JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CARTAN

Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 1-33.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne;

PAR E. CARTAN.

Dans des Mémoires récents (¹), j'ai été amené à considérer de nouvelles classes remarquables d'espaces de Riemann (espaces $\mathcal{E}$) dont l'étude se lie d'une manière intime à la théorie des groupes continus simples et éclaire des points importants de cette théorie. Mes recherches sur ce sujet ont eu une double origine; d'une part, elles constituent une application intéressante des théories relatives à la géométrie des groupes de transformations (²); d'autre part, elles m'ont été suggérées

(¹) *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann* (*Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 214-264; t. 55, 1927, p. 114-134); *La géométrie des groupes simples* (*Annali di Matem.*, 4ᵉ série, t. 4, 1926-1927, p. 209-256); *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple* (*Ann. École Norm.*, 3ᵉ série, t. 44, 1927, p. 345-467).

(²) *Voir* E. CARTAN et J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups* (*Proceed. Amsterdam*, t. 29, 1926, p. 803-815); E. CARTAN, *La géométrie des groupes de transformations* (*Journ. Math.*, t. 6, 1927, p. 1-119).

par la résolution d'un problème particulier de géométrie riemannienne, où un rôle important était joué par les espaces de Riemann dont la courbure riemannienne se conserve par le transport parallèle (1). C'est en cherchant à déterminer tous ces espaces que s'est révélée l'importance géométrique des groupes continus simples; en particulier j'ai montré que leur détermination revenait à celle des différentes formes *réelles* qu'est susceptible de prendre un groupe simple de structure *complexe* donnée. J'ai pu faire d'autre part une première étude topologique des espaces $\mathcal{E}$, permettant en particulier de déterminer, au point de vue de l'*Analysis situs*, le groupe de connexion des différents groupes simples *ouverts :* c'est là un problème qui n'avait jamais été abordé. Enfin les espaces $\mathcal{E}$ ont une grande importance d'un autre point de vue, car ils fournissent une forme riemannienne remarquable aux différentes géométries qui ont, au sens de Klein, un groupe fondamental simple.

Dans les problèmes, de nature assez variée, qui se sont ainsi présentés, il s'est trouvé quelques théorèmes importants que j'ai vérifiés pour chaque structure simple particulière, mais dont je n'avais pu réussir à mettre en évidence la raison profonde. Je me propose dans ce Mémoire de revenir sur ces théorèmes fondamentaux et d'en donner une démonstration générale. Il résultera de là non seulement que la théorie des espaces $\mathcal{E}$ reposera sur une base logique beaucoup plus satisfaisante, mais encore que les calculs souvent pénibles que j'ai été obligé de faire peuvent être réduits énormément; bien plus, le long Mémoire dans lequel j'ai déterminé toutes les formes réelles de groupes simples (2) pourrait maintenant être réduit de 90 pages à une vingtaine.

La première partie de ce Mémoire est consacrée à une étude sommaire des groupes *clos*. C'est M. H. Weyl qui a montré le premier la grande importance de la distinction entre *groupes clos* et *groupes ouverts*. Dans cette première partie, je n'utilise que les théorèmes les plus élémentaires de la théorie des groupes et ne suppose rien sur la théorie des groupes simples. Dans la seconde partie, je donne deux démonstrations

---

(1) E. CARTAN et J. A. SCHOUTEN, *On Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism* (*Proceed. Amsterdam*, t. 29, 1926, p. 933-946).

(2) *Les groupes réels simples finis et continus* (*Ann. École Norm.*, 3e série, t. 31, 1914, p. 263-355).

générales d'un théorème que j'avais vérifié pour chacune des grandes classes de groupes simples, d'après lequel le groupe adjoint mixte d'un groupe simple ouvert est identique au groupe des isométries de l'espace $\mathcal{E}$ correspondant; la seconde démonstration va beaucoup plus loin que la première, car elle montre que les sous-groupes clos d'un groupe simple ouvert sont tous contenus (à une transformation près du groupe adjoint continu) dans un même sous-groupe du groupe donné; cette démonstration utilise un théorème remarquable de géométrie riemannienne. Je déduis de là la détermination de quelques-uns des nombres de Betti du domaine d'un groupe simple ouvert. Dans la troisième partie, je démontre *a priori* que la détermination des formes réelles des groupes simples revient à la recherche des isomorphies involutives de la forme close correspondante et par suite que la détermination de ces formes réelles et celle des espaces $\mathcal{E}$ sont deux problèmes équivalents. Enfin dans la quatrième partie, j'applique le théorème précédent à la détermination effective des formes réelles des quatre grandes classes de groupes simples.

I. — Les groupes clos.

1. Étant donné un groupe de transformations G fini et continu, engendré par r transformations infinitésimales indépendantes X_1, X_2, ..., X_r, on peut appeler *voisinage* d'une transformation S de ce groupe l'ensemble des transformations obtenues en multipliant S par les différentes transformations engendrées par la transformation infinitésimale

$$e_1 X_1 + e_2 X_2 + \ldots + e_r X_r,$$

où les coefficients e_1, e_2, ..., e_r prennent toutes les valeurs inférieures en module à un nombre fixe.

Une transformation S de G sera dite *limite* d'un ensemble infini de transformations du groupe si, dans tout voisinage de S, il y a une infinité de transformations de l'ensemble.

Un groupe G sera dit *clos* si tout ensemble infini de transformations du groupe admet au moins une transformation limite appartenant au groupe (¹). Dans le cas contraire le groupe est dit *ouvert*.

Dans le plan le groupe des rotations autour d'un point fixe est clos, celui des translations parallèles à une droite fixe est ouvert. Cet exemple est très instructif. En effet les deux groupes énoncés ont la même structure infinitésimale; mais l'isomorphisme n'est que local et ne s'étend pas au domaine complet des deux groupes; les constantes de structure d'un groupe ne suffisent donc pas pour décider si le groupe est clos ou non.

2. Un exemple simple de groupe clos est fourni par le groupe (continu) de toutes les rotations autour d'un point fixe dans un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions. Soient en effet

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

les équations d'une substitution orthogonale à n variables. Les coefficients a_{ij} sont définis par les équations

$$\begin{cases} \sum_k a_{ki}^2 = 1, \\ \sum_k a_{ki} a_{kj} = 0 \qquad (i \neq j). \end{cases} \tag{2}$$

Dans l'espace à n^2 dimensions de coordonnées a_{ij}, les équations (2) définissent une variété algébrique dont tous les points sont à distance finie (la variété est tout entière située sur une hypersphère de rayon $\sqrt{n}$). Cette variété algébrique peut se décomposer (et se décompose effectivement) en plusieurs autres dont l'une forme le domaine du groupe orthogonal continu. Elle est évidemment close, car tout ensemble infini de points de la variété a au moins un point limite *dans l'espace*, et ce point limite est sur la variété elle-même, en vertu de la

(¹) Il importe de remarquer que dans le domaine représentatif d'un groupe, il n'y a que des points *intérieurs*; c'est pour cela que j'emploie le mot *clos* plutôt que le mot *fermé*. L'ensemble des points intérieurs à un cercle ou sur la circonférence de ce cercle est *fermé*, mais il n'est pas *clos*.

continuité des premiers membres des équations (2). *Le raisonnement repose ici sur la propriété de la variété d'être algébrique et bornée.*

Si le groupe orthogonal complet est clos, cela ne veut naturellement pas dire que tout groupe orthogonal soit clos. Un exemple simple est fourni, dans l'espace à quatre dimensions, par le groupe à un paramètre t représenté par les équations

$$\left\{\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos at - x_2 \sin at, \\ x'_2 &= x_1 \sin at + x_2 \cos at, \\ x'_3 &= x_3 \cos bt - x_4 \sin bt, \\ x'_4 &= x_3 \sin bt + x_4 \cos bt, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

où a et b sont deux constantes *incommensurables* entre elles.

3. Il existe une condition *nécessaire* simple pour qu'un groupe de *substitutions linéaires* soit clos : c'est que les coefficients de la substitution générale du groupe soient bornés. Il en résulte une conséquence importante relative aux racines de l'équation caractéristique de la substitution infinitésimale génératrice

$$e_1 A_1 + e_2 A_2 + \ldots + e_r A_r$$

du groupe. En effet soit ω une de ces racines (¹); par un changement fixe de variables on pourra s'arranger pour que l'une des équations de la substitution du groupe à un paramètre engendré par la substitution infinitésimale considérée soit

$$x'_1 = x_1 e^{\omega t};$$

si donc ω a sa partie réelle différente de zéro, les coefficients de la substitution ne peuvent pas rester bornés. Il faut donc que toutes les racines de l'équation caractéristique soient nulles ou purement imaginaires (²). En particulier *il faut que la forme quadratique en $e_1, e_2, \ldots, e_r$ qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique soit définie ou semi-définie négative.*

(¹) Cela veut dire qu'il existe une combinaison linéaire ξ des variables dont l'accroissement infinitésimal soit égal à $\omega\xi$.

(²) Il faut en outre que si ω est racine multiple d'ordre p, cette racine annule tous les mineurs d'ordre p du premier membre de l'équation caractéristique.

Cette condition est évidemment réalisée pour un groupe orthogonal réel.

4. *Application au groupe adjoint d'un groupe continu.* — Étant donné un groupe continu G à paramètres réels, le groupe adjoint continu Γ de G est celui qui indique comment les transformations S_x de G sont transformées entre elles par une transformation particulière S_a :

$$S_{x'} = S_a^{-1} S_x S_a;$$

si l'on se borne aux transformations S_x *infinitésimales*, Γ devient un groupe linéaire, dont les opérations s'appliquent aux coefficients x_i de la transformation infinitésimale générale $\Sigma x_i X_i$ du groupe G. Les transformations infinitésimales génératrices de Γ sont

$$(1)\qquad E_i = \sum_{k,h} c_{ikh} x_k \frac{\partial f}{\partial x_h},$$

en désignant par c_{ikh} *les constantes de structure* du groupe G.

Considérons la forme quadratique $\varphi(e)$ qui donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique de la substitution infinitésimale $\sum_i e_i E_i$:

$$(2)\qquad \varphi(e) = \sum_{i,j,k,h} e_i e_j c_{ikh} c_{jhk}.$$

Pour que le groupe adjoint Γ *soit clos, il est nécessaire que cette forme soit définie ou semi-définie négative.*

5. *Si le groupe* G *est clos, il est clair que le groupe* Γ *l'est aussi;* car à une transformation de G correspond une transformation et une seule de Γ; par suite si tout ensemble infini de transformations de G admet une transformation limite appartenant à G, la même propriété aura lieu *a fortiori* pour Γ. Mais la réciproque n'est pas vraie, à moins qu'à une transformation de Γ ne correspondent qu'un nombre fini de transformations de G; dans ce dernier cas, on démontre facilement que la propriété du groupe Γ d'être clos entraîne la même propriété pour G.

En définitive, *si la forme* $\varphi(e)$ *relative à un groupe* G *est indéfinie, le groupe* G *est ouvert.*

6. *Dans le cas où la forme* $\varphi(e)$ *est définie, le groupe* G *est clos;* ce théorème fondamental, dû à M. H. Weyl, est à la base de sa théorie de la représentation linéaire des groupes semi-simples ([1]). On peut montrer directement, sans avoir recours à la théorie des groupes semi-simples, sinon que le groupe G, du moins que son groupe adjoint Γ est clos ([2]).

Remarquons d'abord que si ω est racine de l'équation caractéristique relative à la transformation infinitésimale $\sum_i e_i X_i$, cela signifie qu'il existe une transformation infinitésimale Y satisfaisant à la relation

$$\left(\sum_i e_i X_i, Y\right) = \omega Y;$$

toute substitution linéaire effectuée sur les transformations infinitésimales du groupe G et qui conservera ses constantes de structure (substitution *isomorphique*) laissera donc invariantes les racines ω, et par suite la forme $\varphi(e)$. Il en sera ainsi en particulier des substitutions linéaires de Γ ([3]). Or on peut réduire la forme définie $\varphi(e)$ à une somme de carrés

$$\varphi(e) = \pm(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2). \tag{3}$$

Il en résulte que le groupe Γ peut être supposé orthogonal, ce qui se traduit par les relations

$$c_{ikh} + c_{ihk} = 0$$

entre les constantes de structure. Ces constantes jouissent par suite

---

([1]) H. Weyl, *Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen* (*Math. Zeitschr.*, t. 23, 1925, p. 271-309; t. 24, 1925, p. 328-395).

([2]) Ce théorème, qui sert de point de départ à M. Weyl, est énoncé par lui sans démonstration (*loc. cit.*, p. 377).

([3]) La vérification par le calcul de cette propriété se trouve dans ma Thèse : *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, th. II, p. 27 (Paris, Nony, 1894).

de la propriété de se reproduire, avec ou sans changement de signe, suivant qu'on effectue sur leurs trois indices une permutation impaire ou paire. La forme (2) de $\varphi(e)$ montre alors que les coefficients des termes carrés sont *négatifs*, et l'on a

$$(4) \qquad \sum_{k,h} c_{ikh}^2 = 1, \qquad \sum_{k,h} c_{ikh} c_{jkh} = 0 \qquad (i \neq j).$$

Il faut donc mettre le signe — dans la formule (3).

7. Nous allons maintenant montrer que le groupe Γ est le plus grand groupe continu de substitutions isomorphiques de G (¹).

Remarquons d'abord que toute substitution isomorphique de G est orthogonale, d'après la remarque faite plus haut. Si les équations

$$x'_i = \sum_k b_{ik} x_k$$

représentent une telle substitution, les coefficients b_{ij} sont déterminés par les relations

$$(5) \qquad \sum_{\lambda,\mu} b_{\lambda i} b_{\mu j} c_{\lambda\mu k} = \sum_\rho b_{k\rho} c_{ij\rho} \qquad (i, j, k = 1, \ldots, r),$$

qui définissent une variété *algébrique*. Le plus grand groupe continu de substitutions isomorphiques est donc engendré par des substitutions infinitésimales. Pour les avoir, donnons, dans les équations (5), aux quantités b_{ii} des valeurs $1 + \gamma_{ii}$ infiniment voisines de 1, et aux quantités $b_{ij} (i \neq j)$ des valeurs infiniment petites γ_{ij}. Nous avons du reste

$$\gamma_{ii} = 0, \qquad \gamma_{ij} + \gamma_{ji} = 0.$$

Nous obtenons alors

$$\sum_\lambda c_{\lambda jk} \gamma_{\lambda i} + c_{i\lambda k} \gamma_{\lambda j} - c_{ij\lambda} \gamma_{k\lambda} = 0,$$

(¹) Ce théorème est démontré dans ma Thèse (p. 113) comme conséquence de la théorie générale des groupes semi-simples.

ou, plus symétriquement,

$$\sum_{\lambda} c_{jk\lambda}\gamma_{i\lambda} + c_{ki\lambda}\gamma_{j\lambda} + c_{ij\lambda}\gamma_{k\lambda} = 0. \tag{6}$$

Multiplions par c_{jkh} et sommons par rapport aux indices j et k; nous obtenons, en tenant compte de (4) et effectuant des changements d'indices de sommation,

$$\gamma_{ih} + \sum_{j,k,\lambda} (c_{i\lambda k}c_{hjk} - c_{ijk}c_{\lambda kh})\gamma_{j\lambda} = 0.$$

Or on a, d'après les identités de Jacobi,

$$\sum_{k} (c_{i\lambda k}c_{hjk} - c_{ijk}c_{h\lambda k}) = \sum_{k} c_{hik}c_{j\lambda k};$$

par suite

$$\gamma_{ih} + \sum_{j,k,\lambda} c_{ikh}c_{kj\lambda}\gamma_{j\lambda} = 0.$$

Posons maintenant

$$a_k = \sum_{j,\lambda} c_{kj\lambda}\gamma_{j\lambda};$$

nous obtenons

$$\gamma_{ih} = \sum_{k} a_k c_{kih};$$

par suite la transformation infinitésimale considérée est une combinaison linéaire $\Sigma a_k E_k$ des transformations infinitésimales du groupe adjoint. Ce dernier est donc bien le plus grand groupe de substitutions linéaires isomorphiques de G.

Comme les coefficients de ses substitutions forment une variété algébrique (5) bornée, le groupe Γ est clos.

Les groupes G dont la forme $\varphi(e)$ est définie sont les groupes *semi-simples unitaires* (1).

---

(1) M. H. Weyl démontre qu'ils sont clos en montrant *a priori* que le domaine simplement connexe de recouvrement du groupe adjoint Γ ne recouvre ce dernier qu'un nombre fini de fois (*loc. cit.*, p. 380-381). J'ai déterminé effectivement, pour chaque type de groupes simples unitaires, le groupe de connexion (fini) de Γ (*Annali di Matem.*, 4e série, t. 4, 1926-1927, p. 211-230).

8. Cherchons s'il peut exister d'autres groupes clos que les groupes précédents. La forme $\varphi(e)$ sera alors *semi-définie* négative; supposons qu'on ait

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + \ldots + e_s^2) \qquad s < r.$$

Les équations $e_1 = \ldots = e_s = 0$ définissent un sous groupe invariant dont les transformations infinitésimales ont toutes leurs racines caractéristiques nulles et par suite sont échangeables avec toutes les transformations du groupe. Désignons par $i, j, \ldots$ les indices $1, 2, \ldots, s$; par $\alpha, \beta, \ldots$ les indices suivants. Une constante de structure différente de zéro ne peut avoir qu'un indice grec et elle est alors de la forme $c_{ij\alpha}$; les autres ont les propriétés de symétrie qui tiennent à l'invariance de la forme $\varphi(e)$ par le groupe adjoint; on aura en particulier les relations (4).

L'identité de Jacobi

$$\sum_{l=1}^{l=s} c_{ijl}c_{lk\alpha} + c_{jkl}c_{li\alpha} + c_{kil}c_{lj\alpha} = 0,$$

si l'on fixe l'indice α, est identique à l'identité (6), les quantités $c_{ij\alpha}$ jouant maintenant le rôle des γ_{ij}; il en résulte donc que, pour un indice α donné, on a des relations de la forme

$$c_{ij\alpha} = \sum_k a_k c_{ijk},$$

et par suite on aura d'une manière générale

$$c_{ij\alpha} = \sum_k a_{k\alpha} c_{ijk}.$$

On a donc

$$(X_i X_j) = \sum_k c_{ijk}\left(X_k + \sum_\lambda a_{k\lambda} X_\lambda\right);$$

en posant

$$\overline{X}_i = X_i + \sum_\lambda a_{i\lambda} X_\lambda,$$

on voit que les transformations infinitésimales $\overline{X}_i$ engendrent un groupe semi-simple unitaire d'ordre s. Par suite *tout groupe clos se décompose en un sous-groupe simple unitaire et un ou plusieurs groupes à un paramètre.*

9. *Les groupes linéaires clos.* — Nous pouvons, en n'utilisant que des procédés de démonstration élémentaires, montrer que *si un groupe de substitutions linéaires est semi-simple unitaire, et si de plus il est irréductible ou complètement réductible, il est clos.* Le groupe G est dit complètement réductible si les variables qu'il transforme peuvent être partagées en un certain nombre de séries

$$x_1, x_2 \ldots, x_p; \quad y_1, y_2, \ldots, y_q; \quad z_1, z_2 \ldots, z_s; \quad \ldots;$$

de telle sorte que les variables de chaque série soient transformées entre elles et que, dans chaque série, formée par exemple de h variables, il soit impossible de trouver des combinaisons linéaires indépendantes des variables en nombre inférieur à h et qui soient transformées entre elles par les substitutions de G. Le groupe G est irréductible s'il n'y a qu'une série de variables.

Chaque substitution de G résulte de la juxtaposition d'un certain nombre de substitutions linéaires portant, la première, sur les variables $x_1, \ldots, x_p$; la seconde, sur les variables $y_1, y_2, \ldots, y_q$, et ainsi de suite. Nous allons d'abord démontrer que *chacune de ces substitutions partielles est de déterminant* 1.

En effet soit, en se bornant à la partie qui concerne les variables x,

$$X_i = \sum_{k,h} a_{ikh} x_k \frac{\partial f}{\partial x_h};$$

on a

$$(X_i X_j) = \sum_{\rho, k, h} (a_{ik\rho} a_{j\rho h} - a_{jk\rho} a_{i\rho h}) x_k \frac{\partial f}{\partial x_h} = \sum_k c_{ij\rho} X_\rho;$$

on en déduit

$$\sum_{\rho,k} c_{ij\rho}\, a_{\rho kk} = \sum_{\rho,k} (a_{ik\rho} a_{j\rho k} - a_{jk\rho} a_{i\rho k}) = 0.$$

d'où, en multipliant par c_{ijh} et sommant par rapport aux indices i et j,

$$\sum_k a_{hkk} = 0.$$

Chaque substitution du groupe appartient donc au groupe linéaire et homogène *spécial;* elle a par suite son déterminant égal à 1 (¹).

Cela posé, soit Γ le groupe adjoint de G; en désignant par S_ξ une substitution arbitraire de G, les opérations T_a de Γ peuvent être définies par l'équation

$$S_{\xi'} = S_a^{-1} S_\xi S_a.$$

A une opération S_a de G ne correspond qu'une opération T_a de Γ; mais à une opération T_a de Γ correspondront inversement autant d'opérations de G qu'il y aura dans Γ d'opérations correspondant à la substitution identique de G. Cela nous ramène à chercher combien il existe dans G de substitutions S_a échangeables avec toutes les autres substitutions S_ξ.

Prenons une de ces substitutions S_a, et considérons la manière dont elle transforme les variables x. Soit ω une des racines de son équation caractéristique; il lui correspond un ensemble de combinaisons linéaires u des x dont chacune se reproduit multipliée par ω. Toute transformation S_ξ de G changera une des combinaisons linéaires u en une combinaison linéaire des x qui se reproduira également, multipliée par ω, si on lui applique l'opération S_a; par suite le groupe G transforme entre elles les quantités u; ce n'est possible que si ces quantités sont au nombre de p : autrement dit *l'opération* S_a *multiplie toutes les variables* x *par un même facteur* ω; mais comme le déterminant de la substitution ainsi effectuée sur les x est égal à 1, c'est que ω est une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité. Des conclusions analogues peuvent être formulées sur les autres séries de variables. Par suite il ne peut exister dans G qu'un nombre fini de substitutions échangeables avec toutes les autres. Le groupe G est donc clos, comme le groupe Γ qu'il recouvre un nombre fini de fois.

10. Le théorème précédent s'applique en particulier à une catégorie importante de groupes orthogonaux. J'ai en effet montré, d'une manière élémentaire (²), qu'on peut choisir les transformations infini-

---

(¹) La démonstration suppose en réalité simplement que le groupe G est son propre groupe dérivé.

(²) *Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 235-237.

tésimales de base d'un groupe orthogonal de manière que ses constantes de structure c_{ijk} se reproduisent, avec ou sans changement de signe, suivant qu'on effectue sur les indices une permutation impaire ou paire. Si donc le groupe orthogonal n'admet aucune transformation infinitésimale échangeable avec toutes les autres (transformation *distinguée*), la forme $\varphi(e)$ correspondante, d'après (2), est définie négative. Par suite *si un groupe orthogonal n'admet aucune transformation infinitésimale distinguée, il est clos.*

Il existe une autre classe de groupes orthogonaux clos, ce sont ceux qui sont *irréductibles*, au moins du point de vue réel : je veux dire que si n est le nombre des variables, on ne peut trouver $p < n$ combinaisons linéaires indépendantes à *coefficients réels* qui soient transformées entre elles par le groupe. J'ai montré en effet [1] que le groupe G ne peut admettre au plus qu'une transformation infinitésimale distinguée; s'il en admet une, n est pair et G se décompose en un sous-groupe invariant à $r-1$ paramètres et un groupe à un paramètre défini par les équations

$$\begin{aligned} x'_{2i-1} &= x_{2i-1}\cos t - x_{2i}\sin t, \\ x'_{2i} &= x_{2i-1}\sin t + x_{2i}\cos t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}$$

Le premier sous-groupe est clos, le second l'est évidemment aussi; par suite le groupe G lui-même est clos. Il rentre dans la catégorie des groupes considérés au n° **7**.

11. On pourrait essayer de démontrer que tout groupe linéaire semi-simple unitaire est clos en employant le même procédé de démonstration que celui qui nous a servi dans le cas où le groupe est complètement réductible. Mais cela ne semble pas facile; du reste, *c'est par la marche inverse (démonstration du théorème que tout groupe semi-simple unitaire est clos) que M. Weyl a démontré la réductibilité complète des groupes linéaires semi-simples.*

---

(1) *Bull. Soc. math.*, t. **54**, 1926, p. 240-241.

II. — Les sous-groupes clos d'un groupe simple ouvert.

12. J'ai indiqué, dans le Mémoire précédemment cité du *Bulletin de la Société mathématique de France*, comment la détermination des espaces *irréductibles* dont la courbure riemannienne se conserve par le transport parallèle (espaces $\mathcal{E}$) est ramenée, à une exception près, à celle des formes réelles d'une structure simple donnée. Je me propose de donner ici la démonstration générale de certains théorèmes que j'avais été réduit à vérifier pour chaque structure particulière; cela nous conduira du reste à de nouveaux théorèmes intéressants.

Tout espace $\mathcal{E}$ irréductible admet un groupe de déplacements simple ([1]) (à part l'exception signalée tout à l'heure), et l'on peut prendre pour base infinitésimale de ce groupe des transformations

$$X_1, \quad \ldots, \quad X_s; \quad X_{s+1}, \quad \ldots, \quad X_{s+n} \qquad (s+n=r)$$

jouissant des propriétés suivantes :

1° La forme $\varphi(e)$ est égale à

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + \ldots + e_s^2) + \varepsilon(e_{s+1}^2 + \ldots + e_{s+n}^2) \qquad (\varepsilon = \pm 1); \tag{6}$$

2° Les crochets de deux des s premières transformations ou de deux des n dernières ne dépendent que des s premières; les crochets d'une des s premières et d'une des n dernières transformations ne dépendent que des n dernières.

J'ai également démontré la réciproque, mais avec une lacune; car, pour que l'espace $\mathcal{E}$ obtenu soit irréductible, il faut que les s premières transformations $E_1, \ldots, E_s$ du groupe adjoint, considérées comme opérant sur les coefficients $x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}$ des n dernières transformations, engendrent un groupe linéaire g *irréductible* : c'est ce que j'avais oublié de montrer.

La démonstration est du reste facile. Supposons que le groupe g, qui est orthogonal, soit réductible; on pourra partager les n dernières transformations en deux séries, que nous désignerons respectivement

([1]) *Bull. Soc. math.*, t. 55, 1927, p. 119.

par les symboles X_α, X_β, ... d'une part; X_λ, X_μ, ... d'autre part, de telle sorte que, i désignant un des indices 1, ..., s, on ait

$$(7)\qquad c_{i\alpha\lambda} = 0, \quad c_{i\lambda\alpha} = 0.$$

D'après la forme (6) de $\varphi(e)$, les constantes de structure conservent leur valeur absolue si l'on permute leurs indices d'une manière quelconque; les relations (7) montrent alors que les crochets $(X_\alpha X_\lambda)$ sont tous nuls.

Considérons l'ensemble des transformations X_i échangeables avec toutes les transformations X_λ; supposons qu'elles se déduisent linéairement de X_1, ..., X_h : nous leur réserverons les indices i, j, ...; nous désignerons par k un quelconque des indices 1, 2, ..., s. Cela posé, il est facile de voir que les transformations X_i et X_α engendrent un sous-groupe invariant de G. D'abord les crochets $(X_i X_\lambda)$ et $(X_\alpha X_\lambda)$ sont tous nuls; en second lieu les crochets $(X_k X_\alpha)$ ne dépendent que des X_α, et les crochets $(X_k X_i)$ ne dépendent que des X_i puisqu'on a, d'après l'identité de Jacobi,

$$((X_k X_i) X_\lambda) = 0.$$

Enfin les crochets $(X_\alpha X_\beta)$ ne dépendent également que des X_i puisque, d'après l'identité de Jacobi, ils sont échangeables avec les X_λ.

Le groupe G admettant un sous-groupe invariant, nous arrivons à une contradiction.

13. Il résulte aussi de ce qui précède que, si l'on considère le groupe adjoint Γ de G, le sous-groupe g correspondant est *clos* (n° **10**), puisque c'est précisément le groupe linéaire orthogonal dont nous venons de démontrer l'irréductibilité. Mais cette conclusion pourrait tomber en défaut si nous considérions le groupe G lui-même, car le sous-groupe g correspondant serait un groupe de recouvrement du premier; il en serait par exemple ainsi si G était le groupe simplement connexe de la structure donnée et si le sous-groupe g admettait une transformation infinitésimale distinguée. *Le théorème resterait cependant vrai si* G *était un groupe linéaire*, car ce groupe linéaire étant, d'après le théorème de Weyl, *complètement réductible*, son domaine recouvre un nombre fini de fois celui de Γ; par suite le domaine du sous-groupe g de G recouvre un nombre fini de fois celui du sous-groupe correspondant de Γ.

L'espace $\mathcal{E}$ admettant Γ pour groupe des déplacements, le groupe des rotations isométriques autour de l'origine, qui n'est autre que g, est certainement clos.

Les considérations précédentes s'appliquent à un groupe simple G *à paramètres complexes;* on peut le regarder comme à paramètres réels, sa base étant formée de $2r$ transformations infinitésimales

$$X_1, X_2, \ldots, X_r; \qquad iX_1, \ldots, iX_r,$$

dont les r premières engendrent un groupe clos, et cela quel que soit le groupe de la structure infinitésimale donnée.

14. Convenons de dire qu'un sous-groupe g d'un groupe simple *ouvert* G à paramètres réels est *caractéristique* si l'on peut choisir pour G une base

$$X_1, X_2, \ldots, X_s; \qquad Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° La forme $\varphi(e)$ relative à G est

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + \ldots + e_s^2) + \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2;$$

2° La substitution linéaire

$$X'_i = X_i, \qquad Y'_\alpha = -Y_\alpha,$$

effectuée sur les transformations infinitésimales de base, est isomorphique.

Laissons pour le moment de côté la question de savoir si tout groupe simple ouvert admet un sous-groupe caractéristique (*voir* § III). Nous allons démontrer que *tous les sous-groupes caractéristiques forment une famille continue* et, d'une manière plus précise, qu'*ils sont homologues entre eux dans le groupe adjoint continu.*

Soient en effet deux sous-groupes caractéristiques correspondant à deux bases caractéristiques distinctes (X_i, Y_α) et (X'_i, Y'_α). On peut toujours passer d'une de ces bases à l'autre par une substitution linéaire (à coefficients réels) laissant invariante la forme quadratique $\varphi(e)$. Or le groupe des substitutions linéaires qui laissent cette forme invariante peut être considéré comme isomorphe au groupe des isométries d'un espace de Riemann $\mathcal{E}$ à courbure riemannienne négative [1]; il en résulte [2] que chacune de ces substitutions peut être obtenue, d'une manière et d'une seule, en effectuant successivement les deux opérations suivantes. La première R est une substitution orthogonale sur les e_i accompagnée d'une substitution orthogonale sur les η_α; elle laisse invariant le sous-groupe caractéristique g, en en changeant simplement la base. La seconde T est une substitution (*transvection*) toujours réductible à la forme

$$\begin{aligned} e'_i + \eta'_i &= e^{a_i}(e_i + \eta_i), & & \\ e'_i - \eta'_i &= e^{-a_i}(e_i - \eta_i) & & (i = 1, \ldots, h), \\ e'_{h+j} &= e_{h+j} & & (j = 1, \ldots, s - h), \\ \eta'_{h+k} &= \eta_{h+k} & & (k = 1, \ldots, n - h); \end{aligned}$$

les exposants a_i sont *réels*. Cette substitution T fait partie d'un groupe à un paramètre obtenu en multipliant tous les exposants a_i par un même facteur réel t.

On peut supposer que, par une même substitution linéaire effectuée sur la base (X_i, Y_α) et sur la base (X'_i, Y'_α) et donnant naissance à deux nouvelles bases (U_i) et (U'_i), la seconde opération indiquée plus haut se traduise par les formules

$$U'_i = c_i U_i, \tag{9}$$

les c_i étant réels et positifs (égaux à $e^{\pm a_i}$ ou à 1). Si l'on change, dans la base (X_i, Y_α), tous les Y_α de signe, cela reviendra à effectuer une permutation sur les U_i, chaque coefficient c_i étant changé en son inverse.

Or si l'on pose

$$(U_i U_j) = \sum_k \gamma_{ijk} U_k, \qquad (U'_i U'_j) = \sum_k \gamma'_{ijk} U'_k,$$

---

[1] C'est un espace du type (BDI). Voir *Annales École Normale*, t. 44, 1927, p. 400-405.

[2] *Annales École Normale*, t. 44, 1927, p. 367-372.

les formules (9) montrent qu'on a

$$\gamma'_{ijk} = \frac{c_i c_j}{c_k} \gamma_{ijk};$$

la permutation effectuée sur les indices, qui correspond à un changement simultané de signe pour les Y_α et les Y'_α, est isomorphique par hypothèse pour chacune des deux bases; on a donc

$$\gamma'_{ijk} = \frac{c_k}{c_i c_j} \gamma_{ijk}.$$

Il en résulte, si la constante γ_{ijk} n'est pas nulle,

$$c_i^2 c_j^2 = c_k^2,$$

d'où

$$c_i c_j = c_k \qquad \text{et} \qquad \gamma'_{ijk} = \gamma_{ijk}.$$

Par suite les deux bases (U_i) et (U'_i), et, par voie de conséquence, les deux bases (X_i, Y_α) et (X'_i, Y'_α) qui s'en déduisent par la *même* substitution linéaire, ont les mêmes constantes de structure. *On voit donc déjà que les deux sous-groupes caractéristiques considérés sont isomorphes*. De plus l'égalité $\gamma'_{ijk} = \gamma_{ijk}$ subsiste encore si l'on remplace les exposants a_i par ta_i; autrement dit *les deux sous-groupes caractéristiques font partie d'une famille continue de sous-groupes caractéristiques*. Comme ils sont tous isomorphes, et que le plus grand groupe continu d'isomorphie d'un groupe simple est son groupe adjoint continu, nous arrivons à la conclusion que *deux sous-groupes caractéristiques sont homologues entre eux dans le groupe adjoint continu*.

Dans le cas particulier où le groupe G est un groupe simple ouvert à paramètres complexes, nous voyons que *tous les groupes clos simples d'ordre r d'une structure (complexe) donnée sont homologues entre eux dans le groupe adjoint continu (à paramètres complexes)*.

15. Le théorème que nous venons de démontrer a une grande importance. Tout sous-groupe caractéristique d'un groupe simple ouvert fournissant un espace $\mathcal{E}$, c'est-à-dire une forme riemannienne de la géométrie de Klein admettant G pour groupe fondamental, on voit qu'une telle géométrie ne peut être rendue riemannienne que par un seul choix de l'élément générateur de l'espace ([1]). Dans mon dernier Mémoire des *Annales de l'École Normale*, j'avais été obligé de vérifier cette propriété pour chaque structure particulière simple (en me bornant du reste aux classes générales de groupes simples).

16. Nous allons donner une nouvelle démonstration du théorème précédent, fondée sur la considération des groupes clos. Plus généralement nous allons démontrer que *tout sous-groupe clos d'un groupe simple ouvert admettant un sous-groupe caractéristique g est homologue (dans le groupe adjoint continu) à un sous-groupe de g.*

Nous allons pour cela utiliser l'espace de Riemann $\mathcal{E}$ à courbure négative attaché au sous-groupe caractérique g et admettant G (ou plutôt Γ) comme groupe des déplacements; le sous-groupe g de Γ est le groupe des rotations isométriques autour du point origine O.

Soit alors γ un sous-groupe *clos* de G; le sous-groupe correspondant de Γ est aussi clos. Appliquons au point origine O les différents déplacements définis par les transformations de γ. Le groupe γ étant clos, nous obtenons ainsi une variété *fermée* V (qui peut se réduire à un point). Or dans un espace de Riemann sans point singulier à distance finie, simplement connexe, à courbure négative ou nulle, on peut trouver, étant donnés des points en nombre fini, un point fixe invariant par tous les déplacements qui échangent entre eux les points donnés : c'est le point pour lequel la somme des carrés des distances au point donné est minima ([2]). Cette propriété est encore vraie si, au lieu d'un nombre fini de points, on en a une infinité formant une variété *fermée*: nous arrivons donc à la conclusion que le groupe γ, qui laisse évidemment invariante la variété V, laisse invariant un point fixe de l'espace, il fait donc partie du groupe des rotations (isométriques) autour de ce point. Mais ce groupe est homologue à g dans le groupe adjoint continu, ce qui démontre le théorème.

([1]) Voir *Annales École Normale*, t. 44, 1927, p. 421. Ce théorème revient à affirmer l'identité du groupe adjoint *mixte* de G et du groupe total des isométries de l'espace $\mathcal{E}$ dont Γ est le groupe continu des déplacements. (*Voir* le Mémoire cité, p. 372.)

([2]) E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, p. 267 (Paris, Gauthier-Villars, 1928).

17. On peut tirer de là des conséquences intéressantes sur les nombres de Betti du domaine d'un groupe simple ouvert. Supposons d'abord que le sous-groupe caractéristique g (dont nous démontrerons un peu plus loin l'existence générale) n'admette aucune transformation infinitésimale distinguée. Il est clos, quel que soit le groupe G de la structure infinitésimale donnée. J'ai montré ailleurs (¹) que toute variété fermée située dans le domaine de G pouvait, par déformation continue, être ramenée tout entière dans le domaine de g. Les nombres de Betti (²) du domaine de G sont donc les mêmes que ceux de g, mais il faut leur ajouter un $s^{\text{ième}}$ nombre de Betti égal à 1, correspondant au groupe clos g lui-même. Le domaine simplement connexe de recouvrement de g ne recouvrant g qu'un nombre fini de fois, le premier nombre de Betti est nul, et l'on démontre facilement qu'il en est de même du second (³). Par suite, en tenant compte des théorèmes classiques sur les nombres de Betti d'une variété fermée (⁴), on a, relativement aux nombres de Betti j_k du domaine du groupe G, les relations

$$j_1 = j_2 = 0, \qquad j_{s-2} = j_{s-1} = 0, \qquad j_s = 1, \qquad j_{s+1} = \ldots = j_{s+n-1} = 0.$$

Supposons maintenant que g contienne une transformation infinitésimale distinguée et aussi, tout d'abord, que le domaine de G recouvre un nombre fini de fois celui de Γ (il en est ainsi par exemple si G est un groupe linéaire ou projectif); le premier nombre de Betti du domaine de g est égal à 1, et l'on a les relations (⁵)

$$j_1 = 1, \qquad j_{s-1} = j_s = 1, \qquad j_{s+1} = \ldots = j_{s+n-1} = 0.$$

(¹) *Annales École Normale*, t. **44**, 1927, p. 377.

(²) *Voir* H. Poincaré, *Analysis situs* (*J. de l'École Polyt.*, 2ᵉ série, t. 1, 1895, p. 1-121). Les *nombres de Betti* du texte sont ceux que Poincaré désigne sous ce nom, mais diminués d'une unité.

(³) Cela tient à ce que les transformations *singulières* d'un groupe semi-simple d'ordre r forment des variétés à $r-3$ dimensions dans le domaine du groupe et que, par suite, toute variété close à 2 dimensions peut être déformée sans rencontrer ces variétés singulières; mais alors, d'après un procédé général, elle peut être réduite au point qui représente la transformation identique.

(⁴) H. Poincaré, *loc. cit.*, p. 45; les nombres de Betti également distants des extrêmes sont égaux.

(⁵) On peut démontrer facilement qu'on a aussi $j_2 = j_{s-2} = 0$.

Supposons enfin que le domaine de G recouvre une infinité de fois celui de Γ. Le sous-groupe g n'est plus clos, mais son plus grand sous-groupe invariant semi-simple g_1 (d'ordre $s-1$) l'est. Le domaine de G peut être regardé comme constitué par l'ensemble des couples de deux points, l'un pris dans le domaine de g_1, l'autre dans un espace euclidien à $n+1$ dimensions. Comme le premier et le second nombre de Betti du domaine du groupe semi-simple g_1 sont nuls, on a ici

$$j_1 = j_2 = 0, \qquad j_{s-3} = j_{s-2} = 0, \qquad j_{s-1} = 1, \qquad j_s = j_{s+1} = \ldots = j_{s+n-1} = 0.$$

Dans tous les cas le dernier nombre de Betti non nul est égal à 1.

18. On peut, du théorème général relatif aux sous-groupes clos d'un groupe simple ouvert, déduire une conséquence géométrique intéressante. Considérons un espace de Riemann (à ds^2 *défini*) admettant un groupe de déplacements simple ouvert G. Il est d'abord facile de démontrer que si s est l'ordre d'un sous-groupe caractéristique g de G, *cet espace admet au minimum* $n = r - s$ *dimensions*. Il en est ainsi par exemple de l'espace $\mathcal{E}$ attaché à G ; nous allons voir que *cet espace est le seul dont le nombre de dimensions ne dépasse pas cette valeur minima*.

On démontre assez facilement que le sous-groupe g' des rotations isométriques de l'espace considéré est d'ordre s et qu'il existe pour G une base

$$U_1, U_2, \ldots, U_s; \quad V_1, V_2, \ldots, V_n,$$

jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Les s transformations U_i engendrent g' ;

2° La forme $\varphi(e)$ relative à la transformation $\Sigma u_i U_i + v_\alpha V_\alpha$ est

$$-(u_1^2 + \ldots + u_s^2) + v_1^2 + \ldots + v_n^2.$$

Il ne résulte pas a priori de ces hypothèses que le sous-groupe g' soit caractéristique. Les transformations du groupe adjoint Γ qui correspondent à $U_1, \ldots, U_s$, considérées comme substitutions linéaires sur les variables $v_1, v_2, \ldots, v_n$, engendrent un groupe orthogonal décomposable, comme on sait, en un sous-groupe semi-simple clos γ et un ou plusieurs sous-groupes à un paramètre échangeables entre eux et avec γ. Le sous-groupe γ étant clos, on peut supposer qu'il appartient au sous-groupe caractéristique g, et par suite qu'on a (en conservant les notations du n° **14**)

$$U_1 = X_1, \qquad U_2 = X_2, \qquad \ldots, \qquad U_h = X_h;$$

soit alors, ce qu'on peut toujours supposer,

$$\begin{aligned} U_{h+1} &= \alpha_{h+1} X_{h+1} + \beta_1 Y_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ U_s &= \qquad \alpha_s X_s + \beta_s Y_s, \end{aligned}$$

les coefficients α, β étant réels et les coefficients β différents de zéro. Les relations $(U_i U_{h+1}) = 0$ montrent alors que X_{h+1} et $\beta_1 Y_1$ sont tous les deux échangeables avec $X_1, \ldots, X_h$. Or, le sous-groupe g admet au plus une transformation infinitésimale distinguée; donc, si g' ne se confond pas avec g, g' est formé d'un sous-groupe clos d'ordre $s-1$ de g et d'une transformation $\alpha X_s + \beta Y_1$ échangeable avec $X_1, \ldots, X_{s-1}$. Le coefficient β n'est pas nul, sans quoi g' serait identique à g. Il existe donc une transformation Y_1 échangeable avec $X_1, \ldots, X_{s-1}$. Supposons d'une manière générale que les transformations Y échangeables avec $X_1, X_2, \ldots, X_{s-1}$ se déduisent linéairement de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$. Les relations

$$(X_i X_s) = (X_i Y_\alpha) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s-1;\ \alpha = 1, \ldots, p)$$

entraînent

$$(X_i (X_s Y_\alpha)) = 0,$$

par suite $(X_s Y_1), \ldots, (X_s Y_p)$ sont des combinaisons linéaires de $Y_1, \ldots, Y_p$. D'après une propriété fondamentale du sous-groupe g, cela n'est possible que si $p = n$; mais alors les crochets $(Y_\alpha Y_\beta)$ ne dépendraient que de X_s (à cause des propriétés de symétrie des constantes de structure) et les transformations $X_s, Y_1, \ldots, Y_n$ engendreraient un sous-groupe invariant de G, ce qui est absurde.

Le sous-groupe g' étant homologue à g, le théorème énoncé est démontré. On voit donc que *si un espace de Riemann admettant un groupe simple ouvert de déplacements a le nombre minimum de dimensions compatible avec la nature de ce groupe, il jouit de la propriété d'avoir sa courbure riemannienne conservée par le transport parallèle;* tous ces espaces sont applicables les uns sur les autres.

III. — Les isomorphies involutives des groupes simples clos et les groupes simples ouverts.

19. Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé, pour un groupe simple ouvert G, l'existence d'un sous-groupe caractéristique. Si G est à paramètres complexes, cela revient à admettre l'existence d'une forme réelle *unitaire* [$\varphi(e)$ étant définie négative] pour toute structure simple. J'ai trouvé effectivement une telle forme pour chacun des types de groupes simples (1). M. H. Weyl (2) a démontré ensuite l'existence de cette forme par un raisonnement général s'appliquant à tous les cas à la fois. On peut se demander si les calculs qui l'ont conduit à ce résultat ne pourraient pas encore se simplifier, ou plutôt si l'on ne pourrait pas, par un raisonnement *a priori*, démontrer ce théorème; une telle démonstration permettrait de simplifier notablement l'exposition de la théorie des groupes simples. Je ne suis à cet égard arrivé à aucun résultat; j'indique simplement l'idée qui m'a guidé dans mes recherches infructueuses. On peut toujours choisir la base d'un groupe simple de manière que la forme $\varphi(e)$ soit réduite à

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2),$$

les paramètres e_i étant ici complexes. A chaque choix de la base répondant à cette condition correspondent des constantes de structure complexes c_{ijk}. Il est certain, le théorème à démontrer étant vrai, que la somme des carrés des modules des quantités c_{ijk} admet une borne inférieure, qui est atteinte précisément quand ces constantes sont réelles. Ce qu'il faudrait démontrer *a priori*, c'est d'abord que la borne inférieure de la somme considérée est effectivement atteinte, et ensuite que lorsque cette borne est atteinte, les constantes de structure sont nécessairement réelles. Bien entendu, une telle démonstration ne devrait exiger que les théorèmes élémentaires sur la structure des groupes.

---

(1) *Annales École Normale*, t. 31, 1914, p. 263-355.
(2) *Math. Zeitschr.*, t. 24, 1925, p. 371-375.

20. Passons maintenant à un groupe simple ouvert G à paramètres réels. J'ai indiqué, dans mon Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique* [1], comment on pourrait, pour chaque type de groupe simple ouvert, *vérifier* l'existence d'un sous-groupe caractéristique. Cette vérification serait du reste très pénible. Je puis maintenant *démontrer* cette existence d'une manière générale.

Soit G un groupe simple ouvert à paramètres réels et soit G_u un groupe clos de la même structure complexe. Soient

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r$$

une base particulière du groupe G_u, et

$$Y_1, \quad Y_2, \quad \ldots, \quad Y_r$$

une base particulière du groupe G. On peut passer d'une base à l'autre par une substitution linéaire S, à coefficients nécessairement *imaginaires*. Nous écrirons

$$(X) = S(Y), \tag{10}$$

ou, d'une manière explicite,

$$X_i = \sum_k a_{ik} Y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'on forme les crochets $(X_i X_j)$, on obtient les relations

$$\sum_s c_{ijs} a_{sk} = \sum_{s,t} a_{is} a_{jt} \gamma_{stk} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, r), \tag{11}$$

en désignant respectivement par c_{ijs} et γ_{stk} les constantes de structure des groupes G_u et G.

Ces constantes étant toutes réelles, les relations (11) restent valables si l'on remplace les coefficients a_{ij} par leurs imaginaires conjugués $\overline{a_{ij}}$. Il en résulte que la substitution $\overline{S}$, imaginaire conjuguée de S, fait passer de la base donnée du groupe G à la base

$$X'_1, \quad X'_2, \quad \ldots, \quad X'_r$$

[1] Tome 55, 1927, p. 123-124.

d'un second groupe clos G'_u ayant les mêmes constantes de structure (réelles) que G_u; nous écrirons

$$(12) \qquad (X') = \bar{S}(Y).$$

21. Considérons maintenant l'espace $\mathcal{E}$ à r dimensions dont le groupe des déplacements est le groupe à paramètres complexes de la structure donnée. Aux deux groupes G_u et G'_u correspondent deux points A et A′, qu'ils laissent respectivement invariants, et dont nous désignerons le milieu par O. Il existe un déplacement continu (*transvection*) amenant A en A′ le long de la géodésique AA′, les vecteurs issus de A se transportant par parallélisme. Cette transvection, faite par exemple en partant du point O pris pour origine, est engendrée par une transformation infinitésimale obtenue en multipliant par $\sqrt{-1}$ une des transformations infinitésimales du groupe adjoint du groupe clos; on peut donc la représenter par une substitution linéaire à coefficients imaginaires, effectuée sur les transformations infinitésimales de base des groupes G_u qui correspondent aux différents points de la géodésique AA′; par cette substitution les constantes de structure sont conservées.

Soit alors Θ la transvection qui amène O en A; on peut supposer qu'elle fait passer d'une base convenablement choisie (X'') du groupe clos G''_u représenté par O à la base (X) du groupe G_u :

$$(13) \qquad (X) = \Theta(X'');$$

la substitution $\bar{\Theta} = \Theta^{-1}$, à la fois inverse et imaginaire conjuguée de Θ, fera passer de la base (X'') à une certaine base du groupe G'_u; on aura donc, R désignant une substitution réelle,

$$(14) \qquad (X') = R\Theta^{-1}(X'').$$

On déduit des égalités (10), (12), (13) et (14)

$$R\Theta^{-2} = \bar{S}S^{-1};$$

en changeant chaque matrice dans son imaginaire conjuguée, on obtient

$$R\Theta^2 = S\bar{S}^{-1} = (\bar{S}S^{-1})^{-1} = \Theta^2 R^{-1};$$

puis, en multipliant à droite par R et à gauche par R^{-1},

$$(15)\qquad \Theta^2 R = R^{-1}\Theta^2.$$

enfin

$$\Theta^4 R = \Theta^2(\Theta^2 R) = \Theta^2 R^{-1}\Theta^2 = (R\Theta^2)\Theta^2 = R\Theta^4.$$

La substitution R *est donc échangeable avec* Θ^4. Mais les racines caractéristiques de Θ sont *réelles et positives*; par suite toute matrice échangeable avec Θ^4 est échangeable avec Θ^2 et avec Θ ([1]); donc, d'après (15),

$$R = R^{-1}, \qquad \text{ou} \qquad R^2 = 1.$$

22. Partons maintenant du groupe G''_u au lieu de partir de G_u. Nous avons

$$(X'') = \Theta^{-1}(X) = \Theta^{-1}S(Y);$$

le procédé appliqué plus haut conduit à une nouvelle base de groupe clos

$$\Theta\bar{S}(Y) = \Theta(X') = \Theta R \Theta^{-1}(X'') = R(X'').$$

Ainsi donc on a les deux relations fondamentales suivantes, où Σ désigne la matrice imaginaire $\Theta^{-1}S$,

$$(X'') = \Sigma(Y),$$
$$R(X'') = \bar{\Sigma}(Y).$$

La matrice R étant involutive, on peut, par une substitution linéaire réelle effectuée sur la base (X''), s'arranger pour que tous les éléments de R soient nuls, sauf ceux de la diagonale principale égaux, les s premiers à 1, les n derniers $(s + n = r)$ à -1. On voit alors immédiatement que les éléments des s premières lignes de Σ sont tous réels et que les éléments des n dernières lignes sont tous purement imaginaires. Un

---

([1]) La matrice Θ est réductible à une matrice diagonale dont tous les éléments r_i sont positifs; la matrice Θ^n sera une matrice diagonale avec les éléments r_i^n. Si alors une matrice (a_{ij}) est échangeable avec Θ^n, c'est qu'on a

$$(r_i^n - r_j^n)a_{ij} = 0;$$

mais alors il en résulte

$$(r_i - r_j)a_{ij} = 0,$$

et la matrice est échangeable avec Θ.

choix convenable de la base (Y) du groupe G conduit alors aux relations fondamentales

$$(16)\qquad \begin{cases} X_1 = Y_1, & X_2 = Y_2, & \ldots, & X_s = Y_s, \\ X_{s+1} = iY_{s+1}, & X_{s+2} = iY_{s+2}, & \ldots, & X_r = iY_r. \end{cases}$$

Autrement dit, *étant donné un groupe ouvert simple* G, *on peut toujours trouver un groupe clos* G_u *de même structure, une base pour* G *et une base pour* G_u, *de telle sorte que les transformations infinitésimales de base de même rang des deux groupes soient ou égales, ou dans le rapport i.*

23. Des formules (16) on déduit immédiatement que les transformations $Y_1, Y_2, \ldots, Y$, engendrent un sous-groupe caractéristique de G. On voit aussi que la substitution involutive R, appliquée aux transformations de base X_i du groupe clos, est *isomorphique*.

Réciproquement considérons une substitution isomorphique involutive du groupe clos G_u. On peut supposer qu'elle est de la forme

$$X'_i = X_i, \qquad X'_{s+j} = -X_{s+j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s; j = 1, \ldots, n).$$

En exprimant que les constantes de structure ne sont pas changées, on voit immédiatement que les seules constantes non nulles sont celles qui contiennent 0 ou 2 indices supérieurs à s. En posant alors

$$Y_i = X_i, \qquad Y_{s+j} = iX_{s+j},$$

on voit que les constantes de structure de la base (Y) sont réelles, ce qui donne un groupe ouvert de même structure que G_u, mais avec une forme $\varphi(e)$ qui contient n carrés positifs et s négatifs.

La recherche des groupes réels ouverts d'une structure simple donnée revient donc à celle des substitutions involutives isomorphiques du groupe clos de la structure donnée.

On peut ajouter qu'*il y a autant de groupes ouverts non homologues dans le groupe adjoint continu (à paramètres complexes) qu'il y a de substitutions involutives isomorphiques non homologues entre elles dans le groupe adjoint continu clos (à paramètres réels).*

24. Le théorème précédent donne une nouvelle méthode beaucoup plus simple que celle que j'ai exposée en 1914 ([1]) pour obtenir toutes les formes réelles d'une structure simple donnée. Elle est particulièrement facile à appliquer si le groupe adjoint du groupe clos est *continu*, car alors la substitution R admet une substitution infinitésimale génératrice appartenant au groupe adjoint, et l'on connaît la forme canonique à laquelle on peut toujours ramener cette substitution infinitésimale. Le problème est donc virtuellement résolu pour les structures simples des types (B), (C), (E) (de rang 7 et 8), (F) et (G) ([2]). Mais la solution est également très simple, même dans le cas où R n'appartient pas au groupe adjoint continu, si l'on est dans le cas des types (A) ou (D). En réalité, il ne reste, comme détermination difficile, que celle des groupes ouverts du type (E) de rang 6, dans le cas où R n'appartient pas au groupe adjoint continu; mon ancienne méthode, dans ce dernier cas, ne fournit qu'un groupe ouvert difficile à obtenir directement ([3]).

IV. — Détermination effective des groupes simples ouverts des quatre classes générales.

25. Nous allons, comme application, indiquer comment on peut effectivement obtenir les formes réelles ouvertes des quatre grandes classes de structures simples; il n'y aurait, sauf la réserve faite tout à l'heure, aucune difficulté à procéder de même pour les classes exceptionnelles. Nous partirons dans chaque cas d'un groupe clos particulier.

26. *Type* (A). — Comme groupe clos G_u du type (A), choisissons le groupe linéaire unimodulaire d'une forme d'Hermite définie positive

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{l+1}\bar{x}_{l+1}.$$

(1) *Annales École Normale*, t. 31, 1914, p. 263-355.

(2) Pour ces types, en effet, le groupe adjoint du groupe clos est continu (*Bull. Soc. math.*, t. 49, 1925, p. 361-366).

(3) Il correspond aux espaces $\mathcal{E}$ du type (EIV) à 26 dimensions (*Bull. Soc. math.*, t. 55, 1927, p. 131).

Le groupe adjoint comprend deux familles distinctes; la première indique comment les transformations de G_u sont échangées par une transformation du groupe G_u lui-même (*homographie*), la seconde indique comment elles sont échangées par une *antihomographie* (homographie combinée avec le changement de x_i en $\overline{x_i}$).

Si la substitution involutive R appartient au groupe adjoint continu, elle provient d'une homographie, qu'on peut toujours supposer ramenée à sa forme canonique

$$x'_k = e^{i\alpha_k} x_k \qquad (\alpha_1 + \ldots + \alpha_{l+1} = 0);$$

pour que la substitution correspondante du groupe adjoint Γ_u soit involutive, il faut et il suffit, le groupe linéaire G_u étant *irréductible*, qu'elle multiplie toutes les variables par un même facteur m quelconque. Les opérations R cherchées s'obtiendront donc en exprimant que toutes les quantités $e^{2i\alpha_k}$ sont égales entre elles; par suite, du point de vue qui nous occupe, l'opération R peut être définie par les équations

$$x'_i = -x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$
$$x'_{p+j} = x_{p+j} \qquad (j = 1, \ldots, l+1-p).$$

Les transformations de G_u communes avec le groupe ouvert correspondant sont celles qui sont échangeables avec l'homographie précédente, et par suite celles qui transforment entre elles les p premières variables, ainsi que les $l+1-p$ dernières. Elles engendrent le groupe commun g des rotations dans chacun des espaces $\mathcal{E}$, clos et ouvert, correspondants (¹). Le groupe ouvert est ici le groupe linéaire unimodulaire de la forme d'Hermite indéfinie

$$x_1\overline{x}_1 + \ldots + x_p\overline{x}_p - x_{p+1}\overline{x}_{p+1} - \ldots - x_{l+1}\overline{x}_{l+1}.$$

27. Si l'opération involutive R n'appartient pas au groupe adjoint continu, elle provient d'une *antihomographie* involutive ou *antiinvolution*. Il en est de deux espèces (²).

(¹) Ce sont les espaces des types (AIII) et (AIV), ce dernier type correspondant à $p = 1$ (ou l). Voir *Annales École Normale*, t. **44**, 1927, p. 395-400, 446-450.

(²) Voir *Annales École Normale*, t. **44**, 1927, p. 436-440, 442-443.

L'antiinvolution de première espèce est réductible à la forme

$$x'_i = \bar{x}_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, l+1);$$

le sous-groupe clos g commun à G_u et à G est formé des substitutions *à coefficients réels* de G_u, c'est-à-dire des substitutions orthogonales réelles effectuées sur $x_1, \ldots, x_{l+1}$. Le groupe G est celui des substitutions réelles quelconques; il est isomorphe au groupe projectif réel de l variables [1].

L'antiinvolution de seconde espèce, qui n'existe que si $l+1$ est pair, est réductible à la forme

$$x'_1 = -\bar{x}_2, \qquad x'_2 = \bar{x}_1, \qquad x'_3 = -\bar{x}_4, \qquad x'_4 = \bar{x}_3, \qquad \ldots;$$
$$x'_l = -\bar{x}_{l+1}, \qquad x'_{l+1} = \bar{x}_l.$$

Le groupe ouvert G est ici isomorphe au groupe linéaire quaternionien à $\frac{l+1}{2}$ variables (quaternioniennes); le sous-groupe clos g est celui qui laisse invariante une forme d'Hermite quaternionienne définie positive [2].

28. *Types* (B) *et* (D). — On peut prendre pour groupe clos G_u le groupe linéaire réel d'une forme quadratique définie positive. Le groupe adjoint indique comment sont échangées les transformations de G_u par une substitution orthogonale de déterminant 1 ou -1. Là encore cette substitution fournit l'opération identique du groupe adjoint si elle multiplie toutes les variables par un même facteur.

La forme canonique d'une substitution orthogonale est

$$x'_{2\alpha-1} = x_{2\alpha-1}\cos a_\alpha - x_{2\alpha}\sin a_\alpha,$$
$$x'_{2\alpha} = x_{2\alpha-1}\sin a_\alpha + x_{2\alpha}\cos a_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p),$$
$$x'_{2p+k} = \varepsilon_k x_{2p+k} \qquad (k = 1, \ldots, n-2p;\ \varepsilon_k^2 = 1).$$

Le carré de cette substitution ne peut multiplier toutes les variables par un même facteur que si tous les angles $2a_\alpha$ sont des multiples de π. Si $n > 2p$, il faut que tous les a_α soient des multiples de π, et la subs-

(1) Les espaces $\mathcal{E}$ correspondants sont du type (AI) (*Annales École Normale*, t. 44, 1927, p. 385-390, 437-442).

(2) Les espaces $\mathcal{E}$ correspondants sont du type (AII) (*loc. cit.*, p. 390-394, 442-446).

titution orthogonale est alors, en changeant les notations,

$$x'_1 = -x_1, \quad \ldots, \quad x'_p = -x_p, \quad x'_{p+1} = x_{p+1}, \quad \ldots, \quad x'_n = x_n.$$

Si $n = 2p$, on arrive à la même conclusion, à moins que tous les angles $2a_\alpha$ ne soient des multiples impairs de π; on obtient alors la forme canonique

$$x'_1 = -x_2, \quad x'_2 = x_1, \quad x'_3 = -x_4, \quad x'_4 = x_3, \quad \ldots,$$
$$x'_{n-1} = -x_n, \quad x'_n = x_{n-1}.$$

Dans le premier cas, le sous-groupe clos g commun à G_u et G est formé des substitutions qui laissent invariante chacune des deux formes

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2, \qquad x_{p+1}^2 + \ldots + x_n^2;$$

le groupe ouvert G est le groupe linéaire de la forme quadratique indéfinie

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 \quad (^1).$$

Dans le second cas, le sous-groupe clos g est celui qui laisse invariante chacune des variétés planes imaginaires conjuguées l'une de l'autre

$$x_1 + ix_2 = x_3 + ix_4 = \ldots = x_{n-1} + ix_n = 0,$$
$$x_1 - ix_2 = x_3 - ix_4 = \ldots = x_{n-1} - ix_n = 0,$$

tout entières situées l'une et l'autre sur la quadrique

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0 \quad (^2).$$

29. *Type* (C). — Le groupe clos G_u est par exemple le groupe linéaire qui laisse invariantes à la fois la forme extérieure

$$[x_1 x_2] + \ldots + [x_{2l-1} x_{2l}]$$

et la forme d'Hermite définie positive

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \ldots + x_{2l} \bar{x}_{2l}.$$

---

(1) On obtient ainsi les espaces du type (BDI) avec, comme cas particulier ($p = l$), le type (BDII) (*Annales École Normale*, t. **44**, 1927, p. 400-405, 450-454).

(2) Les espaces correspondants sont du type (DIII) (*loc. cit.*, p. 405-409, 454-459).

Le groupe adjoint est continu. Toute substitution de G_u est réductible à la forme canonique

$$x'_{2k-1} = e^{i\alpha_k} x_{2k-1}, \qquad x'_{2k} = e^{-i\alpha_k} x_{2k};$$

il faut et il suffit que les $2l$ quantités $e^{2i\alpha_k}$ et $e^{-2i\alpha_k}$ soient égales; chacune d'elles est par suite égale à 1 ou à -1.

Dans le premier cas, la substitution est réductible à la forme

$$x'_1 = -x_1, \quad x'_2 = -x_2, \quad \ldots, \quad x'_{2p-1} = -x_{2p-1}, \quad x'_{2p} = -x_{2p};$$
$$x'_{2p+1} = x_{2p+1}, \quad x'_{2p+2} = x_{2p+2}, \quad \ldots, \quad x'_{2l} = x_{2l}.$$

Le sous-groupe g laisse invariantes deux variétés planes polaires l'une de l'autre à la fois par rapport à la forme quadratique extérieure et par rapport à la forme d'Hermite.

Dans le second cas, la substitution est réductible à la forme

$$x'_{2k-1} = i x_{2k-1}, \qquad x'_{2k} = -i x_{2k};$$

le sous-groupe g laisse invariantes les deux variétés planes

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{2l-1} = 0,$$
$$x_2 = x_4 = \ldots = x_{2l} = 0,$$

qui appartiennent chacune au complexe linéaire défini par la forme quadratique extérieure et sont polaires l'une de l'autre par rapport à la forme d'Hermite.

Dans l'un et l'autre cas, les espaces $\mathcal{E}$ à courbure positive sont les espaces représentatifs des couples de variétés planes obtenus (1).

30. Dans le cas du type (D) de rang 4, la méthode précédente doit être complétée parce que, à côté des isomorphies qui se présentent dans le cas général et qui proviennent des substitutions linéaires de déterminant ± 1, isomorphies qui forment deux familles continues distinctes $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}_1$, il existe quatre autres familles continues d'isomorphies $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$, $\mathcal{J}_4$, $\mathcal{J}_5$ (2). Le groupe total des isomorphies est ainsi

---

(1) Les espaces $\mathcal{E}$ correspondant au premier cas sont du type (CII) (*Annales École Normale*, t. 44, 1927, p. 416-420, 462-466); ceux qui correspondent au second cas sont du type (CI) (*loc. cit.*, p. 412-416, 460-462).

(2) *Bull. Sc. math.*, t. 49, 1925, p. 367-374.

isomorphe (mériédrique) au groupe des substitutions de trois lettres, chacune de ces substitutions correspondant à une des familles d'isomorphies. L'isomorphie involutive R appartient donc soit à la famille $\mathcal{J}$, soit à une des familles qui correspondent à une transposition de deux lettres; mais toutes ces familles sont homologues entre elles; on peut donc supposer que R appartient à $\mathcal{J}_1$, et l'on est ramené au cas général. Néanmoins on voit que les isomorphies involutives R qui proviennent d'une substitution orthogonale de déterminant -1 et celles qui leur sont homologues dans le groupe adjoint *mixte* donnent naissance à trois groupes ouverts de même structure (réelle), mais *non homologues* entre eux dans le groupe adjoint à paramètres complexes (¹). Ces groupes sont isomorphes au groupe linéaire d'une forme quadratique indéfinie à huit variables, réductible à un nombre impair de carrés positifs et un nombre impair de carrés négatifs.

(¹) Cela explique pourquoi les géométries de Klein à groupe fondamental simple *clos* peuvent admettre plusieurs formes riemanniennes distinctes qui fournissent des espaces de Riemann identiques, mais proviennent de choix essentiellement distincts de l'élément générateur de l'espace. Cette circonstance au contraire, comme nous l'avons démontré plus haut, ne peut pas se présenter si le groupe est *ouvert*.