JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE BOREL

Le calcul des probabilités et les sciences exactes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 115-123.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__115_0>

Le calcul des probabilités et les sciences exactes (¹);

PAR ÉMILE BOREL.

Le calcul des probabilités est une branche relativement récente des mathématiques, puisque ses origines remontent seulement au XVIIᵉ siècle. C'est à la fin du XVIIIᵉ siècle que Laplace a publié son grand traité des probabilités et c'est seulement au XIXᵉ que les applications du calcul des probabilités sont devenues nombreuses et ont pénétré à peu près toutes les branches de la connaissance scientifique.

Je n'ai pas l'intention de faire l'historique de ce développement rapide du calcul des probabilités au cours du XIXᵉ siècle. En même temps que les applications se multipliaient, les principes mêmes de la théorie des probabilités étaient approfondis par les mathématiciens les plus éminents et de nombreux traités étaient consacrés dans tous les pays à l'exposition des principes sur lesquels repose le calcul des probabilités, et à l'étude de certaines de ces applications.

Parmi ces applications, les plus importantes au point de vue de la pratique sont celles qui sont relatives aux assurances de toutes natures et en particulier aux assurances sur la vie. On pourrait mentionner aussi les applications à certaines recherches biologiques, en ce qui concerne particulièrement la sélection des graines de semence, et dans un domaine entièrement différent, les applications au réglage des tirs de l'artillerie. Toutes ces applications concernent des sciences et des théories assez conjecturales, et il a pu paraître naturel que ce soit dans ce domaine que le calcul des probabilités se montre le plus utile.

(¹) Conférence écrite pour le Congrès international des mathématiciens (Bologne, 1928).

Cependant, la théorie des erreurs d'observations s'est révélée rapidement indispensable à toutes les sciences qui utilisent des instruments précis de mesure et en particulier à l'astronomie et à la physique. Cette théorie des erreurs est une branche de la théorie générale des probabilités, et a été parfois exposée dans des ouvrages spéciaux d'une manière presque indépendante des théories générales auxquelles elle se rattache.

Quelle que soit l'importance et l'intérêt de ces applications diverses du calcul des probabilités, je n'en parlerai pas plus longuement aujourd'hui, voulant me borner aux applications d'une nature plus théorique et à essayer de préciser quel peut être le rôle du calcul des probabilités dans les sciences exactes, c'est-à-dire dans les mathématiques pures et dans les recherches théoriques de mécanique, d'astronomie et de physique.

Nous laissons donc de côté tout ce qui concerne les applications du calcul des probabilités à la science expérimentale, pour nous borner à ses applications à la science théorique.

I.

Il semble, au premier abord, qu'il y ait contradiction absolue entre la notion de probabilités, et la notion même de sciences exactes. On aurait fort étonné les géomètres grecs en leur faisant entendre que la probabilité peut jouer un rôle dans un domaine où il n'y a place que pour la certitude. Qu'il s'agisse des propriétés géométriques du triangle, des propriétés arithmétiques des nombres entiers et de leurs diviseurs, les théorèmes d'Euclide énoncent des vérités absolues et non pas contingentes, on ne conçoit pas la possibilité d'introduire le hasard dans une série de syllogismes.

Les applications des mathématiques à la mécanique, à l'astronomie, à la physique, présentent le même caractère de certitude objective. Lorsque Newton déduit de sa loi de l'attraction universelle les lois de Kepler sur le mouvement elliptique, il énonce des résultats certains, et non pas des résultats probables. De même, lorsqu'un physicien géomètre calcule les dispositions qu'il faut donner à un système optique centré pour obtenir un certain grossissement, ces calculs ont la rigueur de la géométrie et de l'algèbre et ne laissent pas de place au hasard. L'hypothèse que le calcul des probabilités pouvait jouer un rôle en de telles matières aurait donc apparu pendant longtemps comme une hypothèse complètement absurde et déraisonnable.

On sait que c'est dans l'étude des propriétés des gaz que le calcul des probabilités s'est pour la première fois introduit dans les sciences exactes. Si l'on imagine un gaz comme formé d'un nombre extrêmement considérable de molécules, il est humainement impossible de calculer et de prévoir le mouvement de toutes ces molécules. On se trouve ainsi conduit à essayer de remplacer ce calcul exact, qui est pratiquement impossible, par un calcul approximatif dans lequel s'introduisent nécessairement des hypothèses de probabilité. Ces conceptions, dont l'origine remonte à Bernoulli, ont pris un grand développement dans la seconde moitié du XIXe siècle, grâce aux travaux de Maxwell, de Boltzmann et de Jeans. Aujourd'hui, elles sont universellement admises, grâce aux magnifiques travaux expérimentaux de M. Jean Perrin qui a pu réaliser à une échelle qui nous est accessible des phénomènes entièrement analogues à ceux qu'avait imaginé le génie des créateurs de la théorie cinétique des gaz.

Les physiciens sont maintenant tous habitués à voir la théorie des probabilités s'introduire dans la plupart des recherches de physique théorique. Les résultats auxquels on se trouve ainsi conduit n'ont pas la rigueur absolue des démonstrations euclidiennes au sens rigoureusement mathématique du mot, on ne peut pas affirmer, comme le fait observer Jeans, que de l'eau mise sur le feu se mettra à bouillir et ne se transformera pas en glace, on peut seulement affirmer que ce phénomène extrêmement étrange que serait la transformation en glace, de l'eau placée sur le feu, est un phénomène extrêmement improbable, mais il est possible de préciser par des exemples à quel point ce phénomène est improbable : si l'on imagine des millions de singes qu'on aurait dressés à taper au hasard sur autant de machines à écrire, il est extrêmement improbable que ces singes reproduisent tous les livres qui sont dans toutes les bibliothèques du monde, cela est extrêmement improbable, mais on ne peut pas dire que cela est rigoureusement impossible, au sens absolu du mot impossible. Les impossibilités qui s'introduisent dans l'énoncé des lois physiques sont de même nature que l'improbabilité de ce miracle des singes dactylographes. Au point de vue mathématique, on doit agir comme si ces probabilités extrêmement voisines de l'unité équivalaient rigoureusement à la certitude.

C'est ainsi que dans de nombreuses théories physiques que nous ne pouvons rappeler toutes, le calcul des probabilités a conduit à des résultats définitifs et précis, et s'est ainsi révélé comme un auxiliaire indispensable de la physique.

II.

Il y a tout lieu de croire que les applications théoriques du calcul des probabilités ne se borneront pas à ce résultat dès a présent acquis, mais qu'elles prendront une extension encore plus considérable.

En astronomie stellaire, des recherches extrêmement importantes ont été faites, notamment par M. Charlier et par ses élèves sur l'application de la théorie des probabilités à la distribution des étoiles. Ces recherches ont déjà donné des résultats importants, elles se poursuivent encore et il est désormais impossible de les ignorer dans la discussion des théories cosmogoniques. Il est tout à fait vraisemblable que le développement de l'astronomie stellaire conduira à constater de nombreuses analogies entre les lois des mouvememts des étoiles et les lois des mouvements des molécules d'un gaz raréfié. Cette analogie entre l'infiniment petit et l'infiniment grand aurait plu à Pascal.

D'autre part, le développement de la théorie des quanta étend chaque jour le domaine des applications de la théorie des probabilités à la physique théorique; aux statistiques de la théorie cinétique dans lesquelles à côté des théories du discontinu, subsistent encore des vestiges importants des théories du continu, les physiciens modernes tendent à substituer de plus en plus des statistiques exclusivement discontinues. Les modifications qu'introduit cette différence de point de vue sont assez analogues à celles que signalait Poincaré lorsqu'il faisait la distinction célèbre entre l'entropie fine et l'entropie grossière.

D'une manière générale, l'introduction de méthodes de statistiques discontinues entraînera peu à peu l'emploi de méthodes plus délicates du calcul des probabilités. Il ne sera plus possible d'affirmer, comme le faisaient volontiers il y a quelques années certains savants, que le calcul des probabilités se résume dans la loi de Gauss et que tous les développements mis autour de cette loi de Gauss sont entièrement superflus. La loi de Gauss suffit, en effet, dans les cas où le discontinu tend à se confondre avec le continu, en raison du nombre extrêmement grand des phénomènes continus, mais elle est insuffisante lorsqu'on a affaire à des phénomènes proprement discontinus.

L'introduction du discontinu dans l'atome lui-même, introduction qui pouvait d'ailleurs seule expliquer d'une manière rationnelle la discontinuité des poids atomiques, ouvre un nouveau champ d'application à la théorie des probabilités.

Par là elle s'introduit dans la chimie et c'est elle seule qui permettra de résoudre les problèmes nouveaux et difficiles qui se trouvent posés par l'évolution des théories chimiques, théorie des substances radioactives, théorie des isotopes, transmutation de la matière, toutes ces questions relèvent de la théorie des probabilités.

L'étude des principes essentiels de la théorie des probabilités est aujourd'hui aussi nécessaire à l'astronome, au physicien, au chimiste, que l'étude des éléments de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie. Si l'on tient compte des applications de la théorie des probabilités aux phénomènes de démographie, aux assurances, aux phénomènes biologiques, on doit conclure que les éléments de la théorie des probabilités devraient être enseignés non seulement dans toutes les universités, mais dans la plupart des établissements d'enseignement secondaire.

III.

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Les probabilités peuvent-elles être utilisées, non seulement dans les sciences physiques, mais dans les recherches de mathématiques pures ?

Au premier abord, cela paraît difficile, car dans les faits mathématiques entre une certitude qui n'est pas de même nature que la certitude que nous pouvons avoir relativement aux phénomènes physiques. Comme je le rappelais tout à l'heure, les démonstrations de la géométrie et de l'arithmétique ne laissent aucune place au doute, aucune place par conséquent à la probabilité.

Il existe, cependant, une catégorie importante de faits mathématiques, au sujet desquels il nous sera toujours impossible d'arriver à une certitude, en raison de l'insuffisance des moyens matériels dont nous disposons. Il nous est possible de calculer avec un grand nombre de décimales exactes un nombre tel que le nombre π ou le nombre e, mais les moyens matériels rendent le calcul effectif d'un millier de décimales, extrêmement difficile et il serait tout à fait vain de songer à en calculer plusieurs milliers, à plus forte raison d'en calculer un million. En admettant même des perfectionnements extraordinaires dans nos techniques, il n'est pas douteux que le calcul des milliards de décimales ne pourra jamais être réellement effectué.

Il en est de même pour ce qui concerne les nombres premiers. On a pu calculer effectivement des tables de nombres premiers qui s'étendent jusqu'à 10 millions. Grâce à ces tables, il est possible à la rigueur d'imaginer que l'on décèle les nombres premiers dans un intervalle assez restreint, choisi arbitrairement à condition que les extrémités de cet intervalle ne dépassent pas le carré de 10 millions; mais si l'on veut aller au delà, si l'on veut atteindre les nombre premiers de 20 ou 30 chiffres, on ne pourra arriver qu'à des résultats isolés au moyen de méthodes arithmétiques particulières et il ne sera pas possible de connaître tous les nombres premiers compris même dans un petit intervalle.

Dans l'un comme dans l'autre des cas que nous venons de citer, nous sommes amenés à introduire en arithmétique le langage de la probabilité. S'il nous est impossible de savoir quel est le milliardième chiffre décimal du nombre π nous sommes autorisés à affirmer qu'il y a une probabilité égale pour que ce chiffre soit l'un des 10 chiffres de la numération décimale, et, par conséquent, que la probabilité pour que ce chiffre soit le chiffre 3 est égale à un dixième. Sans doute, on peut objecter à ce langage que des hommes organisés comme nous, mais dont la vie serait mille fois plus longue, auraient le loisir et la possibilité de faire effectivement les calculs que nous ne pouvons faire, et que par suite ils arriveraient à savoir avec certitude si le chiffre en question est ou non égal à 3, mais nous devons borner nos espoirs à constituer une science humaine et non une science pour des surhommes ou pour des dieux. C'est à ce point de vue humain que le langage de la probabilité est non seulement légitime, mais encore nécessaire.

Il en est de même pour les nombres premiers. Il nous est possible de déterminer assez exactement la fréquence probable des nombres premiers dans un certain intervalle, et nous pouvons par suite introduire, au sujet de ces nombres premiers, le langage de la probabilité. Une question, qui se posera alors, est celle des écarts possibles entre les fréquences moyennes et les fréquences effectives. J'ai donné à ce sujet quelques indications dans une Note qui a paru il y a quelques mois (en 1928) dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (de Paris), et je ne m'y étendrai pas.

Lorsque l'on considère, comme nous venons de le faire, des nombres très grands, mais cependant finis, qu'il s'agisse des nombres premiers ou des décimales du nombre π, il est à la rigueur possible d'objecter qu'un perfectionnement extraordinaire et imprévu de nos techniques pourrait permettre un jour de résoudre avec une facilité relative des problèmes qui nous apparaissent comme complètement insolubles, mais il n'en est pas de même lorsque l'on considère une suite de nombres entiers qui se prolonge indéfiniment comme la suite illimitée des décimales de π, ou comme la suite illimitée des nombres premiers. Il est alors absolument certain que ces suites illimitées ne seront jamais complètement et entièrement connues, et que, par suite, les problèmes arithmétiques que l'on peut se poser à l'égard de telles suites ne pourront trouver leur réponse que dans le langage des probabilités.

Les probabilités qui s'introduisent dans de telles questions sont en général les probabilités dénombrables, car les problèmes qui se posent sont relatifs à une infinité dénombrable d'événements, si l'on considère chaque chiffre décimal ou chaque nombre premier comme un événement. Il en est de même des problèmes qui peuvent être posés au sujet des nombres entiers qui s'introduisent dans les développements en fractions continues des nombres incommensurables.

Il est d'autres questions d'analyse pure et de théorie des fonctions, dans lesquelles le langage des probabilités n'est peut-être pas nécessaire, mais est certainement commode. Si l'on considère dans un intervalle fini un des ensembles auxquels j'avais donné le nom « d'ensembles mesurables » et que M. Lebesgue a nommé « ensembles mesurables B », il est légitime de dire que la probabilité pour qu'un point de l'intervalle appartienne à cet ensemble est égale au rapport de la mesure de l'ensemble à la longueur totale de l'intervalle.

Cet énoncé pourrait même être considéré comme la définition la plus simple de la mesure : du moment que la probabilité peut être définie, la mesure se trouvera par là même définie.

Les probabilités relatives aux nombres peuvent être considérées comme des probabilités géométriques, si ces nombres sont représentés géométriquement par des points ou comme des probabilités dénombrables, si l'on porte au contraire l'attention sur les développements de ces mêmes nombres en fractions décimales ou en fractions continues. La comparaison entre ces deux définitions de la probabilité est souvent très instructive.

Dans les recherches modernes sur la théorie des fonctions de variables réelles, on est souvent amené à considérer les propriétés qui sont vraies presque partout suivant le langage de M. Lebesgue, c'est-à-dire qui sont vraies sauf peut-être pour les points d'un ensemble de mesure nulle. Dans le langage des probabilités, on se trouve conduit à dire que la probabilité pour que ces propriétés soient vraies en un point choisi au hasard est égale à l'unité, mais on ne doit pas oublier que dans le domaine des probabilités continues, probabilité égale à l'unité ne doit pas être confondue avec certitude. Il serait plus correct pour cette raison d'employer un langage un peu différent, et de dire que de telles probabilités sont asymptotiques à l'unité.

Les applications du calcul des probabilités à l'arithmétique et à la théorie des fonctions n'en sont encore qu'à leur début. Il n'est pas douteux qu'elles se développeront et que le calcul des probabilités dans ce vaste domaine ne sera pas seulement un moyen commode d'exposer des résultats acquis, mais sera également une méthode de découvertes extrêmement utile.

IV.

J'espère vous avoir convaincu, par ce rapide exposé, que le rôle du calcul des probabilités dans les sciences exactes n'est pas moins important que dans les sciences biologiques ou statistiques. Les progrès de la physique moderne, les progrès de la théorie des fonctions, tendent à augmenter chaque jour l'importance de ce rôle; non seulement les phénomènes physiques et chimiques, mais encore tous les phénomènes mécaniques et les phénomènes arithmétiques et analytiques eux-mêmes sont dans la dépendance des probabilités. Cette constatation n'enlève rien, cela va sans dire, à la valeur objective de la science, et il serait vain de penser qu'elle peut influer sur la théorie de la connaissance telle que la comprennent les philosophes. Il ne faudrait point que ce langage de la probabilité amène à des confusions analogues à celles qui ont été produites, il y a quelques années, par la théorie de la relativité. C'est par un simple jeu de mots que certains philosophes ont tiré, des considérations purement physiques d'Einstein, des conséquences philosophiques sur la relativité générale des connaissances humaines. La théorie des probabilités est une branche des sciences mathématiques dans laquelle les raisonnements ne sont pas moins rigoureux, ni les conclusions moins fermes que dans les autres branches des mathématiques, et l'introduction de plus en plus générale des méthodes du calcul des probabilités dans les sciences exactes ne saurait porter atteinte au caractère d'exactitude et de précision qui appartient à ces sciences.

Lorsque l'on est amené à énoncer des résultats avec le langage des probabilités, il faut toujours avoir à l'esprit l'exemple de Jeans, et se dire que l'eau mise sur le feu, ne se transforme jamais en glace.