JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BUHL

Lignes asymptotiques et lignes de courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 8 (1929), p. 45-69.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1929_9_8__45_0>

Lignes asymptotiques et lignes de courbure ;

PAR A. BUHL.

Je suis particulièrement heureux d'insérer dans ce Volume, dédié à mes Maîtres Paul Appell et Émile Picard, quelques pages de géométrie qu'on peut considérer comme inspirées par les Thèses de Doctorat (¹) des deux illustres savants.

Certains des résultats qui suivent ont déjà été publiés (²) mais j'ai pu les compléter par d'autres, donnant à l'ensemble un indéniable caractère d'originalité, pour parvenir enfin à un problème fort difficile (détermination des surfaces dont un système de lignes de courbure se trouve sur des cylindres circulaires coaxiaux) que je n'ai fait qu'amorcer et qui pourrait conduire à bien des recherches.

Tout cela prolonge et prolongera sans doute des travaux commencés par MM. Appell et Picard il y a un demi-siècle; pour de telles intelligences, les œuvres de jeunesse ne sont pas moins fécondes que celles publiées dans la pleine maturité du talent et c'est avec une grande joie et une grande reconnaissance que j'ai entrepris de l'indiquer brièvement.

(¹) P. APPELL, *Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoïdal d'un corps solide* (*Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. V, 1876, p. 245). — E. PICARD, *Application de la Théorie des Complexes linéaires à l'étude des surfaces et des courbes gauches* (*ibid.*, t. VI, 1877, p. 329).

(²) A. BUHL, *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VIII, 1908; IX, 1909; X, 1910).

Lignes asymptotiques.

1. *Emploi des coordonnées cylindriques.* — En employant les coordonnées cylindriques ou semi-polaires, une surface quelconque est représentée par les équations

$$(1) \qquad x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z(r, \theta).$$

Les lignes asymptotiques de cette surface sont définies par l'équation différentielle générale

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} dr^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial r\,\partial\theta} dr\,d\theta + \frac{\partial^2 x}{\partial\theta^2} d\theta^2 & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} dr^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial r\,\partial\theta} dr\,d\theta + \frac{\partial^2 y}{\partial\theta^2} d\theta^2 & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} dr\,d\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} d\theta^2 & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} \end{vmatrix} = 0.$$

D'après les équations (1), les deux premières lignes du déterminant sont

$$\begin{array}{ccc} -2\sin\theta\,dr\,d\theta - r\cos\theta\,d\theta^2 & \cos\theta & -r\sin\theta, \\ 2\cos\theta\,dr\,d\theta - r\sin\theta\,d\theta^2 & \sin\theta & r\cos\theta. \end{array}$$

L'équation différentielle se développe alors aisément sous la forme

$$(2) \qquad r\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} dr^2 + 2\left(r\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{\partial z}{\partial\theta}\right) dr\,d\theta + r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + r\frac{\partial z}{\partial r}\right) d\theta^2 = 0.$$

C'est cette équation (2) qui va nous donner tout ce qui, dans ce Mémoire, est consacré aux lignes asymptotiques; elle peut servir à condenser des résultats élémentaires, que nous rappellerons brièvement, et conduit aussi dans des régions élevées où nous rencontrerons d'importants travaux dus à MM. P. Appell et E. Picard.

2. *Surfaces réglées à directrice rectiligne. Conoïdes.* — Soient les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 0.$$

D'après (2), ces surfaces ont un système d'asymptotiques tel que

$d\theta = 0$, donc contenu dans une famille de plans passant par Oz. Or tout un système d'asymptotiques ne peut se composer de lignes planes à moins que celles-ci ne soient droites. L'équation (3) doit donc définir des surfaces réglées à directrice rectiligne Oz, ce qui est d'ailleurs évident en considérant que (3) est une équation de Monge-Ampère à intégrale intermédiaire

$$\frac{\partial z}{\partial r} = a(\theta), \tag{4}$$

d'où

$$z = r a(\theta) + b(\theta). \tag{5}$$

L'équation (3) est bien peu de chose et tous ces raisonnements sont si élémentaires qu'ils peuvent paraître superflus; mieux valait cependant les expliciter car nous aurons à les comparer, dans la suite, avec d'autres beaucoup plus complexes mais ayant précisément une origine logique analogue.

Cherchons maintenant le second système d'asymptotiques de la surface (5). Là encore (2) donne immédiatement l'équation différentielle du type de Bernoulli

$$2 b' \, dr = r(a'' r + a r + b'')\, d\theta,$$

dont l'intégrale générale est

$$\frac{2\sqrt{b'}}{r} + \int \frac{a'' + a}{\sqrt{b'}}\, d\theta = 0. \tag{6}$$

On voit que les lettres accentuées sont simplement les dérivées des fonctions a ou b qui ne dépendent, l'une ou l'autre, que de la seule variable θ.

Tout ce que nous avons à dire, quant aux asymptotiques des surfaces *réglées*, est dominé par le théorème fondamental de la Thèse de M. Émile Picard : *La recherche des lignes asymptotiques de toute surface réglée, dont les génératrices appartiennent à un complexe linéaire, dépend d'une seule quadrature.* Nous ne reprendrons pas l'étude générale de ce théorème; son auteur l'a rendue classique [1]. Nous exami-

[1] E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, 2e édition, p. 440.

nerons plutôt des particularités géométriques qui peuvent servir à l'illustrer et qui soulèvent des questions semblant loin d'être épuisées, malgré le premier aspect élémentaire de certaines. Pour les surfaces (5), toutes les génératrices rencontrent Oz; or toutes les droites rencontrant une droite fixe et passant par un point forment *un plan;* donc les génératrices de (5) appartiennent à un complexe *linéaire* et la formule (6) montre bien que les asymptotiques de la surface, autres que les génératrices, dépendent d'une quadrature et seulement d'une.

Si la fonction $a(\theta)$ s'évanouit identiquement, les surfaces (5) se réduisent aux conoïdes *droits*

$$z = b(\theta), \tag{7}$$

l'intégrale de la formule (6) se réduit à une simple constante et cette formule donne

$$r^2\, d\theta = k\, dz \quad \text{ou} \quad x\, dy - y\, dx = k\, dz. \tag{8}$$

On voit que, le long d'une des lignes (M) cherchées, le point M, qui décrit la ligne, ayant une projection m sur le plan Oxy, le rayon vecteur Om balaie une aire $A - A_0$ telle que

$$2(A - A_0) = k(z - z_0). \tag{9}$$

C'est le théorème des aires géométrisé ou considéré dans un espace-temps qui n'aurait que trois dimensions. Ces considérations jouent un rôle fondamental et très élégant dans la Thèse de M. P. Appell, lequel a aussi repris le sujet, au point de vue classique, avec les courbes gauches dont les tangentes sont des droites de moment nul (1).

L'étude des courbes (M) ne semble nullement épuisée à l'heure actuelle, surtout au point de vue intégral; il y a même là des questions topologiques d'une certaine complexité. Ainsi une courbe (M) ne saurait être *fermée* en admettant une projection (m) *simplement connexe* parce qu'il y aurait, dans (m) une aire *non nulle* proportionnelle à l'intégrale *nulle* de dz le long de (M); ceci d'après (8). Remarques analogues pour la première équation (8) multipliée par le

(1) P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. I; exercices du Chapitre I.

tiers de z. On a alors (¹) une intégrale qui exprime le volume balayé dans l'espace par le triangle $\mathrm{OM}m$.

Revenons à l'équation (6); on en a déduit les courbes (M) en supposant constante l'intégrale qui y figure et ce en rendant a identiquement nul. C'est admettre plus qu'il n'est nécessaire car l'intégrale de (6) est encore constante quand on a

$$a'' + a = 0, \qquad \text{d'où} \qquad a(\theta) = \mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta,$$

avec A et B désignant des constantes. D'après (5) la propriété (8) existe encore pour les asymptotiques des surfaces

$$z = \mathrm{A}r\cos\theta + \mathrm{B}r\sin\theta + b(\theta)$$

ou d'équation cartésienne

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \beta\left(\frac{y}{x}\right),$$

c'est-à-dire quand il s'agit d'un conoïde oblique ayant toujours $\mathrm{O}z$ pour directrice mais dont les génératrices sont parallèles à un plan fixe quelconque; bien entendu, la propriété (8) est conservée *sur le plan* $\mathrm{O}xy$ toujours normal à $\mathrm{O}z$.

Au fond cette possibilité d'associer immédiatement le conoïde oblique au conoïde droit provient de ce fait général que la surface

$$z = \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + f(x, y)$$

a des projections d'asymptotiques sur $\mathrm{O}xy$ qui sont indépendantes des constantes A et B.

L'assertion est vérifiée immédiatement avec l'équation

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{10}$$

Terminons ce paragraphe par des résultats moins évidents et dépendant également des équations (5) et (6). Dans beaucoup de livres classiques, on cite les conoïdes comme des surfaces dont les asymptotiques s'obtiennent sans quadrature et comme si l'on ne connaissait point d'autres exemples plus généraux. Les formules (5) et (6) peuvent

(¹) A. Buhl, *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (Collection *Scientia*), p. 19.

donner une riche moisson de telles surfaces, les quadratures s'effectuant explicitement et de telle manière qu'il n'en restât plus trace dans les résultats terminaux. Prenons

$$a'' + a = \sqrt{b'}\,\Phi'(\theta) \tag{11}$$

et (6) deviendra

$$\frac{2\sqrt{b'}}{r} + \Phi(\theta) = C.$$

Reste à satisfaire à (11) sans quadratures. Or, à cette fin, on pourra prendre pour b' le carré d'une combinaison additive et multiplicative de polynomes, d'exponentielles, de fonctions trigonométriques et, pour $\Phi(\theta)$, une combinaison de même nature ; bref, on se mettra dans un cas où a pourra être obtenu par une méthode de coefficients indéterminés. Soient, par exemple, λ étant une constante,

$$b' = \lambda^2\theta^2, \qquad \Phi'(\theta) = \theta.$$

On aura

$$a = \lambda\theta^2 - 2\lambda,$$

et finalement la surface réglée

$$3z = 3\lambda r(\theta^2 - 2) + \lambda^2\theta^3$$

avec le système d'asymptotiques non rectilignes se projetant sur Oxy suivant la famille de courbes, toutes proches parentes de la spirale hyperbolique correspondant à C nul,

$$\frac{2\lambda\theta}{r} + \frac{\theta^2}{2} = C.$$

Certes les très nombreux résultats que l'on pourrait obtenir ainsi ne constitueraient jamais de la géométrie bien élevée mais il y aurait de quoi satisfaire amplement les amateurs d'exercices, voire les chercheurs d'énoncés pour problèmes de licence et d'agrégation.

3. *Transformation de l'équation* (2). — La surface d'équations (1) est évidemment aussi générale que possible, mais cependant des considérations géométriques très simples ne donnent pas à la dernière équation (1) la forme explicite adoptée jusqu'ici.

Ainsi, considérons les *surfaces telles que le triangle* O*mn, formé par l'origine* O *et les intersections avec* Oxy *de l'ordonnée et de la normale en* M(x, y, z), *ait une aire* A *ne dépendant que de l'ordonnée* $z =$ Mm *de* M.

On peut écrire, pour équation aux dérivées partielles de ces surfaces

$$A = \frac{z}{2}(py - qx) = -\frac{z}{2}\frac{a}{\Phi'(z)},$$

d'où, aisément,

$$\Phi(z) = a \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x} + F\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

ou enfin

(12) $$\Phi(z) = a\theta + F(r).$$

De même les surfaces réglées à plan directeur étant représentées par l'équation

(13) $$z = y\,\varphi(x) + \psi(x),$$

on déduit facilement de (10) que le système d'asymptotiques non rectilignes est défini par ([1])

(14) $$2y\sqrt{\varphi'} + \int \frac{\varphi''}{\sqrt{\varphi'}}\,dx = \text{const.}$$

Ce résultat, simple en lui-même, s'accorde cependant mal avec les considérations géométriques du paragraphe précédent. Pour les conoïdes droits, nous sommes revenus à l'intéressante propriété (9) en laquelle intervient le plan directeur du conoïde tandis que les familles de courbes (14) sont dans le plan Oxy qui n'est pas plan directeur pour la surface (13); le plan directeur pour (13) est Oyz.

Il est indiqué ici d'étudier une surface réglée, à plan directeur Oxy, par l'équation

$$r\cos[\Phi(z) - \theta] = \Psi(z),$$

qui, pour $\Psi(z)$ réduit à la constante k, donne notamment la surface

$$\Phi(z) = \theta + \operatorname{arc\,cos}\frac{k}{r},$$

([1]). L. Raffy, *Applications géométriques de l'Analyse*, 1897, p. 156.

dont toutes les génératrices sont tangentes à un cylindre circulaire d'axe Oz et de rayon k.

On voit qu'il peut y avoir d'assez nombreuses raisons géométriques d'attribuer, à la dernière équation (1), la forme

$$\Phi(z) = a\theta + F(r). \tag{12}$$

Alors l'équation (2) est à remplacer par

$$\left(F'' - F'^2 \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr^2 - 2a\left(\frac{1}{r} + F' \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr\, d\theta + \left(rF' - a^2 \frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) d\theta^2 = 0.$$

Celle-ci a l'inconvénient de contenir r, θ et z mais en y portant $d\theta$, tiré de (12) par différentiation, il vient

$$\left(F'' + \frac{2}{r} F' + \frac{r}{a^2} F'^3\right) dr^2 - 2\left(\frac{\Phi'}{r} + \frac{r}{a^2} F'^2 \Phi'\right) dr\, dz + \left(\frac{r}{a^2} F' \Phi'^2 - \Phi''\right) dz^2 = 0.$$

C'est là une véritable équation différentielle qui ne contient que r et z; elle définit donc les asymptotiques de (12) en coupant cette surface par deux familles de surfaces de révolution d'axe Oz. Il est fort remarquable que le terme en dr^2 ait un coefficient indépendant de Φ. En annulant ce coefficient nous aurons des $F(r)$ donnant des surfaces (12) à asymptotiques particulièrement remarquables.

4. *Surfaces réglées à plan et à cylindre circulaire directeurs.* — Étudions donc les surfaces (12) pour lesquelles

$$F'' + \frac{2}{r} F' + \frac{r}{a^2} F'^3 = 0,$$

d'où

$$F' = \frac{ak}{r\sqrt{r^2 - k^2}}, \qquad F = a \arc\cos \frac{k}{r}.$$

Comme $\Phi(z)$ n'est pas déterminé, on peut prendre $a = 1$ sans diminuer la généralité et l'on retrouve la surface déjà entrevue géométriquement au paragraphe précédent

$$\Phi(z) = \theta + \operatorname{arc\,cos} \frac{k}{r}. \tag{13*}$$

Pour les asymptotiques distinctes des génératrices, on a, d'après la dernière équation du paragraphe précédent,

$$\frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2-k^2}}\Phi' - \left(k\Phi'^2 - \Phi''\sqrt{r^2-k^2}\right)dz = 0.$$

Posant

$$R^2 = r^2 - k^2,$$

il vient

$$\frac{dR}{dz} + \frac{\Phi''}{2\Phi'}R = \frac{k}{2}\Phi',$$

équation linéaire qui, abstraction faite du second membre, a pour intégrale

$$R^2\Phi' = \text{const.}$$

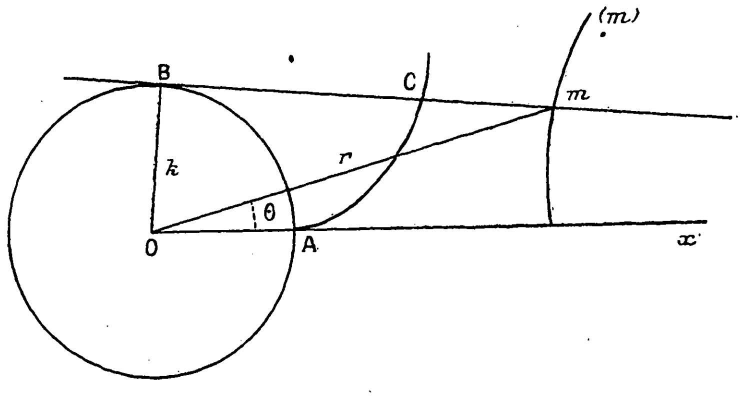
et qui, en faisant varier la constante, donne finalement

$$(14^*) \qquad R^2\Phi' = \frac{k^2}{4}\left(\int \Phi'^{\frac{3}{2}}dz\right)^2$$

En différentiant (13*), on vérifie facilement que

$$R^2\Phi'\,dz = r^2\,d\theta + k\,d\left(\sqrt{r^2-k^2} - k\arccos\frac{k}{r} - k\theta\right).$$

Considérons, dans le plan Oxy, le cercle de centre O et de rayon k. Du point m situé sur la projection (m) de l'asymptotique passant par M, menons la tangente mB et traçons la développante AC.



La dernière expression obtenue peut s'écrire

$$r^2\,d\theta + k\,d(\overline{Bm} - \text{arc}\,AB)$$

et, comme l'arc AB est précisément égal à BC, on a

$$r^2\,d\theta + k\,d.\overline{Cm} = \Psi(z)\,dz,$$

si $\Psi(z)$ désigne le second membre de (14^*).

Supposons que le point m prenne sur (m) deux positions m_1 et m_2; soient C_1 et C_2 les points C correspondants, S_1 et S_2 les aires balayées par Om quand ce rayon vecteur, partant d'une position fixe, devient Om_1 ou Om_2; soient enfin z_1 et z_2 les ordonnées des points de la surface qui se projettent en m_1 et m_2. En intégrant la relation précédente, on aura

$$(15)\qquad 2(S_2 - S_1) + k(\overline{C_2m_2} - \overline{C_1m_1}) = \int_{z_1}^{z_2} \Psi(z)\,dz.$$

C'est là une généralisation relativement simple de la propriété (9) d'abord étudiée par MM. Appell et Picard. Si $k = 0$, la fonction $\Psi(z)$, second membre de (14^*), doit être remplacée par une simple constante, ceci d'après les deux équations précédant (14^*), et l'on retrouve bien (9).

L'obtention du résultat (15) pourrait conduire à la recherche d'autres résultats analogues; il n'est pas certain que pour une surface réglée à plan directeur, ce soit là le seul résultat à quadrature qui généralise manifestement (9). Mais ici les recherches sont notablement plus difficiles que celles indiquées à la fin du paragraphe **2**.

La formule (15) est également en relation avec la question, déjà soulevée en les Thèses de MM. Appell et Picard, des courbes à aire algébrique ou algébrico-logarithmique.

Dans (15) les segments Cm sont évidemment de nature algébrico-logarithmique; on peut s'arranger à choisir $\Psi(z)$ de manière que le second membre de la même relation soit de nature analogue. Un exemple très élégant est fourni par la surface

$$(16)\qquad \Phi(z) = \frac{2z}{h} = \theta + \arc\cos\frac{k}{r}.$$

Celle-ci est un hélicoïde qui se réduit à l'hélicoïde réglé élémentaire quand k tend vers zéro. L'équation (14) donne

$$h^2(r^2 - k^2) = k^2(z - C)^2.$$

Les asymptotiques non rectilignes de (16) sont donc sur l'hyperboloïde de révolution

$$\frac{r^2}{k^2} - \frac{z^2}{h^2} = 1$$

et sur tous ceux qu'on en déduit par translation parallèle à Oz. On a alors facilement

$$\Psi(z) = \frac{2k^2}{h^3}(z - C)^2,$$

le second membre de (15) est rationnel et les aires S sont algébrico-logarithmiques, les termes non rationnels étant d'ailleurs d'interprétation géométrique simple grâce au segment Cm.

5. *Surfaces de révolution et équations différentielles linéaires du second ordre y associées.* — Reprenons l'équation (12) pour $a = 0$. On a la surface de révolution

$$\Phi(z) = F(r)$$

et l'équation qui suit (12) donne, pour en définir les asymptotiques,

$$\left(F'' - F'^2\frac{\Phi''}{\Phi'^2}\right) dr^2 + rF'\,d\theta^2 = 0.$$

Si l'on remplace $\Phi(z)$ par z, ce qui ne diminue pas la généralité, on a l'équation bien connue [1]

$$F''\,dr^2 + rF'\,d\theta^2 = 0. \tag{17}$$

Si, au contraire, on remplace $F(r)$ par r, on a

$$\Phi''\,dr^2 - r\Phi'^2\,d\theta^2 = 0.$$

Comme dr est alors $\Phi' dz$, il vient finalement

$$\Phi''\,dz^2 - \Phi\,d\theta^2 = 0. \tag{18}$$

L'équation (17) définit les asymptotiques en les projetant sur le plan Oxy; l'équation (18) les définit par les intersections de la surface de révolution avec deux familles de conoïdes droits d'axe Oz. Le

[1] L. RAFFY, *Applications géométriques de l'Analyse*, 1897, p. 174.

maximum d'intérêt est vraisemblablement du côté de cette équation (18).

Ainsi, on voit immédiatement, d'après (17), que la détermination des surfaces de révolution dont on définit à l'avance la projection des asymptotiques est un problème élémentaire résoluble par deux quadratures. On peut, avec (18), se proposer le problème correspondant : *Déterminer une surface de révolution de telle manière que ses asymptotiques soient sur les deux familles de conoïdes.*

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \psi(z). \tag{19}$$

On doit obtenir une famille $r = \Phi(z)$, à deux paramètres arbitraires, la fonction Φ étant définie par l'équation

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - \psi(z)\,\Phi = 0. \tag{20}$$

Ce n'est plus là un problème élémentaire. On sait que l'équation (20) a donné lieu à d'immenses travaux au premier rang desquels il faut précisément citer ceux de M. Émile Picard [1]. Cette équation joue un rôle considérable en Physique mathématique et en Mécanique céleste ; aussi est-il remarquable de la faire naître ici d'un problème de Géométrie fort simple à poser.

D'ailleurs on peut facilement avoir des familles de surfaces de révolution dont les asymptotiques se trouvent sur des conoïdes connus. Prenons une fonction Φ et déterminons ψ d'après (20) d'où des conoïdes (19) qui correspondront encore aux asymptotiques de $r = \Phi(z)$ quand Φ sera l'intégrale générale de (20). Et déterminer cette intégrale générale, au moyen de la solution préliminaire et particulière Φ, n'exigera qu'une quadrature.

On peut raisonner plus en détail comme suit. Cherchons pour (20) une intégrale de la forme uv ; il vient

$$uv'' + 2v'u' + [u'' - \psi(z)u]v = 0.$$

Si u est solution particulière de (20), on a seulement

$$uv'' + 2v'u' = 0,$$

(1) E. Picard. *Traité d'Analyse*, t. III.

d'où, A et B désignant deux constantes,

$$v = A + B\int \frac{dz}{u^2}.$$

En résumé, *les surfaces de révolution autour de* Oz

$$r = A\Phi(z) + B\Phi(z)\int \frac{dz}{[\Phi(z)]^2} \tag{21}$$

ont leurs asymptotiques sur les conoïdes

$$\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 = \frac{\Phi''(z)}{\Phi(z)}$$

tout comme la surface $r = \Phi(z)$.

Ce théorème a d'élégantes applications. Soit $\Phi(z) = z^m$. L'équation (21) devient

$$r = Az^m + \frac{B}{1-2m}\frac{1}{z^{m-1}}.$$

Pour $m = 2$, on trouve la parabole et l'hyperbole méridiennes

$$r = Az^2, \qquad rz = \text{const}.$$

donnant des surfaces de révolution dont les asymptotiques se projettent sur Oz au moyen des mêmes génératrices conoïdales.

Pour $\Phi(z) = \sqrt{z^2+b^2}$, l'équation (21) devient

$$br = bA\sqrt{z^2+b^2} + B\sqrt{z^2+b^2}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{b}. \tag{22}$$

Pour $bA = a$, $B = 0$, on a l'hyperboloïde de révolution

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Si, par tous les points d'une même génératrice rectiligne, on abaisse des perpendiculaires sur Oz, on obtient un paraboloïde hyperbolique. La surface (22), quels que soient A et B, a ses asymptotiques sur l'ensemble de ces paraboloïdes.

Le *tore* a des asymptotiques qui dépendent, en général, des fonctions elliptiques et pour lesquelles, par suite, on ne possède guère de résultats élémentaires. Aussi est-il intéressant d'appliquer, à cette surface, le théorème précédent qui l'associe immédiatement à d'autres dont les asymptotiques se trouvent du même coup. Si

$$\Phi(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2},$$

il faut d'abord calculer l'intégrale indéfinie

$$(23) \qquad \int \frac{dz}{(a + \sqrt{b^2 - z^2})^2}.$$

Posant, pour abréger, $c^2 = a^2 - b^2$, on trouve sans peine qu'elle est égale à

$$\frac{a}{c^2} \frac{z}{a + \sqrt{b^2 - z^2}} + \frac{2b^2}{c^3} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b-z}{b+z}}\right).$$

Formant alors l'équation (21), on voit que, pour $A = 1$, $B = 0$, on y retrouve le tore

$$(r - a)^2 + z^2 = b^2.$$

Pour $A = 0$, $aB = c^2$, on a la surface

$$r = z + \frac{2b^2}{ac}(a + \sqrt{b^2 - z^2}) \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b-z}{b+z}}\right)$$

qui semble être la plus simple parmi celles dont les asymptotiques sont sur les mêmes conoïdes que les asymptotiques du tore précédent.

Si $a = b$, le tore est engendré par un cercle tournant autour d'une de ses tangentes. Alors l'intégrale (23) est égale à

$$\frac{2}{3a} \frac{1 + 3\sqrt{\dfrac{a-z}{a+z}}}{\left(1 + \sqrt{\dfrac{a-z}{a+z}}\right)^3}.$$

L'égalité (21) devient

$$r = A(a + \sqrt{a^2 - z^2}) + B\frac{a+z}{3a} \frac{1 + 3\sqrt{\dfrac{a-z}{a+z}}}{1 + \sqrt{\dfrac{a-z}{a+z}}}.$$

Cette fois, pour $A = 0$, on trouve une courbe algébrique du troisième degré qui, en tournant autour de Oz, engendre une surface de révolution dont les asymptotiques se projettent conoïdalement, sur Oz, tout comme celles du tore. Et A et B redevenant quelconques, on a une double infinité de courbes *algébriques* ayant la même propriété.

6. *Surfaces à lignes asymptotiques sur cylindres circulaires coaxiaux.* — D'après l'équation (2), les surfaces satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial z}{\partial r} = 0 \tag{24}$$

ont un système d'asymptotiques sur les cylindres circulaires ayant tous Oz pour axe.

En posant $r = e^{-u}$, l'équation (24) devient

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} - \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \tag{25}$$

ce qui est l'équation bien connue de la propagation de la chaleur dans un espace à une dimension. Ce rapprochement est fait depuis longtemps; M. E. Goursat, qui l'attribue à L. Bianchi, en a fait un exercice (¹). En partant de l'équation (10) et de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad \text{d'où} \qquad x^2 + y^2 = \text{const.},$$

on aurait pour équation aux dérivées partielles des surfaces en litige

$$ry^2 - 2sxy + tx^2 = 0. \tag{26}$$

Mais, au lieu de cette équation de Monge-Ampère qui contient les trois dérivées de second ordre r, s, t, il vaut évidemment mieux recourir à (24) qui montre bien que l'emploi des coordonnées cylindriques est ce qu'il y a de plus naturel dans la question.

Toutefois l'équation (26) rappelle celle des *surfaces à pente uniforme*

$$rp^2 + 2spq + tq^2 = 0,$$

sur lesquelles les lignes de plus grande pente forment une famille

(¹) E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (A. Hermann, 1896, t. I, p. 170).

d'asymptotiques, surfaces dont la détermination explicite a été ramenée par M. L. Lecornu [1] à la recherche de solutions d'une équation du type (25). Le sujet du présent paragraphe ne manque donc point d'antécédents. Mais il semble que, parmi les innombrables développements auxquels l'équation (25) a donné lieu, on puisse encore faire un tri intéressant des propriétés ayant une signification géométrique simple quant aux problèmes d'asymptotiques signalés ici. A cet égard il faut précisément attacher grande importance à un Mémoire assez ancien [2] et à un Ouvrage récent [3] dus à M. Paul Appell.

Le premier résultat du Mémoire est que l'équation (25) est changée en elle-même par la transformation

$$\frac{z}{z'} = \frac{C}{\sqrt{u-\alpha}} e^{-\frac{(\theta-\beta)^2}{4(u-\alpha)}},$$

$$\theta' = k\frac{\theta-\beta}{u-\alpha} + \beta', \qquad u' = -\frac{k^2}{u-\alpha} + \alpha'$$

en laquelle C, k, α, β, α', β' sont des constantes. Partant de là, une solution de (25) peut être changée en une autre très différente qui, multipliée par une fonction des constantes précédentes et intégrée, les constantes en question jouant le rôle de variables d'intégration, conduit aux solutions les plus diverses utilisées par la Physique mathématique et par la théorie des Fonctions de variables réelles. A ce dernier point de vue, on sait que c'est ainsi qu'on arrive à l'intégrale de Weierstrass qui permet d'approcher, par fonctions entières, de fonctions non analytiques et, au fond, c'est aussi cette question que traite M. Appell en cherchant à quelle condition une distribution de températures dans un conducteur linéaire peut résulter d'un état antérieur.

Notre problème d'asymptotiques s'adjoint à tout ceci avec un intérêt d'une autre nature mais également très grand. Au delà de la banale transformation homographique qui conserve les asymptotiques, on

---

(1) L. Lecornu, *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces* (*Bulletin de la Soc. math. de France*, t. 31, 1903, p. 192).

(2) P. Appell, *Sur l'équation $r = q$ et la Théorie de la Chaleur* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. 8, 1892, p. 187).

(3) P. Appell et J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite.* Gauthier-Villars et Cie. Paris, 1926. *Voir* particulièrement page 341. *Voir* aussi les *Leçons* de M. E. Picard, Cahier Julia, t. I, 1927.

voit qu'il peut exister, pour de certains ensembles de surfaces, des transformations étendues conservant certaines propriétés géométriques concernant *un* système d'asymptotiques. Ici, la propriété conservée serait le fait, pour un système d'asymptotiques, d'être situé sur des cylindres circulaires coaxiaux.

Quant aux solutions préliminaires de (25) on sait qu'elles sont aisées à trouver et qu'elles se rattachent aux exponentielles et aux polynomes d'Hermite. Pour plus de détail, renvoyons au texte même de M. P. Appell.

7. *L'équation aux opérateurs* X, Y. — Les considérations du paragraphe précédent sont susceptibles d'une importante extension. Toute équation

$$A^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2AB \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \tag{27}$$

définit des surfaces dont les asymptotiques d'un système se projettent suivant les courbes

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}. \tag{28}$$

Si l'on pose

$$X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}, \qquad Y = X(A)\frac{\partial}{\partial x} + X(B)\frac{\partial}{\partial y}, \tag{29}$$

l'équation (27) s'écrit

$$X^2(z) - Y(z) = 0,$$

ce qui revient à

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \tag{30}$$

quand les opérateurs (29) sont permutables. Ceci est notamment réalisé quand les courbes (28) sont

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + ex + gy}{a + cx + dy}; \tag{31}$$

elles comprennent alors, comme cas très particulier, les sections droites circulaires concentriques déjà étudiées. On voit que les solutions et transformations invariantes de l'équation (30), identique à (25), jouent aussi un grand rôle dans la détermination de surfaces dont *un* système d'asymptotiques se projette suivant des courbes à équation différentielle (31) lesquelles ne sont d'ailleurs qu'un exemple simple.

La théorie des asymptotiques donne ainsi un premier aperçu ([1]) sur les équations, *aux opérateurs* X et *à coefficients constants*, qui généralisent les équations de la Physique mathématique *aux opérateurs de dérivation* $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}, \ldots$ et *à coefficients constants*. Le sujet doit être surtout approfondi par la Théorie des groupes ([2]) car les opérateurs X intervenant dans une même équation peuvent être tous permutables avec l'un d'entre eux (qui définit une transformation *distinguée* du groupe) ou avec un autre, différant des X, appartenant, par exemple, à un groupe *réciproque*. Ces opérateurs, permutables avec tous les X, changent, en d'autres solutions, les solutions de l'équation initiale, de même que les dérivations partielles changent en d'autres les solutions d'une équation (30)

Lignes de courbure.

Les résultats, indéniablement intéressants, obtenus en commençant l'étude des lignes asymptotiques en coordonnées cylindriques, ont-ils quelque pendant pour les lignes de courbure ? Il s'en faut de beaucoup que la question puisse être aussi avancée mais il y a encore de l'intérêt dans ce que l'on peut atteindre ; nous allons le montrer brièvement.

8. *Équation différentielle fondamentale.* — Nous reprenons la surface (1) et nous voulons former, pour les lignes de courbure, l'analogue de l'équation (2). Nous prendrons l'équation différentielle générale

$$\begin{vmatrix} dx & u & du \\ dy & v & dv \\ dz & w & dw \end{vmatrix} = 0$$

([1]) A. Buhl, *Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes données* (*Bull. Soc. math.*, t. 31, 1903, p. 47).

([2]) *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la Théorie des Groupes continus* (*Cf.* Th. De Donder, *Journal de Mathématiques*, 5e série, t. 10, 1904, p. 85. Ibid., 9e série, t. 7, 1928, p. 183.) A. Buhl, *Aperçus modernes* (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. XXXIII, 1928, p. 24).

avec u, v, w, à extraire, comme mineurs algébriques, du tableau

$$\begin{array}{ccc} u & v & w \\ \hline \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{array}$$

On a ainsi, avec $z = \mathrm{F}(r, \theta)$,

$$\begin{vmatrix} d(r\cos\theta) & \sin\theta\,\mathrm{F}_\theta - r\cos\theta\,\mathrm{F}_r & d(\sin\theta\,\mathrm{F}_\theta) - r\cos\theta\,d\mathrm{F}_r \\ d(r\sin\theta) & -\cos\theta\,\mathrm{F}_\theta - r\sin\theta\,\mathrm{F}_r & -d(\cos\theta\,\mathrm{F}_\theta) - r\sin\theta\,d\mathrm{F}_r \\ d\mathrm{F} & r & dr + \mathrm{F}_r d\mathrm{F} \end{vmatrix} = 0.$$

On voit que la troisième colonne du déterminant est simplifiée par combinaison avec la première. Les notations F_θ, F_r représentent les dérivées partielles de F par rapport aux indices. Le plus commode est maintenant de développer en considérant la troisième colonne et ses mineurs. On observe d'abord que, dans ce développement, les termes en $\sin\theta\cos\theta$ se détruisent; ceux en $\sin^2\theta$ et $\cos^2\theta$ s'ajoutent de telle manière que tous les symboles trigonométriques soient finalement éliminés, ce qui est analogue au résultat obtenu en (2).

Tout calcul fait, il vient

$$\begin{aligned} &r^2\mathrm{F}_\theta\,d\theta^2 + \mathrm{F}_\theta^2\,d\mathrm{F}\,d\theta - r^3\,d\mathrm{F}_r\,d\theta - r\mathrm{F}_\theta\,d\mathrm{F}_r\,d\mathrm{F} + r\,d\mathrm{F}_\theta\,dr \\ &\quad + r\mathrm{F}_r d\mathrm{F}_\theta d\mathrm{F} + r^2\mathrm{F}_r dr\,d\theta - \mathrm{F}_\theta dr^2 + r^2\mathrm{F}_r^2 d\mathrm{F}\,d\theta - \mathrm{F}_r\mathrm{F}_\theta d\mathrm{F}\,dr = 0. \end{aligned}$$

Écrivons

$$\begin{aligned} d\mathrm{F} &= \mathrm{F}_r\,dr + \mathrm{F}_\theta\,d\theta, \\ d\mathrm{F}_r &= \mathrm{F}_{rr}\,dr + \mathrm{F}_{r\theta}\,d\theta, \\ d\mathrm{F}_\theta &= \mathrm{F}_{\theta r}\,dr + \mathrm{F}_{\theta\theta}\,d\theta. \end{aligned}$$

Finalement, pour les lignes de courbure de (1), nous aurons l'équation différentielle fondamentale

$$\mathrm{A}\,dr^2 + \mathrm{B}r\,dr\,d\theta + \mathrm{C}\,d\theta^2 = 0 \tag{32}$$

en laquelle

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= (1 + \mathrm{F}_r^2)(r\mathrm{F}_{\theta r} - \mathrm{F}_\theta) - r\mathrm{F}_r\mathrm{F}_\theta\mathrm{F}_{rr}, \\ \mathrm{B} &= (1 + \mathrm{F}_r^2)(\mathrm{F}_{\theta\theta} + r\mathrm{F}_r) - \mathrm{F}_{rr}(r^2 + \mathrm{F}_\theta^2), \\ \mathrm{C} &= r^2\mathrm{F}_\theta(1 + \mathrm{F}_r^2) + r\mathrm{F}_\theta(\mathrm{F}_r\mathrm{F}_{\theta\theta} - \mathrm{F}_\theta\mathrm{F}_{r\theta}) + \mathrm{F}_\theta^3 - r^3\mathrm{F}_{r\theta}. \end{aligned}$$

Remarquons qu'en (32) le coefficient de $dr\,d\theta$ est Br et non pas seulement B.

L'équation (32) s'accorde avec plusieurs résultats plus élémentaires qui peuvent ainsi servir de vérifications partielles.

Pour z ou $F(r, \theta)$ réduit à $F(r)$, on voit que A et C sont nuls, d'où les lignes de courbure des surfaces de révolution.

Pour les conoïdes $z = F(\theta)$, on a

$$F'\,dr^2 - rF''\,dr\,d\theta - F'(r^2 + F'^2)\,d\theta^2 = 0.$$

Cette équation ne semble pas maniable, en général, alors qu'on a, pour les lignes asymptotiques des conoïdes, des résultats si simples et si élégants. Il n'y a guère que le cas de l'hélicoïde $z = a\theta$ qui donne

$$dr^2 = (r^2 + a^2)\,d\theta^2, \qquad r = a\,\mathrm{Sh}(\theta - C).$$

Pour les cônes $z = r\varphi(\theta)$, sur lesquels les lignes de courbure sont en évidence, l'équation (32) contient cependant une petite curiosité; elle s'écrit

$$[\varphi(\theta) + \varphi''(\theta)][(1 + \varphi^2)\,dr + r\,\varphi\varphi'\,d\theta]\,d\theta = 0.$$

Comme, en général, le premier facteur n'est pas nul on a, pour lignes de courbure, les génératrices du cône et les sections de celui-ci par les sphères

$$r^2(1 + \varphi^2) = C \qquad \text{ou} \qquad r^2 + z^2 = C.$$

Mais, si le premier facteur était nul, les lignes de courbure seraient indéterminées.

C'est qu'alors on a

$$z = r(C_1 \cos\theta + C_2 \sin\theta)$$

et que le cône est réduit à un plan.

Pour les hélicoïdes

$$z = a\theta + F(r), \tag{33}$$

l'équation (32) devient

$$\begin{aligned} &a(1 + F'^2 + rF'F'')\,dr^2 \\ &\quad + r[(r^2 + a^2)F'' - rF'(1 + F'^2)]\,dr\,d\theta - a[a^2 + r^2(1 + F'^2)]\,d\theta^2 = 0, \end{aligned}$$

ce qui est à comparer avec la forme adoptée par M. Painlevé dans le

Recueil de Tisserand ([1]). On retrouve ce résultat que les lignes de courbure des hélicoïdes (33) sont déterminables par quadratures.

9. *Hélicoïdes à courbure totale constante.* — D'après la forme obtenue pour l'équation différentielle des lignes de courbure de l'hélicoïde général (33) on voit que, quand $F(r)$ sera déterminée par

$$1 + F'^2 + rF'F'' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad r^2(1 + F'^2) = b^2,$$

on aura des hélicoïdes ayant un système de lignes de courbure dans les plans passant par Oz.

Ils auront pour équation différentielle

$$dz = a\,d\theta + \sqrt{b^2 - r^2}\,\frac{dr}{r}.$$

Dans les plans passant par Oz on a, pour la courbe intersection,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{\sqrt{b^2 - r^2}}{r}, \qquad \text{d'où} \qquad r = b\cos\alpha.$$

Donc cette courbe est une *tractrice* dont l'asymptote coïncide avec Oz. Pour le second système de lignes de courbure, l'équation différentielle, après suppression du facteur

$$a^2 + r^2(1 + F'^2),$$

donne

$$(1 + F'^2)\,dr + aF'\,d\theta = 0,$$

d'où

$$r\operatorname{Ch}\left(\frac{a\theta}{b} + C\right) = b.$$

Venons à la notion de *courbure totale* K. Pour l'hélicoïde général (33), on a

$$ds^2 = E\,dr^2 + 2F\,dr\,d\theta + G\,d\theta^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + (a\,d\theta + F'\,dr)^2,$$

d'où E, F, G par comparaisons immédiates et, d'après une formule

---

([1]) F. TISSERAND. *Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal* (seconde édition, 1896, p. 429).

Pour que la comparaison soit possible, il faut corriger une faute d'impression qui s'est glissée dans le *Recueil*, à la page indiquée. Dans le déterminant, troisième terme de la seconde ligne, la parenthèse $(F' + \rho F'')$ doit être précédée de k.

bien connue ([1]),

$$K = -\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r}{u}, \qquad \text{si } u^2 = a^2 + r^2(1 + F'^2).$$

Pour les hélicoïdes engendrés par la tractrice ci-dessus, on a simplement

$$K = -\frac{1}{a^2 + b^2}.$$

Ceci pourrait être rattaché à l'exposé de Gaston Darboux (*Surfaces*, t. I, 1914, Chap. IX) mais le résultat est d'une simplicité qui n'est pas toujours mise en évidence autant qu'il conviendrait. Nous tombons sur les *généralisations hélicoïdales de la pseudosphère*. Il est remarquable d'obtenir une surface à courbure totale constante en faisant tourner la tractrice autour de son asymptote; il l'est tout autant d'en obtenir d'autres en animant la même courbe d'un mouvement *hélicoïdal* autour de la même droite. Ce sont les hélicoïdes de Dini ([2]).

D'ailleurs la première forme de K montre que, si ce K est constant,

$$\frac{1}{u^2} + K = \frac{h}{r^2}.$$

Remplaçant u^2 par son expression en F', on a le moyen de faire, par quadratures, l'étude des hélicoïdes à courbure totale constante.

10. *L'équation* $A = 0$. — On voit déjà que le problème des lignes de courbure, en coordonnées cylindriques, est beaucoup plus complexe que celui des lignes asymptotiques dans le même système de coordonnées. Voici cependant une analogie parfaite entre ces problèmes. Reportons-nous à (32).

Les équations $A = 0$ *et* $C = 0$ *sont des équations de Monge-Ampère; la première a une intégrale intermédiaire, la seconde n'en a pas.* C'est exactement ce que nous avons vu pour (2).

Occupons-nous d'abord de $A = 0$. Sur les surfaces définies par cette équation, un système de lignes de courbure est défini par $d\theta = 0$. Ces

---

([1]) *Voir*, par exemple, A. Buhl, *Formules stokiennes* (*Mémorial des Sc. math.*, fasc. XVI, p. 53).

([2]) L. Bianchi, *Geometria differenziale*, t. I, 1922, p. 353.

lignes sont donc situées dans une famille de plans passant tous par Oz. D'après le théorème de Joachimstahl il s'agit donc de surfaces qu'un plan quelconque, passant par Oz, coupe sous un angle constant tout le long de la même intersection. Ces surfaces ont pour équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{py - qx}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{p^2+q^2+1}} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ou, en coordonnées cylindriques,

$$\frac{r^2(1+F_r^2)}{F_\theta^2} = \varphi(\theta). \tag{34}$$

On en conclut

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2(1+F_r^2)}{F_\theta^2} = -\frac{2rA}{F_\theta^3} = 0$$

Donc l'équation $A = 0$ entraîne (34) qui en est l'intégrale intermédiaire.

11. *L'équation* $C = 0$. — Cette équation définit les surfaces dont *un* système de lignes de courbure est situé sur des cylindres circulaires coaxiaux d'axe Oz. En combinant

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq} \qquad \text{et} \qquad \frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x},$$

on a, pour équation aux dérivées partielles des surfaces en question,

$$\frac{p(py-qx)+y}{ry-sx} = \frac{q(py-qx)-x}{sy-tx}, \tag{35}$$

ce qui, en coordonnées cylindriques, devient bien $C = 0$ ou

$$r^2F_\theta(1+F_r^2) + rF_\theta(F_rF_{\theta\theta} - F_\theta F_{r\theta}) + F_\theta^3 - r^3F_{r\theta} = 0. \tag{36}$$

L'équation (35) peut paraître plus symétrique que (36) mais elle contient les trois dérivées partielles du second ordre r, s, t tandis que (36) ne contient que $F_{r\theta}$, $F_{\theta\theta}$ à l'exclusion de F_{rr}, ce pourquoi nous préférerons (36). C'est ce qui, dans la théorie des asymptotiques, fait préférer (24) à (26). Toutefois, si (36) est ainsi l'analogue de (24), il s'en faut de beaucoup que l'on puisse développer une théorie de (36) à peu près parallèle à celle de (24). Nous ne pouvons même donner présentement qu'un seul résultat de quelque intérêt : *l'équation* (36) *peut se mettre sous une forme intégrale simple.*

On peut d'abord l'écrire

$$(37)\qquad 1 + r^2\frac{1+F_r^2}{F_\theta^2} - r\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{F_r}{F_\theta} + \frac{r^3}{2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{F_\theta^2} = 0.$$

Il est à peine besoin de dire qu'en passant de (35) à (36), il ne faut pas confondre r des dérivées r, s, t avec r des coordonnées r, θ, z. A partir de (36), nous n'avons plus que des r de cette dernière catégorie.

Pour une surface *quelconque*, soit MN la normale en $M(x, y, z)$ ou $M(r, \theta, z)$. Soient γ l'angle de MN et de Oz, δ la plus courte distance de ces deux mêmes droites et μ l'angle de MN avec la perpendiculaire en M au plan MOz. On a aisément

$$\cos\mu = \frac{qx - py}{r\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{qx-py}{r}\cos\gamma = \frac{\delta\operatorname{tang}\gamma}{r}\cos\gamma,$$

d'où un segment τ qui admet la double définition

$$\tau = r\cos\mu = \delta\sin\gamma$$

et est ainsi associé à chaque point de la surface. On a aussi, en coordonnées cylindriques,

$$\tau = \frac{rF_\theta}{\sqrt{r^2(1+F_r^2)+F_\theta^2}},$$

ce qui permet d'écrire (37)

$$\frac{1}{r\tau^2} - \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{F_r}{r^2F_\theta} + \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2F_\theta^2} = 0$$

ou

$$\frac{1}{r\tau^2} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ \dfrac{F_r}{r^2F_\theta} & \dfrac{1}{2F_\theta^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Si, sur une surface intégrale de l'équation (37), on considère un domaine S, simplement connexe, de contour C, la formule de Riemann donne

$$(38)\qquad \iint_S \frac{dr\,d\theta}{r\tau^2} + \int_C \frac{F_r}{r^2F_\theta}dr + \frac{1}{2F_\theta^2}d\theta = 0.$$

Posons, k étant constant,

$$\frac{F_r}{r^2 F_0} dr + \frac{1}{2 F_0^2} d\theta = - \frac{1}{2k^3} R^2 d\Theta. \tag{39}$$

On imagine que le contour C est assez petit pour que cette expression n'ait aucune singularité ni sur C ni à son intérieur S. Donc, au point (r, θ, z) parcourant C, peut correspondre, d'une manière univoque, un point $(R, \Theta, 0)$ parcourant un contour fermé Γ. On aura alors

$$k^3 \int\int_S \frac{dr\, d\theta}{r\tau^2} = \frac{1}{2} \int_\Gamma R^2 d\Theta. \tag{40}$$

Ceci ne va pas sans une famille de courbes $\Theta(r, \theta) =$ const. jouissant de la propriété

$$r^2 d\theta + 2 F_r F_0\, dr = 0, \tag{41}$$

ce que l'on voit immédiatement en développant le $d\Theta$ du second membre de (39).

En somme, le problème posé avec l'équation $C = 0$, entraînant la considération des $R^2 d\Theta$, $r^2 d\theta$ de (40) et (41), n'est pas, de ce fait, sans analogie formelle avec la question la plus simple de ce Mémoire, celle qui concernait les asymptotiques des conoïdes et donnait (8). Il est toutefois incomparablement plus compliqué et ce que nous en disons ne le résout pas mais nous ne sommes point arrivés là sans nombre d'aperçus géométriques intéressants.

Notons encore ce théorème ([1]) : *Toute équation de Monge-Ampère peut être mise, d'une infinité de manières, sous la forme intégrale*

$$\int\int_S \Delta\, dx\, dy = \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz + S\, dp + T\, dq.$$

En réduisant l'équation $C = 0$, à la forme (38) ou (40), nous en avons fait une élégante application.

([1]) A. BUHL, *Géométrie et Analyse des Intégrales doubles* (Collection *Scientia*, 1920, p. 53).