JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MAURICE GEVREY

Détermination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 1-80.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Détermination et emploi des fonctions de Green dans les problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du type elliptique;

PAR MAURICE **GEVREY**.

SOMMAIRE

I. *Les problèmes à résoudre.* — **1**. La solution fondamentale; la méthode de E.-E. Levi et les quasi-solutions. — **2**. Le problème général du calcul des fonctions de Green : la fonction auxiliaire.

II. *Les équations à deux variables et le problème de Dirichlet.* — **3**. Formation de la fonction auxiliaire. — **4**. Calcul de la fonction de Green. — **5**. Autre forme de la fonction auxiliaire : le point-image. — **6**. Extension des résultats précédents et applications.

III. *Les équations à m variables; formation des quasi-solutions.* — **7**. Sur les dérivations d'intégrales singulières. — **8**. Cas où les coefficients a_{ik} sont constants. — **9**. Cas général. — **10**. Théorie générale du point-image. — **11**. Nature de la frontière et choix de la fonction s. — **12**. Cas d'un contour plan à points anguleux.

IV. *Les divers problèmes aux limites. Synthèse de la solution.* — **13**. Sur la formule de résolution du problème de Dirichlet. — **14**. Problèmes aux limites mixtes. Fonction de Green correspondante. — **15**. Synthèse de la solution. — **16**. Cas singuliers et cas d'unicité.

Note sur la résolution des problèmes aux limites au moyen d'intégrales analogues aux potentiels.

I. — Les problèmes à résoudre.

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles, les progrès réalisés pour la résolution des problèmes aux limites datent du Mémoire célèbre que publia M. Picard en 1890 dans le *Journal de Mathématiques* et qu'il fit suivre de plusieurs autres. Plus tard la théorie de Fredholm compléta et éclaira les résultats obtenus pour les équations linéaires.

Dans ce premier Chapitre, qui tiendra lieu d'introduction, nous allons examiner comment se présentent les fonctions de Green par l'intermédiaire des solutions fondamentales, puis comment on peut les calculer directement. Nous ne traiterons que les problèmes *extérieurs*.

1. La solution fondamentale; la méthode de E.-E. Levy et les quasi-solutions. — Pour faciliter la tâche du lecteur, rappelons d'abord rapidement le rôle des solutions fondamentales dans la résolution des problèmes aux limites. Soit l'équation aux dérivées partielles linéaire du type elliptique à m variables

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathrm{F}(u) \equiv \sum a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad (a_{ik} = a_{ki}),$$

les coefficients et f étant fonctions de (x_i) dans une région $\mathcal{R}$ de l'espace à m dimensions [1]. Nous envisagerons tout d'abord le cas où les a_{ik} sont égaux à *un* pour $i = k$ et à zéro pour $i \neq k$: nous avons ainsi l'équation

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \mathrm{F}_1(u) \equiv \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f.$$

L'équation adjointe de $\mathrm{F}_1 = 0$ est

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \mathcal{F}_1(v) \equiv \sum \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} - \sum \frac{\partial b_i v}{\partial x_i} + cv = 0.$$

---

[1] Les équations (E) peuvent être envisagées dans un espace de Riemann, où elles s'écrivent

$$\operatorname{div}\mathbf{grad}\, u + \mathbf{b}.\mathbf{grad}\, u + cu = f,$$

mais, au point de vue qui nous occupe, ceci ne simplifierait pas notre étude.

Soit alors un domaine *borné* et connexe D, appartenant à $\mathcal{R}$ et limité par une frontière S, qui est une multiplicité à $m - 1$ dimensions. La formule de Green nous donne

$$\int_D [v F_1(u) - u \mathcal{F}_1(v)]\, d\omega = -\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} + uv b_n\right) dS = \int_D vf\, d\omega,$$

$d\omega$ étant un élément du domaine D et dS un élément de la frontière.

Dans tout ce Mémoire, n désignera la normale *intérieure*; b_n est la valeur algébrique de la projection sur n du vecteur $\mathbf{b}$ de composantes (b_i) ou, si l'on préfère, le produit scalaire $\mathbf{bn}$, $\mathbf{n}$ étant l'unitaire de la normale intérieure.

Nous supposerons naturellement réalisées les conditions de validité de la formule de Green, ce qui aura lieu en particulier si u, v et les coefficients sont des fonctions continues, ainsi que toutes celles de leurs dérivées qui figurent dans F_1, ou dans F, et dans l'adjointe. Nous dirons de la solution u qu'elle est *régulière* quand elle satisfait à ces conditions (on pourrait d'ailleurs les élargir un peu).

Supposons que v admette une singularité en un point P intérieur à D : il nous faudra alors isoler P au moyen d'une petite surface s enfermant un domaine d et appliquer la formule de Green à $D - d$. Si nous pouvons choisir v de telle sorte que, lorsque les dimensions de s tendent vers zéro, toutes les intégrales étendues à s, dans la formule ainsi obtenue, tendent vers zéro, sauf $-\int_s u \frac{\partial v}{\partial n} ds$ [celle-ci ayant pour limite $ku(P)$], on obtiendra

$$(1_1) \qquad ku(P) = -\int_S \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} + uv\mathbf{bn}\right) dS - \int_D vf\, d\omega,$$

k étant une constante ou même une fonction connue de P, égale à la limite de $-\int_s \frac{\partial v}{\partial n} ds$ (1).

(1) Ceci se voit aisément en supposant simplement u continue en P et $\frac{\partial v}{\partial n}$ de signe constant sur s : il suffit de poser $u = u(P) + \eta$. On peut prévoir d'ailleurs que v sera infinie comme r^{-m+2} et sa dérivée comme r^{-m+1}, r étant la distance à P, car, si les dimensions de s sont infiniment petites de l'ordre de ε, la surface de s sera mesurée par un nombre de l'ordre de ε^{m-1}, donc $\frac{\partial v}{\partial n}$ sera de l'ordre de ε^{-m+1}.

Une telle solution v de l'équation adjointe, qui doit nécessairement admettre un pôle en P, est dite *solution fondamentale* (ou *élémentaire*, suivant la terminologie de M. Hadamard) : nous dirons aussi que (1_1) est la *formule fondamentale*.

Une solution fondamentale n'est évidemment pas déterminée d'une façon unique : on en obtient une autre en lui ajoutant toute solution, régulière de ($\mathcal{E}_1$). Dans le cas des fonctions *harmoniques* (*b_i et c nuls*) toutes les solutions ainsi obtenues sont de la forme $Cr^{-m+2} + u_1$ (ou $C\mathcal{L}\frac{1}{r} + u_1$ si $m = 2$), u_1 étant une fonction harmonique régulière dans D et r la distance de P au point courant de D. C'est à la solution particulière r^{-m+2} qu'on réserve en général le nom de solution fondamentale pour $m \neq 2$: k est alors égal à $(m-2)\sigma_m$, σ_m étant la surface de la sphère unitaire (¹). Pour $m = 2$, la solution fondamentale est $\mathcal{L}\frac{1}{r}$ et l'on a $k = 2\pi$.

On peut montrer d'ailleurs que toute solution v de (E_1) ou de ($\mathcal{E}_1$) qui devient infinie en P, en restant positive dans le voisinage, est nécessairement de la forme wr^{-m+2}, w étant une fonction continue dans D (²). C'est le *principe des singularités positives* pour un point intérieur à D, qui a été énoncé et démontré par M. Picard dans le cas des fonctions harmoniques. *On supposera* $w = 1$ *pour* $r = 0$.

Soit alors à calculer la solution u de (E_1) connaissant les valeurs qu'elle prend sur S : la formule (1_1) nous donne u en tout point P de D en fonction de ses valeurs et de celles de sa dérivée normale sur S. Pour éliminer ces dernières, on choisira v de telle sorte qu'elle s'annule sur S : pour cela, il suffit d'ajouter à une solution fondamentale particulière v_1 la solution régulière de $\mathcal{F}_1 = 0$ prenant sur S les mêmes valeurs que $-v_1$.

(¹) Il suffit, pour le voir, de prendre pour s une sphère de rayon ε; n étant la normale intérieure à $D-d$, donc extérieure à s, $-\frac{dv}{dn}$ est égale à $(m-2)\varepsilon^{-m+1}$ et, s_m étant la surface de s, k est égal à $(m-2)\varepsilon^{-m+1}s_m = (m-2)\sigma_m$. On a

$$\sigma_m = m\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)\right]^{-1}\pi^{\frac{m}{2}}, \qquad k = 4\pi^{\frac{m}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)\right]^{-1}.$$

(²) Voir *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 546.

La fonction v ainsi obtenue est la *fonction de Green* $\mathcal{G}(\Pi, P)$, solution de l'adjointe par rapport au point courant Π : c'est en somme une solution fondamentale choisie d'une façon spéciale. La formule (1_1) devient alors

$$(1_2) \qquad k u(P) = \int_S u(p) \frac{\partial \mathcal{G}(p, P)}{\partial n}\, dS_p - \int_D \mathcal{G}(\Pi, P) f(\Pi)\, d\omega_\Pi,$$

en désignant par p un point de la frontière et réservant la lettre P pour les points intérieurs. k est encore égal à $(m - 2)\sigma_m$ (ou à 2π si $m = 2$) car, dans v, seul r^{-m+2} intervient pour fournir la limite k.

On peut d'ailleurs définir aussi une fonction de Green comme solution de la proposée elle-même. On aura ainsi deux fonctions : $G(P, \Pi)$ solution de $F_1 = 0$ par rapport à P et s'annulant quand P vient sur S, et $\mathcal{G}(\Pi, P)$ solution de $(\mathcal{E}_1)$ par rapport à Π et s'annulant quand Π vient sur S. Elles seront de la forme, avec $r = P\Pi$,

$$G(P, \Pi) = w(P, \Pi) r^{-m+2}, \qquad \mathcal{G}(\Pi, P) = w'(\Pi, P) r^{-m+2}.$$

Supposons $w(\Pi, \Pi) = w'(P, P)$: si l'on applique alors la formule fondamentale 1_1 en posant $u = G(M, \Pi)$ et $v = \mathcal{G}(M, P)$, M étant cette fois le point courant, il vient, en isolant les points P et Π,

$$G(P, \Pi) = \mathcal{G}(\Pi, P)$$

qui est *la relation d'échange* entre les deux fonctions de Green : celles-ci peuvent donc être envisagées *à volonté comme solutions de* $F_1 = 0$ *ou de son adjointe*, et l'on peut les désigner par notation commune G_P^Π, ce que nous ferons désormais (¹), les coordonnées respectives de P et Π étant (x_i) et (ξ_i).

Nous pourrons donc former G_P^Π comme solution de $F_1 = 0$ en P et par suite partir de la solution fondamentale *de la proposée elle-même*.

Le problème qu'on s'est posé tout d'abord a donc été le *calcul de la solution fondamentale :* c'est ce qu'ont fait MM. Picard, Hilbert, Hedrick et Hadamard en supposant les coefficients analytiques, puis E.-E. Levi en s'affranchissant de cette hypothèse (*Rendiconti di*

(¹) D'une manière générale nous emploierons les notations φ_P ou $\varphi(P)$, φ_P^Π ou $\varphi(P, \Pi)$ pour désigner les fonctions d'un ou de deux points.

Palermo, t. 24, 1907). La méthode employée par ce dernier est remarquablement simple et élégante. Donnons-en le principe.

Nous voulons obtenir la solution fondamentale de $F_1 = 0$ infinie en Π : c'est r^{-m+2} quand $b_i = c = 0$ (le cas $m = 2$ sera étudié au Chapitre II). D'une manière générale $F_1(r^{-q})$ présentera pour $r = 0$ un pôle d'ordre $q + 2$, sauf pour $q = m - 2$, valeur pour laquelle le pôle sera d'ordre $< q + 2$. Posons alors (toujours avec $r = P\Pi$), D' étant un domaine comprenant D

$$(1_3) \qquad v = r^{-m+2} + \int_{D'} |PM|^{-m+2} \Phi_M^\Pi \, d\omega_M,$$

et déterminons Φ_P^Π en écrivant que $F_1(v) = 0$. En se rappelant que la formule de Leibnitz s'applique aux dérivées premières de l'intégrale m-uple et que son laplacien est fourni par la formule de Poisson

$$(1_4) \qquad \Delta_P \int_{D'} |PM|^{-m+2} \rho_M \, d\omega_M = -(m-2)\sigma_m \rho_P,$$

il vient

$$(1_5) \qquad -\Phi_P^\Pi + \lambda \int_{D'} K_P^M \Phi_M^\Pi \, d\omega_M + K_P^\Pi = 0$$

avec $\lambda = 1$, K étant donné par

$$(m-2)\sigma_m K_P^M = F_1(|PM|^{-m+2}) = \sum b_i \frac{\partial |PM|^{-m+2}}{\partial x_i} + c|PM|^{-m+2}.$$

L'équation (1_5) nous montre que Φ *est la résolvante du noyau* K *pour la valeur* $\lambda = 1$. D'ailleurs K présente en P un pôle d'ordre $m - 1$. Φ se calculera donc soit à l'aide d'un noyau itéré, soit par la méthode de Poincaré, en supposant D' tel que la valeur $\lambda = 1$ ne soit pas caractéristique. (Il est entendu que, pour $m = 2$, il faut remplacer partout $|PM|^{-m+2}$ par $-\mathcal{L}|PM|$ et $(m-2)\sigma_m$ par 2π.)

En somme r^{-m+2} n'est pas *tout à fait* la solution fondamentale de $F_1 = 0$. C'est une *quasi-solution* V ; nous entendons par là que, en tant que fonction de P, V se comporte en Π comme la solution fondamentale et que $F_1(V)$ est continue dans D, *sauf en* Π *où elle présente un pôle d'ordre moindre que m.* On corrige en quelque sorte cette quasi-solution au moyen d'une intégrale portant par une fonction inconnue composée avec V, et que les propriétés de V permettent précisément de calculer.

Passons maintenant à l'équation générale $F = 0$ du début et cherchons sa solution fondamentale. Nous poserons

$$\Psi = \Sigma a_{ik} \alpha_i \alpha_k$$

et nous supposerons cette forme quadratique (où les α_i désigneront plus loin les cosinus directeurs de la normale à S) définie positive et de discriminant *un* (sinon il suffirait de diviser les a_{ik} par la racine $m^{\text{ième}}$ du déterminant). Étant donné un point II, on peut toujours faire sur (x_i) une substitution linéaire qui rende *en* II les a_{ik} égaux à *un* pour $i = k$ et à zéro pour $i \neq k$: cette substitution n'est autre que celle qui transforme la forme adjointe en une somme de carrés ([1]). L'équation pourra donc s'écrire

$$(1_6) \qquad F'(u) \equiv \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2} + \sum a'_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x'_i \partial x'_k} + \sum b'_i \frac{\partial u}{\partial x'_i} + cu = 0,$$

tous les a'_{ik} étant nuls en II. Mais alors r'^{-m+2} sera une quasi-solution, r' étant la distance de II à un point courant dans le nouveau système. $\mathcal{F}'(r'^{-m+2})$ aura un pôle d'ordre $m - \alpha$, si les a'_{ik} sont infiniment petits d'ordre α avec r'.

Revenant aux variables primitives, on est donc conduit à *prendre comme quasi-solution* $\Im^{-\frac{m}{2}+1}$, *en posant*

$$(1_7) \qquad \Im = \Sigma a_{\text{II}}^{ik} (x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)$$

et l'on calcule la solution fondamentale par la méthode exposée plus haut : si l'on en retranche ensuite la solution régulière prenant la

---

([1]) En effet, supposons II pris comme origine : si l'on exprime les nouvelles variables (x'_i) *en fonction de* (x_i), les formules donnant les dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i}$ en fonction des $\frac{\partial}{\partial x'_i}$ peuvent être envisagées comme réalisant une substitution linéaire symbolique dans la forme $\sum a_{ik} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$ et cela de telle sorte que les $\frac{\partial}{\partial x_i}$ jouent le rôle de variables covariantes et les x_i celui de variables contrevariantes. Si donc notre forme devient $\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}$, la forme $\Sigma a^{ik} x_i x_k$, adjointe de $\Sigma a_{ik} x_i x_k$, devient $\Sigma x_i'^2$.

même valeur sur S, on a la fonction de Green, formée ici comme solution de $F=0$. On l'obtiendrait de même comme solution de l'adjointe.

On peut aussi, dans (1_7), remplacer $a_{\rm II}^{ik}$ par $a_{\rm P}^{ik}$ et écrire

$$(1_8) \qquad \mathfrak{S}=\Sigma a_{\rm P}^{ik}(x_i-\xi_i)(x_k-\xi_k).$$

C'est ainsi que procède E.-E. Levi. $\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}+1}$ est solution exacte si les a_{ik} sont constants, et b_i, c, f nuls; si les a_{ik} dépendent de (x_i), $F\left(\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}+1}\right)$ aura un pôle d'ordre $m-1$, à la condition que les a_{ik} admettent des dérivées secondes, hypothèse plus restrictive que celle faite plus haut. On pourra donc, suivant les cas, partir de (1_7) ou (1_8) (*voir* n° **9**).

Il nous faut maintenant envisager la formule fondamentale relative à l'équation générale (E) du début : l'adjointe est

$$\mathcal{F}(v)\equiv\sum_{ik}\frac{\partial^2 a_{ik}v}{\partial x_i\,\partial x_k}-\sum_i\frac{\partial b_i v}{\partial x_i}+cv=0$$

et nous avons l'identité

$$vF(u)-u\mathcal{F}(v)=\sum_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ik}v\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_k}a_{ik}u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$$
$$-\sum_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}uv\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}+\sum_i\frac{\partial b_i uv}{\partial x_i}.$$

Considérons à nouveau les domaines D et d, de frontières S et s, envisagés au début; intégrons l'expression précédente dans $D-d$ en utilisant la formule $\int_D\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}d\omega=-\int_S\varphi\alpha_i dS$, avec $\alpha_i=\cos(n, x_i)$: nous obtenons

$$(1_9) \qquad -\int_{S+s}\left[v\frac{\partial u}{\partial N}-u\frac{\partial v}{\partial N}+uv(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{n}\right]dS=\int_{D-d}vf\,d\omega,$$

$\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant les vecteurs de composantes $\sum_k\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}$ et b_i et $\mathbf{n}$ l'unitaire de normale n intérieure au domaine $D-d$. Nous avons posé dans cette formule

$$(1_{10}) \qquad \frac{\partial u}{\partial N}=\sum_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\sum_i a_{ik}\alpha_i=\frac{1}{2}\sum_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\Psi'_{\alpha_k}.$$

Or $\frac{1}{2}\Psi'_{\alpha_k}$, demi-dérivée de $\Psi = \Sigma a_{ik}\alpha_i\alpha_k$ par rapport à α_k, est un paramètre directeur de la direction conjuguée du plan tangent par rapport au cône $\Sigma a_{ik}X_iX_k = 0$, cône des directions caractéristiques au point de la frontière envisagé : cette direction conjuguée est la *conormale intérieure*, suivant laquelle est prise $\frac{\partial u}{\partial N}$ (¹).

Dans la formule (1_9), prenons comme coordonnées courantes (ξ_i) au lieu de (x_i) et remplaçons v par la solution fondamentale de l'adjointe, solution par rapport à $\Pi(\xi_i)$ infinie en P; si toutes les dimensions de d, contenant P, tendent vers zéro, le coefficient k, limite de $-\int_s \frac{\partial v}{\partial N}\,ds$, est ici encore égal à $(m-2)\sigma_m$ (²) et nous obtenons la *formule fondamentale*

$$(1_{11})\qquad (m-2)\sigma_m u(P) = -\int_S \left[v\frac{\partial u}{\partial N} - u\frac{\partial v}{\partial N} + uv(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{n}\right] dS - \int_D vf\,d\omega.$$

(¹) Il convient toutefois d'ajouter que dN ne représente la valeur du déplacement $d\nu$ suivant la conormale qu'à un facteur près, $d\nu = A\,dN$, avec $A = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_k \Psi'^2_{\alpha_k}}$; donc $\frac{\partial u}{\partial N} = A\frac{\partial u}{\partial \nu}$. On a d'ailleurs $\cos(n, N) = \frac{1}{2A}\sum \alpha_k \Psi'_{\alpha_k} = \frac{\Psi}{A}$, donc (n, N) est *aigu*.

(²) Ceci se voit aisément : pour avoir la valeur de k, on peut supposer les a_{ik} constants et égaux à leurs valeurs en P, les b_i et c nuls, v étant alors égal à $\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1}$ [$\mathfrak{I}$ donné par 1_8]. En effet, dans le cas général v diffère de $\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1}$ par des termes qui admettent, ainsi que leurs dérivées, une singularité d'ordre moindre en P et par suite ne donnent rien dans la limite k. Et d'autre part si, dans l'expression de $\frac{\partial V}{\partial N}$ sur s, on remplace les a_{ik} par leur valeur en P, on élimine ainsi des termes qui tendent vers zéro avec d, ce qui ne modifie pas la limite.

Cela étant, si les a_{ik} sont constants, b_i et c nuls, envisageons une surface fermée fixe Σ, contenant d et d'équation $\varphi = 0$, φ étant régulière, puis appliquons (1_9) en prenant Σ pour frontière S et posant $u = \varphi^2$, $v = \mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1}$ et $f = F(\varphi^2)$. Quand d s'évanouit, il vient

$$k\varphi^2(P) = -\int_D \mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1} F(\varphi^2)\,d\omega.$$

Imaginons maintenant que nous ayons fait la substitution linéaire envisagée

Par le même raisonnement que plus haut nous pourrons envisager la fonction de Green G_p^{Π} soit comme *solution de* $F = 0$ *relativement à* P, soit comme *solution de* $\mathcal{F} = 0$ *relativement à* Π. Si nous remplaçons v par G dans la formule fondamentale, Π étant toujours le point courant de D et p celui de S, il vient

$$(1_{12}) \qquad (m-2)\sigma_m u(\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{S}} u(p)\frac{\partial G_p^{\mathrm{P}}}{\partial \mathrm{N}_p}\,\partial \mathrm{S}_p - \int G_p^{\Pi} f(\Pi)\,d\omega_{\Pi},$$

formule donnant la solution du problème de Dirichlet pour l'équation (E).

Plus généralement, si u doit satisfaire sur S à une condition de la forme (*problème mixte;* pour $\mathrm{K} = 0$, *problème de Neumann*)

$$(1_{13}) \qquad \mathrm{H}(p)\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} + \mathrm{K}(p)u = \mathrm{L}(p),$$

l'intégrale étendue à S dans la formule (1_{11}) sera connue si les coefficients de $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ et u sont proportionnels à H et K, c'est-à-dire si v satisfait sur S à la condition

$$(1_{14}) \qquad \mathrm{H}\frac{\partial v}{\partial \mathrm{N}} + [\mathrm{K} - \mathrm{H}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{n}]v = 0.$$

Si v_1 est solution fondamentale de l'adjointe par rapport au point Π, en posant $v = v_1 + v_2$ on voit que v_2 vérifie, quand Π vient sur S, une condition tout à fait analogue à la condition aux limites imposée à u.

---

plus haut qui transforme $\mathfrak{I}$ en r'^2 et F en Δ; si l'on applique (1_1) au domaine D' correspondant à D, il vient, la valeur de k étant alors $(m-2)\sigma_m$,

$$(m-2)\sigma_m \varphi^2(\mathrm{P}) = -\int_{\mathrm{D}'} r'^{-m+2}\Delta\varphi^2\,d\omega'.$$

Mais on a identiquement $\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1}\mathrm{F}(\varphi^2) = r'^{-m+2}\Delta\varphi^2$ et, comme $d\omega = d\omega'$ (puisque le module de la substitution est *un*), $\int_{\mathrm{D}'}$ représente la valeur de $\int_{\mathrm{D}}$ dans le nonveau système de variables. Les seconds membres des deux formules étant identiques, on a bien $k = (m-2)\sigma_m$.

Ceci montre qu'il convient de prendre comme surfaces s celles qui se transforment en sphères de centre P.

On obtient ainsi une fonction de Green *généralisée* G_P^{II} qui, comme *solution de l'adjointe en* Π, vérifie la condition (1_{14}). On montre aisément, toujours par la même méthode, qu'elle est aussi *solution de la proposée en* P et vérifie (1_{13}), avec $L = 0$, quand P vient sur S.

Je vais maintenant, après l'exposé général qui précède, expliquer le principe de la méthode que j'ai employée, le détail des calculs étant donné dans les Chapitres suivants.

2. Le problème général du calcul des fonctions de Green : la fonction auxiliaire. — En résumé, étant donnée une équation linéaire du second ordre du type elliptique, la résolution d'un problème aux limites à l'aide de l'équation adjointe exige ainsi *deux opérations* : 1° calcul de la solution fondamentale de l'adjointe; 2° calcul d'une seconde solution de l'adjointe à ajouter à la précédente pour avoir la fonction de Green et qui vérifie sur S une condition aux limites du même type que celle imposée à la solution cherchée u. Une simple application de la formule fondamentale donne ensuite u en tout point intérieur à S. A chaque genre de problème aux limites correspondra ainsi une fonction que nous appellerons d'une manière générale *fonction de Green*, bien que, dans certains cas particuliers, elle ait reçu d'autres noms (par exemple fonction de Neumann quand $K = 0$).

Le calcul de cette fonction est donc un problème *de même type que celui qu'on s'est proposé au début* et se résout, par suite, par une méthode de calcul qui permettrait directement d'avoir la solution cherchée. Toutefois ce dernier calcul varierait avec les données, tandis que la détermination d'une fonction de Green, pour une équation donnée, ne dépend que du contour et la définit comme une fonctionnelle d'un incontestable intérêt. Mais, au point de vue strict du calcul de la solution u, la simple recherche de la solution fondamentale peut sembler un leurre si l'on ne connaît pas une autre méthode pour obtenir u [1].

Aussi j'ai cherché à obtenir la fonction de Green G *par une seule opération* de telle sorte que, celle-ci effectuée, la formule fondamen-

(1) Pour le calcul de u par la résolution d'une *autre* équation intégrale, une fois la solution fondamentale formée, *voir* la Note qui termine le présent Mémoire.

tale donne u et prouve en même temps l'unicité de la solution. Je me suis donc demandé si, de même que E.-E. Levi avait obtenu la solution fondamentale par l'intermédiaire d'une quasi-solution, il n'était pas possible d'obtenir G *par l'intermédiaire d'une quasi-fonction de Green* V_P^Π, s'annulant quand P ou Π viennent sur S (s'il s'agit du problème de Dirichlet) et telle que F(V) ou $\mathcal{F}(V)$ *présentent pour* $P\Pi = 0$ *un pôle d'ordre* $< m$ [1].

Dans ce but, j'ai commencé par le cas le plus simple : le problème de Dirichlet relatif au cercle dans le cas des fonctions harmoniques *à deux variables*. La fonction de Green, dans ce cas, est classique et son expression bien connue montre que, quand P et Π sont voisins du cercle et à des distances respectives d et δ de celui-ci, elle se comporte comme

$$V_P^\Pi = \mathcal{L}\,\frac{\sqrt{r^2+4\,d\,\delta}}{r}; \tag{2_1}$$

V représente d'ailleurs la fonction de Green elle-même quand le cercle devient une droite indéfinie.

Peut-on user de cette fonction V, que j'appelle *fonction auxiliaire*, comme des quasi-solutions envisagées plus haut ? Envisageons l'équation

$$\Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c = 0,$$

en cherchant la fonction de Green G_P^Π comme solution de la proposée elle-même (privée de second membre) relativement à $P(x, y)$, le contour C portant les données étant quelconque.

On constate alors que V *se comporte bien comme une quasi-solution :* en mettant ensuite G sous la forme

$$G_P^\Pi = V_P^\Pi + \int_D V_P^M \Phi_M^\Pi\, d\omega_M, \tag{2_2}$$

analogue à (1_3), on trouve que Φ est donnée par une équation de Fredholm semblable à (1_5) [*voir* équation (2_3) où $(m-2)\,\sigma_m$ est ici remplacé par 2π].

---

[1]) Voir la Note à la fin de ce Chapitre.

Dans le cas de m variables [équation (E_1)], V devient alors

$$V_P^\Pi = r^{-m+2} - (r^2 + 4\,d\,\delta)^{-\frac{m}{2}+1};$$

on met encore G sous la forme (2_3) et Φ est donnée par l'équation intégrale (avec $\lambda = 1$)

$$(2_3) \qquad -(m-2)\sigma_m \Phi_P^\Pi + \lambda \int_D F_1(V_P^M)\Phi_M^\Pi \, d\omega_M + F_1(V_P^\Pi) = 0,$$

l'opération F_1 étant effectuée, comme toujours, par rapport à P. Ceci montre que Φ *est la résolvante du noyau* $\dfrac{F_1(V_P^\Pi)}{(m-2)\sigma_m}$ *pour* $\lambda = 1$.

La fonction auxiliaire est donc une *quasi-solution en* P *s'annulant quand* P *vient sur la frontière de* D. Elle n'est d'ailleurs pas unique : le calcul qui prouve qu'elle est quasi-solution montre que cette propriété subsiste si l'on remplace *d* par une fonction $h(x_i)$ s'annulant sur S ainsi que $\sum \left(\dfrac{\partial h}{\partial x_i}\right)^2 - 1$ [et de même δ par $h(\xi_i)$]. On déduit de là une expression immédiate de V quand on connaît l'équation de S. Le cas de points anguleux dans le plan est traité dans le n° **12**. Les lignes ou points singuliers dans l'espace ou l'hyperespace nécessitent une étude spéciale.

Une autre forme de V nous conduit aussi à une interprétation géométrique utile. Nous reportant encore au cas du cercle ou de la sphère et des fonctions harmoniques, on constate qu'on peut prendre comme partie du premier ordre de G_P^Π, lorsque P tend vers le cercle, la fonction

$$(2_4) \qquad V_P^\Pi = \mathcal{L}\frac{r_1}{r} \text{ pour } m = 2, \qquad V' = r^{-m+2} - r_1^{-m+2} \text{ pour } m > 2,$$

r_1 désignant la distance de Π au point P_1, symétrique de P par rapport au pied de la plus courte distance *d* et que nous appellerons le *point-image*, définition susceptible d'être généralisée. Il est à remarquer d'autre part que l'expression (2_4) se confond avec (2_1) dans le cas d'une frontière rectiligne.

On aboutit également à la forme (2_4) en remplaçant dans (2_1) δ par la somme δ_1 des premiers termes de la formule de Taylor donnant la valeur de la plus courte distance quand on passe de P à Π :

$$\delta_1 = d + \Sigma(\xi_i - x_i)\frac{\partial d}{\partial x_i},$$

de sorte qu'on trouve ainsi pour V deux formes principales obtenues, dans le cas du problème de Dirichlet, en retranchant de r^{-m+2}, soit r_2^{-m+2} (avec $r_2^2 = r^2 + 4d\delta$), soit r_1^{-m+2} (avec $r_1^2 = r^2 + 4d\delta_1$).

La deuxième quasi-solution, r_1^{-m+2}, se prête très simplement à la résolution des *problèmes mixtes* [condition (1_{13})], V étant alors de la forme $r^{-m+2} + \mu_P r_1^{-m+2}$.

A chaque problème aux limites correspond ainsi une fonction V *et la fonction de Green correspondante est donnée par* (2_2) *et* (2_3).

Passons maintenant à l'équation générale $F = 0$. Cette fois c'est $\Im^{\frac{1}{2}}$ [formule (1_7) ou (1_8)] qui jouera le rôle de r et la fonction auxiliaire du problème de Dirichlet sera

$$V_P^\Pi = \Im^{-\frac{m}{2}+1} - (\Im + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1},$$

s étant une fonction du point P positive dans D et telle que

$$s = 0 \qquad \text{et} \qquad \Sigma a_{ik}\frac{\partial s}{\partial x_k}\frac{\partial s}{\partial x_i} = 1 \qquad \text{sur S};$$

σ est la même fonction, mais relative à Π. La fonction de Green est encore donnée par (2_2) et (2_3), F remplaçant F_1.

Ici encore on peut définir un *point-image* P_1 de P, dont nous donnons une théorie complète (et indépendante) au n° **10** : P_1 est extérieur à D quand P est intérieur, se confond avec P sur S et est tel que, si P subit un déplacement infinitésimal à partir de S suivant la conormale, P_1 subit un déplacement *équiopposé*. On obtient alors une quasi-solution analogue à r_1^{-m+2} en remplaçant, soit dans $\Im^{-\frac{m}{2}+1}$ les coordonnées de P par celles de P_1, fonctions des (x_i), soit dans

$$(\Im + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1}, \qquad \sigma \text{ par } \sigma_1 = s + \Sigma(\xi_i - x_i)s'_{x_i}.$$

A toute quasi-solution w *en correspond ainsi une autre* w_1, telle que, sur S, w et w_1 coïncident et ont des dérivées conormales opposées. La résolution des problèmes mixtes se traite alors avec une fonction auxiliaire de la forme $w + \mu_p w_1$.

Au cours du dernier Chapitre, nous arrivons à *nous affranchir de l'existence de l'équation adjointe* et à obtenir des formules de résolution supposant simplement que les coefficients de (E) satisfont à la *condition de Hölder* dans D + S, K étant un nombre fixe,

$$|f(P) - f(\Pi)| < K |P\Pi|^{\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqq 1).$$

Quant à la frontière S, il suffira que l'angle des normales en deux points voisins M et Q soit $< K' |MQ|^h (0 < h \leqq 1)$; S peut donc être *dépourvue de courbure*.

Il convient ensuite de faire la *synthèse des solutions*, c'est-à-dire de vérifier que les formules de résolution, obtenues à l'aide des fonctions de Green construites précédemment, donnent bien des solutions vérifiant les conditions aux limites données. Il faut, de plus, examiner *les cas singuliers* où le déterminant de Fredholm est nul. Cette question se rattache à l'étude de l'*unicité* des solutions. Nous démontrons, par exemple, que le problème de Neumann, pour l'équation générale F = o privée du terme en u, n'admet que la solution u = const. quand la donnée sur S est nulle.

Enfin nous terminons en traitant, dans le cas de deux variables, le cas où la condition aux limites est linéaire par rapport à u et à ses *deux* dérivées premières; elle peut donc se ramener à la forme, contenant la *dérivée tangentielle* $\frac{\partial u}{\partial s}$,

$$H \frac{\partial u}{\partial n} + H_1 \frac{\partial u}{\partial s} + K u = L,$$

s étant ici l'arc du contour et H, H_1, K, L des fonctions de s. Il faut alors introduire une autre solution que $\mathcal{L}\frac{1}{r}$ [l'équation étant ramenée à la forme (E_1), ce qui est toujours possible ici]. Cette solution est $(\widehat{\Pi P, O x})$, fonction harmonique conjuguée de $\mathcal{L} r$: elle a déjà été utilisée par Poincaré dans l'étude des marées.

Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été énoncés dans diverses Notes insérées aux *Comptes rendus* depuis 1920 (¹). Mais la méthode est susceptible d'extensions diverses que j'ai indiquées dans le même recueil et qui concernent :

1° Le type parabolique

$$\sum a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}-\frac{\partial u}{\partial y}+\sum b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu+f=0,$$

les coefficients étant fonctions des $m+1$ variables $x_1, \ldots, x_m, y$ (t. 171, 1920, p. 840);

2° Les équations d'ordre $2p$ admettent une famille multiple d'ordre p de caractéristiques imaginaires (t. 173, 1921, p. 761 et 1445);

3° Les équations dont toutes les caractéristiques sont imaginaires et décomposables (t. 177, 1923, p. 571);

4° Certaines équations intégrodifférentielles, comprenant en particulier l'équation des marées dynamiques (t. 179, 1924, p. 663 et 1243).

Enfin j'ai indiqué également comment on pouvait résoudre les différents problèmes aux limites relatifs à toutes ces équations à l'aide de V et *sans former la fonction de Green elle-même;* nous retrouverons ce point de vue, qui en fait n'est pas distinct du premier, dans le dernier Chapitre [équations (13_4), (13_5) et (14_4)].

Tout ceci permet l'étude de la *nature analytique des solutions* (t. 182, 1926, p. 36 et 754).

Tous ces résultats seront développés dans des Mémoires ultérieurs. Pour l'instant, je me suis borné aux équations du type (E) car le principe de la méthode reste le même dans les autres cas (²).

(¹) T. 171, 1920, p. 610 et 839; t. 173, 1921, p. 761; t. 184, 1927, p. 1109 et 1632 t. 185, 1927, p. 1565; t. 188, 1929, p, 1652. Signalons aussi les beaux travaux de M. Giraud et particulièrement les Mémoires qu'il a publiés en 1929, depuis l'impression de notre présent travail (*Annales de l'Ecole Normale*, *Journal de Math.*, *Bulletin des Sc. Math.*).

(²) Depuis que ces lignes ont été écrites, j'ai eu connaissance d'un Mémoire fort intéressant, publié à Rome en 1910 par E.-E. Levi (auteur déjà cité plus haut) et qui semble à peu près inconnu en France : *I problemi dei valori al contorno per le equazione lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali* (Societa dei XL, seria 3, tomo XVI). Le regretté savant traite des équations d'ordre $2n$ à deux variables : il semble que ce soit lui qui ait eu le premier l'idée d'une *quasi-fonction de Green*, que je croyais inédite dans ma Note de 1920. Mais, si le point de départ est le même que dans le présent travail, la mise en application est toute différente : l'auteur, partant

II. — Les équations à deux variables et le problème de Dirichlet.

Conformément à ce que nous avons dit dans le Chapitre I, nous pouvons envisager la fonction de Green comme *solution de l'équation sans second membre* $F = 0$ *relativement au point* P. Nous commençons par étudier le cas de *deux variables* (x, y), qui est le plus simple, ce qui facilitera l'exposition du cas général; nous savons que l'équation donnée peut toujours être alors ramenée à la forme (E_1), alors qu'il n'en est pas ainsi dans le cas de m variables.

3. Formation de la fonction auxiliaire. — Envisageons tout d'abord le problème de Dirichlet intérieur relatif à un contour donné *dans le cas d'une fonction harmonique*. La fonction de Green est alors symétrique par rapport aux deux points $P(x, y)$ et $\Pi(\xi, \eta)$ dont elle dépend et, lorsque le contour est un cercle C, son expression est

$$G_P^\Pi = \mathcal{L}\frac{P\Pi'}{P\Pi}\cdot\frac{O\Pi}{R} = \mathcal{L}\frac{\Pi P'}{\Pi P}\cdot\frac{OP}{R}, \tag{3_1}$$

Π' et P' étant les conjugués de Π et P par rapport à C : ces deux formes résultent de la symétrie de G et leur identité peut d'ailleurs s'établir directement.

Envisageons, par exemple, la seconde forme : soient $OP = l$, $O\Pi = \lambda$ et prenons comme axe des x la droite OP. Nous aurons

$$\overline{\Pi P'}^2 = \left(\xi - \frac{R^2}{l}\right)^2 + \eta^2, \qquad \overline{\Pi P}^2 = r^2 = (\xi - l)^2 + \eta^2.$$

Remplaçant $\xi^2 + \eta^2$ par λ^2 et éliminant ξ, on en déduit

$$\overline{\Pi P'}^2 = \frac{R^2 r^2}{l^2} + \frac{(R^2 - l^2)(R^2 - \lambda^2)}{l^2}.$$

---

de la quasi-solution fondamentale ψ, porte ses efforts sur la construction, longue et délicate, de la *fonction compensatrice* g, qui est telle qre $\psi + g$ soit quasi-solution et s'annule à la frontière ainsi que ses dérivées des $n - 1$ premiers ordres. De plus les hypothèses sur le contour et les données sont nombreuses et restrictives. Pour toutes ces raisons, l'exposé que je donne ici étant tout autre que celui de E.-E. Levi, je le publie sans rien y changer.

D'où

$$\left(\frac{\Pi P'}{\Pi P}\cdot\frac{OP}{R}\right)^2 = 1 + \frac{(R^2-l^2)(R^2-\lambda^2)}{R^2 r^2},$$

$$G_P^{\Pi} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[1 + \frac{(R^2-l^2)(R^2-\lambda^2)}{R^2 r^2}\right].$$

Cette formule, qui établit d'ailleurs la symétrie de G, va nous permettre de préciser le mode d'évanouissement de G quand P ou Π viennent sur C. En effet, d et δ désignant les plus courtes distances de P et Π à C, nous aurons

$$d = R - l, \qquad \delta = R - \lambda,$$

$$G_P^{\Pi} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left[1 + \frac{d\,\delta}{r^2}\,\frac{(2R-d)(2R-\delta)}{R^2}\right].$$

Lorsque d et δ tendent vers zéro, G est infiniment petite comme la fonction

$$V_P^{\Pi} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left(1 + \frac{4\,d\,\delta}{r^2}\right) = \mathcal{L}\,\frac{\sqrt{r^2+4\,d\,\delta}}{r}.$$

D'ailleurs, quand R augmente indéfiniment, G se réduit à V, qui représente ainsi la fonction de Green dans le cas où la frontière est une droite indéfinie.

Supposons maintenant *que le contour* C *soit quelconque : d* et δ conservant la même signification, nous allons chercher si la fonction V est *quasi-solution* de l'équation de Laplace, c'est-à-dire si ΔV présente pour $r = 0$ *un pôle d'ordre inférieur à* 2.

Évidemment il en est bien ainsi quand P et Π sont intérieurs à C : posant

$$(3_2)\qquad r_2 = \sqrt{r^2 + 4\,d\,\delta}.$$

ΔV est égal à $\Delta\mathcal{L}r_2$ qui contient r_2 en dénominateur et reste fini, sauf quand P et Π tendent vers un même point de C, car alors $r_2 \to 0$. Il nous faut donc examiner ce cas.

Calculons donc ΔV relativement au point P : il vient [1]

$$(3_3)\qquad \Delta_P V = \frac{2\,\delta\,\Delta d}{r_2^2} + \frac{8\,\delta}{r_2^4} \times\left[d - (x-\xi)\frac{\partial d}{\partial x} - (y-\eta)\frac{\partial d}{\partial y} - \delta\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)^2 - \delta\left(\frac{\partial d}{\partial y}\right)^2\right].$$

---

[1] Nous emploierons souvent la notation Δ_P, F_P, etc., dans les symboles de dérivation pour préciser le point P par rapport auquel se fait l'opération.

Or, si n est la normale intérieure à C au pied de d et si $(Ox, n) = \varphi$,

$$(3_4) \qquad \frac{\partial d}{\partial x} = \cos\varphi, \qquad \frac{\partial d}{\partial y} = \sin\varphi, \qquad \left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial y}\right)^2 = 1.$$

Il nous faut, d'autre part, calculer Δd; pour cela, nous nous appuierons sur une formule souvent utilisée dans l'étude des fonctions harmoniques et biharmoniques : P étant un point d'une courbe c, s l'arc de celle-ci, n la normale intérieure, t la tangente $\left(t\widehat{P}n = +\frac{\pi}{2}\right)$, ρ le rayon de courbure algébrique en P, on a

$$(3_5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial n},$$

où $\frac{\partial}{\partial t}$ désigne les dérivées prises dans la direction de la tangente et $\frac{\partial}{\partial s}$ les dérivées prises le long de la courbe. Supposons alors que c soit la courbe parallèle à C passant par P : remplaçant u par d on aura

$$\frac{\partial d}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial d}{\partial n} = 1, \qquad \frac{\partial^2 d}{\partial n^2} = 0, \qquad \rho = R - d,$$

R étant le rayon de courbure algébrique de C au pied de d : d'où

$$(3_6) \qquad \Delta d = \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 d}{\partial n^2} = -\frac{1}{R-d}.$$

D'autre part, comme $\frac{\partial^2 d}{\partial s\,\partial n} = 0$, toutes les dérivées secondes de d en P, quels que soient les axes choisis, seront de la forme $\frac{K}{R-d}$, K étant toujours fini; par suite, si nous calculons l'accroissement de la plus courte distance quand on passe de P à Π, en utilisant la formule de Taylor jusqu'aux termes du second ordre, nous pouvons écrire

$$(3_7) \qquad \delta - d = (\xi - x)\frac{\partial d}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial d}{\partial y} + \frac{H_1}{R_1 - d_1} r^2,$$

en désignant par H_1 une fonction toujours finie de P et de Π et par $R_1 - d_1$ la valeur de $R - d$ pour un certain point du segment $P\Pi$.

Utilisant les résultats (3_4), (3_6) et (3_7) dans la formule (3_3), il vient

$$(3_8) \qquad \Delta_P V = \frac{\delta}{r_2^2}\left[\frac{-2}{R-d} + \frac{8H_1}{R_1 - d_1}\left(\frac{r}{r_2}\right)^2\right].$$

Or r est au plus égal à r_2; si donc nous supposons que R ne puisse s'annuler, c'est-à-dire que la courbure de C reste finie, et que, d'autre part, P reste dans une région $\mathcal{R}'$ intérieure au domaine compris entre C et sa développée, le crochet reste fini et il ne reste à évaluer que l'ordre du premier terme quand r_2 tend vers zéro. Pour cela, il suffit d'envisager le triangle $P\Pi p$, p étant le pied de d : on a

$$\delta \leqq \Pi p \leqq d + r, \qquad \text{donc} \qquad r \geqq \delta - d;$$

on établirait de même $r \geqq d - \delta$. Donc $r \geqq |\delta - d|$, d'où

$$r_2^2 \geqq (\delta - d)^2 + 4 d \delta = (d + \delta)^2$$

et par suite

$$\frac{r_2}{\delta} \leqq \frac{d + \delta}{\delta} \leqq 1.$$

Il résulte de là, d'après la formule (3_8), que, quand P est dans $\mathcal{R}'$, le produit $r_2 \Delta_P V$ reste fini quel que soit Π, et *a fortiori* $r \Delta_P V$ également. Donc V *est quasi-solution dans* $\mathcal{R}' + C$, puisque ΔV présente un pôle du premier ordre quand P et Π tendent vers un même point de C.

Nous avons supposé P dans $\mathcal{R}'$; dans la région restante $D - \mathcal{R}'$, il suffira de remplacer d et δ par des *prolongements* de ces fonctions, c'est-à-dire par des fonctions d' et δ' *se raccordant avec* d et δ ainsi que les dérivées premières et secondes, de façon que la fonction $r^2 + 4 d' \delta'$ et ses dérivées des deux premiers ordres en x et en y restent finies (ou tout au moins intégrables) dans $D - \mathcal{R}'$.

Désignons dorénavant par d et δ l'ensemble des valeurs des distances de P et Π à C, dans le voisinage de C, et des prolongements ainsi définis. La fonction $\mathcal{L}\frac{r_2}{r}$ est quasi-solution de l'équation de Laplace. De plus ses dérivées premières contiennent des termes en $\frac{1}{r}$ et en $\frac{\delta}{r_2^2}$ et par suite sont du premier ordre en $\frac{1}{r}$, puisque $\delta \leqq r_2$.

Il résulte de là que

$$V_P^\Pi = \mathcal{L}\frac{r_2}{r}, \tag{3_9}$$

r_2 étant défini par (3_2), est quasi-solution de l'équation linéaire du type canonique

$$F_1(u) \equiv \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0,$$

où les coefficients sont fonctions de x, y.

C'est cette fonction V que nous prendrons comme *fonction auxiliaire* [1].

4. Calcul de la fonction de Green. — Ainsi que nous l'avons dit dans le n° **2**, nous mettons G sous la forme

$$G_P^{\Pi} = V_P^{\Pi} + \int_D V_P^M \Phi_M^{\Pi} \, d\omega_M.$$

En supposant l'élément différentiel intégrable, la fonction G ainsi écrite s'annule quand P ou Π viennent sur C, et la détermination de G est ainsi ramenée à celle de la fonction Φ. Nous obtiendrons celle-ci en écrivant que $F_1(G)$, calculé par rapport à P, est nul.

Or la fonction auxiliaire V, étant quasi-solution, aura la forme

$$V = \mathcal{L}\frac{1}{r} + v,$$

(quelle que soit l'expression que nous lui donnions, que ce soit (3_0) ou une autre), Δv étant du premier ordre en $\frac{1}{r}$; et la dérivation sous le signe $\int_D$ s'applique aux dérivées premières de $\frac{1}{r}$ et de v et aux dérivées secondes de v (*cf.* n° **7**).

Soit alors ρ une fonction continue de M qui satisfasse en P aux mêmes conditions que la densité d'un potentiel logarithmique vérifiant la relation de Poisson [2] :

$$\Delta_P \int \mathcal{L}\frac{1}{PM}\rho_M \, d\omega_M = -2\pi\rho_P.$$

Si donc Φ_P^{Π}, considérée comme fonction de P, satisfait à ces conditions [que nous appellerons *conditions* (ρ)] en tout point intérieur à D,

---

[1] Il va sans dire que, si le contour donné est un cercle, nous pourrons choisir aussi comme fonction auxiliaire pour l'équation canonique la fonction de Green (3_1) elle-même, $F_1(G)$ étant du premier ordre en $\frac{1}{r}$.

[2] *Voir* à ce sujet *Annales de l'École Normale*, 1918, p. 149 : il suffit, en particulier, que l'accroissement $|\rho_M - \rho_P|$ soit $< K\,|PM|^{\alpha}$ avec $0 < \alpha \leq 1$ (*condition de Hölder*), même dans une seule direction issue de P.

nous pourrons écrire

$$F_1(G_P^\Pi) \equiv F_1(V_P^\Pi) - 2\pi\Phi_P^\Pi + \int_D F_1(V_P^M)\Phi_M^\Pi \, d\omega_M = 0,$$

ou

$$(4_2) \qquad \Phi_P^\Pi = \int_D \frac{1}{2\pi} F_1(V_P^M)\Phi_M^\Pi \, d\omega_M + \frac{1}{2\pi} F_1(V_P^\Pi).$$

Or, si nous envisageons une équation de Fredholm supposée résolue par rapport à la fonction inconnue φ et écrite sous la forme classique

$$\varphi(P) = \lambda \int_D K(P, M)\varphi(M) \, d\omega_M + \psi(P),$$

la résolvante Γ du noyau K est donnée par l'équation

$$\Gamma(P, \Pi; \lambda) = \lambda \int_D K(P, M)\Gamma(M, \Pi; \lambda) \, d\omega_M + K(P, \Pi).$$

L'équation (4_2) est précisément de cette forme, avec

$$\lambda = 1, \qquad K(P, M) = \frac{1}{2\pi} F_1(V_P^M), \qquad \Gamma(P, \Pi; 1) = \Phi_P^\Pi.$$

Donc Φ *est la résolvante du noyau* $\frac{1}{2\pi} F_1(V_P^\Pi)$ *pour* $\lambda = 1$. Ce noyau rentre d'ailleurs dans un type classique, car il se comporte comme $\frac{1}{r}$ pour $r = 0$: le second noyau itéré est donc borné et la résolvante s'exprime aisément au moyen de ce dernier (*voir*, par exemple, Goursat, *Analyse*, t. III, n° 570).

On peut également calculer Γ par la méthode de Poincaré : il suffit d'écrire

$$\Gamma(P, \Pi; \lambda) = \frac{\mathcal{D}_2(P, \Pi; \lambda)}{\mathcal{D}_2(\lambda)},$$

en désignant par $\mathcal{D}_2(P, \Pi; \lambda)$ et $\mathcal{D}_2(\lambda)$ les deux fonctions entières obtenues en supprimant dans les fonctions classiques $D(P, \Pi; \lambda)$ et $D(\lambda)$ tout ce qui dépend des deux premières traces du noyau K.

Enfin, sans introduire la résolvante du noyau non borné, on peut aussi, par deux itérations, obtenir une équation avec un noyau borné et un second membre $K_1(P, \Pi)$, somme de K et des deux premiers noyaux itérés, donc ayant la même singularité que $K(P, \Pi)$; si l'on pose ensuite $\Phi = K_1 + \Phi_1$, la fonction Φ_1 vérifie une équation à noyau et second membre bornés.

Quelle que soit la façon d'opérer, la résolution de l'équation (4_1) nous donnera une fonction Φ_P^Π admettant un pôle d'ordre *un* quand P vient en Π; de plus Φ satisfait aux conditions (ρ) si les coefficients de l'équation $F_1 = 0$ y satisfont eux-mêmes, en supposant P et Π distincts : ceci résulte de l'expression (4_2) de Φ, car $F_1(V_P^\Pi)$ satisfait aux conditions (ρ) en P [1]. Le calcul effectué pour obtenir (4_2) est donc légitime.

Nous obtenons ainsi une fonction G_P^Π, solution fondamentale de l'équation proposée (privée de second membre) relativement à P, supposé distinct de Π, et s'annulant quand P (ou Π) vient sur C, sauf peut-être si P et Π tendent vers un même point de C. *C'est bien la fonction de Green cherchée.*

Toutefois ceci suppose que le déterminant $D(\lambda)$ correspondant au noyau K ne s'annule pas pour $\lambda = 1$. Pour tous les contours C tels que le noyau K n'admette pas *un* comme valeur singulière, *le problème de Dirichlet n'admettra donc qu'une solution* donnée par (1_2), avec $k = 2\pi$,

$$u(P) = \frac{1}{2\pi}\int_C u(m)\frac{\partial G_P^m}{\partial n}\,ds_m - \frac{1}{2\pi}\int_D G_P^\Pi f(\Pi)\,d\omega_\Pi.$$

Pour être complètement rigoureux, il nous faudrait vérifier que la solution ainsi obtenue satisfait bien aux conditions aux limites imposées : c'est un point sur lequel nous revenons plus loin (n° **15**).

Hypothèses sur le contour. — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que le contour C possède en chaque point une courbure finie et continue; il peut se composer de plusieurs courbes fermées simples, de telle sorte que D soit d'un seul tenant, à connexion simple ou

---

[1] Si nous prenons comme condition (ρ) celle de Hölder (note précédente) qui est la plus pratique, $F_1(V)$ y satisfait alors en P, sauf peut-être en ce qui concerne le terme Δd qui figure dans (3_3). Mais comme, d'après son expression (3_6), Δd admet une dérivée, $\frac{-1}{(R-d)^2}$, dans la direction de la normale, la condition de Hölder est vérifiée dans cette direction pour Δd, ce qui suffit. L'emploi de la fonction h introduite plus loin (n° **6**) évite d'ailleurs cette difficulté.

multiple : chacune des courbes fermées constituant C pourra donc être définie par $x(t)$ et $y(t)$, x et y admettant des dérivées premières et secondes finies, $x'(t)$ et $y'(t)$ n'étant pas nulles simultanément.

Qu'arrive-t-il si C présente un nombre fini de points anguleux à tangentes distinctes, ce qui se traduira par des discontinuités finies de $x'(t)$ et $y'(t)$? En général, A étant un tel point, il existera une ligne l, partant de A et constituée par des points équidistants des deux arcs C_1 et C_2 de C issus de A; le long de cette ligne les dérivées premières et secondes de d présentent des discontinuités finies, de sorte que, pour pouvoir appliquer correctement la formule de Green dans le domaine D, il faudrait faire des coupures le long des lignes l, au moins dans la région $\mathcal{R}'$ avoisinant C [1] : on aurait aussi deux intégrales, une de chaque côté de l.

Or la tangente en tout point de l est bissectrice des normales à C_1 et C_2 issues de ce point, de sorte que les dérivées des deux fonctions δ prises respectivement suivant les deux sens de la normale à l sont égales. On en déduit aisément que $\frac{\partial G_{P}^{M}}{\partial n}$ a la même valeur des deux côtés de l et que les intégrales le long des coupures s'ajoutent.

Nous voyons donc que le cas des points anguleux doit être examiné à part (*voir* n° **12**; j'ai donné aussi dans les *Comptes rendus*, t. 184, 1927, p. 1633, une méthode exposée dans la Note finale, où n'intervient pas la fonction de Green). Nous écartons aussi (à cause du terme Δd) le cas où, le long du contour C, la courbure admettrait des discontinuités de première espèce, résultant de discontinuités des dérivées secondes de $x(t)$, $y(t)$.

L'emploi de la distance d conduit donc à des conditions trop restrictives et convient surtout comme procédé d'induction. Nous étudierons plus loin (n° **11**), dans le cas de m variables, les conditions à imposer à la frontière et nous élargirons celles que nous avons trouvées jusqu'ici : *l'existence de la courbure ne sera plus nécessaire.*

Quant aux points de rebroussements, ils nécessitent une étude spéciale.

---

[1] Une ligne l peut exister également sans qu'il y ait point anguleux en A (c'est le cas, par exemple, d'un axe de symétrie), mais, si la courbure est finie, il n'y a qu'une seule plus courte distance d'un point de l à C, dans le voisinage de A; les discontinuités envisagées dans le texte n'existent pas.

5. AUTRE FORME DE LA FONCTION AUXILIAIRE. LE POINT-IMAGE. — Envisageons l'expression (3_1) de la fonction de Green dans le cas du cercle : quand P est infiniment voisin du cercle, son conjugué P′ n'est qu'à une distance du second ordre du symétrique P_1 de P par rapport au pied p du rayon passant par P; si l'on pose $\Pi P_1 = r_1$, le terme $\mathcal{L}\frac{\Pi P'}{\Pi P}$ est alors équivalent à $\mathcal{L}\frac{r_1}{r}$. Nous sommes ainsi conduits à nous demander *si l'on peut prendre comme fonction auxiliaire* $\mathcal{L}\frac{r_1}{r}$, au lieu de $\mathcal{L}\frac{r_2}{r}$. Le cas d'une *frontière rectiligne* vient à l'appui de cette idée car, lorsque le centre O s'éloigne indéfiniment, $\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{R}}$ tend vers *un* et P′ se confond avec P_1 (¹). La fonction de Green peut alors s'écrire indifféremment $\mathcal{L}\frac{r_2}{r}$, comme nous l'avons déjà vu, ou $\mathcal{L}\frac{r_1}{r}$; l'identité de ces deux formes résulte d'ailleurs de la relation, dans le triangle $\Pi P P_1$:

$$r_1^2 - r^2 = 4\,d\,\delta \qquad \text{ou} \qquad r_1 = \sqrt{r^2 + 4\,d\,\delta} = r_2.$$

Passons maintenant au cas d'un contour C quelconque et appelons *point-image* de P le symétrique P_1 de P par rapport au pied p de la plus courte distance d de P à C. Voyons si $\mathcal{L}\frac{r_1}{r}$, toujours avec $r_1 = \Pi P_1$, *est quasi-solution* en x, y.

Le calcul même que nous avons fait plus haut avec $\mathcal{L}r_2$ va nous servir ici. Supposons, en effet, que, dans r_2, nous remplacions δ par

$$(5_1) \quad \delta_1 = d + (\xi - x)\frac{\partial d}{\partial x} + (y - \eta)\frac{\partial d}{\partial y} = d - (x - \xi)\cos\varphi - (y - \eta)\sin\varphi;$$

(¹) Il n'est pas sans intérêt de trouver directement l'expression de la fonction de Green dans le cas où la frontière est une droite : il suffit de prendre celle-ci comme axe des y par une transformation de coordonnées qui, comme on sait, laisse invariant le symbole Δ. La fonction $\mathcal{L}\sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, obtenue en changeant x en $-x$ ou ξ en $-\xi$ dans $\mathcal{L}r$, est harmonique en x, y et ξ, η et représente précisément $\mathcal{L}r_1$. Quand P ou Π vient sur Oy, $r_1 = r$, donc $\mathcal{L}\frac{r_1}{r}$ satisfait bien aux conditions imposées à la fonction de Green. Si la frontière comprend une partie rectiligne AB, l'emploi de $\mathcal{L}\frac{r_1}{r}$ dans la formule (1_1) fait disparaître le terme en $\frac{du}{dn}$ le long de AB.

montrons que

$$(5_2) \qquad r^2 + 4\, d\, \delta_1 = r_1^2.$$

Il suffit pour cela de former les coordonnées du point P_1 :

$$x_1 = x - 2\, d \cos\varphi, \qquad y_1 = y - 2\, d \sin\varphi.$$

D'où

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \\ &= (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + 4\, d^2 - 4\, d\,[(x - \xi)\cos\varphi + (y - \eta)\sin\varphi] \\ &= r^2 + 4\, d\, \delta_1. \end{aligned}$$

Comment se comporte r_1 vis-à-vis de r? Pour les raisons données au n° **3**, il suffit d'envisager le cas où P est dans la région $\mathcal{R}'$ avoisinant C et que nous supposerons choisie de telle sorte que P_1 reste extérieur à C (il en sera d'ailleurs toujours ainsi si C est convexe); r_1 ne peut tendre vers zéro qu'avec r et dans le cas où P et Π sont infiniment voisins d'un même point de C. On a d'ailleurs $r < r_1$, sauf si C est convexe vers l'intérieur du domaine et Π situé entre C et la tangente en p. Prenons alors celle-ci comme axe des x, et p comme origine : on a

$$(5_3) \qquad \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{\xi^2 + (d - \eta)^2}{\xi^2 + (d + \eta)^2} = 1 - \frac{4\, d\eta}{\xi^2 + (d + \eta)^2}.$$

Or $\frac{\eta}{\xi^2}$ reste borné : donc le second membre, et par suite $\frac{r}{r_1}$, est borné. Il en est de même de $\frac{d}{r_1}$, car on a $2\, d < r + r_1$, donc $\frac{2\, d}{r_1} < 1 + \frac{r}{r_1}$.

Ces conclusions subsistent : 1° si l'on suppose simplement $\frac{\eta}{\xi}$ borné, car, en posant $\eta = \xi\alpha$, $d = \xi\beta$, on a $\frac{\eta\, d}{\xi^2 + (d + \eta)^2} = \frac{\alpha\beta}{1 + (\alpha + \beta)^2}$ et, si α est borné, cette expression est bornée puisque son dénominateur reste ≥ 1 et que, pour β infini, elle est nulle; 2° si l'on remplace P_1 par un autre point dont la distance d' à P_1 soit infiniment petite par rapport à d, donc par rapport à r_1; en effet, r_1 n'est modifié que d'une quantité au plus égale à d', donc infiniment petite par rapport à r_1 lui-même. Nous avons ainsi une *définition plus générale* du point-image.

Formons maintenant $\Delta_P \mathcal{L} r_1$: en quoi l'expression obtenue va-t-elle différer de (3_3)? D'abord le crochet s'annulera d'après le choix même de δ_1. Ensuite, nous aurons des termes contenant les dérivées premières et secondes de δ_1 par rapport à x ou à y. Or

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial x} = (\xi - x)\frac{\partial^2 d}{\partial x^2} + (\eta - y)\frac{\partial^2 d}{\partial x\, \partial y},$$

quantité du premier ordre en r. On voit de même que $\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial x^2}$ reste fini, à la condition que les dérivées troisièmes de d, donc les dérivées secondes de l'angle φ, existent, ce qui entraîne l'hypothèse d'une courbure dérivable (dont nous nous débarrasserons par la suite). Or les dérivées premières de δ_1 figurent dans les termes en $\frac{1}{r_1^2}$ et les dérivées secondes dans les termes en $\frac{1}{r_1}$. Comme $\frac{r}{r_1}$ est borné, tous les termes envisagés sont au plus du premier ordre en $\frac{1}{r}$, ce qui montre que $\mathcal{L} r_1$, *et par suite* $\mathcal{L}\frac{r}{r_1}$, *est quasi-solution de* $F_1 = 0$.

Il n'est pas inutile de le vérifier directement sans passer par l'intermédiaire de r_2. On peut opérer de plusieurs manières et nous donnons plus loin une démonstration générale (*voir* n° **10**) : en voici une bien simple dans le cas qui nous occupe, celui du plan.

Prenons comme coordonnées d'un point P de $\mathcal{R}'$ l'arc s de C aboutissant en p et la distance $Pp = n$. On a aisément

$$(5_4) \qquad \Delta u = \left(\frac{R}{R-n}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \text{termes contenant les dérivées premières.}$$

Supposons u harmonique et envisageons la fonction $u_1 = u(s, -n)$: si l'on pose $n_1 = -n$, on a évidemment $u_1 \equiv u(s, n_1)$ et

$$\frac{\partial^2 u(s, n_1)}{\partial n_1^2} = \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2};$$

donc

$$\Delta u_1 = \left(\frac{R}{R-n}\right)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial n^2} + \ldots = \left(\frac{R}{R-n_1}\right)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial n_1^2} + nA\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + \ldots$$

$\left[\text{avec } A = \frac{4R^3}{(R^2-n^2)^2}\right]$, ce qui se réduit à $nA\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}$, car le second membre de (5_4) est nul pour $u = u_1$ et $n = n_1$. En particulier si $u = \mathcal{L} r$, u_1 est $\mathcal{L} r_1$;

n n'est autre que d et le terme $\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}$, qui est de l'ordre de $\frac{1}{r_1^2}$, étant multiplié par d, sera du premier ordre en $\frac{1}{r_1}$, donc en $\frac{1}{r}$ $\left(\text{puisque } \frac{d}{r_1} \text{ et } \frac{r}{r_1}\right.$ sont bornés$\Big)$. De même pour les termes non écrits. C. Q. F. D.

6. Extension des résultats précédents et applications. — En nous reportant à la formule (3_3,) nous constatons que le *fait que* V *soit quasi-solution tient à ce que* $\left(\frac{\partial d}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial d}{\partial y}\right)^2$ *est égale à* 1 ; le résultat subsistera si nous remplaçons d par une fonction h pourvue de dérivées premières et secondes dans D + C, positive dans D et telle que

$$h=0, \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2=1 \qquad \text{sur C.}$$

Cette dernière condition, puisque le premier membre est égal à $\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)^2$, se réduit à $\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)^2=1$; donc, h croissant à partir de zéro, $\frac{\partial h}{\partial n}$ est >0 et l'on a

$$h=0, \qquad \frac{\partial h}{\partial n}=1 \qquad \text{sur C.}$$

La formule de Taylor nous donnera donc en tout point P de D

$$(6_1) \qquad h_P=d+\frac{d^2}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial n^2}\right)_{P_1},$$

P_1 étant un point de pP. De même, si χ est la valeur de h en Π,

$$(6_2) \qquad \chi=\delta+\frac{\delta^2}{2}\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial n^2}\right)_{\Pi_1}.$$

Enfin la même formule de Taylor permet d'écrire en P, puis en Π,

$$(6'_2) \qquad \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2=1+h_1 d,$$

$$\chi=h+(\xi-x)\frac{\partial h}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial h}{\partial y}+H_2 r^2,$$

h_1 et H_2 restant finis. En posant cette fois

$$r_2^2=r^2+4h\chi \qquad \text{et} \qquad V=\mathcal{L}\frac{r_2}{r},$$

il vient alors

$$\Delta_P V = \frac{2\chi\,\Delta h}{r_2^2} + \frac{8\chi}{r_2^4}\left[h - (x-\xi)\frac{\partial h}{\partial x} - (y-\eta)\frac{\partial h}{\partial y} - \chi\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 - \chi\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]$$

ou

$$(6'_2) \qquad \Delta_P V = \frac{\chi}{r_2^2}\left[2\,\Delta h + 8\,H_2\left(\frac{r}{r_2}\right)^2 - \frac{8\chi h_1 d}{r_2^2}\right].$$

Or nous avons vu au n° **3** que $\dfrac{\delta}{\sqrt{r^2+4\,d\delta}}$ est borné quels que soient P et Π dans $D + C$: il en sera de même quand on remplacera d et δ (en totalité ou en partie) par h et χ puisque, d'après (6_1) et (6_2), on ne modifie ainsi d et δ que d'une quantité du second ordre (en se rappelant que r_2 ne tend vers zéro qu'avec h et χ). Il en résulte que $r_2\,\Delta_P V$ et par suite $r\Delta_P V$ sont bornés et V est bien quasi-solution de (E_1).

On pourra de même remplacer d par h : 1° dans les formules (5_1) et (5_2), ce qui nous donnera, au lieu de r_1, l'expression

$$(6_3) \qquad r^2 + 4h\left[h - (x-\xi)\frac{\partial h}{\partial x} - (y-\eta)\frac{\partial h}{\partial y}\right];$$

2° dans les coordonnées du point-image qui deviennent alors

$$(6_4) \qquad x_1 = x - 2h\frac{\partial h}{\partial x}, \qquad y_1 = y - 2h\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Il est à noter que $(x_1-\xi)^2 + (y_1-\eta)^2$ ne sera plus égal ici à l'expression (6_3) : la différence sera

$$4h^2\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 - 1\right],$$

c'est-à-dire une quantité du troisième ordre en d, d'après (6_1) et (6_2), ce qui explique que les deux expressions soient quasi-solutions.

Nous réserverons la notation r_1 à la distance de Π au point-image de P *dans sa définition la plus générale*, vue plus haut. Les expressions (6_4) peuvent d'ailleurs être encore généralisées et s'écrire

$$(6_5) \qquad x_1 = x - 2h\alpha, \qquad y_1 = y - 2h\beta,$$

α et β étant deux fonctions régulières dans $D + C$ et égales sur C aux cosinus directeurs de n : ceci résulte des formules

$$\alpha = \frac{\partial d}{\partial x} + d\left(\frac{\partial \alpha}{\partial n}\right)_1, \qquad \beta = \frac{\partial d}{\partial y} + d\left(\frac{\partial \beta}{\partial n}\right)_1,$$

l'indice 1 indiquant la valeur en un point de pP. Nous ne nous étendrons pas ici sur ces considérations car nous ferons plus loin une théorie générale du point-image.

Nous avons supposé h pourvue de dérivées secondes dans $D + C$; on peut admettre que celles-ci existent seulement dans D et *deviennent infinies sur* C *comme* $d^{\alpha'-1}$ *et que, de plus, les dérivées premières vérifient la condition de Hölder dans* $D + C$ *avec l'exposant* α' $(0 < \alpha' < 1)$. Il faut alors multiplier h_1 et H_2 par $d^{\alpha'-1}$ (¹). On obtient ainsi un noyau dont le produit par $rd^{1-\alpha'}$ est borné, et il admet une résolvante : toutes les intégrales qui figurent dans l'expression de celle-ci conservent un sens (²). Nous dirons alors que la fonction h est *quasi régulière* dans $D + C$.

Application au cas d'un domaine défini par $\varphi(x, y) \geqq 0$. — Le contour C a alors comme équation $\varphi = 0$ et, pour tout point de D, on a $\varphi > 0$. La fonction $\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2}}$ satisfait aux conditions imposées à h $\left(h = 0 \text{ et } \frac{\partial h}{\partial n} = 1 \text{ sur C}\right)$: on le voit immédiatement en formant $h_x'^2 + h_y'^2$. Mais, pour que cette fonction admette des dérivées premières et secondes continues, il faut que, dans $D + C$, φ ait des dérivées des trois premiers ordres et que φ_x' et φ_y' ne s'annulent pas simultanément. Ceci exclut la possibilité de points doubles; de plus, si les équations $\varphi_x' = \varphi_y' = 0$ sont vérifiées en un point de D, on posera

$$(6_6) \qquad h = \frac{\varphi}{\sqrt{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \nu\varphi}},$$

(¹) Ceci est immédiat pour h_1. Pour voir que, dans $(6_2')$, il faut remplacer H_2 par $H_2 d^{\alpha'-1}$, le lecteur appliquera cette même formule de Taylor, si $r \leqq \frac{d}{2}$, et la formule des accroissements finis, si $r > \frac{d}{2}$ $\left(\text{en utilisant alors la condition de Hölder pour introduire } \frac{\partial h}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial h}{\partial y}\right)$.

(²) *Voir* la note finale du n° **9** A.

ν étant un nombre positif quelconque : l'adjonction du terme $\nu\varphi$ ne modifie pas, en effet, la valeur de $h_x'^2 + h_y'^2$ sur C.

On voit, en particulier, *combien l'expression de la fonction auxiliaire est aisée à écrire dans le cas d'un domaine limité par un arc de courbe algébrique sans point double.*

De même, les coordonnées du point-image pourront s'écrire, d'après (6$_5$),

$$x_1 = x - \frac{2\varphi}{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \nu\varphi}, \qquad y_1 = y - \frac{2\varphi}{\varphi_x'^2 + \varphi_y'^2 + \nu\varphi}.$$

On peut d'ailleurs élargir les hypothèses sur φ et supposer simplement que, sur C, ses dérivées premières et secondes deviennent infinies respectivement comme $d^{\alpha-1}$ et $d^{\alpha-2}$. Le calcul des dérivées de h montre, en effet, que h est alors *quasi régulière* si, de plus, les dérivées premières vérifient la condition de Hölder à partir de tout point de C. De même x_1 et y_1 conduisent à un noyau acceptable.

Si C est donné paramétriquement ou géométriquement, les résultats que nous établirons dans le n° **11** nous permettent de poser

$$(6_7) \qquad h = \pi\left[\int_C |\mathrm{PM}|^{-2}\, ds_{\mathrm{M}}\right]^{-1},$$

car, sur C, $h = 0$ et $\frac{\partial h}{\partial n} = 1$. Pour que h soit quasi régulière, il suffit que l'angle des normales en deux points voisins M et M′ soit moindre que K $|\mathrm{MM}'|^k$ $(0 < k \leq 1)$, *ce qui n'exige pas l'existence de la courbure.*

III. — Les équations à m variables; formation des quasi-solutions.

Ce Chapitre est consacré à l'étude des quasi-solutions permettant d'obtenir la fonction auxiliaire et la fonction de Green pour le problème de Dirichlet, et aussi pour les problèmes plus généraux que nous étudierons dans le Chapitre suivant. Afin d'éviter des redites, établissons d'abord quelques résultats qui nous serviront plusieurs fois dans la suite.

7. Sur les dérivations d'intégrales singulières. — Soient deux points P et Π appartenant à une région $\mathcal{R}$ de l'espace E_m à m dimensions. Envisageons une fonction $\varphi(P, \Pi)$ de ces deux points telle que, x étant une des coordonnées de P, φ et $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ soient deux fonctions continues par rapport à (P, Π), sauf quand P et Π sont confondus, et que les intégrales

$$I = \int_D \varphi(P, \Pi)\, d\omega_\Pi, \qquad J = \int_D \frac{\partial\varphi}{\partial x}(P, \Pi)\, d\omega_\Pi$$

aient un sens, D appartenant à $\mathcal{R}$. Nous supposerons de plus I et J *tendant uniformément vers zéro quel que soit* P, quand D est un cylindre γ de rayon ε infiniment petit et d'axe fixe AA' parallèle à l'axe des x (AA' étant la hauteur du cylindre).

On a alors $J = \frac{\partial I}{\partial x}$. Rappelons le raisonnement classique : P étant sur AA', envisageons les deux suites d'intégrales I_n et J_n obtenues en excluant du domaine d'intégration D des cylindres γ_n d'axe AA' et dont les rayons ε_n tendent vers zéro quand le nombre n croît indéfiniment. Quand P varie sur AA', on obtient ainsi deux suites uniformément convergentes de fonctions de x qui ont pour limites I et J. Or $J_n = \frac{\partial I_n}{\partial x}$, car la dérivation sous le signe $\int$ s'applique, P étant extérieur au domaine $D - \gamma_n$. Le théorème bien connu sur la dérivée d'une suite uniformément convergente donne $J = \frac{\partial I}{\partial x}$.

Nous pouvons même aller plus loin dans le cas où J n'a pas de sens. Supposons que, M étant un point *arbitraire* de D, nous ayons pu mettre φ sous la forme $\psi_M + \psi'_M$, ψ et ψ' étant deux fonctions de P et Π qui dépendent aussi de M et qui, M étant fixe, sont continues ainsi que $\frac{\partial\psi_M}{\partial x}$ et $\frac{\partial\psi'_M}{\partial x}$ en (P, Π), sauf pour $P\Pi = 0$. Supposons aussi qu'on sache calculer par un procédé quelconque la dérivée de $\int_D \psi_M\, d\omega_M$ et que

$$\bar{J} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\int_D \psi_M\, d\omega_\Pi\right]_P, \qquad J' = \int_D \left[\frac{\partial\psi'_M}{\partial x}\right]_P d\omega_\Pi$$

aient un sens et de plus tendent vers zéro *uniformément* quel que soit P, quand D est le cylindre γ. Par la notation $[\ ]_P$ nous entendons que nous avons effectué l'opération entre crochets pour un point fixe M quelconque, puis que nous avons placé M en P. Nous pouvons alors former les suites $\bar{J}_n$ et J'_n, comme plus haut, et puisque la dérivation sous le signe $\int$ est applicable à $\bar{J}_n$, on a

$$J_n + J'_n = \int_{\mathrm{D}-\gamma_n} \left[\frac{\partial \psi_{\mathrm{M}}}{\partial x} + \frac{\partial \psi'_{\mathrm{M}}}{\partial x} \right]_{\mathrm{P}} d\omega_{\Pi} = \int_{\mathrm{D}-\gamma_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\omega_{\Pi} = \frac{\partial \mathrm{I}_n}{\partial x},$$

d'où se déduit encore la formule

$$\bar{J} + J' = \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x}.$$

L'application au *potentiel spatial* $\mathrm{V} = \int_{\mathrm{D}} |\mathrm{P}\Pi|^{-m+2} \rho_{\Pi}\, d\omega_{\Pi}$ est immédiate. Voyons-le rapidement. Remarquons d'abord que, si $|\varphi| < \mathrm{K}\, |\mathrm{P}\Pi|^{-m+\alpha} (0 < \alpha \leqq 1)$, $\int_{\gamma} \varphi\, d\omega$ tend uniformément vers zéro : un calcul simple le montre ([1]).

Il en résulte que les dérivées premières de V se calculent par dérivations sous le signe $\int$, le pôle étant alors d'ordre $m-1$. Pour avoir

---

([1]) En effet, nous majorerons la limitation de $\int_{\gamma}$ en prenant un cylindre γ indéfini. Or

$$d\omega = r^{m-1}\, dr\, d\sigma_m \qquad (r = \mathrm{P}\Pi),$$

$d\sigma_m$ étant l'élément de surface de l'hypersphère unitaire Σ_m de E_m (et σ_m la surface totale). Si $(\mathrm{P}\Pi, \mathrm{O}x) = \theta$, r varie de 0 à $\frac{\varepsilon}{\sin\theta}$. Donc

$$\left| \int_{\gamma} \varphi\, d\omega \right| < \frac{\mathrm{K}\varepsilon^{\alpha}}{\alpha} \int_{\Sigma_m} \frac{d\sigma_m}{|\sin\theta|^{\alpha}} = \mathrm{K}'\varepsilon^{\alpha}.$$

D'ailleurs pour $\theta = \text{const.}$, nous obtenons sur Σ_m la surface de l'hypersphère de l'espace E_{m-1} et de rayon $\sin\theta$. On en déduit que

$$d\sigma_m = \sin^{m-2}\theta\, d\sigma_{m-1}\, d\theta$$

et par suite

$$\mathrm{K}' = \frac{2\mathrm{K}}{\alpha} \sigma_{m-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin\theta|^{m-2-\alpha}\, d\theta.$$

Pour $m = 2$ ou 3, il faut remplacer σ_{m-1} par 1 ou 2π. K' est donc nombre fini fixe.

les dérivées secondes, il faut calculer par exemple la dérivée $\frac{\partial I}{\partial x}$ de $I = \frac{\partial V}{\partial x}$. Or il est classique que, si ρ est constant,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \int_S \frac{\partial}{\partial x} |\mathrm{P\Pi}|^{-m+2} \rho \cos(n, x)\, d\mathrm{S}_\Pi \qquad \text{(S frontière de D).}$$

Lorsque D est γ, l'intégrale n'est étendue qu'aux deux bases de γ et par suite tend vers zéro uniformément avec le rayon ε si P appartient à un segment *strictement intérieur à* AA'. Nous pourrons donc, quand ρ est variable, appliquer à I la seconde méthode donnée plus haut en décomposant ρ en $\rho_M + (\rho_\Pi - \rho_M)$: ρ_M joue le rôle d'une constante et si

$$|\rho_\Pi - \rho_M| < \mathrm{H}\, |\mathrm{M\Pi}|^\alpha \qquad (\textit{condition de Hölder})$$

nous obtenons bien deux intégrales telles que J et J' : d'où $\frac{\partial I}{\partial x}$, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$.

8. Cas où les coefficients a_{ik} sont constants. — Commençons par l'équation

$$F_1(u) \equiv \Delta u + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,$$

dont nous envisageons la solution u dans un domaine D de frontière S, sur laquelle elle est donnée. Désignons toujours d et δ la distance des points $P(x_i)$ et $\Pi(\xi_i)$ à S, avec $r = \mathrm{P\Pi}$ et $r_2^2 = r^2 + 4d\delta$; r^{-m+2} est solution fondamentale de $\Delta u = 0$. Montrons que

$$(8_1) \qquad V_P^\Pi = r^{-m+2} - r_2^{-m+2},$$

qui s'annule quand P ou Π viennent sur S, est quasi-solution de $F_1 = 0$, donc quasi-fonction de Green. Il nous suffira, pour cela, d'établir que $\Delta_P V$ est d'ordre $m - 1$ en $\frac{1}{r}$. Or

$$(8_2) \qquad \Delta_P V = \frac{2(m-2)\delta}{r_2^m} \Delta d + \frac{4m(m-2)\delta}{r_2^{m+2}} \left[d - \sum (x_i - \xi_i) \frac{\partial d}{\partial x_i} - \delta \sum \left(\frac{\partial d}{\partial x_i} \right)^2 \right].$$

Si nous envisageons la surface parallèle à S passant par P, en appliquant la formule (3_3) successivement dans toutes les sections principales, puis faisant la somme, on voit que $\left(\text{puisque } \frac{\partial^2 d}{\partial n^2} = 0\right)$ Δd est égal à $\sum \frac{1}{R_i - d}$, R_i étant un rayon de courbure principal. D'autre part $\frac{\partial d}{\partial x_i}$ est un cosinus directeur de la normale intérieure, de sorte que $\sum \left(\frac{\partial d}{\partial x_i}\right)^2 = 1$. Enfin la formule de Taylor donne

$$\delta - d = \sum (\xi_i - x_i) \frac{\partial d}{\partial x_i} + H_1 r^2,$$

H_1 étant borné. Il résulte de là, d'après un raisonnement analogue à celui du n° **3**, que $r^{m-1} \Delta_P V$ reste borné, quels que soient P et II dans D + S.

Il est entendu, comme dans le cas du plan, que d et δ ne désignent les distances de P et II à S que lorsque ces points appartiennent à une région $\mathcal{R}'$ comprise, par exemple, entre S et une autre surface restant à une distance de S moindre que le minimum de R_i; dans le reste de D on envisage des prolongements des fonctions d et δ.

Enfin nous pouvons remplacer d par une fonction h, deux fois dérivable dans D + S, positive dans D, nulle sur S et telle que, sur S, $\frac{\partial h}{\partial n} = 1$ ou, ce qui revient au même, $\sum \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^2 = 1$: cela se justifie par la même méthode que dans le plan (n° **5**).

Si nous avons à résoudre le problème de Dirichlet, tous les raisonnements du n° **4** peuvent alors être reproduits pour obtenir la fonction de Green G_P^{II}, solution de $F_1 = 0$ en P et nulle quand P vient sur S : toutefois, le coefficient de la formule de Poisson (1_4) est alors $(m-2)\sigma_m$, au lieu de 2π dans le plan. *On aboutit ainsi aux formules* (2_2) *et* (2_3) *du premier Chapitre* [où V est l'expression (8_1)].

Abordons maintenant l'équation générale linéaire

$$(\text{E}) \qquad F_P(u) \equiv \mathcal{D}u + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad \text{avec } \mathcal{D}u \equiv \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k},$$

la forme $\Psi = \Sigma a_{ik} \alpha_i \alpha_k$ étant définie, positive et de discriminant égal à *un*, hypothèses que nous conserverons dans toute la suite. Nous supposerons d'abord les a_{ik} *constants*.

Prenons alors le point H comme origine et envisageons la substitution linéaire de module *un*

$$(8_3)\qquad x_i = \sum_j \beta_{ij} x'_j \qquad \text{ou} \qquad x'_j = \sum_k \beta^{jk} x_k$$

(β^{jk} étant le mineur de β_{jk}), qui transforme $\Sigma a^{ik} x_i x_k$ en $\Sigma x'^2_i = r'^2$; nous indiquerons par les mêmes lettres, accentuées et non accentuées, les éléments correspondants de la transformation (8_3). On sait que $\mathcal{D}u$ se transforme en $\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_i}$, $\sum a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k}$ en $\sum \left(\frac{\partial u}{\partial x'_i}\right)^2$ et $\sum x'_i \frac{\partial u}{\partial x'_i}$ en $\sum x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

La solution fondamentale de $\sum \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2_i} = 0$ étant r'^{-m+2} à l'origine, celle de $\mathcal{D}u = 0$ sera $\left[\Sigma a^{ik} x_i x_k\right]^{-\frac{m}{2}+1}$ et, dans le cas où $H(\xi_i)$ est quelconque, elle sera

$$w(P, H) = \mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}+1}, \qquad \text{avec } \mathfrak{S} = \sum a^{ik}(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k).$$

Quelle sera alors la quasi-fonction de Green de $F = 0$? C'est $r'^{-m+2} - r'^{-m+2}_2$ dans le système (x'_i); donc, avec les variables (x_i), ce sera

$$V_P^H = \mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}+1} - (\mathfrak{S} + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1},$$

s étant le minimum de $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}}$ quand H varie sur S, P étant fixe, et σ le minimum de $\mathfrak{S}^{\frac{1}{2}}$ quand P varie sur S, H étant fixe. D'ailleurs, en posant $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S} + 4s\sigma$, on déduit, d'après ($8_2$) écrite avec les (x'_i), que l'on a en $P(x_i)$

$$(8_4)\qquad \mathcal{D}_P V_P^H = \frac{2(m-2)\sigma}{\mathfrak{S}_2^{\frac{m}{2}}} \mathcal{D}s + \frac{4m(m-2)\sigma}{\mathfrak{S}_2^{\frac{m}{2}+1}} \left[s - \sum (x_i - \xi_i) \frac{\partial s}{\partial x_i} - \sigma \sum a_{ik} \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_k} \right],$$

formule qu'on peut d'ailleurs *vérifier directement* en utilisant les propriétés des formes quadratiques. Notons aussi que la formule des accroissements finis donne

$$(8'_4)\qquad V_P^H < 2(m-2) s\sigma \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}^{1-\frac{m}{2}}.$$

Enfin on peut désigner par s une fonction régulière dans $D+S$, *positive dans* D, *s'annulant sur* S *ainsi que* $\sum a_{ik}\frac{\partial s}{\partial x_i}\frac{\partial s}{\partial x_k}-1$, puisque cette dernière condition devient $\sum\left(\frac{\partial s}{\partial x'_i}\right)^2=1$ dans la transformation (8_3) : *ceci entraîne* $\frac{\partial s}{\partial n}=\Psi^{-\frac{1}{2}}$, Ψ étant toujours la forme quadratique des α_i [1].

Quant à la formule de Poisson, appliquée au domaine D′ correspondant à D, elle nous donne en revenant ensuite à D (les éléments de domaine étant égaux)

$$\omega_P\int_D \Psi^{-\frac{m}{2}+1}\rho_\Pi\, d\omega_\Pi=-(m-2)\sigma_m\rho_P.$$

Il résulte de là que G_P^Π *sera donnée par la formule*

$$G_P^\Pi = V_P^\Pi+\int_D V_P\,\Phi_M^\Pi\, d\omega_M, \tag{8_5}$$

Φ *vérifiant l'équation intégrale* (avec $\lambda=1$)

$$\Phi_P^\Pi=\lambda\int_D\frac{F(V_P^M)}{(m-2)\sigma_m}\Phi_M^\Pi\, d\omega_M+\frac{F(V_P^\Pi)}{(m-2)\sigma_m}, \tag{8_6}$$

qui montre que Φ *est la résolvante du noyau* $\frac{F(V_P^\Pi)}{(m-2)\sigma_m}$ *pour* $\lambda=1$. Celui-ci, d'après ce qui précède, présente un pôle d'ordre $m-1$ quand P et Π sont confondus, ce qui justifie la dérivation sous le signe $\int$ (nº **7**). (Nous le supposerons de plus astreint à la condition de Hölder en P : *voir* le nº **9**). On peut donc opérer comme au nº **4**, soit en exprimant la résolvante au moyen du premier noyau itéré borné (qui sera ici le $m^{\text{ième}}$), soit par la méthode de Poincaré, soit enfin en transformant directement l'équation (8_5) par itération.

---

[1] Remarquons en effet que, pour toute fonction φ constante sur S, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}=\alpha_k\frac{\partial\varphi}{\partial n},\qquad \text{d'où}\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial N}=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\sum\alpha_k\Psi'_{\alpha_k}=\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}(cf.\ I_{10}).$$

Appliquant ceci à s, on a donc, sur S, $\left(\frac{\partial s}{\partial n}\right)^2=\Psi^{-1}$ et aussi $\frac{\partial s}{\partial n}\frac{\partial s}{\partial N}=1$.

Ayant la fonction de Green, la formule fondamentale (1_{12}) nous donne la solution du problème de Dirichlet en tout point P de D.

9. Cas général. — Comment les calculs précédents doivent-ils être modifiés quand les coefficients a_{ik} sont fonctions de (x_i) ? Ainsi que nous l'avons dit dans le n° **1**, *il y a deux façons de procéder* suivant que, dans l'expression $\mathfrak{F}$, *on prend la valeur des a^{ik} en* P *ou en* Π. En d'autres termes, si nous posons, M étant un point de D + S,

$$(9_1)\quad \mathfrak{F}_M(P, \Pi) = \sum a_M^{ik}(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k), \qquad \varpi_M(P, \Pi) = [\mathfrak{F}_M(P, \Pi)]^{-\frac{m}{2}+1},$$

nous pouvons partir de $\varpi_P(P, \Pi)$ ou de $\varpi_\Pi(P, \Pi)$, que nous écrirons simplement ϖ_P et ϖ_Π.

A. Supposons d'abord que nous partions de $\varpi_P = \mathfrak{F}_P^{-\frac{m}{2}+1}$: la fonction auxiliaire sera

$$V_P^\Pi = \mathfrak{F}_P^{-\frac{m}{2}+1} - (\mathfrak{F}_P + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1},$$

s et σ étant définis comme dans le numéro précédent, avec les valeurs des a_{ik} (et a^{ik}) *prises en* P.

Or, si nous formons les dérivées premières et secondes de ϖ_P, chacune d'elles se compose de deux groupes :

1° Celui qu'on obtient en traitant les a^{ik} comme des constantes : nous conviendrons de *surligner* toute expression contenant les a_{ik} et a^{ik} et précédée d'un symbole de dérivation $\left(\text{par exemple } \frac{\partial^2 \overline{\varpi}}{\partial x_i \partial x_k}\right)$ lorsque nous envisagerons dans cette opération les a_{ik} et a^{ik} comme *fixes;*

2° Celui où figurent les dérivées premières (et secondes) des a^{ik} et qui est constitué par les termes restants.

Dans une dérivée seconde de ϖ_P, le premier groupe présente, pour $P\Pi = 0$, un pôle d'ordre m et le second un pôle d'ordre $m - 1$ au plus, car toute dérivation portant sur les binomes $(x_i - \xi_i)$ augmente de *un* l'ordre du pôle : or ces dérivations sont faites deux fois dans le premier groupe et une fois dans le second. Pour les dérivées premières de ϖ_P, le pôle est évidemment d'ordre $m - 1$ au total.

D'autre part, si l'on calcule $\mathcal{D}_P \varpi_P$, l'ensemble des termes du premier groupe s'élimine évidemment $(\overline{\mathcal{D}_P \varpi_P} = 0)$ et il ne reste que les termes du second groupe, dont l'ensemble admet un pôle d'ordre $m-1$ au plus.

Soit maintenant à calculer, en un point P *intérieur* à D, les dérivées premières et secondes de $\int_D V_P^{\Pi} \rho_\Pi \, d\omega_\Pi$: la partie contenant $\vartheta_P + 4s\sigma$ se dérive une ou deux fois sous le signe $\int$, les dérivées restant finies puisque $\vartheta_P + 4s\sigma$ ne s'annule que si P et Π sont confondus sur S. On peut calculer de même les dérivées premières de la partie contenant w_P, le pôle étant d'ordre $m-1$ (n° **7**); voyons les dérivées secondes. Soit

$$I = \int_D \frac{\partial w_P}{\partial x_i} \rho_\Pi \, d\omega_\Pi\,;$$

calculons $\frac{\partial I}{\partial x_k}$. Pour cela posons

$$w_P = w_M + w'_M, \qquad \frac{\partial w_M}{\partial x_i} = \frac{\partial w_M}{\partial x_i} + \frac{\partial w'_M}{\partial x_i}$$

(avec, évidemment, $w'_M = w_P - w_M$). Nous aurons alors, avec la notation du n° **7**,

$$\frac{\partial^2 w_P}{\partial x_i \, \partial x_k} = \left[\frac{\partial^2 w_M}{\partial x_i \, \partial x_k}\right]_P + \left[\frac{\partial^2 w'_M}{\partial x_i \, \partial x_k}\right]_P$$

et le premier terme du second membre sera ce qu'on obtient en supposant les a^{ik} constants dans les dérivations, c'est-à-dire le premier groupe $\left(\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x_i \partial x_k}\right)$ envisagé plus haut; l'autre terme sera donc le second groupe. Dès lors $\frac{\partial w_M}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial w'_M}{\partial x_i}$ jouent le rôle des fonctions ψ_M et ψ'_M du n° **7**; nous savons, en effet, calculer $\frac{\partial I}{\partial x_k}$ en supposant les a^{ik} constants et ρ satisfaisant à la condition de Hölder, ce qui nous donne un terme du type $\overline{J}$ et, d'autre part, l'intégrale J' a ici un sens, puisqu'on a un pôle d'ordre $m-1$: on a ainsi $\frac{\partial I}{\partial x_k} = \overline{J} + J'$.

Dès lors, nous aurons évidemment

$$\varpi_P \int_D w_P \rho_\Pi \, d\omega_\Pi = \varpi_P \int_D \overline{w}_P \, \rho_\Pi \, d\omega_\Pi + \int_D [\varpi_P w'_M]_P \, \rho_\Pi \, d\omega_\Pi.$$

Le premier terme est $-(m-2)\sigma_m \rho_P$, d'après le n° **8**. Le second, où ne subsistent que les termes du second groupe défini plus haut, est, d'après ce que nous avons dit à cet endroit, $\int_{\mathrm{D}} \varpi w_{\mathrm{P}} \rho_{\Pi} d\omega_{\Pi}$. D'où, en réunissant les résultats précédents,

$$(9_2) \qquad \mathrm{F}_{\mathrm{P}}\left[\int_{\mathrm{D}} \mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\Pi} \rho_{\Pi} d\omega_{\Pi}\right] = -(m-2)\sigma_m \rho_{\mathrm{P}} + \int_{\mathrm{D}} \mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\Pi}) \rho_{\Pi} d\omega_{\Pi}.$$

La fonction $\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\Pi}$ *est quasi-solution de* $\mathrm{F}_{\mathrm{P}} = 0$, car $\mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\Pi})$ a un pôle d'ordre $m-1$. Il suffit, pour le voir, de former, suivant notre notation, $\varpi_{\mathrm{P}}(\overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{P}}^{\Pi})$ qui est la partie de l'ordre le plus élevé et qui a bien un pôle d'ordre $m-1$ d'après ce que nous avons dit dans le cas des a_{ik} constants, en nous servant de la transformation (8_3).

Nous pouvons aussi, pour montrer que V est quasi-solution, nous passer de cette transformation grâce au *calcul direct* de $\varpi_{\mathrm{P}}(\overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{P}}^{\Pi})$ qui donne la formule (8_4). Supposons que s soit une fonction de P régulière dans $\mathrm{D}+\mathrm{S}$, *positive dans* D et telle que

$$(9_3) \qquad s(\mathrm{P}) = 0, \qquad \sum a_{ik}(\mathrm{P}) \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_k} = 1 \qquad \text{pour P sur S,}$$

cette dernière condition pouvant s'écrire $\frac{\partial s}{\partial n} = \Psi^{-\frac{1}{2}}$ (n° **8**). Nous poserons alors, dans (8_4), $s = s(\mathrm{P})$ et $\sigma = s(\Pi)$. La fonction s est infiniment petite du premier ordre avec d, distance de P à S (les dérivées premières de s ne pouvant être toutes nulles sur S) et $\Sigma a_{ik} s'_{x_i} s'_{x_k} - 1$ est du premier ordre en d. On peut donc écrire

$$\sum a_{ik} \frac{\partial s}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_k} = 1 + h_1 s.$$

h_1 restant borné. Et, d'autre part, d'après la formule de Taylor,

$$s = \sigma + \sum (\xi_i - x_i) \frac{\partial s}{\partial x_i} + \mathrm{H}_1 r^2,$$

H_1, qui contient les dérivées secondes de s, restant borné. D'ailleurs le rapport β des deux formes quadratiques définies r^2 et ϑ_{M} reste borné et différent de zéro quel que soit M. Ici, il s'agit de ϑ_{P} que nous écrirons simplement ϑ. Tenant compte des deux formules précédentes, avec $r^2 = \beta\mathfrak{S}$ dans (8_4), il vient

$$\mathcal{D}_{\mathrm{P}} \overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{II}} = \frac{2(m-2)\sigma}{(\mathfrak{S}+4s\sigma)^{\frac{m}{2}}} \left[\mathcal{D}s + 2m\,\frac{\mathrm{H}_1\beta\mathfrak{S} - h_1 s\sigma}{\mathfrak{S}+4s\sigma}\right].$$

Le crochet reste manifestement borné et il suffit, pour montrer que $r^{m-1}\,\mathcal{D}_{\mathrm{P}}\overline{\mathrm{V}}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{II}}$ est borné, d'établir que $\frac{\sigma}{\sqrt{\mathfrak{S}+4s\sigma}}$ l'est aussi. Or, $s-\sigma$ étant du premier ordre en r, on peut écrire (d'après $r^2 = \beta\mathfrak{S}$) $|s-\sigma| \leqq k\sqrt{\mathfrak{S}}$ et il est toujours loisible de supposer $k \geqq 1$. On en déduit $\sqrt{\mathfrak{S}} \geqq \frac{|s-\sigma|}{k}$, d'où

$$\frac{\sigma}{\sqrt{\mathfrak{S}+4s\sigma}} \leqq \frac{k\sigma}{\sqrt{(s-\sigma)^2+4k^2s\sigma}} \leqq \frac{k\sigma}{\sqrt{(s-\sigma)^2+4s\sigma}} = \frac{k\sigma}{s+\sigma} \leqq k,$$

et notre objet est établi [1] : nous avons montré que V est quasi-solution sans passer par l'intermédiaire de l'équation $\mathrm{F}_1 = 0$.

Nous avons ainsi tous les éléments qui nous permettent *d'écrire à nouveau les équations* (8_5) *et* (8_6) et de conclure comme à la fin du n° **8**. Il convient toutefois d'ajouter que, pour pouvoir par la formule de Poisson obtenir l'équation (8_6), il suffit de supposer que les dérivées secondes des coefficients de l'équation (E) et la fonction $\mathcal{D}s$ satisfassent à la condition de Hölder en tout point P de D : car alors $\mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V})$ et $\Phi_{\mathrm{P}}^{\mathrm{II}}$ y satisferont également.

D'autre part, il n'est pas nécessaire que les dérivées secondes de s existent sur S : ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans le cas du plan, elles peuvent *devenir infinies comme* $d^{\alpha'-1}$, en supposant de plus *la condition Hölder vérifiée par les dérivées premières dans* D + S avec l'exposant α' ; h_1, H_1 et $\mathcal{D}s$ contiennent alors $d^{\alpha'-1}$, qui sera un facteur dans le noyau, ce qui n'empêche pas le calcul de Φ, car les intégrales utilisées conservent toutes un sens [2]. Nous dirons alors que s est *quasi régulière*.

---

(1) Dans le cas de $\mathrm{F}_1 = 0$, on a $\mathfrak{S} = r^2$, $s = d$, $\sigma = \delta$ et $k = 1$ (*cf.* n° **3**).

(2) La technique de ce genre de noyaux, qui sont de la forme $\mathrm{K}_1 r^{1-m} d^{\alpha'-1}$, n'est pas aussi classique que celle des noyaux de la forme $\mathrm{K}_1 r^{\alpha'-m}$. On les ramène, par des itérations, à la forme $\overline{\mathrm{K}}_1 d^{\alpha'-1}$, $\overline{\mathrm{K}}_1$ étant borné. La résolvante admet $d^{\alpha'-1}$ en facteur ; les traces sont finies à partir d'un certain rang.

Dans le cas du problème de Dirichlet, le fait que V s'annule quand M vient sur S, permet de donner au noyau une forme plus maniable en se servant de $(8'_4)$ [*voir* 97].

B. Partons maintenant de $w_\Pi = \mathfrak{S}_\Pi^{-\frac{m}{2}+1}$. Les quantités s et σ changent alors de signification : M étant un point de $D+S$, si nous désignons par $s_M(P)$ une fonction positive quand P est dans D, s'annulant ainsi que $\sum a_{ik}(M)\frac{\partial s_M}{\partial x_i}\frac{\partial s_M}{\partial x_k} - 1$ quand P est sur S, régulière ou quasi régulière en P, nous aurons ici $s = s_\Pi(P)$, $\sigma = s_\Pi(\Pi)$ [alors que, dans le cas A, nous avions envisagé au début $s = s_P(P)$, $\sigma = s_P(\Pi)$ (1)].

Nous posons alors

$$(9_4) \qquad V_P^\Pi = w_\Pi - (\mathfrak{S}_\Pi + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1} = w_\Pi - \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}+1}.$$

Vérifions d'abord que $F_P(V)$ a un pôle d'ordre $< m$; il suffit d'envisager $\mathcal{D}_P V$:

$$(9_5) \quad \mathcal{D}_P V = \sum a_{ik}(\Pi)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} + \sum \Delta a_{ik}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} \qquad [\Delta a_{ik} = a_{ik}(P) - a_{ik}(\Pi)].$$

Le premier terme a un pôle d'ordre $m-1$, les $a_{ik}(\Pi)$, qui figurent exclusivement dans V, jouant le rôle de constantes (cas du n° **8**). D'autre part $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}$ a un pôle d'ordre m, son produit par r^m restant borné quels que soient P et Π dans $D+S$; mais, si les a_{ik} satisfont à la condition de Hölder $|\Delta a_{ik}| < A r^\alpha$, le pôle du second terme est d'ordre $m-\alpha$. Nous dirons, par une abréviation légèrement en dehors du sens habituel, que les a_{ik} *ont un accroissement d'ordre* α.

Nous voyons donc que V, *ainsi d'ailleurs que* w_Π, *est bien quasi-solution.*

Il convient de noter, d'autre part, qu'on peut aussi prendre pour s,

---

(1) s_M est envisagée ici comme fonction de *deux points*, dont l'un M est fixe. Nous avons également, à l'occasion des conditions (9_3), défini s comme fonction d'un seul point P; en posant $s = s_P(P)$, nous aurons *une façon d'obtenir* cette fonction s. Cela résulte d'ailleurs de ce qui a été dit au début du cas A; car faire $M \equiv P$ dans $s_M(P)$, c'est envisager l'expression de s quand les a_{ik} sont constants et y remplacer les a_{ik} par *leur valeur* en P.

Notons enfin qu'on peut prendre comme fonction $s_M(P)$ le minimum de $\sqrt{\mathfrak{S}_M(P, \Pi)}$ quand M et P sont fixes et que Π varie sur S. En effet s_M devient d dans le changement de variables (8_3), *fait avec la valeur des coefficients en* M, et le changement inverse transforme $\left(\frac{\partial d}{\partial n}\right)^2 = 1$ en $\sum a_{ik}(M)\frac{\partial s_M}{\partial x_i}\frac{\partial s_M}{\partial x_k} = 1$.

dans (9_4), la fonction définie par (9_3) : il suffit alors, dans le terme $\Sigma a_{ik}(\Pi) s'_{x_i} s'_{x_k}$ figurant dans (9_5) explicitée, de remplacer $a_{ik}(\Pi)$ par $a_{ik}(\mathrm{P}) - \Delta a_{ik}$ pour voir qu'on a bien une quasi-solution.

Le calcul donne d'ailleurs le résultat suivant : $\mathcal{D}_{\mathrm{P}} \mathrm{V}$ s'obtient en ajoutant le terme

$$(9'_5) \quad \left(1 - \frac{m}{2}\right) \sum a_{\Pi}^{ik} \Delta a_{ik} \left(\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}} - \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}}\right)$$
$$+ \frac{m(m-2)}{4} \sum \Delta a_{ik} \left[\left(\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}-1} - \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}-1}\right) \mathfrak{S}'_{x_i} \mathfrak{S}'_{x_k} - 8\sigma \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}-1} \mathfrak{S}'_{x_i} s'_{x_k}\right]$$

au second membre de (8_4), dans lequel la valeur de a_{ik} est prise en P. Ici $\mathfrak{S}$ désigne $\mathfrak{S}_{\Pi}$, mais, en fait, dans $\mathfrak{S} + 4s\sigma$, *on peut combiner* $\mathfrak{S}_{\mathrm{P}}$ *ou* $\mathfrak{S}_{\Pi}$ *avec un des choix de* s sans cesser d'avoir une quasi-solution.

En ce qui concerne w_{Π}, il y a une autre façon de calculer $\mathcal{D}_{\mathrm{P}} w_{\Pi}$ qui nous servira dans la suite. Écrivons $w_{\Pi} = w_{\mathrm{M}} + w'_{\mathrm{M}}$ et envisageons les dérivées secondes par rapport à P de la fonction $w'_{\mathrm{M}} = w_{\Pi} - w_{\mathrm{M}}$; celles de w_{M} sont de la forme

$$(9_6) \qquad \frac{\partial^2 w_{\mathrm{M}}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\Sigma c_{ik}(\mathrm{M})(x_i - \xi_i)(x_k - \xi_k)}{\mathfrak{S}_{\mathrm{M}}^{\frac{m}{2}+1}},$$

les c_{ik} dépendant des a_{ik} et ayant aussi des accroissements d'ordre α. Formons $\frac{\partial^2 w'_{\mathrm{M}}}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 w_{\Pi}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 w_{\mathrm{M}}}{\partial x_i \partial x_k}$ en appliquant la formule des accroissements finis à l'expression (9_6) considérée comme fonction des a_{ik} et c_{ik}. Le résultat peut se mettre sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est $\mathfrak{S}_1^{\frac{m}{2}+2}$, $\mathfrak{S}_1$ étant une forme à coefficients intermédiaires entre ceux de $\mathfrak{S}_{\Pi}$ et $\mathfrak{S}_{\mathrm{M}}$ et qui est d'ailleurs définie (sinon on pourrait rendre l'expression infinie pour P distinct de Π sans que les termes dont elle est la différence le soient, ce qui est absurde). Quant au numérateur, c'est un polynome du quatrième degré en $x_i - \xi_i$ dont chaque coefficient contient en facteur un accroissement des a_{ik} ou c_{ik} entre M et Π, de sorte que le numérateur est le produit de $|\Pi\mathrm{M}|^{\alpha} r^4$ par une quantité finie. *Si donc on place* M *en* Π, le numérateur sera de l'ordre de $r^{4+\alpha}$ et nous aurons au total un pôle d'ordre $m + 4 - 4 - \alpha$, c'est-à-dire $m - \alpha$.

Cela étant, on peut écrire $\mathcal{D}_P w_\Pi$ sous la forme

$$\sum a_{ik}(P)\frac{\partial^2 w_\Pi}{\partial x_i \partial x_k} = \left[\sum a_{ik}(M)\frac{\partial^2 w'_M}{\partial x_i \partial x_k}\right]_P + \sum a_{ik}(P)\left[\frac{\partial^2 w''_M}{\partial x_i \partial x_k}\right]_P;$$

le premier terme est nul et le second a un pôle d'ordre $m-\alpha$. Donc, nous vérifions à nouveau que w_Π est quasi-solution.

Ce calcul va nous servir pour obtenir $\mathcal{D}_P \int_D w_\Pi(P,\Pi)\rho_\Pi \, d\omega_\Pi$ en un point P de D. Il suffit d'écrire

$$\left[\sum a_{ik}(M)\frac{\partial}{\partial x_i}\int_D \frac{\partial w'_M}{\partial x_k}\rho_\Pi \, d\omega_\Pi\right]_P + \sum a_{ik}(P)\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\int_D \frac{\partial w''_M}{\partial x_k}\rho_\Pi \, d\omega_\Pi\right]_P$$

et d'opérer comme nous l'avons fait dans le cas A, en nous appuyant sur les résultats du n° **7**. Le premier terme nous donne $-(m-2)\sigma_m \rho_P$; la dérivation sous le signe $\int$ est valable dans le second (intégrale du type J′) et nous donne $\int_D \mathcal{D}_P w_\Pi \rho_\Pi \, d\omega_\Pi$. Nous pouvons alors écrire, pour la fonction V_P^{II} actuellement envisagée (9_4), la même formule (9_2) que dans le cas A et *conclure également de même pour le calcul* de G avec toutefois un nombre d'itérations plus élevé si $\alpha < 1$.

Ici la seule condition imposée aux coefficients de (E) est celle de Hölder; Φ_P^{II}, donnée par (8_6), la vérifiera également comme fonction de P. En effet, le terme connu de (8_6) la vérifie; quant à l'intégrale du second membre, on la décomposera en deux au moyen d'une sphère Σ de centre P et de rayon $2PP' < P\Pi$. Quand on passe de P à P′, les deux parties de l'accroissement de $\int_\Sigma$ sont de l'ordre de $|PP'|^\alpha$; l'accroissement de $\int_{S-\Sigma}$ contient en facteur $|PP'|^\alpha$ et l'élément différentiel est de l'ordre de r^{-m} sur Σ : l'intégration donne donc un terme de l'ordre de $|PP'|^\alpha \mathcal{L}|PP'|$, dont le quotient par $|PP'|^\beta$, avec $\beta < \alpha$, tend vers zéro avec PP′. Donc $|PP'|^{-\beta}(\Phi_{P'}^{II} - \Phi_P^{II})$ tend vers zéro avec PP′, ce qui suffit pour pouvoir passer de (8_5) à (8_6) (¹).

Quand s est *quasi régulière* (*voir* **9**, A, *in fine*), l'usage de (8_4) com-

---

(¹) Toutefois pour aboutir à (J_{12}) et pour prouver l'identité des deux fonctions de Green, nous admettons *provisoirement* l'existence de l'adjointe.

biné avec $(9'_5)$ permet de montrer (en supposant $\alpha = \alpha'$ et $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_{\mathrm{II}}$) que

$$F_P(V_P^{\mathrm{II}}) = \sigma \left[K_1 \mathfrak{I}_2^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{I}^{\frac{\alpha-m}{2}} + K_2 s^{\alpha-1} \mathfrak{I}_2^{-\frac{m}{2}} \right], \tag{9_7}$$

K_1 et K_2 étant des fonctions de P et II continues (sauf peut-être pour $\mathrm{PII} = 0$ et $s = 0$) et *bornées* dans $D + S$. Pour cela on utilisera, outre les conditions vérifiées par s, le fait que $\mathfrak{I}^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{I}'_{x_i}$ est borné et que $\mathfrak{I}^{-p} - \mathfrak{I}_2^{-p}$ est $< 4 p s \sigma \mathfrak{I}_2^{-1} \mathfrak{I}^{-p}$ (formules des accroissements finis). On notera également que, dans les formules de limitation, *s et d peuvent s'échanger*, car sd^{-1} est $\neq 0$ et borné, du fait de la condition $\frac{ds}{dn} = \Psi^{-\frac{1}{2}}$. Le noyau (9_7) se ramène aisément à la forme $s^{\alpha-1} K_P^{\mathrm{II}}$ (K borné) au moyen d'itérations; la méthode de Poincaré peut aussi s'appliquer.

Ici donc, nous *élargissons* le sens du mot *quasi-solution :* il suffit que la forme de $F_P(V_P^{\mathrm{II}})$ permette le calcul d'une résolvante Φ_P^{II} qui soit acceptable. Elle aura d'ailleurs aussi la forme (9_7) et, d'après $(8'_4)$, on en déduit sans peine que l'intégrale de (8_5) se comporte comme $(\mathrm{PII})^{2+\alpha-m}$.

Si s est *régulière*, il n'y a pas de terme en K_2 dans (9_7).

10. Théorie générale du point-image.. — Opérant toujours dans l'espace E_m, nous allons procéder par une voie analytique à la recherche du *point-image* d'un point variable P. La solution fondamentale de $\Delta u = 0$ étant r^{-m+2} ($r = \mathrm{IIP}$), partons du problème de la recherche de la quasi-fonction de Green : la fonction $V = r^{-m+2} - r_1^{-m+2}$, avec $r_1 = \mathrm{IIP}_1$, pourra jouer ce rôle si P_1 est un point correspondant à P, se confondant avec lui quand il vient sur S et tel que $\Delta_P r_1^{-m+2}$ *ait un pôle d'ordre* $< m$ pour $r = 0$. Si P_1 est *extérieur à* D quand P est intérieur, cette dernière condition est évidemment remplie tant que P ne vient pas sur S : il faut donc déterminer P_1 de telle sorte que $r^m \Delta_P r_1^{-m+2}$ tende vers zéro avec r, même quand P et II tendent vers un même point de S, c'est-à-dire quand r et d tendent *simultanément* vers zéro.

Or, si l'on calcule le symbole Δ *par rapport à* P_1, $\Delta_{P_1} r_1^{-m+2}$ est nul. Envisageons alors les formules définissant la correspondance entre les coordonnées (x_i^1) de P_1 et (x_i) de P :

$$x_i^1 = x_i^1\,(x_1, x_2, \ldots, x_m), \tag{10_1}$$

et, u étant une fonction des x_i^1 calculons ses dérivées secondes par rapport à x_i pour former $\Delta_{P}u$. Si l'on peut choisir les fonctions x_i^1 des x_i *de telle sorte que, quand* P *est sur* S, *on ait* $\Delta_{P}u = \Delta_{P_1}u + R$, R ne contenant que les dérivées premières de u, $\Delta_{P_1}u$ est nul pour $u = r_1^{-m+2}$ et l'on conçoit alors que, si d et r tendent vers zéro, $r^m \Delta_{P}u$ sera infiniment petit. Bien entendu, il faudra vérifier ceci, une fois trouvées les conditions du choix des x_i^1.

Précisons ce calcul : on a

$$(10_2) \qquad \Delta_{P}u(x_i^1) = \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^{1\,2}} \sum_l \left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_l}\right)^2 + 2\sum_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^1\, \partial x_k^1} \sum_l \frac{\partial x_i^1}{\partial x_l}\, \frac{\partial x_k^1}{\partial x_l} + R.$$

Si nous indiquons par l'indice S la valeur d'une fonction quand le point P dont elle dépend est sur S, nous aurons donc les conditions

$$(10_3) \qquad (x_i^1)_S = (x_i)_S, \qquad \sum_l \left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_l}\right)_S^2 = 1, \qquad \sum_l \left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_l}\, \frac{\partial x_k^1}{\partial x_l}\right)_S = 0,$$

quels que soient i et k (avec $i \neq k$). Or les deux dernières expressions sont invariantes pour tout système d'axes rectangulaires. Prenons alors comme axe des x_1 la normale intérieure n à S en un point p et les autres axes dans l'hyperplan tangent, puis différentions (10_1) :

$$dx_i^1 = \frac{\partial x_i^1}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial x_i^1}{\partial x_1}\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial x_i^1}{\partial x_m}\, dx_m.$$

Si P est en p, P_1 y est aussi et $x_i^1 = x_i$: si donc nous nous déplaçons sur S à partir de p, ce qui se traduit par $dx_1 = 0$, la formule ainsi obtenue

$$(dx_i^1)_S = \left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_2}\right)_S dx_2 + \ldots + \left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_m}\right)_S dx_m$$

doit se réduire à $(dx_i^1)_S = (dx_i)_S$, d'où

$$\left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_i}\right)_S = 1 \qquad (i = 2, \ldots, m),$$
$$\left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_l}\right)_S = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\quad l = 2, \ldots, m;\quad i \neq l),$$

relations qui doivent être vérifiées par les dérivées par rapport à $x_2, \ldots, x_m$. Tenant compte de celles-ci, la seconde formule (10_3)

donne alors

$$(10_4)\qquad \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_l}\right)_S^2 = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq 1, \qquad \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_l}\right)_S^2 = 1 \quad \text{pour} \quad i = 1,$$

et la troisième formule (10_3) est alors vérifiée d'elle-même. D'ailleurs, P et P_1 étant de part et d'autre de S, leurs déplacements à partir de p sont de sens contraire et $\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}$ est négatif : les conditions (10_4) sont donc

$$\left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_1}\right)_S = -1, \qquad \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_2}\right)_S = 0 \qquad (i \neq 1),$$

ce qui montre que, si P se déplace *normalement* à partir d'un point p de S, P_1 *subit un déplacement infinitésimal équiopposé*, c'est-à-dire que (Pp, pP_1) est infiniment petit et pP_1 est équivalent à Pp. Comme les déplacements de P et P_1 sont confondus sur S, il en résulte que, si le déplacement de P a lieu dans une direction quelconque à partir d'un point de S, celui de P_1 est symétrique (au point de vue infinitésimal) par rapport au plan tangent en ce point. La condition géométrique ainsi trouvée est équivalente aux conditions (10_3) et, dans le cas où les axes rectangulaires sont quelconques, elle se traduit par les relations

$$(x_i')_S = (x_i)_S, \qquad \left(\frac{\partial x_i'}{\partial n}\right)_S = -\left(\frac{\partial x_i}{\partial n}\right)_S = \alpha_i,$$

avec $\alpha_i = (n, x_i)$. Ces conditions sont vérifiées par le *symétrique* P′ de P par rapport au pied p de la plus courte distance de P à S [1] : P′ peut

---

[1] Il est facile de voir directement que les conditions (10_3) sont réalisées quand on remplace les x_i' par les coordonnées de P′.

$$x_i' = x_i - 2d\alpha_i = x_i - 2d\frac{\partial d}{\partial x_i}.$$

En effet,

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_i} = 1 - 2\left(\frac{\partial d}{\partial x_i}\right)^2 + \ldots = 1 - 2\alpha_i^2 + \ldots, \qquad \frac{\partial x_i'}{\partial x_l} = -2\frac{\partial d}{\partial x_i}\frac{\partial d}{\partial x_l} + \ldots = -2\alpha_i\alpha_l + \ldots,$$

les termes non écrits contenant d en facteur. Vérifions par exemple (10_3) pour $i = 1$, $k = 2$. En utilisant $\Sigma\alpha_l^2 = 1$, on trouve

$$\sum_l \left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_l}\right)_S^2 = (1 - 2\alpha_1^2)^2 + 4\alpha_1^2(\alpha_2^2 + \ldots + \alpha_m^2) = 1,$$

$$\sum_l \left(\frac{\partial x_1'}{\partial x_l}\frac{\partial x_2'}{\partial x_l}\right)_S = -2\alpha_1\alpha_2(1 - 2\alpha_1^2) + 2\alpha_1\alpha_2(1 - 2\alpha_2^2) + 4\alpha_1\alpha_2(\alpha_3^2 + \ldots + \alpha_m^2) = 0.$$

donc jouer le rôle de point-image, au moins tant que P reste dans le voisinage de S (il est clair d'ailleurs qu'il nous suffit de définir P_1 pour P compris entre S et une surface voisine intérieure à D). Tout point-image P_1 est tel que l'angle P_1pP' soit infiniment petit avec $d = P'p$ et que pP_1 soit équivalent à d : cela équivaut à la condition que $P'P_1$ *soit infiniment petit par rapport à d.*

Il nous reste à vérifier que r_1^{-m+2} *est effectivement quasi-solution.* Or, quand P est intérieur à D, la formule des accroissements finis, appliquée entre p et P, donne

$$(10_5) \qquad \sum_l \left(\frac{\partial x_i^1}{\partial x_l}\right)^2 = 1 + d^{\alpha'} A, \qquad \sum_l \frac{\partial x_i^1}{\partial x_l}\frac{\partial x_k^1}{\partial x_l} = d^{\alpha'} B,$$

A et B étant bornés; α' est égal à 1 si les fonctions x_i^1 des x_i sont régulières dans D + S, et inférieur à 1 si elles sont quasi régulières, c'est-à-dire si leurs dérivées secondes deviennent infinies sur S comme $d^{\alpha'-1}$ $(0 < \alpha' < 1)$ et que l'accroissement des dérivées premières à partir de S soit d'ordre α'. Dès lors, si l'on remplace u par r_1^{-m+2} dans (10_2), $\Delta_{P_1} u$ est nul et les termes restants qui contiennent les dérivées premières et secondes de u sont respectivement de l'ordre de r_1^{-m+1} et r_1^{-m}; tenant compte de (10_4) et introduisant deux nouvelles expressions bornées C et D, on peut alors écrire

$$(10_6) \qquad \Delta_P r_1^{-m+2} = \left(\frac{d}{r_1}\right)^{\alpha'} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{m-\alpha'} \frac{C}{r^{m-\alpha'}} + \left(\frac{r}{r_1}\right)^{m-1} \frac{D}{r^{m-1}}.$$

Si donc nous montrons que, quand r et d tendent vers zéro, $\frac{d}{r_1}$ et $\frac{r}{r_1}$ restent finis, $\Delta_P r_1^{-m+2}$ admettra pour $r = 0$ un pôle d'ordre $m - \alpha'$ au plus et notre but sera atteint. Pour cela il suffit, en posant $HP' = r'$, d'établir que $\frac{d}{r'}$ et $\frac{r}{r'}$ sont bornés, car r_1 et r ne diffèrent entre eux au plus que de $P'P_1$, quantité infiniment petite par rapport à d.

Nous n'avons alors qu'à reproduire dans l'espace E_m le raisonnement que nous avons fait dans le plan [formule (5_3) sqq.] avec cette différence que r' désigne actuellement ce que nous avons appelé r_1 au n° 5. On trouve alors comme condition que, pour les points H de D voisins de p qui peuvent être situés entre S et le plan tangent en p et qui se projettent en Π' sur celui-ci, il suffit que $\frac{\Pi\Pi'}{p\Pi'}$ reste borné, ce qui a sûrement lieu puisque ce rapport tend vers zéro quand Π tend vers p. Donc $\frac{d}{r'}$ et $\frac{r}{r'}$ sont bien bornées et r_1^{-m+2} *est quasi-solution de* $\Delta u = 0$, *donc de* $F_1 = 0$.

Il en sera de même d'ailleurs de $r_1'^{-m+2} = (r_1^2 + v)^{\frac{-m+2}{2}}$ si v est régulière et s'annule sur S ainsi que ses dérivées premières et secondes, respectivement comme $d^{2+\alpha''}$, $d^{1+\alpha''}$ et $d^{\alpha''}$. En effet, en supposant naturellement $r_1' \neq 0$ pour tout point P intérieur à D, $\frac{r_1}{r_1'}$ reste fini; donc $\frac{d}{r_1'}$ et $\frac{r}{r_1'}$ sont bornés et $\Delta r_1'^{-m+2}$ a la forme d'un quotient de dénominateur $r_1'^m$, le numérateur se composant : 1° des termes ne contenant pas v et qui sont de la forme (10_6) (avec r_1' au lieu de r_1); 2° des termes contenant v et ses dérivées et qui admettent $d^{\alpha''}$ en facteur, d'où un pôle d'ordre $m - \alpha''$. Le raisonnement montre qu'on aura une conclusion analogue si v et ses dérivées premières et secondes sont d'ordres respectifs $2 + \alpha''$, $1 + \alpha''$ et α'' par rapport à l'ensemble (r, d).

Lorsqu'on prend pour point-image le point P', de coordonnées $x_i' = x_i - 2d\frac{\partial d}{\partial x_i}$, on a

$$r_1^2 = \sum\left(x_i' - \xi_i\right)^2 = \sum\left(x_i - \xi_i - 2d\frac{\partial d}{\partial x_i}\right)^2 = r^2 + 4d\delta_1,$$

avec

$$\delta_1 = d + \sum(\xi_i - x_i)\frac{\partial d}{\partial x_i},$$

et nous retrouvons ainsi, par une autre voie, le résultat établi dans le cas du plan ; δ_1 est d'ailleurs le commencement du développement de δ par la formule de Taylor quand on passe de Π à P, ce qui permet, par une voie inverse de celle du n° 5, de retrouver la quasi-solution $r^2 + 4d\delta$.

Soit s une fonction positive dans D, telle que $s = 0$ et $\frac{\partial s}{\partial n} = 1$ sur S, et admettant dans D des dérivées secondes et troisièmes se comportant comme $d^{\alpha'-1}$ et $d^{\alpha'-2}$ respectivement (les accroissements des dérivées premières étant d'ordre α' dans D + S). Nous dirons encore ici que s est *quasi régulière* et nous pourrons prendre comme coordonnées de P_1

$$(10_7) \qquad x_i^1 = x_i - 2s\frac{\partial s}{\partial x_i},$$

car P_1P' sera d'ordre > 1 par rapport à d et, d'autre part, le noyau de (2_3) sera acceptable. Il vient alors

$$(10_8) \qquad r_1^2 = r^2 + 4s^2\sum\left(\frac{\partial s}{\partial x_i}\right)^2 + 4s\sum(\xi_i - x_i)\frac{\partial s}{\partial x_i} \qquad \text{ou} \qquad r_1^2 = r^2 + 4s\sigma_1,$$

avec

$$\sigma_1 = s + \sum(\xi_i - x_i)\frac{\partial s}{\partial x_i},$$

car, en remplaçant $\sum\left(\frac{\partial s}{\partial x_i}\right)^2$ par 1 qui est sa valeur sur S, on ne modifie r_1^2 que d'une quantité d'ordre > 2 par rapport à d.

La *propriété fondamentale de la fonction* r_1 se traduit par les relations

$$(r_1)_S = (r)_S, \qquad \left(\frac{\partial r_1}{\partial n}\right)_S = -\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)_S,$$

qui résultent immédiatement des propriétés de P *et qui sont vraies aussi pour* r_1' envisagée plus haut.

Par le changement de variables (8_3) tant de fois invoqué, nous passons immédiatement au cas de l'équation (E) avec *les coefficients* a_{ik} *constants*. Le point-image P_1 se définit alors comme plus haut, sauf que la normale doit être remplacée par la *conormale* : P et P_1, *confondus en chaque point p de* S, *subissent à partir de p des déplacements infinitésimaux équiopposés sur la conormale à* S. La fonction $\mathfrak{S}_1^{-\frac{m}{2}+1}$ est quasi-solution, avec

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}(P_1, \mathrm{H}) = \sum a^{ik}(x_i^1 - \xi_i)(x_k^1 - \xi_k),$$

et $\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}+1} - \mathfrak{S}_1^{-\frac{m}{2}+1}$ est quasi-fonction de Green. Lorsque P est sur S, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_1$ *coïncident* et leurs dérivées conormales sont *opposées*.

Pour calculer les coordonnées de P_1, il suffit d'appliquer la formule (8_3), $x_i = \sum_j \beta_{ij}x_j'$, aux coordonnées (10_7) du point-image, écrites dans le système (x'), soit $(x'_j)^1 = x'_j - 2s\dfrac{\partial s}{\partial x'_j}$, d'où

$$x_i^1 = \sum_j \beta_{ij} x'_j - 2s \sum \beta_{ij} \frac{\partial s}{\partial x'_j} = x_i - 2s \sum_j \beta_{ij} \sum_k \frac{\partial s}{\partial x_k} \beta_{kj}.$$

Or le fait que $\sum \left(\dfrac{\partial s}{\partial x'_j}\right)^2$ se transforme en $\sum a_{ik} \dfrac{\partial s}{\partial x_i}\dfrac{\partial s}{\partial x_k}$ se traduit par la condition $\sum_j \beta_{ij}\beta_{kj} = a_{ik}$. Les coordonnées de P_1 s'écrivent donc

$$(10_9) \qquad x_i^1 = x_i - 2s \sum_k a_{ik} \frac{\partial s}{\partial x_k}.$$

D'autre part, nous pourrons prendre comme valeurs de $\mathfrak{S}_1$ les transformées avec les variables x_i des expressions (10_8) écrites avec les variables x'_j, c'est-à-dire l'une ou l'autre des fonctions

$$(10'_9) \qquad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} + 4s^2 \sum a_{ik} \frac{\partial s}{\partial x_i}\frac{\partial s}{\partial x_k} + 4s \sum (\xi_i - x_i)\frac{\partial s}{\partial x_i},$$

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S} + 4s\sigma_1 \qquad \text{avec} \qquad \sigma_1 = s + \sum (\xi_i - x_i)\frac{\partial s}{\partial x_i}.$$

Dans toutes ces formules, s est une fonction *quasi régulière* (au sens ci-dessus) satisfaisant aux conditions (9_3) (les a_{ik} étant ici constants), car celles-ci sont les transformées, dans le système (x_i), de celles imposées dans le système (x'_j). Notons que, tout comme $r_1^{-1} d$, $\mathfrak{S}_1^{-\frac{1}{2}} s$ reste borné.

Supposons maintenant les a_{ik} *fonctions de* P et conservons la définition précédente du point-image P_1. Nous prendrons à nouveau comme coordonnées de P_1

$$(10_{10}) \qquad x_i^1 = x_i - 2s \sum a_{ik}(P) \frac{\partial s}{\partial x_k},$$

dont les formules (10_9) sont un cas particulier. En effet le déplacement conormal de P (et de P_1) à partir d'un point p de S se calcule en donnant aux a_{ik} la valeur *fixe* $a_{ik}(p)$. La propriété que vérifie le point (10_9) sera donc vérifiée aussi par (10_{10}).

Posons alors $w_M^1 = [\mathfrak{S}_M(P_1, \Pi)]^{-\frac{m}{2}+1}$: pour établir que w_P^1 est quasi-solution il suffit, d'après les mêmes raisonnements qu'au n° **9**, de le prouver en traitant les a_{ik} comme des constantes : c'est précisément ce que nous venons de faire. En d'autres termes, si nous envisageons $\mathcal{D}_P \overline{w}_P^1$, défini au n° **9**, ceci devient $\Delta_P r_1^{-m+2}$ par la transformation (8_3) : d'où un pôle d'ordre $< m$.

Donc w_P^1 *est bien quasi-solution, ainsi d'ailleurs que* w_{II}^1 : on obtient, en effet, $\mathcal{D}_P \overline{w}_{II}^1$ en ajoutant à $\mathcal{D}_P \overline{w}_P^1$ la différence $\mathcal{D}_P(\overline{w}_{II}^1 - \overline{w}_P^1)$ qui est de l'ordre de $r^{-m+\alpha}$ si $\Delta a_{ik} < A r^\alpha$ (n° **9**).

On aura donc une quasi-solution $\mathfrak{S}_1^{-\frac{m}{2}+1}$ (avec des a_{ik} *deux fois dérivables*) en posant soit

$$(10_{11}) \qquad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_1(P_1, \Pi), \qquad P_1 \text{ donné par } (10_{10})$$

[l'expression de $\mathfrak{S}_1$ étant d'ailleurs la même que ($10'_9$)], soit

$$(10_{12}) \qquad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_P(P, \Pi) + 4 s \sigma_1, \qquad \text{avec} \qquad \sigma_1 = s + \sum (\xi_i - x_i) \frac{\partial s}{\partial x_i},$$

en supposant s choisie de façon que $\mathfrak{S}_1$ soit > 0 pour P dans D.

Avec les a_{ik} *continus à la Hölder* (cas **9**, B) on définira P_1 [et par suite $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{II}(P_1, \Pi)$, différant de ($10_{11}$) par des termes d'ordre > 2] en remplaçant, dans (10_{10}), a_{ik} par une fonction égale à a_{ik} sur S, continue à la Hölder à partir d'un point de S et ayant dans D des dérivées premières et secondes se comportant comme $d^{\alpha'-1}$ et $d^{\alpha'-2}$ [*cf.* (11_6)]. Dans $\mathcal{D}\left[\mathfrak{S}_1^{-\frac{m}{2}+1}\right]$, les termes contenant les dérivées des nouveaux a_{ik} donnent un pôle d'ordre $< m$ et les autres, par (8_3), deviennent $\Delta_P r_1'^{-m+2}$ envisagé plus haut. On a donc bien une quasi-solution.

De $\mathfrak{S}_P$ nous déduisons donc $\mathfrak{S}_1$ par (10_{11}) ou (10_{12}); de même de $\mathfrak{S}_{II}(P, \Pi)$ nous déduisons $\mathfrak{S}_{II}(P_1, \Pi)$ que nous appellerons aussi *fonction* $\mathfrak{S}_1$. Étant donnée une fonction $\mathfrak{S}_1$, nous pouvons en obtenir une autre en lui ajoutant un terme d'ordre > 2 en d, admettant des dérivées premières et secondes d'ordres respectifs > 1 et > 0; il suffit même d'envisager l'ordre en (d, r), à la condition que les dérivées premières s'annulent avec d : le raisonnement est le même que plus haut. On peut donc remplacer le point (10_{10}) par un autre situé à une distance d'ordre > 1 en d.

A chaque fonction $\mathfrak{S}$ la méthode point-image permet ainsi d'associer une fonction positive $\mathfrak{S}_1$ ne s'annulant que quand P et Π coïncident sur S : $\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}+1}$ et $\mathfrak{S}_1^{-\frac{m}{2}+1}$ *sont quasi-solutions relativement à* P *et chaque couple* ($\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_1$) *vérifie sur* S *les relations essentielles*

$$(\mathfrak{S}_1)_S = (\mathfrak{S})_S, \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{S}_1}{\partial N}\right)_S = -\left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial N}\right)_S. \tag{10_{13}}$$

Nous obtenons ainsi *des couples de quasi-solutions coïncidant sur* S *et admettant des dérivées conormales équiopposées* (1).

11. Nature de la frontière et choix de la fonction s. — Supposons, comme au n° **6**, D défini par $\varphi(x_i) > 0$ et S par $\varphi = 0$. Nous écrirons alors, ν étant un nombre positif,

$$s_M(P) = \varphi\left[\Sigma a_{ik}(M)\varphi'_{x_i}\varphi'_{x_k} + \nu\varphi\right]^{-\frac{1}{2}}; \tag{11_1}$$

le crochet reste positif dans D et l'on voit immédiatement que, pour $\varphi = 0$, on a $\Sigma a_{ik}(M)\frac{\partial s_M}{\partial x_i}\frac{\partial s_M}{\partial x_k} = 1$. Nous pourrons donc prendre $s = s_P(P)$ ou $s = s_\Pi(P)$, comme on l'a vu au n° **9**.

Que doit-on supposer sur φ pour que la fonction auxiliaire formée avec cette expression de s donne un noyau acceptable? φ doit être continue et dérivable dans D + S; si, de plus, ses dérivées secondes et troisièmes sont continues dans D et deviennent infinies sur S respectivement comme $d^{\alpha'-1}$ et $d^{\alpha'-2}$ (et les dérivées troisièmes comme $d^{\alpha'-3}$, si besoin en est), on constatera bien aisément que s est *quasi régulière*. Quant aux coefficients a_{ik}, l'emploi de l'expression (11_1) suppose l'existence de leurs dérivées premières et deuxièmes si l'on prend $s = s_P(P)$, mais non si l'on prend $s = s_\Pi(P)$, la condition de Hölder suffisant alors.

S'il s'agit du problème de Dirichlet, on utilisera comme quasi-

(1) Nous pourrions aussi, dans l'expression de x_i^1 ou de σ_1, nous servir de $s_\Pi(P)$, en partant alors de $\mathfrak{S}_\Pi(P, \Pi)$, c'est-à-dire en prenant la valeur des a_{ik} en Π. Nous obtenons ainsi un *pseudo-point image* $\overline{P}_1$ défini avec une *pseudo-conormale* $\overline{N}$, qui est alors la direction conjuguée du plan tangent en S par rapport au cône des *directions caractéristiques en* Π. Il est facile de vérifier que la fonction $\mathfrak{S}_\Pi[(\overline{P}_1, \Pi)]^{-\frac{m}{2}+1}$ est quasi-solution, en employant une décomposition analogue à (9_5). Mais ici, dans les relations (10_{13}), N doit être remplacé par $\overline{N}$.

solutions $(\vartheta + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1}$, ϑ étant ϑ_{I} ou ϑ_{II}. Si l'on veut utiliser le point-image, on pourra partir de ses coordonnées x_i^1 formées avec s suivant la formule (10_{10}) ou de la fonction ϑ_1 donnée par (10_{12}).

Mais on peut aussi *former directement* x_i^1 à partir de φ. Si l'on écrit en effet, a_{ik} désignant ici $a_{ik}(\mathrm{P})$,

$$(11_2) \qquad x_i^1 = x_i - 2\varphi\bar{\varphi}^{-1}\Sigma a_{ik}\varphi'_{x_k} \quad \text{avec} \quad \bar{\varphi} = \Sigma a_{ik}\varphi'_{x_i}\varphi'_{x_k} + \nu\varphi,$$

on constate que x_i^1 diffère de $x_i - 2s\Sigma_k a_{ik}s'_{x_k}$ $\left(\text{avec } s = \varphi\bar{\varphi}^{-\frac{1}{2}}\right)$ par des termes de l'ordre de $d^{1+\alpha'}$. Donc le point défini par (11_2) pourra être pris comme point-image.

De même on pourra prendre comme fonction σ_1

$$\sigma_1 = \bar{\varphi}^{-\frac{1}{2}}[\varphi + \Sigma(\xi_i - x_i)\varphi'_{x_i}]$$

qui diffère de σ_1 définie au numéro précédent par des termes de l'ordre de $rd^{1+\alpha'}$.

Si φ n'est pas donnée, il convient donc de chercher *quelles conditions doit vérifier* S *pour qu'on puisse former directement la fonction quasi régulière s.*

Pour cela reportons-nous à la solution du problème de Dirichlet exprimant une fonction harmonique W à m variables par un potentiel de double couche

$$\mathrm{W_P} = \frac{1}{m-2}\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial |\mathrm{PM}|^{-m+2}}{\partial n_{\mathrm{M}}}\rho_{\mathrm{M}}\, d\mathrm{S_M} = \int_{\mathrm{S}} \frac{\cos(n_{\mathrm{M}}, \mathrm{MP})}{|\mathrm{PM}|^{m-1}}\rho_{\mathrm{M}}\, d\mathrm{S_M}.$$

La densité ρ doit vérifier l'équation de Fredholm (avec $\lambda = 1$)

$$\frac{\sigma_m}{2}\rho_{\mathrm{Q}} + \lambda\int_{\mathrm{S}} \frac{\cos(n_{\mathrm{M}}, \mathrm{MQ})}{|\mathrm{QM}|^{m-1}}\rho_{\mathrm{M}}\, d\mathrm{S_M} = \mathrm{W_Q},$$

M et Q étant sur S. Or, pour que le noyau de cette équation permette la résolution classique, il suffit que le plan tangent T en M varie continûment et fasse avec MQ un angle $< \mathrm{K}|\mathrm{MQ}|^h$ $(0 < h \leq 1)$, ou, ce qui revient au même, que la distance z de Q à T soit $< \mathrm{K}|\mathrm{MQ}|^{1+h}$. Ceci aura lieu si l'angle ψ des normales en M et Q est $< \mathrm{K}|\mathrm{MQ}|^h$ et nous dirons alors que n ou T sont *continus à la Hölder* [1]. Dans cette hypothèse le noyau se comporte comme $|QM|^{-m+1+h}$, cas classique. Pourrons-nous former s et résoudre le problème de Dirichlet pour (E) avec cette hypothèse sur S, qui peut ainsi *être dépourvue de courbure ?*

L'expression du potentiel d'une double couche étalée sur un plan conduit à envisager les intégrales de la forme (avec $\mu > 0$)

$$I_\mu(P) = \int_S \frac{d^\mu}{|PM|^{m-1+\mu}} u_M \, dS_M, \tag{11$_3$}$$

qui, pour $\mu = 1$ et quand S se réduit à un plan, donnent avec $u_M = \dfrac{2W_M}{\sigma_m}$, la solution du problème de Dirichlet pour une fonction harmonique W.

Cherchons la limite de I_μ quand, S étant quelconque (avec T continu), P tend vers un point P_0 de S. La partie de l'intégrale étendue à toute région de S ne contenant pas P_0 tend évidemment vers zéro. Envisageons alors une région S_0 de S entourant P_0 et suffisamment petite pour qu'elle corresponde point par point à sa projection S'_0 sur le plan tangent T_0 en P_0 : S'_0 sera défini, par exemple, par $P_0M' \leq \rho$, M' étant la projection de M sur T_0. Posons $PM' = r'$, $PM = r$. On a

$$\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon'}{r'} \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon' = \frac{r'-r}{r}.$$

Supposons d'abord P sur la normale en P_0 : on a alors

$$|\varepsilon'| = \frac{|r'-r|}{r} < \frac{MM'}{P_0M'} = \operatorname{tang} M'P_0M; \tag{11$'_3$}$$

ceci, et par suite ε', tend vers zéro quand M' tend vers P_0. Si donc on écrit $(1+\varepsilon')^m = 1 + \eta'$, on peut choisir ρ tel que l'on ait $|\eta'| < \eta$, quel que soit P sur la normale.

---

[1] Soit un système de coordonnées choisi dans T : z sera, au voisinage de M, une fonction de celles-ci admettant des dérivées premières p_i d'ordre h en MQ, car $\sin\psi = [1 + \Sigma p_i^2]^{-\frac{1}{2}} [\Sigma p_i^2]^{\frac{1}{2}}$, d'où $|p_i| < \sin\psi\,(1+\varepsilon)$, ε tendant vers zéro avec MQ. Il en résulte que z est bien d'ordre $1+h$ si ψ est d'ordre h.

Remarquons qu'on peut écrire les inégalités caractéristiques de la continuité à la Hölder en remplaçant MQ *par sa projection sur le plan tangent en* M *ou en* Q.

Remplaçons $\frac{1}{r^{m-1+\mu}}$ par $\frac{1+\eta'}{r'^{m-1+\mu}}$ et posons

$$u_M = u, \qquad u_{P_0} = u_0, \qquad \psi = (\widehat{n_M, n_{P_0}}).$$

En remarquant que $dS_{M'} = dS_M \cos\psi$, on peut écrire

$$(11_3) \qquad \int_{S_0} \frac{d^\mu u \, dS_M}{r^{m-1+\mu}} = \int_{S_0'} \left[u_0 + (u - u_0) + \frac{1-\cos\psi}{\cos\psi} u \right] \frac{(1+\eta')\, dS_{M'}}{r'^{m-1+\mu}}.$$

Le crochet du second membre contient trois parties donnant trois intégrales. La première intégrale, par une homothétie de centre P_0 et de rapport d^{-1}, en négligeant η', devient

$$u_0 \int_{S_0''} |AM''|^{-m+1+\mu}\, dS_{M''},$$

M'' étant un point de l'aire S_0'' homothétique de S_0' et A le point situé sur la normale intérieure en P_0 à la distance un. Quand d tend vers zéro, cette intégrale tend vers $k_\mu u_0$, avec

$$k_\mu = \int_{T_0} |AM''|^{-m+1+\mu}\, dS_{M''} \qquad \left(\text{pour } \mu = 1,\ k_\mu = \frac{\sigma_m}{2}\right).$$

Montrons que $k_\mu u_0$ est la limite de I_μ.

En effet, le terme négligé contenant η' dans la première intégrale est limité par $k_\mu \eta$; d'autre part on a, dans S_0,

$$(11_4') \qquad \left\{ \begin{array}{l} |(u-u_0)(1+\eta')| < \varepsilon_0 \\ \left| \dfrac{1-\cos\psi}{\cos\psi} u \right| < \varepsilon_1 \left(\text{de l'ordre de } \sin^2\dfrac{\psi}{2}\right), \end{array} \right.$$

de sorte que les deux dernières intégrales sont limitées respectivement par $k_\mu \varepsilon_0$ et $k_\mu \varepsilon_1$. On peut donc choisir S_0, puis d assez petits pour que l'intégrale donnée diffère aussi peu qu'on le veut de $k_\mu u_0$, ce qui démontre notre assertion.

Si maintenant P_0 ne coïncide pas avec le pied p de la distance d, on arrive au même résultat, car l'intégrale I_μ diffère aussi peu qu'on le veut de $k_\mu u_p$, qui tend vers $k_\mu u_0$ quand d tend vers zéro.

Cette méthode donne l'ordre de l'accroissement de $I_P - I_p$ quand T est continu à la Hölder ($MM' < K|P_0M'|^{1+h}$) et que l'accroissement de u_M sur S est d'ordre α. En effet, I_P diffère de sa limite I_p d'abord par l'intégrale étendue à $S - S_0$ et par

$$u_0 \int_{T_0 - S''_0} |AM''|^{-m+1+\mu} dS_{M''},$$

qui sont toutes deux d'ordre μ par rapport à d (en utilisant $P_0 M'' \geqq \rho d^{-1}$ dans $T_0 - S''_0$), puis par les intégrales que nous avons examinées précédemment et où η' (de l'ordre de ε'), ε_0 et ε_1 doivent être remplacées, d'après $(11'_4)$ et $(11'_5)$, par des termes de l'ordre de r_0^h, r_0^α et r_0^{2h}, avec $r_0 = P_0 M'$. Comme $r_0 < r'$, toutes ces intégrales auront donc une limitation de la forme

$$K d^\mu \int_{S'_0} r'^{-m+1+\mu'} dS_{M'}$$

avec $\mu - \mu' = h$, α ou $2h$. L'homothétie déjà utilisée montre que cette intégrale est infiniment petite d'ordre $\mu - \mu'$ par rapport à d. En définitive, $I_P - I_p$ *est d'ordre* α', α' *étant le plus petit des nombres* α, μ et h.

Remarquons enfin que, si l'exposant de d est μ_1 au lieu de μ dans (11_3), l'intégrale est infiniment petite d'ordre $\mu_1 - \mu$ pour $\mu_1 > \mu$ ou infiniment grande d'ordre $\mu - \mu_1$ pour $\mu_1 < \mu$ et $u_{P_0} \neq 0$. Il résulte de là, en prenant $\mu_1 = 0$, que l'équation de S pourra s'écrire $\varphi = 0$, avec

$$\varphi \equiv J_\mu^{-1} \qquad \text{et} \qquad J_\mu = \int_S r^{-m+1-\mu} \psi_M \, dS_M,$$

ψ étant une fonction positive, et φ admettra des dérivées de tout ordre dans D. J_μ est de l'ordre de $d^{-\mu}$ et φ de l'ordre de d^μ.

Nous allons montrer que, par un choix convenable de μ et de ψ, on peut obtenir directement s. Prenons $\mu = 1$, donc $\varphi = J_1^{-1}$: alors $J_1 d$ est une intégrale du type I_1 et, en tout point p de S, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \lim \frac{1}{J_1 d} = \frac{2}{\sigma_m} \psi_p^{-1}.$$

Si donc on prend

$$\psi_M = \frac{2}{\sigma_m} [\Sigma a_{ik} \alpha_i \alpha_k]_M^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sigma_m} \Psi^{\frac{1}{2}},$$

on aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \Psi^{-\frac{1}{2}}$$

et l'on pourra choisir φ comme fonction s d'après ce que nous avons vu au n° **8**.

Cela posé, il nous faut examiner comment se comportent les dérivées de s en **P**, quand P tend vers un point P_0 de S, en supposant P_0P normale en P_0. Nous avons

$$(11_5) \qquad s = J_1^{-1}, \qquad J_1 = \frac{2}{\sigma_m}\int_S r^{-m}\Psi'^{\frac{1}{2}}_M\, dS_M \qquad (r = PM).$$

Toutes les dérivées de l'intégrale J_1 étendue à $S - S_0$ sont finies. Pour examiner les dérivées de $\int_{S_0}$ prenons comme origine P_0 et comme axe Ox la normale PP_0, de sorte que x_1 est égale à d; étudions d'abord les dérivées en $x_2, \ldots$: on a facilement

$$\frac{\partial r^{-m}}{\partial x_2} = \frac{\partial r'^{-m}}{\partial x_2}(1 + \eta''),$$

η'' étant de l'ordre de r_0^h. Une décomposition analogue à (11_4) nous donne d'abord l'intégrale

$$\psi_{P_0}\int_{S'_0}\frac{\partial r'^{-m}}{\partial x_2}\, dS_{M'},$$

qui est nulle (car elle se transforme en intégrale étendue à la frontière de S'_0, sur laquelle $P_0M' = \rho$, donc $r' = \text{const.}$), puis les intégrales complémentaires analogues à celles étudiées plus haut et dont l'élément différentiel est de l'ordre de $r'^{-m-1}r_0^{\alpha}$ ou de $r'^{-m-1}r_0^{2h}$, ce qui nous donnera au total, en tenant compte de $r_0 < r'$, un terme de l'ordre de $d^{-2+\alpha'}$.

Plus généralement, les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ autres que $\dfrac{\partial^n J_1}{\partial x_1^n}$ sont de l'ordre de $d^{-n-1+\alpha'}$. Si nous dérivons l'équation $sJ_1 = 1$, nous voyons alors sans peine que $\dfrac{\partial s}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial s}{\partial x_m}$ s'annulent comme $d^{\alpha'}$ quand P vient sur S et que toutes les dérivées $(n+1)^{\text{ièmes}}$ de s autres que $\dfrac{\partial s^{n+1}}{\partial x_1^{n+1}}$ sont de l'ordre de $d^{-n+\alpha'}$.

Pour étudier $\dfrac{\partial s}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x_1^2}$, posons $x_1 J_1 = s_1$, donc $ss_1 = x_1$. On a

$$(-m+2)\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 r^{-m} = \frac{\partial^2 r^{-m+2}}{\partial x_1^2} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}\right) r^{-m+2}.$$

Ceci nous permet de ramener le calcul des dérivées successives de s_1 par rapport à x_1 à celui des dérivées par rapport à $x_2, \ldots$ d'une intégrale du type J_3, et, toujours par le même procédé de décomposition, on en conclut sans peine que $\frac{\partial^n s_1}{\partial x_1^n}$ est de l'ordre de $d^{-n+\alpha'}$.

En prenant les dérivées successives de $ss_1 = x_1$ par rapport à x_1, on en conclut d'abord que $\frac{\partial s}{\partial x_1}$ a la même limite que $\frac{1}{s_1} = \frac{s}{x_1}$, c'est-à-dire précisément $\left(\frac{\partial s}{\partial n}\right)$, puis que $\frac{\partial s^{n+1}}{\partial x_1^{n+1}}$ est de l'ordre de $d^{-n+\alpha'}$; toutes les dérivées $(n+1)^{\text{ièmes}}$ sont donc de cet ordre et, par suite, ceci est vrai quels que soient les axes de coordonnées.

La fonction s ainsi obtenue est donc bien celle que nous voulions avoir. Elle nous permettra de former la quasi-solution $(\vartheta + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1}$ ou les coordonnées du point-image ou encore la quasi-solution $\vartheta_1^{-\frac{m}{2}+1}$ (10_{12}). Si les a_{ik} satisfont simplement à la condition de Hölder, on peut prendre comme coordonnées de P_1

$$(11_6) \qquad x_i^1 = x_i - 2s\sum_k \bar{a}_{ik} s'_{x_k},$$

$\bar{a}_{ik}$ étant une fonction de P égale à a_{ik} sur S (¹). On utilisera alors $\vartheta_{11}(P_1, \Pi)$.

(¹) L'emploi des intégrales J_1 permet, en effet, de déterminer une fonction χ_P prenant des valeurs données sur S et admettant des dérivées de tous ordres dans D; χ est même continue à la Hölder à partir d'un point de S, et ses dérivées d'ordre n se comportent vers S comme $d^{-n+\alpha'}$, si χ satisfait à la condition de Hölder sur S. Il suffit de prendre

$$\chi_P = \left[\int_S r^{-m}\, dS_M\right]^{-1} \int_S r^{-m} \chi_M\, dS_M.$$

En effet, le crochet et l'intégrale peuvent être multipliés par d: d'où, comme limite, $\frac{2}{\sigma_m} \cdot \frac{\sigma_m}{2} \chi_{P_0}$; puis les propriétés établies plus haut sur J_1 donnent l'allure des dérivées dans D. On peut donc (*voir* n° **10**, *in fine*) remplacer, dans (11_6), les $\bar{a}_{ik}$ par des fonctions ainsi calculées (il pourra être utile aussi de diviser ces fonctions par la racine $m^{\text{ième}}$ de leur déterminant, de façon à obtenir un déterminant égal à *un* pour les $\bar{a}_{ik}$).

Signalons aussi un point que le lecteur établira sans peine : lorsqu'une fonction admet des dérivées se comportant dans D comme $d^{\alpha'-1}$ et qu'elle satisfait *sur* S à la condition de Hölder avec un exposant $\alpha \geqq \alpha'$, elle y satisfait avec l'exposant α' *entre deux points quelconques de* D + S.

Nous avons ainsi formé des quasi-solutions qui nous permettront de résoudre, pour l'équation linéaire générale (E), *les problèmes aux limites en supposant les coefficients de* (E) *et le champ de normales à* S *continus à la Hölder.*

12. Cas d'un contour a points anguleux. — Le cas d'une frontière située dans un plan (P) et présentant des pointes a été étudié, pour les fonctions harmoniques, après Neumann, par plusieurs auteurs : par exemple Darboux (cours de 1907), Kellogg, Carleman [1], Lichtenstein : ce dernier s'est occupé du problème de Dirichlet pour l'équation générale (*Comptes rendus*, 29 novembre 1909)

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \mathrm{F}_1(u) \equiv \Delta u + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

en supposant toutefois que l'aire donnée corresponde à celle d'un cercle par une représentation conforme particulière. Les résultats du numéro précédent vont nous permettre de traiter le problème, pour (E_1), dans le cas d'un contour C admettant un nombre fini de points anguleux et composés d'arcs à tangente continue à la Hölder.

Supposons d'abord un seul point anguleux, d'ouverture β, situé à l'origine O; en posant

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta}, \qquad z' = x' + iy' = \rho' e^{i\theta'},$$

la transformation conforme (régulière dans toute région ne contenant pas l'origine)

$$z' = z^{\frac{\pi}{\beta}} \qquad \text{ou} \qquad \rho' = \rho^{\frac{\pi}{\beta}}, \qquad \theta' = \frac{\pi}{\beta}\theta$$

donne un plan (P′) et un contour C′ avec une ouverture égale à π en O, et (E_1) devient

$$(\mathrm{E}'_1) \qquad \Delta u + a'\frac{\partial u}{\partial x'} + b'\frac{\partial u}{\partial y'} + c'u = f',$$

$$a' = \mathrm{A}\left(a\frac{\partial x'}{\partial x} + b\frac{\partial x'}{\partial y}\right), \qquad b' = \mathrm{A}\left(a\frac{\partial y'}{\partial x} + b\frac{\partial y'}{\partial y}\right), \qquad c' = \mathrm{A}c, \qquad f' = \mathrm{A}f,$$

---

(1) *Ueber Neumann-Poincaresche Problem für ein Gebiet mit Ecken* (Upsala, 1916); *voir* aussi Goursat, *Analyse*, t. III, Chap. XXXIII, Exercices.

avec

$$\Lambda = \left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\right]^{-1}.$$

Soit $\frac{\beta}{\pi} = \beta'$; on a $z = z'^{\beta'}$, d'où

$$dz = \beta' z'^{\beta'-1} dz'.$$

On voit immédiatement que a' et b', c' et f' ont respectivement des pôles d'ordre $1 - \beta'$ et $2(1-\beta')$ en O dans (P') (ceci pour $\beta < \pi$; pour $\beta > \pi$, on obtient un zéro : c'est le cas d'un angle rentrant).

Nous avons, d'autre part, supposé C tel que l'angle ε d'une corde $MM_1 = l$ avec la tangente MT soit $< K l^h$: cherchons la propriété correspondante pour les points M' et M'_1 de $C'(M'M'_1 = l')$. Si ces points ne sont pas voisins de O, on a évidemment $\varepsilon < K' l'^h$. Si l'un des points est en O, on a $l = l'^{\beta'}$. Soient alors M_1 et M'_1 en O : l'angle ε est conservé dans la transformation conforme, d'où

$$\varepsilon = \varepsilon' < K l^h = K l'^{h\beta'}.$$

Si M et M' sont en O, on a

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\beta'} < \frac{K}{\beta'} l'^{h\beta'}.$$

Soient enfin M' et M'_1 voisins de O : la transformée de la corde MM_1 fait en M' avec C' un angle égal à $|\varepsilon - \varepsilon'|$. Or cet angle est égal à $\frac{l'}{2R'}(1+\eta')$, R' étant le rayon de courbure de C' et η' infiniment petit avec $\frac{l'}{2R'}$; $\frac{1}{R'}$ tend d'ailleurs vers zéro avec la distance de O à $M'M'_1$.

D'autre part, pour comparer l' et l, écrivons l'accroissement de z, de M à M_1,

$$\Delta z = z'^{\beta'}\left[\left(1 + \frac{\Delta z'}{z'}\right)^{\beta'} - 1\right].$$

Si $\left|\frac{\Delta z'}{z'}\right| = \frac{l'}{r'} \leq \frac{1}{2}$, le module du crochet est moindre que

$$\frac{l'}{r'}\beta'(1+\lambda)^{\beta'-1} \qquad \text{avec } |\lambda| < \frac{1}{2}:$$

cela se voit en intégrant de zéro à $\frac{\Delta z'}{z'}$ la fonction $m\,(1+z)^{m-1}$. On a donc

$$|\Delta z| = l < l'^{\beta'}\frac{\beta'}{2}(1+\lambda)^{\beta'-1}.$$

Utilisant $\varepsilon < Kl^h$ et le fait que $\varepsilon - \varepsilon'$ est du premier ordre en l', on en déduit aisément

$$\varepsilon' < K' l'^{h\beta'}.$$

Si maintenant $l' > \frac{r'}{2}$, on abaissera de M'_1 la normale $M'_1 H'_1$ à la tangente en M' et l'on projettera sur cette normale le contour $M'H_1OH'$, H_1 et H' étant les projections de M'_1 et de O respectivement sur les tangentes en O et M'. Le lecteur constatera sans peine que le résultat qui représente $M'_1 H'_1$ est de l'ordre de $l'^{1+\beta' h}$, donc ε' est ici encore de l'ordre de $l'^{\beta' h}$.

Il résulte de là que C', dans sa totalité, satisfait à la condition $\varepsilon' < K' l'^{h'}$ analogue à celle que vérifie C, avec $h' = \beta' h$ pour $\beta' < 1$ et $h' = h$ pour $\beta' > 1$.

Cela posé, si l'on veut résoudre le problème de Dirichlet avec le contour C', le noyau de l'équation (4_2), outre les termes donnés plus haut dans (9_7), comprendra d'autres termes de la nature de $\rho'^{\beta'-1} r'^{-1}$. Ces singularités n'empêchent nullement le calcul de la résolvante Φ, qui aura elle-même des singularités de cette forme, et la formule (4_1) donnant G conserve parfaitement un sens.

S'il y a plusieurs points anguleux, on fera successivement pour chacun d'eux la transformation précédente. *On obtient ainsi la fonction de Green du problème de Dirichlet dans le cas d'un contour à points anguleux, même dépourvu de courbure.*

IV. — Les divers problèmes aux limites. Synthèse de la solution.

Nous envisagerons, comme condition linéaire générale déterminant les problèmes aux limites pour l'équation (E), la relation (en tout point p de S)

$$\psi_S(u) \equiv H(p)\frac{\partial u}{\partial N} + K(p)u = L(p).$$

En particulier, $H = 0$ nous donne le problème de Dirichlet et $K = 0$ celui de Neumann. Dans le cas du plan et de l'équation canonique (E_1), nous envisagerons aussi la condition aux limites contenant une *dérivée tangentielle*

$$H(p)\frac{\partial u}{\partial n} + H_1(p)\frac{\partial u}{\partial s} + K(p)u = L(p).$$

13. Sur la formule de résolution du problème de Dirichlet. — Cette formule est

$$(13_1) \qquad u_P = q\int_S \frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi} u_\Pi \, dS \qquad \int_D G_P^Q f_Q \, d\omega_Q \qquad \left(q = \frac{1}{(m-2)\sigma_m}\right),$$

en supposant désormais Π *sur* S. Il nous faut voir comment calculer $\frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi}$. D'après (8_5) et (8_6), on aura (si toutefois les intégrales ont un sens)

$$(13_2) \qquad \frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi} = \frac{\partial V_P^\Pi}{\partial N_\Pi} + \int_D V_P^Q \frac{\partial \Phi_Q^\Pi}{\partial N_\Pi} d\omega_Q$$

avec

$$\frac{\partial \Phi_P^\Pi}{\partial N_\Pi} = q\int_D F_P(V_P^Q) \frac{\partial \Phi_Q^\Pi}{\partial N_\Pi} d\omega_Q + q\frac{\partial F_P(V_P^\Pi)}{\partial N_\Pi}.$$

En posant

$$(13'_2) \qquad \frac{\partial \Phi_P^\Pi}{\partial N_\Pi} = q\frac{\partial F(V_P^\Pi)}{\partial N_\Pi} + \psi_P^\Pi,$$

ψ vérifiera l'équation de Fredholm

$$(13_3) \qquad \psi_P^\Pi = q\int_D F_P(V_P^Q)\, \psi_Q^\Pi \, d\omega_Q + q^2 \frac{\partial}{\partial N_\Pi}\int_D F_P(V_P^Q)\, F_Q(V_Q^\Pi)\, d\omega_Q.$$

Plaçons-nous dans le cas le moins simple, celui où V a la forme

$$V_P^\Pi = \vartheta_\Pi^{-\frac{m}{2}+1} - (\vartheta_\Pi + 4s\sigma)^{-\frac{m}{2}+1},$$

les a_{ik} et n étant continus à la Hölder et s donnée par (11_5). Étudions l'allure de la fonction $\frac{\partial F_P(V_P^\Pi)}{\partial n_\Pi}$: montrons qu'elle est de l'ordre de $|P\Pi|^{-m-1+\alpha}$. Il semble à première vue qu'elle devrait contenir les dérivées des a_{ik} en Π. *Mais celles-ci disparaissent* car les deux fonctions $\frac{\partial \vartheta_M(P, \Pi)}{\partial x_M}$ et $\frac{\partial[\vartheta_M(P, \Pi) + 4s\sigma]}{\partial x_M}$, M étant un point quelconque et x_M une de ses coordonnées, deviennent égales quand s ou σ s'annulent, et ce sont des termes de ce genre qui contiennent les dérivées des a_{ik} et qui, en plaçant M en Π sur S, se détruisent. Le calcul donne d'ailleurs aisément, en faisant $\sigma = 0$ et se rappelant que $s\vartheta^{-\frac{1}{2}}$ est borné, $\dfrac{\partial F_P(V_P^\Pi)}{\partial N_\Pi} = \mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}}[K'_1 \mathfrak{S}^{\frac{\alpha-1}{2}} + K'_2 s^{\alpha-1}] = K'_3 |P\Pi|^{-m-1+\alpha}$, les quantités K'_1, K'_2, K'_3 étant bornées [*cf.* (9_7)].

Étudions alors, par les méthodes usuelles des noyaux itérés, le terme connu de (13_3), que nous pouvons écrire

$$q^2 \int F_P(V_P^Q) \frac{\partial F_Q(V_Q^\Pi)}{\partial N_\Pi} d\omega_Q,$$

$F(V_P^Q)$ étant donnée par (9_7) où Π est remplacé par Q. Supposons d'abord $K_2 = 0$, c'est-à-dire s *régulière*.

Prenons comme domaine le cercle de centre Π et de rayon $\frac{P\Pi}{2}$; en appelant t la distance de Q à S, le premier facteur se comporte comme $t|PQ|^{-m-1+\alpha}$, donc le produit comme $|PQ|^{-m-1+\alpha} t |Q\Pi|^{-m-2+\alpha}$, c'est-à-dire comme $|PQ|^{-m-1+\alpha}|Q\Pi|^{-m+\alpha}$ puisque $t \leqq Q\Pi$. L'intégration dans ce cercle donnera, en utilisant $PQ > \frac{P\Pi}{2}$, un terme de l'ordre de $|P\Pi|^{-m-1+2\alpha}$. On aboutit au même résultat dans le cercle de centre P et de rayon $\frac{P\Pi}{2}$, puis dans le reste du domaine D, par une homothétie de rapport $|P\Pi|^{-1}$; mais ici on utilisera simplement le fait que $F_P(V_P^Q)$ se comporte comme $|PQ|^{-m+\alpha}$.

Enfin, si $K_2 \neq O$ dans (9_7), c'est-à-dire si s est *quasi régulière*, nous obtenons aussi un terme de l'ordre de $d^{\alpha-1}|P\Pi|^{-m+\alpha}$, qui est encore comparable à $|P\Pi|^{-m-1+2\alpha}$ puisque $d^{-1}|P\Pi|$ est borné quand Π est sur S. Si $2\alpha > 1$ nous avons ainsi un pôle d'ordre $< m$ et la résolution de (13_3) s'achève sans peine. Si $2\alpha \leqq 1$, il suffit de faire un nouveau changement de fonction inconnue comme précédemment. Mais en tout cas, Ψ a un pôle d'ordre $< m + 1 - \alpha$, qui est l'ordre du pôle de $\dfrac{\partial F_P(V_P^\Pi)}{\partial N_\Pi}$.

Donc, d'après ($13'_2$), $\dfrac{\partial \Phi_Q^\Pi}{\partial N_\Pi}$ est de l'ordre de $|Q\Pi|^{-m-1+\alpha}$. Nous avons à composer dans (13_2) cette dérivée avec (9_5), $V_P^Q = \mathfrak{S}^{1-\frac{m}{2}}\left[1 - \left(\dfrac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_2}\right)^{\frac{m}{2}-1}\right]$ et l'on voit sans peine que ceci est $< \lambda \mathfrak{S}^{1-\frac{m}{2}} s\sigma \mathfrak{S}_2^{-1}$, $\mathfrak{S}$ étant ici $\mathfrak{S}_\Pi$ et σ, δ les quantités s, d relatives à Q [$\lambda = 2m - 4$ pour $m \leqq 3$ et $\lambda = 2$

pour $m = 2$; *cf.* $(8'_4)$]. Or nous pouvons écrire, avec $0 < \beta < \alpha$ et $r = \mathrm{PQ}$,

$$V_P^Q < \lambda \left(\frac{r^2}{\mathfrak{Z}}\right)^{\frac{m-\beta}{2}} \frac{s}{d} \left(\frac{\sigma}{\delta}\right)^{1-\beta} \left(\frac{\sigma^2}{\mathfrak{Z}_2} \cdot \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_2}\right)^{\frac{\beta}{2}} d\delta^{1-\beta} r^{-m+\beta}.$$

Tous les rapports du second membre étant bornés (*voir* **9**, A *in fine*) et $\delta < \mathrm{Q\Pi}$, on voit que $V_P^Q \frac{\partial \Phi_Q^\Pi}{\partial n_\Pi}$ est comparable à $d\,|\,\mathrm{PQ}\,|^{-m+\beta}\,|\,\mathrm{Q\Pi}\,|^{-m+\alpha-\beta}$ (ceci est vrai aussi pour $m = 2$). En intégrant dans D, on **a** un terme se comportant comme $d\,|\,\mathrm{P\Pi}\,|^{-m+\alpha}$.

Quant à $\frac{\partial V_P^\Pi}{\partial N_\Pi}$, il suffit de former ce terme pour voir qu'il est comparable à dr^{-m} et ne contient pas les dérivées des a_{ik} pour la même raison que plus haut. *Nous avons donc* $\left|\frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi}\right| < \frac{G_1 d}{r^m}$ (G_1 borné).

Nous pouvons *présenter le calcul de* u_P *d'une autre façon*. Soit $f = 0$; multiplions les deux membres de (13_2) par u_Π et intégrons sur S : on constate que l'on peut écrire

$$(13_4) \qquad u_P = q\int_D \frac{\partial V_P^\Pi}{\partial N_\Pi} u_\Pi\, dS_\Pi + q\int_S V_P^Q \chi_Q\, d\omega_Q,$$

χ étant solution de l'équation intégrale [1]

$$(13_5) \qquad \chi_P = q\int_S F_P(V_P^Q)\chi_Q\, d\omega_Q + q\int_D \frac{\partial F_P(V_P^\Pi)}{\partial N_\Pi} u_\Pi\, dS_\Pi,$$

dont le terme connu devient infini sur S comme $d^{-2+\alpha}$ et qui s'étudie comme (13_3) ou encore en posant $\chi_P = d^{-2+\alpha}\overline{\chi}_P$: on trouve ainsi que χ se comporte aussi comme $d^{-2+\alpha}$, ce qui n'empêche nullement la dernière intégrale de (13_4) d'avoir un sens et de s'annuler quand P vient sur S. Si $f \neq 0$ il suffit d'ajouter au second membre de (13_4) l'intégrale $-\int_D G_P^Q f_Q\, d\omega_Q$ ou tout simplement $-f$ au deuxième membre de (13_5) (cette équation exprimant alors que $F(u) = f$: voir la note).

---

[1] L'équation (13_4) peut s'écrire *a priori* : la première intégrale prend sur S les valeurs données (deuxième note du n° **15**) et la seconde s'y annule. *L'équation* (13_5) *s'obtient ensuite en écrivant que u vérifie l'équation donnée*. Ici la fonction de Green n'intervient plus (voir *Comptes rendus*, t. 188, 1929, p. 1652).

14. Problèmes aux limites mixtes. Fonction de Green correspondante. — Supposons maintenant $H \neq 0$ dans la condition aux limites $\psi_S(u) = L$: envisageons alors les deux fonctions $G(P, \Pi)$ et $\mathcal{G}(\Pi, P)$ telles que leur produit par $\mathfrak{I}_P^{\frac{m}{2}-1}$ ou $\mathfrak{I}_\Pi^{\frac{m}{2}-1}$ tende vers *un* quand $P\Pi$ tend vers zéro, solutions respectives de $F = 0$ en P et de $\mathcal{F} = 0$ en Π et vérifiant les conditions aux limites

$$(14_1) \qquad \left(H\frac{\partial G}{\partial N} + KG\right)_P = 0, \qquad \left[H\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial N} + K - H(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{n}\right]_\Pi = 0,$$

quand P et Π viennent respectivement sur S. La formule (1_9) appliquée aux fonctions $G(Q, \Pi)$ et $\mathcal{G}(\Pi, Q)$, Q étant le point courant, donne alors, en isolant P et Π, $G(P, \Pi) = \mathcal{G}(\Pi, P)$, fonction que nous appellerons G_P^Π. D'après (1_{11}), la solution de $F(u) = f$ vérifiant $\psi_S(u) = L$ sera

$$(14_2) \qquad u_P = -q\int_S G_P^\Pi \left(\frac{L}{H}\right)_\Pi dS_\Pi - q\int_D G_P^Q f_Q\, d\omega_Q.$$

Comment obtenir ici G_P^Π ? Nous la formerons comme *solution de* $F = 0$ *en* P, donc *vérifiant la première condition* (14_1), en supposant que H ne s'annule pas. Pour cela nous prendrons comme fonction auxiliaire

$$(14_3) \qquad V_P^\Pi = \mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1} + \mu(P)\,\mathfrak{I}_1^{-\frac{m}{2}+1},$$

$\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}_1$ désignant respectivement soit $\mathfrak{I}_P(P, \Pi)$ et $\mathfrak{I}_P(P_1, \Pi)$ [celle-ci remplaçable par (10_{12})], soit $\mathfrak{I}_\Pi(P, \Pi)$ et $\mathfrak{I}_\Pi(P_1, \Pi)$: c'est ce dernier couple qu'il faudra employer si les a_{ik} ne sont pas dérivables. Quand P vient sur S, $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{I}_1$ sont égales et leurs dérivées conormales opposées [*cf.* (10_{13})] : nous avons alors

$$H\frac{\partial V}{\partial N_P} + KV = H(1-\mu)\frac{\partial \mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1}}{\partial N_P} + \left(H\frac{\partial \mu}{\partial N} + K + K\mu\right)\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}+1},$$

et ceci sera nul *quel que soit* H si l'on a

$$\mu = 1, \qquad H\frac{\partial \mu}{\partial N} + 2K = 0 \qquad \textit{sur } S.$$

La deuxième relation peut s'écrire $H\Psi\frac{\partial \mu}{\partial n} + 2K = 0$ et, d'après les résultats du n° **11**, on obtiendra une fonction $\mu(\mathrm{P})$ satisfaisant à ces conditions en envisageant l'expression

$$1-\left[\int_{\mathrm{S}}|\mathrm{PM}|^{-m}\left(\frac{\mathrm{H}\Psi}{\sigma_m \mathrm{K}}\right)_{\mathrm{M}} d\mathrm{S}_{\mathrm{M}}\right]^{-1},$$

si toutefois $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{K}}$ garde le même signe et n'a pas sur S des pôles d'ordre $\geqq m-1$. Sinon on prendra

$$\mu(\mathrm{P})=1-\left[\int_{\mathrm{S}}|\mathrm{PM}|^{-m} d\mathrm{S}_{\mathrm{M}}\right]^{-2}\int_{\mathrm{S}}|\mathrm{PM}|^{-m}\left(\frac{\sigma_m \mathrm{K}}{\mathrm{H}\Psi}\right)_{\mathrm{M}} d\mathrm{S}_{\mathrm{M}};$$

en effet, les produits des deux intégrales par d tendent respectivement vers $\frac{\sigma_m}{2}$ et $\frac{\sigma_m^2 \mathrm{K}}{2\mathrm{H}\Psi}$ quand d tend vers zéro et l'on en déduit aisément que $\frac{\mu-1}{d}$ tend vers $\frac{-2\mathrm{K}}{\mathrm{H}\Psi}$, qui est donc la valeur de $\frac{\partial\mu}{\partial n}$ sur S.

La fonction de Green du problème mixte sera à nouveau donnée par les équations (8_5) *et* (8_6), V *étant cette fois la fonction* (14_3). Le noyau de l'équation intégrale obtenue, $q\mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{II}})$, contient les dérivées premières et secondes de μ : les dérivées premières sont continues dans $\mathrm{D}+\mathrm{S}$, mais les dérivées secondes, qui figurent dans les termes $a_{ik}(\mathrm{P})\,\frac{\partial^2\mu}{\partial x_i \partial x_k}\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{II}}$, deviennent infinies comme d^{-1}, sauf cependant si $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{H}}$ est continu à la Hölder : μ est alors quasi régulière, d'après les propriétés des intégrales J_1 du n° **11**, et le calcul de Φ s'effectue comme pour le problème de Dirichlet.

Ici aussi, par un procédé analogue à celui qui nous à conduit aux équations (13_1) et (13_3), nous pouvons écrire (¹)

$$u_{\mathrm{P}}=-q\int_{\mathrm{S}}\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{II}}\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}}\right)_{\mathrm{II}} d\mathrm{S}_{\mathrm{II}}-q\int_{\mathrm{D}}\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\mathrm{X}_{\mathrm{Q}}\,d\omega_{\mathrm{Q}}$$

avec

$$(14_4)\qquad \mathrm{X}_{\mathrm{P}}=q\int_{\mathrm{D}}\mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}})\mathrm{X}_{\mathrm{Q}}\,d\omega_{\mathrm{Q}}+q\int_{\mathrm{S}}\mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\mathrm{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{II}})\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}}\right)_{\mathrm{II}} d\mathrm{S}_{\mathrm{II}}-f.$$

Notons que, en supposant $\mathrm{H}=1$, $\mathrm{K}=0$, nous avons le *problème de*

(¹) Avec une remarque analogue : u_{P} se compose d'une intégrale vérifiant $\psi_{\mathrm{S}}=\mathrm{L}$ et d'une autre vérifiant $\psi_{\mathrm{S}}=0$ et (14_4) *traduit la condition* $\mathrm{F}(u)=f$.

Neumann. V est alors égale à $\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}+1} + \mathfrak{S}_1^{-\frac{m}{2}+1}$ et la solution est donnée par (14_2) où $\frac{L}{H}$ doit être remplacé par la valeur donnée de $\frac{\partial u}{\partial N}$ [en supposant que $\lambda = 1$ ne soit pas valeur singulière dans (8_6)].

Nous allons montrer d'ailleurs que *le problème mixte peut toujours se ramener au problème de Neumann*. Posons, en effet, $u = ve^z$. Si

$$H\frac{\partial z}{\partial N} + K = 0, \quad \text{on a} \quad \frac{\partial v}{\partial N} = \frac{L}{H}e^{-z}:$$

la détermination de v est donc le problème de Neumann. Dans l'équation en v, le coefficient de v est $e^{-z}F(e^z) = F(z) +$ termes contenant les dérivées premières, et c'est le seul coefficient qui contienne les dérivées secondes de z. Or, si nous posons

$$z_P = q\int_S V_P^H\left(\frac{K}{H}\right)_H dS_H,$$

d'après (15_1) (en note), $\frac{\partial z}{\partial N} = -\frac{K}{H}$ sur S et, comme $F_P(V_P^H)$ est de l'ordre de $|PH|^{-m+\alpha}$, $F(z)$ deviendra infini sur S comme $d^{1-\alpha}$ (les dérivées premières de z devenant infinies comme $\mathcal{L}d$). Ceci n'introduit aucune difficulté dans la résolution de l'équation intégrale relative à la fonction G résolvant le problème de Neumann pour l'équation en v.

C'est ainsi qu'il faudra procéder quand $\frac{K}{H}$ sera simplement *continue*.

15. Synthèse de la solution. — A quel point sommes-nous parvenus actuellement? Nous avons trouvé une formule donnant, dans tous les cas, la solution du problème général aux limites linéaire *si elle existe*, et nous y sommes arrivés au moyen de l'équation adjointe. Ceci prouve *l'unicité* de la solution en dehors des cas singuliers.

Mais il nous reste à vérifier : 1° que la fonction u_P ainsi trouvée est bien solution; 2° qu'elle satisfait effectivement à la condition aux limites donnée.

D'autre part, nous avons pu (en partant de $\mathfrak{S}_H$) former G dans tous les cas, en supposant simplement la condition de Hölder pour les coefficients, ce que nous appellerons brièvement condition $(\mathcal{H})$; *l'adjointe peut donc ne pas exister*. Avec G ainsi formée, la solution u

obtenue *sera-t-elle une solution de* (E), *vérifiant la condition aux limites, et unique?* Si oui, nous serons arrivés *à nous passer complètement de l'adjointe*.

Examinons successivement tous ces points.

1° u_P *donnée par* (13_1) *ou* (14_2) *est bien solution en tout point* P *de* D, car G_P^Π est solution en P, et la dérivation sous le signe $\int_S$ s'applique : la première intégrale est donc solution de $F = 0$; la seconde est solution de $F = f$, car si l'on remplace dans (9_2) V par G (et φ par f), l'intégrale du second membre disparaît. La condition ($\mathcal{H}$) suffit.

2° u_P *vérifie la condition aux limites.* Prenons le *problème de Dirichlet*, et supposons d'abord que l'adjointe existe. P_0 étant un point de S, il faut montrer que u_P, donnée par (13_1), tend vers $u_{P_0} = u_0$ quand P tend vers P_0. Tout d'abord, $\int_D G_P^Q f_Q \, d\omega_Q$ tend vers zéro, car si l'on exclut du domaine une petite portion D_0 entourant P_0, $\int_{D-D_0}$ tend vers zéro et $\int_{D_0}$ est aussi petite qu'on le veut quel que soit P, puisque $G|PQ|^{m-\alpha}$ est borné.

D'autre part, $u = u_0$ étant solution de $F(u) = cu_0$, la formule (13_1) s'applique en y faisant $u_P = u_\Pi = u_0$ et $f = cu_0$; nous obtenons ainsi

$$q\int_S \frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi} u_0 \, dS_\Pi = u_0 + qu_0 \int_D G_P^Q c_Q \, d\omega_Q,$$

et ceci tend vers u_0 quand P tend vers P_0. Il reste simplement à établir que

$$\int_S \frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi} (u_\Pi - u_0) \, dS_\Pi$$

tend vers zéro. Or, $\frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi}$ s'annule quand P vient sur S, Π étant un point quelconque de D + S distinct de P. Donc, S_0 étant une petite portion de S entourant P_0, $\int_{S-S_0}$ tend vers zéro quand P tend vers P_0. Quant à $\int_{S-S_0}$, comme nous avons vu plus haut que $\left|\frac{\partial G_P^\Pi}{\partial N_\Pi}\right|$ est $< \frac{G_1 d}{|P\Pi|^m}$

et qu'on peut choisir S_0 telle que $|u-u_0|<\varepsilon$, $\int_{S-S_0}$ sera, en valeur absolue, moindre que l'intégrale du type I_1 [*voir* (11_3)] :

$$\varepsilon G_1 d \int_{S-S_0} \mathrm{PH}^{1-m}\, dS_{\mathrm{H}} < \frac{\sigma_m}{2} \varepsilon G_1.$$

On peut donc choisir S_0, puis d assez petits pour que notre intégrale soit moindre que toute quantité donnée, ce qu'il fallait établir.

Faisons maintenant la simple hypothèse ($\mathcal{H}$) dans une région $\mathcal{R}$ contenant D, donc *plus d'adjointe*. Étant donnée dans $\mathcal{R}$ une fonction continue φ de m variables, on peut toujours déterminer une fonction $\varphi^\star$ indéfiniment dérivable telle que $|\varphi-\varphi^\star|<\eta$ dans $\mathcal{R}$. On pourra, par exemple, dans l'espace $(x_1, \ldots, x_m, y)$ envisager une fonction harmonique w prenant pour $y=0$ la valeur φ et qui est représentée par une intégrale étendue à la région $\mathcal{R}$ du plan $y=0$. On choisira $y=y_0$ assez petit pour que $\varphi^\star = w(x_1, \ldots, x_m, y_0)$ vérifie la condition.

Remplaçons alors les coefficients de (E) par des fonctions approchées ainsi déterminées (¹), ce qui donne une équation ($E^\star$); la fonction de Green $G^\star$, que nous obtiendrons en partant de $\mathfrak{F}_{\mathrm{H}}$, sera aussi voisine que nous le voudrons de G (pour P et H distincts); elle nous fournira une solution $u^\star$, voisine de u et prenant bien sur S les valeurs données, car, ($E^\star$) ayant une adjointe, le raisonnement ci-dessus s'applique. Comme $u^\star$ diffère de u d'aussi peu qu'on le désire dans $D+S$, on pourra prendre P assez voisin de P_0 pour que la différence

$$|u-u_0| \leqq |u-u^\star| + |u^\star-u_0|$$

soit moindre que toute quantité donnée : donc u tend bien vers u_0 (²).

(¹) Il est à noter que les nouveaux coefficients $a^\star_{ik}$ satisfont aussi dans $\mathcal{R}$ à la condition de Hölder $|\Delta a^\star_{ik}| < A r^\alpha$ avec un nombre A borné *quel que soit* η.

(²) Faisons ici une remarque importante : si nous écrivons $G_{\mathrm{P}}^{\mathrm{H}} = V_{\mathrm{P}}^{\mathrm{H}} + \overline{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{H}}$, l'intégrale

$$\int_S \frac{\partial \overline{V}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{H}}}{\partial N_{\mathrm{H}}} u_{\mathrm{H}}\, dS_{\mathrm{H}}$$

est continue quand P traverse S et sa valeur est zéro quand P est sur S ; donc,

$$q \int_S \frac{\partial V_{\mathrm{P}}^{\mathrm{H}}}{\partial N_{\mathrm{H}}} u_{\mathrm{H}}\, dS_{\mathrm{H}}$$

tend vers u_0 *quand* P *tend vers* P_0. Nous avons utilisé ce fait dans la Note de la page 65.

3° *L'unicité a lieu avec la seule condition* $(\mathcal{H})$ quand $\lambda = 1$ n'est pas valeur singulière dans (8_0), c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'autre solution u_P que celle donnée par (13_1). En effet, dans le cas contraire, il y aurait une solution v de $F = 0$ nulle sur S. Envisageons alors l'équation $\bar{F} = 0$, obtenue en remplaçant les coefficients de $F = 0$ par des fonctions dérivables se confondant avec ceux-ci sur S et obtenues par les méthodes du n° **11**. On peut prendre un domaine D' intérieur à D et limité par S' voisine de S, sur laquelle $|v|$ sera $< \varepsilon$; la formule fondamentale s'applique alors à S', puisque l'adjointe existe dans $D' + S'$ et donne pour v, en tout point P de D', une valeur de module moindre que

$$q\varepsilon\overline{G}_1 d\int_{S'} |PM|^{1-m}\, dS'_M < \frac{\overline{G}_1\varepsilon}{2(m-2)},$$

ε étant arbitrairement petit et $\overline{G}_1$ borné quelle que soit S'. Ceci entraîne $v \equiv 0$ dans D'_2, donc dans D.

Tout ce que nous venons de dire pour le problème de Dirichlet pourra se répéter avec peu de changement pour le *problème de Neumann* ou, plus généralement, pour le *problème mixte* $\psi_S = L$.

Tout d'abord, $\int_D G_P^Q f_Q\, d\omega_Q$ vérifie la condition $\psi_S = 0$. Nous prendrons ensuite P_0 comme origine, la conormale en P_0 comme axe Ox_1; la fonction $\left(\frac{L}{H}\right)_{P_0} x_1$ est solution de l'équation

$$F(u) = (b_1 + cx_1)\left(\frac{L}{H}\right)_{P_0}.$$

On en déduit, comme plus haut, que

$$-q\int_S G_P^{II}\left(\frac{L}{H}\right)_{P_0} dS_{II}$$

vérifie la condition $\psi_S = L$ quand P est en P_0, et que

$$\int_S G_P^{II}\left[\left(\frac{L}{H}\right)_{II} - \left(\frac{L}{H}\right)_{P_0}\right] dS_{II}$$

vérifie la condition $\psi_S = 0$ quand P vient en P_0; il suffit pour cela d'établir que

$$\left| H\frac{\partial G}{\partial N} + KG \right| < \frac{G_2 d}{r^m}$$

en tout point P de la conormale en P_0. Puis le reste du raisonnement s'achève comme plus haut [1].

16. Cas singuliers et cas d'unicité. — Ce sont ceux pour lesquels $\lambda = 1$ est valeur caractéristique d'ordre p. V étant la fonction auxiliaire du problème envisagé, les deux équations homogènes associées

$$(16_1) \qquad \begin{cases} Z(P) - q \displaystyle\int_D F_P(V_P^Q)\, Z(Q)\, d\omega_Q = 0, \\ z(P) - q \displaystyle\int_D F_Q(V_Q^P)\, z(Q)\, d\omega_Q = 0 \end{cases}$$

admettent alors respectivement p solutions linéairement indépendantes $Z_1, \ldots, Z_p$ et $z_1, \ldots, z_p$, telles que les fonctions

$$(16_2) \qquad U_i(P) = \int_D V_P^Q Z_i(Q)\, d\omega_Q \qquad (i = 1, \ldots, p)$$

soient solution de $F = 0$ [2]. Donc, cette équation admet p solutions distinctes *vérifiant la condition homogène* $\psi_S = 0$.

Soit maintenant la condition donnée *non homogène*. Supposons, par exemple, le cas du problème de Dirichlet et envisageons l'équation (13_8) qui n'est autre que la première équation (16_1) avec un second membre $q \displaystyle\int_S \frac{\partial F_P(V_P^\Pi)}{\partial N_\Pi} u_\Pi\, dS_\Pi$: elle n'admettra de solution u que si ce second

---

(1) Dans le cas du problème de Neumann, où $V_P^\Pi = \mathfrak{I} + \mathfrak{I}_1$, on voit, par le même raisonnement que dans la note précédente, que, en tout point P_0 de S,

$$(15_1) \qquad \frac{\partial}{\partial N_{P_0}} q \int_S V_{P_0}^\Pi \rho_\Pi\, dS_\Pi = -\rho_{P_0}.$$

Il suffit de prendre P sur la conormale N_{P_0}, de dériver l'intégrale suivant la direction N_{P_0}, puis de faire tendre P vers P_0.

(2) Les p fonctions U_i sont linéairement distinctes. Sinon il existerait deux fonctions Z_i, par exemple Z_1 et Z_2, conduisant à U_1 et λU_1. Mais alors en remplaçant Z_i par $\lambda Z_1 - Z_2$ dans l'intégrale de (16_2) on trouverait *zéro*, ce qui exigerait, puisque V_P^Q est essentiellement positif, que $\lambda Z_1 \equiv Z_2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

membre est orthogonal aux p fonctions z_i. *D'où les p conditions nécessaires*

$$(16_3)\quad \int_S Y_i(\mathrm{H})\,u_\mathrm{H}\,d\mathrm{S}_\mathrm{H} = 0 \qquad \text{avec} \qquad Y_i(\mathrm{H}) = \int_\mathrm{D} \frac{\partial \mathrm{F}_\mathrm{P}(\mathrm{V}_\mathrm{P}^\mathrm{H})}{\partial \mathrm{N}_\mathrm{H}}\, z_i(\mathrm{P})\,d\omega_\mathrm{P}$$

et *la solution sera* $u + \mathrm{C}_1 \mathrm{Z}_1 + \ldots + \mathrm{C}_p \mathrm{Z}_p$, *dépendant linéairement de p constantes arbitraires* $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$.

Ici on a supposé l'équation (E) sans second membre ; si $f \neq 0$, le second membre de (16_3) est $\int_\mathrm{D} f z_i\,d\omega$.

De même, s'il s'agit du problème $\psi_\mathrm{S} = \mathrm{L}$, on envisagera l'équation (14_4) (ou l'équation analogue obtenue en ramenant le problème à celui de Neumann) et l'on aura les conditions nécessaires

$$(16'_3)\quad \int_S Y_i(\mathrm{H})\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{H}}\right)_\mathrm{H} d\mathrm{S}_\mathrm{H} = \int_\mathrm{D} f z_i\,d\omega \qquad \text{avec} \qquad Y_i(\mathrm{H}) = \int_\mathrm{D} \mathrm{F}_\mathrm{P}(\mathrm{V}_\mathrm{P}^\mathrm{H})\,z_i(\mathrm{P})\,d\omega_\mathrm{P}.$$

Si nous savons d'avance que la solution est unique ou, ce qui revient au même, que $\psi_\mathrm{S}(u) = 0$ et $\mathrm{F}(u) = 0$ entraînent $u \equiv 0$, nous serons sûrs de ne pas être dans un cas singulier. Ainsi en est-il pour le problème de Dirichlet lorsque $c < 0$: u ne peut en effet avoir un maximum positif en un point P de D car, en faisant la transformation qui conduit à l'équation (1_6), on aurait, en P, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i'^2} \leqq 0$ et $\frac{\partial u}{\partial x_i'} = 0$. D'où, les a'_{ik} étant nuls, $\mathrm{F}'(u) < 0$, ce qui est impossible ; de même pour un minimum négatif. Si donc u s'annule sur S, elle est identiquement nulle dans D. (Noter qu'on suppose simplement ici D continu et borné.)

Ce résultat s'étend au cas où c est $\leqq 0$ par l'artifice employé pour l'équation canonique dans le plan et qui consiste à poser $u = zu_1$, z étant une fonction positive choisie de telle sorte que, dans l'équation en u_1 le coefficient de u_1, qui est $\mathrm{F}(z)$, soit < 0. Il résulte de là que si u, solution de $\mathrm{F}(u) = 0$, est $\leqq 0$ sur S elle ne peut devenir > 0 en un point de D, car u_1 aurait alors dans D un maximum > 0.

D'autre part, toujours dans l'hypothèse $c \leqq 0$, le maximum M de $|u|$ peut être à la fois atteint dans D et sur S, c'est-à-dire qu'il ne peut être $> \mathrm{M}'$, maximum de $|z|$ sur S. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un maximum positif de u : si l'on avait $\mathrm{M}' < \mathrm{M}$, on pourrait choisir μ tel que $\mathrm{M}' < \mu < \mathrm{M}$. Soit alors $v = u - \mu$, négative sur S, d'où $F(v)+c\mu=0$, et posons $v=zv_1$, z étant la même fonction que plus haut; les deux derniers termes de l'équation en v_1 seront $F(z)+c\mu$, quantité négative. Le raisonnement précédent sur l'impossibilité d'un maximum positif de v_1 s'applique. Donc v_1, négative sur S, ne peut devenir positive en un point de D; de même pour v. Donc on ne peut avoir $u>\mu$ ni par suite $M>M'$.

De même si, dans ψ_S, on a $\frac{K}{H}<0$ avec $c<0$, il y a unicité. En effet, $|u|$ ayant son maximum en un point de S, en ce point on a $\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial N}\leqq 0$, ce qui n'est pas compatible avec $\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial N}+\frac{K}{H}=0$, et par suite $\psi_S=0$ et $F=0$ *entraînent* $u\equiv 0$ *dans* $D+S$. Enfin les résultats précédents, lorsque c a un signe quelconque, sont également vrais pour D assez petit.

Supposons maintenant simplement $\frac{K}{H}\leqq 0$ et $c\leqq 0$. La conclusion précédente subsiste-t-elle? Soit h un nombre compris entre le maximum M et le minimum m de u dans $D+S$. Supposons $M>0$ et envisageons le domaine $D'+S'$ défini par $h\leqq u\leqq M$: sa frontière, d'après ce qui précède, comprendra une portion S_1 de S, le reste S_2 étant intérieur à D. Posons $v=u-h$, donc $F(v)+ch=0$. On aura : 1° $H\frac{\partial v}{\partial N}+K(v+h)=0$ sur S_1; 2° $v=0$ sur S_2. Or on peut toujours former une fonction z telle que $\frac{\partial z}{\partial N}+\frac{K}{H}z<0$ sur S_1 et $F(z)>0$ dans $D'+S'$. En effet S_1 n'est pas fermée, et l'on peut chercher z comme solution de $F(z)=A'(A'<0)$, en se donnant au besoin les valeurs $\frac{\partial z}{\partial N}+\frac{K'}{H'}z$ sur une surface fermée *voisine* de S', $\frac{K'}{H'}$ étant voisin de $\frac{K}{H}$, de manière que $\frac{\partial z}{\partial N}+\frac{K}{H}z$ soit <0 sur S_1 : c'est un problème comportant une large part d'arbitraire. Si la fonction ainsi obtenue n'est pas positive, on lui ajoute une constante positive convenable, ce qui ne modifie pas le sens des inégalités imposées à z et l'on a ainsi $z>0$.

Soit alors $v=zv_1$; on a : 1° $z\frac{\partial v_1}{\partial N}+\left(\frac{\partial z}{\partial N}+\frac{K}{H}z\right)v_1+\frac{K}{H}h=0$ sur S_1; 2° $v_1=0$ sur S_2. Or les deux derniers termes de l'équation en v_1 sont $F(z)v_1+ch$; donc, d'après le raisonnement donné plus haut,

v_1 ne peut avoir de maximum positif dans D′ [à cause du signe négatif de $F(z)v_1 + ch$] mais seulement sur S′, donc sur S_1. On aurait alors $z\frac{\partial v_1}{\partial N} < 0$ et tous les autres termes de la condition 1° seraient $\leqq 0$, ce qui est impossible. Donc dans D′ + S′ on a $v_1 \leqq 0$, $v \leqq 0$, $u \leqq h$, d'où $u = h$, puisqu'on a supposé $u \geqq h$. (Pour $M < 0$ on aboutit aussi à $u = h$ en envisageant le domaine $m \leqq u \leqq h$.) Or $F(h) = ch$ et $\psi_S(h) = Kh$, et alors de deux choses l'une:

1° Ou bien c et K sont identiquement nuls. D'où :

THÉORÈME. — *Le problème de Neumann pour une équation linéaire elliptique privée du terme en z et du terme connu admet la solution* $u =$ const. *et n'en admet pas d'autre.*

2° Ou bien c et K ne sont pas tous deux identiquement nuls. D'où :

THÉORÈME. — *Le problème $\psi_S = 0$ pour $F(u) = 0$, avec c et $\frac{K}{H}$ négatifs ou nuls, non identiquement nuls tous deux, n'admet que la solution $u = 0$.*

Il résulte de là que le problème de Neumann pour $c \equiv 0$ et $f \equiv 0$ *conduit à un cas singulier*, $\lambda = 1$ étant valeur caractéristique *simple* et la solution de la forme $u =$ const. avec une condition nécessaire de la forme ($16'_3$). Le problème $\psi_S = L$ pour l'équation (E) avec $c \leqq 0$ et $\frac{K}{H} \leqq 0$, mais non $c \equiv 0$ et $K \equiv 0$, n'admet *qu'une solution.*

17. PROBLÈMES AUX LIMITES COMPORTANT DES DÉRIVÉES TANGENTIELLES. — Nous avons envisagé jusqu'ici des conditions aux limites linéaires *ne contenant que la dérivée conormale.* Comment opérer quand toutes les dérivées premières y figurent ?

Traitons la question brièvement *dans le cas du plan* avec l'équation (E_1) du n° **12**; nous avons alors la condition citée au début de ce Chapitre, et que nous écrirons, en supposant H = 1,

$$(17_1) \qquad \psi_C(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial n} + H_1\frac{\partial u}{\partial s} + Ku = L,$$

s étant l'arc du contour fermé C et n la normale intérieure de cosinus directeurs α et β. La formule fondamentale est ici

$$2\pi u_P = \int_C \left[-v\frac{\partial u}{\partial n} + u\frac{\partial v}{\partial n} - v(a\alpha + b\beta)\right] ds - \int_D vf\, d\omega.$$

Remplaçant $\frac{\partial u}{\partial n}$ par sa valeur tirée de (17_1) et intégrant par parties le terme en $\frac{\partial u}{\partial s}$, l'intégrale curviligne devient $\int_C [-v\psi_C(u) + u\overline{\psi}_C(v)]\, ds$, avec

$$\overline{\psi}_C(v) \equiv \frac{\partial v}{\partial n} - H_1\frac{\partial v}{\partial s} + \left(K - \frac{dH_1}{ds} - a\alpha - b\beta\right)v,$$

de sorte que le premier terme disparaît si $\psi_C(u) = 0$ et le second si $\overline{\psi}_C(v) = 0$. Par le même procédé que pour le problème mixte, il est alors aisé de montrer l'identité des deux fonctions des points P et Π se comportant comme $-\mathcal{L}|P\Pi|$ pour $P\Pi = 0$ et solutions respectives : 1° de $F_1 = 0$ en P vérifiant la condition $\psi_C = 0$ pour P sur C; 2° de l'adjointe en Π avec la condition $\overline{\psi}_C = 0$ quand Π est sur C. Appelons encore cette fonction G_P^Π : quand $\psi_C(u) = L$ est donnée sur C, on a, en remplaçant v par G et supposant Π sur C,

$$2\pi u_P = -\int_C G_P^\Pi L_\Pi\, ds_\Pi - \int_D G_P^Q f_Q\, d\omega_Q.$$

Pour calculer G, par exemple *en tant que solution de* $F_P = 0$, nous introduirons le *point-image* P_1 de P, donné plus haut par les formules (6_4) et (6_7) (si l'on formait G comme solution de $\mathcal{F}_\Pi = 0$, on prendrait l'image de Π).

Soient alors r, θ et r_1, θ_1 les coordonnées polaires, de pôle Π, des points P et P_1 : nous utiliserons *les fonctions harmoniques conjuguées* $\mathcal{L}r$ et θ pour former la fonction auxiliaire V_P^Π et nous poserons, μ et ν étant fonctions de P,

$$V_P^\Pi = -\mathcal{L}r - \mu\mathcal{L}r_1 - \nu\theta_1;$$

θ_1 est une fonction uniforme de Π quand P est dans D, P_1 étant alors extérieur. Sur C, $r = r_1$, $\theta = \theta_1$ et, d'après les propriétés des fonctions conjuguées et du point-image,

$$\frac{\partial \mathcal{L} r}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{L} r_1}{\partial s} = \frac{\partial \theta}{\partial n} = -\frac{\partial \theta_1}{\partial n}, \qquad -\frac{\partial \mathcal{L} r}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{L} r_1}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial s} = \frac{\partial \theta_1}{\partial s},$$

$$\psi_C(V_P^H) = \psi(\mu + 1)\mathcal{L} r + \psi(\nu)\theta + (1 - \mu - H_1\nu)\frac{\partial \mathcal{L} r}{\partial n} + (H_1 + H_1\mu - \nu)\frac{\partial \mathcal{L} r}{\partial s}.$$

En annulant les coefficients du second membre, de manière que V satisfasse à $\psi_C = 0$, on obtient les valeurs de μ, ν et de leurs dérivées normales sur C

$$\mu = \frac{1 - H_1^2}{1 + H_1^2} = M(s), \qquad \nu = \frac{2H_1}{1 + H_1^2} = N(s),$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial n} = -H_1 \frac{dM}{ds} - K(M + 1), \qquad \frac{\partial \nu}{\partial n} = -H_1 \frac{dN}{ds} - KN$$

et le calcul de G à partir de V s'effectue ensuite, comme pour le problème mixte, *au moyen d'une équation de Fredholm.*

Le choix de μ et ν comporte une grande latitude; il faut que $F(\mu)$ et $F(\nu)$ soient de nature à permettre la résolution de l'équation intégrale à laquelle on est conduit : la nature de H_1, K permet d'obtenir μ, ν plus ou moins simplement. Nous pouvons, par exemple, nous inspirer du calcul d'une fonction biharmonique w par la formule (d étant la distance de P à C)

$$w_P = \frac{1}{\pi}\int_C \left(\frac{2d^3}{r^4} w_M + \frac{d^2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial n_M}\right) ds_M \qquad (r = PM),$$

donnant w en fonction des valeurs de w et $\frac{\partial w}{\partial n}$ sur la frontière C quand celle-ci est une droite. Lorsque C est un contour fermé, la formule donne encore une fonction w prenant des valeurs données sur C, ainsi que $\frac{\partial w}{\partial n}$, et admettant des dérivées premières et secondes dans D, si C a une courbure finie. Si C est simplement continu à la Hölder, ainsi que $\frac{\partial w}{\partial n}$ et $\frac{\partial w}{\partial s}$, il suffit de remplacer d par $\pi\left[\int_C r^{-2} ds_M\right]^{-1}$ (*cf.* 6_7) et l'on obtient alors une fonction w quasi régulière dans C.

On pourra donc ainsi calculer μ et ν, si $\frac{dH_1}{ds}$ et K vérifient la condition de Hölder (en ce qui concerne K, cette condition peut d'ailleurs être éliminée par le même artifice qu'au n° **14**). On aboutit à une équation de Fredholm du même type que pour le problème mixte, et la synthèse de la solution s'effectue aussi de la même façon. Mais il convient d'observer que, n' et t' étant deux directions issues d'un point P′ et parallèles à la normale et la tangente en un point H de C, la simple hypothèse de continuité sur L nous permet seulement de montrer que $\frac{\partial u}{\partial n'} + H_1 \frac{\partial u}{\partial s'} + K u$ tend vers L quand P′ tend vers H (H_1, K, L ayant leurs valeurs en H). L'existence séparée de $\frac{\partial u}{\partial n}$ et $\frac{\partial u}{\partial s}$ sur C n'est assurée que si le potentiel $\int_C L\,\mathcal{L}r\,ds$ admet une dérivée tangentielle (¹).

Mais on peut opérer autrement et poser

$$u_P = \int_D V_P^M \varphi_M \, d\omega_M + \chi_P,$$

χ étant une fonction vérifiant la condition $\psi_C(\chi) = L$; u vérifie aussi cette condition et, en écrivant que $F(u) = f$, on obtient l'équation intégrale

$$2\pi\varphi_P = \int_D F_P(V_P^M)\varphi_M \, d\omega_M + F_P(\chi) - f = 0.$$

On pourra prendre par exemple

$$\chi_P = \pi \left[\int_C r^{-2}\, ds \right]^{-2} \int_C r^{-2} L\, ds;$$

car, sur C, χ et $\frac{\partial \chi}{\partial s}$ sont nuls et $\frac{\partial \chi}{\partial n} = L$; si L a un accroissement d'ordre α, $F(\chi)$ se comporte comme $d^{-1+\alpha}$ et la résolution de l'équation n'offre pas de difficulté.

Ici encore l'unicité est assurée pour $K < 0$ et $c < 0$ (même raisonnement qu'au nº **16**).

(¹) *Voir* Picard, *Leçons sur quelques types d'équations aux dérivées partielles*, p. 86.

Note sur la résolution des problèmes aux limites au moyen d'intégrales analogues aux potentiels.

Dans une Note des *Comptes rendus* (27 juin 1927) j'ai signalé qu'on peut résoudre les problèmes aux limites sans utiliser de fonction de Green, par un procédé analogue à celui qu'on emploie pour les fonctions harmoniques (*voir* aussi *ibid.* 27 décembre 1927, p. 1565 en note). Pour cela, formons, par la méthode de E. E. Levi, la solution fondamentale U_P^Π de $F = 0$ (n° 1).

Posons $W_P^\Pi = [\mathfrak{I}_\Pi(P, \Pi)]^{1-\frac{m}{2}}$: nous aurons

$$U_P^\Pi = W_P^\Pi + \int_{D'} W_P^Q \Phi_Q^\Pi \, d\omega_Q = W_P^\Pi + W_1,$$

Φ_P^Π étant donnée par une équation semblable à (8_6) : c'est donc la résolvante de $\dfrac{F_P(W_P^\Pi)}{(m-2)\sigma_m}$ pour $\lambda = 1$. D' est un domaine contenant D et tel que $\lambda = 1$ ne soit pas valeur singulière. Envisageons alors les intégrales *analogues aux potentiels de simple et double couche*

$$\mathcal{J}_1(P) = \int_S U_P^\Pi \rho_\Pi \, dS_\Pi, \qquad \mathcal{J}_2(P) = \int_S \frac{\partial U_P^\Pi}{\partial N_\Pi} \rho_\Pi \, dS_\Pi,$$

ρ étant continue sur S : quand P vient sur S, $\mathcal{J}_1$ est continue, mais $\mathcal{J}_2$ et $\dfrac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial N}$ satisfont *à des formules de discontinuité semblables à celle des potentiels.* Voyons-le rapidement.

Tout d'abord, il convient d'examiner le calcul de $\mathcal{J}_2$ qui, contenant la dérivée conormale de U_P^Π en Π, *nécessite* l'existence des dérivées conormales des a_{ik} sur S : nous supposerons les a_{ik} dérivables dans D' (bien que la condition de Hölder puisse suffire ailleurs que sur S). On posera ensuite

$$\Phi_P^\Pi = \frac{1}{(m-2)\sigma_m} F_P(W_P^\Pi) + \Psi_P^\Pi,$$

et l'on étudiera la dérivée

$$\frac{\partial}{\partial N_\Pi} \int_D W_P^Q F_Q(W_Q^\Pi) \, d\omega_Q,$$

en isolant Π, de façon à avoir une portion de D' ne contenant pas Π, où l'on dérivera sous le signe intégral, et une autre où, avant de dériver par rapport à N_Π, on fera une intégration par parties. Puis on calculera $\dfrac{\partial \Psi_P^\Pi}{\partial N_\Pi} = \psi_P^\Pi$, qui satisfait à une équation analogue à (13_3), V étant remplacé par W ; on étudiera le terme connu en décomposant comme plus haut.

On arrive ainsi à calculer $\dfrac{\partial U_P^H}{\partial N_H}$ et à voir que $\dfrac{\partial W_P^H}{\partial N_H}$ *est de l'ordre de* r^{-m}, la dérivée conormale de W_1 ayant un pôle d'ordre moindre, de sorte que la partie de $\mathcal{J}_2$ contenant W_1 est *continue quand* P *traverse* S. Il en est de même, dans les dérivées de $\mathcal{J}_1$ par rapport à P, de la partie contenant W_1.

Supposons que P tende vers un point P_0 de S : on peut toujours, en employant la transformation (8_3), être ramené au cas où, en P_0, $a_{ii} = 1$ et $a_{ik} = 0$ pour $i \neq k$, de sorte que, en tout point P, $a_{ii} - 1$ et a_{ik} sont de l'ordre de r ; P′ étant un point de la conormale en P_0 (qui coïncide avec la normale), il suffit alors d'écrire $\dfrac{\partial W_P^H}{\partial N_H}$ et $\dfrac{\partial W_{P'}^H}{\partial N_{P'}}$ pour voir que (avec $r = \mathrm{PH}$, $r' = \mathrm{P'H}$),

$$\frac{\partial W_P^H}{\partial N_H} = \frac{\partial r^{2-m}}{\partial n_H}(1 + A r), \qquad \frac{\partial W_{P'}^H}{\partial N_{P'}} = \frac{\partial r'^{2-m}}{\partial n_{P'}}(1 + A' r'),$$

A et A′ étant bornés. Il en résulte immédiatement *les mêmes formules que pour les potentiels*

$$\lim_{P \to P_0} \mathcal{J}_2 = \frac{m-2}{2}\,\sigma_m \rho_{P_0} + \int_S \frac{\partial U_{P_0}^H}{\partial N_H}\,\rho_H \, dS_H,$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial N_{P_0}} = \frac{2-m}{2}\,\sigma_m \rho_{P_0} + \int_S \frac{\partial U_{P_0}^H}{\partial N_{P_0}}\,\rho_H \, dS_H.$$

La première formule permet d'obtenir la solution du *problème de Dirichlet* sous la forme d'une intégrale $\mathcal{J}_2$: la fonction inconnue ρ satisfait à l'équation obtenue en remplaçant $\lim \mathcal{J}_2$ par la donnée u_{P_0}. La seconde formule permet de résoudre le *problème de Neumann* ou les *problèmes mixtes*. Soit par exemple $\psi_S(u) = L$: on représente u par une intégrale $\mathcal{J}_1$ et l'on a

$$\frac{2-m}{2}\,\sigma_m H_{P_0} \rho_{P_0} + \int_S \left(H_{P_0} \frac{\partial U_{P_0}^H}{\partial N_{P_0}} + K_{P_0} U_{P_0}^H \right) \rho_H \, dS_H = L_{P_0}.$$

On obtient donc une équation de Fredholm donnant ρ *dans chaque cas.*

Mais ici pour le problème de Dirichlet, même si l'on se borne à supposer la condition de Hölder pour les a_{ik} dans D + S (auquel cas Ar et $A'r'$ sont remplacés par Ar^α et $A'r'^\alpha$), il faut que $\dfrac{\partial a_{ik}}{\partial N}$ existe sur S. Le cas d'un *contour à points anguleux* se traite aisément par cette méthode, après avoir fait la même transformation qu'au n° **12**.