad Z' = an\zeta'.$$

Les fonctions p, q, ζ, p', q', ζ' sont développables suivant les puissances entières positives ou nulles (et négatives, quand il s'agit de θ) des variables m, θ, ε_1, ε_{-1}, ..., énumérées plus haut, à l'exclusion de n, a, N; p et q, comme p' et $-q'$, sont des fonctions conjuguées; ρ, ζ' sont réelles; ζ est purement imaginaire.

En faisant encore

$$F = \frac{R}{a^2} = F_2 + \beta_1 F_3 + \beta_2 F_4 + \ldots,$$

les F_k seront des polynomes homogènes en p, q, ζ, de degré k; ζ n'y figurera que par son carré; et ces fonctions seront en outre développables suivant les puissances de ε'_1 et ε'_{-1}, dépendantes encore de θ, mais uniquement par les combinaisons $p\theta$, $q\theta^{-1}$. On désignera dans ce qui suit par F' l'expression

$$2F_2 + 3\beta_1 F_3 + 4\beta_2 F_4 + \ldots.$$

Enfin, nous prendrons la fonction réelle S sous la forme

$$n^2 a^2 K_0 t + ina^2 K,$$

K_0 et K désignant respectivement une constante et une fonction purement périodique : K ne renferme ni n, ni a, ni N; K_0, comme les coefficients g, h, ne dépend que de m, β_1, β_2, ... et des produits

$$\varepsilon_1 \varepsilon_{-1}, \quad \gamma_1 \gamma_{-1}, \quad \varepsilon'_1 \varepsilon'_{-1}.$$

3. Envisageons d'abord la fonction K. Faisons

$$K' = K - D(pq - \zeta^2),$$

$$J_u = -\frac{1}{2}\left(p' u \frac{\partial q}{\partial u} + q' u \frac{\partial p}{\partial u}\right) + \zeta' u \frac{\partial \zeta}{\partial u},$$

pour $u = m$, θ, ε_1, ε_{-1}, γ_1, γ_{-1}, ε'_1, ε'_{-1}, β_1, β_2, ...; et convenons de réduire toutes les fonctions figurant dans les formules qui vont suivre immédiatement à leurs parties purement périodiques. On voit aisément, en opérant quelques combinaisons linéaires très simples, s'il est nécessaire, que la relation (3) donne naissance aux équations suivantes, où l'on a remis partout le signe ∂ au lieu de δ, aucune confusion n'étant plus à craindre :

$$\frac{1}{2}\left(p'q - pq'\right) - m^2 D^{-1}\left(\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = 0, \tag{4}$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & D^2(pq - \zeta^2) - (p'q' - \zeta'^2) + 2m^2(F + F') \\ & \qquad + 2m^3 D^{-1}\left(\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \varepsilon'_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_{-1}}\right) = 0. \\ & \frac{1}{2} D^2(pq - \zeta^2) + \rho + m^2(2F + F') \\ & \qquad + 2m^3 D^{-1}\left(\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \varepsilon'_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_{-1}}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & DK' = 2m^2(F + F') + 3m^3 D^{-1}\left(\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \varepsilon'_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_{-1}}\right), \\ & K' + 3\left(m \frac{\partial K}{\partial m} + J_m\right) + 2m^2 D^{-1}(2F - F') = 0, \end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & u \frac{\partial K}{\partial u} + J_u = 0 \qquad (u = \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \gamma_1, \gamma_{-1}). \\ & u \frac{\partial K}{\partial u} + J_u + m^2 D^{-1}\left(u \frac{\partial F}{\partial u}\right) = 0 \qquad (u = \theta, \varepsilon'_1, \varepsilon'_{-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots). \end{aligned}\right.$$

On trouve de même, relativement à K_0, en désignant par $(f)_0$ la partie constante d'une fonction périodique quelconque f,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & (p'q' - \zeta'^2)_0 + (\rho)_0 - m^2(F')_0 = 0, \\ & (p'q' - \zeta'^2)_0 + \frac{1}{2}(p'q - pq')_0 + (1 - m)(J_\theta)_0 + 2g(J_{\varepsilon_1})_0 \\ & \qquad + 2h(J_{\gamma_1})_0 + 2m(J_{\varepsilon'_1})_0 = 0. \\ & 2K_0 = 3(\rho)_0 + m^2(2F - F')_0, \\ & m \frac{\partial K_0}{\partial m} = 2m^2(F)_0 - m(J_\theta)_0 + 2m \frac{\partial g}{\partial m}(J_{\varepsilon_1})_0 + 2m \frac{\partial h}{\partial m}(J_{\gamma_1})_0 + 2m(J_{\varepsilon'_1})_0, \\ & u \frac{\partial K_0}{\partial u} = 2u \frac{\partial g}{\partial u}(J_{\varepsilon_1})_0 + 2u \frac{\partial h}{\partial u}(J_{\gamma_1})_0 \qquad (u = \varepsilon_1, \gamma_1), \\ & u \frac{\partial K_0}{\partial u} = 2u \frac{\partial g}{\partial u}(J_{\varepsilon_1})_0 + 2u \frac{\partial h}{\partial u}(J_{\gamma_1})_0 + m^2\left(u \frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 \quad (u = \varepsilon'_1, \beta_1, \beta_2, \ldots). \end{aligned}\right.$$

Pour préciser la définition des constantes ε, γ, le mieux serait sans doute de les choisir de façon que $(J_{\varepsilon_1})_0 = \varepsilon_1 \varepsilon_{-1}$, $(J_{\gamma_1})_0 = \gamma_1 \gamma_{-1}$; mais ce choix n'est aucunement nécessaire. Si l'on veut donner à ε, γ la même signification que dans les travaux que j'ai publiés précédemment (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. LVIII et LIX), on prendra les coefficients complets de e^{iG} et e^{iH} dans les expressions de ρ et ζ égaux respectivement à $\frac{\varepsilon}{2}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\frac{\gamma}{2}\left(1+\frac{m^2}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Les équations (4) et (5) ont été déjà utilisées par les différents auteurs qui se sont occupés de la théorie de la Lune à la suite de G. W. Hill; elles résultent d'ailleurs fort simplement des équations primitives du mouvement

$$(9)\qquad \begin{cases} (D^2+2D+1-\rho^3)p+2m^2\dfrac{\partial F}{\partial q}=0, \\ (D^2-2D+1-\rho^3)q+2m^2\dfrac{\partial F}{\partial p}=0, \\ (D^2-\rho^3)\zeta-m^2\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}=0, \end{cases}$$

utilisées aussi, et dont il convient de noter les deux combinaisons

$$(10)\qquad \begin{cases} (D+1)(p'\zeta-p\zeta')+m^2\left(p\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}+2\zeta\dfrac{\partial F}{\partial q}\right)=0, \\ (D-1)(q'\zeta-q\zeta')+m^2\left(q\dfrac{\partial F}{\partial \zeta}+2\zeta\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)=0. \end{cases}$$

4. Cet usage des équations où ne figure pas K est en général simple et sûr, en raison de la forme particulière de la fonction F; mais il entraîne des inconvénients assez graves, et qui pourraient pratiquement devenir insurmontables, quand il s'agit de la détermination des termes à période voisine du mois lunaire ou à longue période, c'est-à-dire, d'une façon précise, pour lesquels le coefficient D diffère de ± 1 ou de 0, d'une quantité qui est au moins de l'ordre de m. Quand on veut obtenir un tel terme à l'aide des équations (4), (5), (9), et avec un certain degré d'approximation par rapport à m, on est amené à des calculs *superflus*, c'est-à-dire que le développement des opérations exige une approximation supérieure à celle que l'on recherche, sans qu'il y ait là une nécessité découlant des conditions mêmes du problème. Toutefois il faut ajouter que cette difficulté n'affecte pas les termes à longue période de ζ, et qu'elle disparaît pour les termes à période voisine du mois dans cette coordonnée, par un usage judicieux des équations (10).

Nous allons montrer qu'en faisant intervenir la fonction K, on peut instituer une méthode régulière, aussi simple et aussi sûre, évitant tout calcul superflu.

Nous supposerons d'abord que les différents termes du développement de ζ sont déterminés par les équations (10), qui, nous l'avons déjà dit, ne présentent aucune difficulté; considérons alors les coefficients dans K, K', p, q d'un certain monome M, de la forme générale

$$M = m^k \theta^s \varepsilon_1^{\rho_1} \varepsilon_{-1}^{\rho_{-1}} \gamma_1^{\sigma_1} \gamma_{-1}^{\sigma_{-1}} \varepsilon_1'^{\rho_1'} \varepsilon_{-1}'^{\rho_{-1}'} \beta_1^{\omega_1} \beta_2^{\omega_2} \ldots,$$

et appelons K_0, K'_0, p_0, q_0 ces coefficients (sans confusion possible sur le sens de la notation K_0, déjà employée).

Observons que, si l'on se borne aux parties principales, on a

$$p = q = p' = -q' = 1;$$

soit aussi D_0 la partie principale $s + \rho_1 - \rho_{-1} + \sigma_1 - \sigma_{-1}$ du coefficient D relatif au monome M, et faisons

$$\varphi = K_0 + \frac{1}{2}(p_0 - q_0).$$

Si le monome M est à courte période, c'est-à-dire si D_0 n'est pas nul, on voit facilement que les équations (7) fournissent d'abord, à l'aide de quantités connues par le jeu des approximations successives convenablement dirigées, les valeurs $s\varphi$, $\rho_1\varphi$, $\rho_{-1}\varphi$, ..., $\omega_1\varphi$, ..., et par suite celle de φ, obtenue le plus souvent de plusieurs façons nécessairement concordantes; la valeur de K'_0 résulte de même de la première équation (6), ou de la seconde, en se servant de celle de φ. Mais K'_0 vaut $K_0 - D_0(p_0 + q_0)$, à des termes connus près, et par suite on obtient la quantité

$$D_0(p_0 + q_0) + \frac{1}{2}(p_0 - q_0)$$

égale à $\varphi - K'_0$; dans les mêmes conditions, l'équation (4) détermine

$$p_0 + q_0 + \frac{1}{2} D_0(p_0 - q_0).$$

Si donc la période du monome M n'est pas voisine du mois, on a immédiatement les inconnues p_0 et q_0; dans le cas contraire, on a seulement la valeur de la combinaison $3p_0 + q_0$ ou $p_0 + 3q_0$, suivant que D_0 est $+1$ ou -1.

Supposons maintenant le monome M à longue période, c'est-à-dire D_0 nul. Dans ce cas, il faut faire intervenir encore les parties principales de p, q, p', q' en ε_1 et ε_{-1}, soit, en y joignant celles déjà considérées,

$$p = 1 + \varepsilon_1 - 3\varepsilon_{-1}, \qquad q = 1 - 3\varepsilon_1 + \varepsilon_{-1},$$
$$p' = 1 + 2\varepsilon_1, \qquad q' = -1 - 2\varepsilon_{-1};$$

il faut aussi mettre en évidence les coefficients p_1, q_1, p_{-1}, q_{-1} dans p, q, des deux monomes à période voisine du mois qui sont *contigus* à M, savoir $\frac{M}{\varepsilon_1}$, $\frac{M}{\varepsilon_{-1}}$, s'ils existent.

Faisant alors

$$\varphi = K_0 + \frac{1}{2}(p_0 - q_0) - q_1 + p_{-1},$$

on vérifie sans peine que les équations (7) fournissent actuellement, à l'aide de quantités connues, les valeurs de

$$s\varphi, \quad \rho_1\varphi + 2q_1, \quad \rho_{-1}\varphi - 2p_{-1}, \quad \sigma_1\varphi, \quad \ldots, \quad \omega_1\varphi, \quad \ldots;$$

on peut donc encore déterminer φ (car si s, σ_1, σ_{-1}, ... étaient tous nuls, M serait constant); q_1, p_{-1} en résultent, et en achevant comme ci-dessus, on obtient finalement p_0 et q_0. La détermination complète des termes associés à période voisine du mois est assurée par le fait que l'on connaît déjà $p_1 + 3q_1$, $3p_{-1} + q_{-1}$. Remarquons encore que, dans l'hypothèse où l'un au moins des exposants σ_1, σ_{-1} n'est pas nul, on peut tirer des formules (7) toutes les quadratures nécessaires à l'achèvement du calcul, et éviter ainsi des intégrations effectives qui pourraient devenir incommodes.

Le succès éprouvé confirme la valeur de cette méthode qui n'exige que des calculs simples. Ici, d'ailleurs, comme dans ce qui suit, il serait facile d'imaginer bien des variantes, et de nombreux procédés destinés à assurer l'exactitude des calculs : mais il n'y a pas lieu d'insister actuellement sur ces points, et il convient de laisser à l'expérience le soin d'une telle recherche.

Les équations (8) serviront à la détermination de g, de h, des termes constants et des termes à période voisine du mois qui leur sont contigus; leur usage n'appelle aucune observation nouvelle.

5. On peut aborder le problème d'une manière entièrement différente, en cherchant à déterminer directement les éléments variables de l'orbite de la Lune considérée comme képlérienne : ces éléments peuvent sans doute se déduire des coordonnées elles-mêmes et de leurs dérivées, mais par des formules trop peu simples en général pour se prêter à l'application.

Si $a_0, \varepsilon_0, j_0, l, \varpi, \vartheta$ sont respectivement le demi-grand axe, l'excentricité, l'inclinaison, la longitude moyenne, la longitude du périgée, et la longitude du nœud ascendant dans l'orbite képlérienne de la Lune; et si l'on fait, en conservant partout les notations déjà introduites dans ce qui précède,

$$A = \sqrt{\beta a_0}, \qquad B = A\left(1 - \sqrt{1 - \varepsilon_0^2}\right), \qquad C = (A - B)(1 - \cos j_0),$$
$$H = \frac{\beta^2}{2A^2} + n'^2 R,$$

les équations du problème sont les équations canoniques (1), en prenant A, B, C pour les x_i, et $l, -\varpi, -\vartheta$ pour les y_i; et par suite, il existe une fonction S' telle que

$$(11) \qquad dS' = H\,dt + A\,dl - B\,d\varpi - C\,d\vartheta + \Sigma\left(C_q + \int \frac{\partial H}{\partial q}\,dt\right) dq.$$

La définition primitive des fonctions S et S' comme quadratures montre sans peine que

$$S - S' = \frac{d(r^2)}{dt},$$

en vertu de la relation simple qui lie r, a_0 et $X'^2 + Y'^2 + Z'^2$, ainsi que du fait que X, Y, Z sont homogènes et du second degré par rapport à A, B, C; et par suite, on a

$$S' = n^2 a^2 K_0 t + ina^2 K',$$

K_0 et K' étant précisément les mêmes fonctions que ci-dessus.

Faisons

$$A = na^2 x, \qquad B^{\frac{1}{2}} e^{i(N-\varpi)} = (2na^2)^{\frac{1}{2}} y, \qquad C^{\frac{1}{2}} e^{i(N-\vartheta)} = (2na^2)^{\frac{1}{2}} z,$$

$$il = iN + \lambda, \qquad B^{\frac{1}{2}} e^{-i(N-\varpi)} = (2na^2)^{\frac{1}{2}} y', \qquad C^{\frac{1}{2}} e^{-i(N-\vartheta)} = (2na^2)^{\frac{1}{2}} z',$$

$$J'_u = xu\frac{\partial\lambda}{\partial u} + y'u\frac{\partial y}{\partial u} - yu\frac{\partial y'}{\partial u} + z'u\frac{\partial z}{\partial u} - zu\frac{\partial z'}{\partial u};$$

les développements des nouvelles variables sont semblables à ceux de p, q, ζ : les fonctions x et λ sont respectivement réelles et purement imaginaire; y, y', comme z, z', sont conjuguées.

La formule (11) conduit directement aux équations suivantes analogues à (4), (5), (6), (7), et qu'il faut comprendre de la même façon :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
& x - 2yy' - 2zz' - m^2 D^{-1}\left(\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) = 0,\\
& \frac{1}{x^2} - D\left(m\frac{\partial K'}{\partial m} + J'_m\right) + m^3 D^{-1}\left(\theta\frac{\partial F}{\partial\theta} - \varepsilon'_1\frac{\partial F}{\partial\varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1}\frac{\partial F}{\partial\varepsilon'_{-1}}\right) = 0,\\
& DK' = 2m^2(F + F') + 3m^3 D^{-1}\left(\theta\frac{\partial F}{\partial\theta} - \varepsilon'_1\frac{\partial F}{\partial\varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1}\frac{\partial F}{\partial\varepsilon'_{-1}}\right),\\
& K' + 3\left(m\frac{\partial K'}{\partial m} + J'_m\right) + 2m^2 D^{-1}(2F - F') = 0,\\
& u\frac{\partial K'}{\partial u} + J'_u = 0 \qquad (u = \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \gamma_1, \gamma_{-1}),\\
& u\frac{\partial K'}{\partial u} + J'_u + m^2 D^{-1}\left(u\frac{\partial F}{\partial u}\right) = 0 \qquad (u = \theta, \varepsilon'_1, \varepsilon'_{-1}, \beta_1, \beta_2, \ldots).
\end{aligned}\right.$$

Les dernières équations (8), relatives à K_0, subsistent, en observant que les quantités $(J_\theta)_0$ et $(J'_\theta)_0$, $(J_{\varepsilon_1})_0$ et $(J'_{\varepsilon_1})_0$, ... sont nécessairement égales; quant aux trois premières, elles sont faciles à transformer en observant les relations

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
& x - 2yy' - 2zz' = \frac{1}{2}(p'q - pq'),\\
& \frac{1}{x^2} = \rho + \frac{1}{2}D^2(pq - \zeta^2) + m^2 F' = 2\rho + (p'q' - \zeta'^2),
\end{aligned}\right.$$

valables d'une façon générale, c'est-à-dire aussi bien pour les parties constantes que pour les parties périodiques.

Joignons encore à ces relations entre les éléments et les coordonnées les deux suivantes, relativement simples :

$$
(14) \qquad \begin{cases} z(x - 2yy' - zz')^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(q'\zeta - q\zeta') = 0, \\ z'(x - 2yy' - zz')^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(p'\zeta - p\zeta') = 0. \end{cases}
$$

6. En raison du développement prolixe et compliqué de la fonction F exprimée à l'aide des six variables x, λ, y, y', z, z', et en vue d'éviter les substitutions rebutantes et peu sûres analogues à celles qu'exige la méthode de Delaunay, il n'y a pas lieu d'envisager ici les équations primitives de la forme (1) qui définissent directement les éléments, ni même de se servir des équations (12) sans en avoir éliminé F. Déterminant tout à la fois et les éléments et les coordonnées, on empruntera plutôt, s'il est nécessaire, pour le calcul des premiers, quelques-uns des résultats obtenus en recherchant les secondes. Les calculs deviendront alors extrêmement faciles, et l'on rencontrera, en procédant ainsi, de nouvelles et nombreuses vérifications, dont il suffit d'avoir signalé l'existence.

En tirant les valeurs de $m^2 D^{-1}\left(\theta \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)$, $m^2 D^{-1}\left(\varepsilon'_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_1}\right)$, ..., des dernières équations (12) pour les porter dans les premières (sauf la troisième), et désignant, pour abréger, par η la quantité

$$
m^2 D^{-1}\left(\theta \frac{\partial F}{\partial \theta} - \varepsilon'_1 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_1} + \varepsilon'_{-1} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon'_{-1}}\right),
$$

on a l'ensemble de formules, où F a disparu,

$$
(15) \qquad \begin{cases} x - 2yy' - 2zz' + \theta \dfrac{\partial K'}{\partial \theta} + J'_\theta = 0, \\[2mm] \dfrac{1}{x^2} - D\left(m \dfrac{\partial K'}{\partial m} + J'_m\right) + m\eta = 0, \\[2mm] K' + 3\left(m \dfrac{\partial K'}{\partial m} + J'_m\right) + 2\left(\beta_1 \dfrac{\partial K'}{\partial \beta_1} + J'_{\beta_1}\right) + 4\left(\beta_2 \dfrac{\partial K'}{\partial \beta_2} + J'_{\beta_2}\right) + \ldots = 0, \\[2mm] u \dfrac{\partial K'}{\partial u} + J_u = 0 \qquad (u = \varepsilon_1, \varepsilon_{-1}, \gamma_1, \gamma_{-1}). \end{cases}
$$

Envisageons alors le même monome M que précédemment, et supposons-le d'abord à courte période. Soient K'_0, x_0, λ_0, les coefficients de ce monome dans K', x, λ; et y'_1, y_{-1}, z'_1, z_{-1} les coefficients dans y', y, z', z des monomes contigus $\frac{M}{\varepsilon_1}$, $\frac{M}{\varepsilon_{-1}}$, $\frac{M}{\gamma_1}$, $\frac{M}{\gamma_{-1}}$, s'ils existent.

Observons qu'en se bornant aux parties principales, et aux termes en ε_1, ε_{-1}, γ_1, γ_{-1}, on a

$$x = 1, \qquad \lambda = 0, \qquad y = \varepsilon_1, \qquad y' = \varepsilon_{-1}, \qquad z = \gamma_1 \qquad z' = \gamma_{-1},$$

et faisons

$$\psi = K'_0 + \lambda_0 - y'_1 + y_{-1} - z'_1 + z_{-1}.$$

On voit sans peine que les équations (15) fournissent, à l'aide de quantités connues par le jeu des approximations successives, les valeurs de

$$x_0 - 2y'_1 - 2y_{-1} - 2z'_1 - 2z_{-1} + s\psi, \qquad 2x_0 + D_0 k\psi,$$
$$K'_0 + (3k + 2\omega_1 + 4\omega_2 + \ldots)\psi,$$
$$\rho_1\psi + 2y'_1, \qquad \rho_{-1}\psi - 2y_{-1}, \qquad \sigma_1\psi + 2z'_1, \qquad \sigma_{-1}\psi - 2z_{-1};$$

éliminant encore y'_1, y_{-1}, z'_1, z_{-1}, la première de ces quantités devient $x_0 + D_0\psi$, et par suite, puisque D_0 n'est pas nul, toutes les inconnues introduites sont déterminées, si toutefois l'exposant k n'est pas 2.

Si $k = 2$, on déterminera ψ à l'aide de la valeur de K'_0 qui a déjà servi au calcul des coordonnées; ou bien encore, on utilisera l'une des dernières équations (12), en y mettant de même pour les quadratures $m^2 D^{-1}\left(u\frac{\partial F}{\partial u}\right)$ les valeurs précédemment calculées. On peut d'ailleurs opérer ainsi dans les autres cas, et obtenir alors de précieuses vérifications.

Dans le cas d'un monome à longue période, les quantités connues restent les mêmes; mais D_0 étant nul, x_0 est immédiatement déterminé, et il faudra encore chercher directement ψ; on y arrive comme ci-dessus à l'aide des valeurs supposées connues de K'_0 ou des quadratures $m^2 D^{-1}\left(u\frac{\partial F}{\partial u}\right)$. Mais tous ces procédés tombent en défaut lorsque les exposants k, s, ρ'_1, ρ'_{-1}, ω_1, ω_2, ... sont tous nuls : dans ce cas exceptionnel, on déterminera directement z'_1 ou z_{-1} (l'un des deux existant nécessairement) par les formules (14); ψ en résultera, et les autres inconnues s'ensuivront.