JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. ROBERT

Note sur les congruences paratactiques de cycles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 201-206.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__201_0>

Note sur les congruences paratactiques de cycles;

PAR P. **ROBERT**.

Nous nous proposons de résumer ici les études de géométrie *réelle* anallagmatique qui nous ont été inspirées par les idées de M. J. Hadamard (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LIV, Comptes rendus des Séances, p. 35 à 39; *Nouvelles Annales de mathématiques*, 6e série, t. II, p. 257-270 et 289-314, et *Enseignement scientifique*, n° 10, juillet 1928, p. 296-298).

A. *Étude des cycles orthogonaux à une inversion négative.* — M. Hadamard a déduit la théorie de la parataxie de l'étude d'un système de deux cercles et de leurs cercles perpendiculaires communs, indiquée comme exercice dans les *Leçons de Géométrie élémentaire*, du même auteur, t. II, p. 612-613. Nous avons pensé qu'on pouvait prendre aussi comme base de la théorie la notion d'anneau orthogonal de cercles, ou de tétrasphère orthogonal, qui s'y rattache et qui est classique. On définit ainsi, *à priori*, deux sortes d'anneaux orthogonaux de cycles, suivant que le sens relatif des tangentes positives aux deux cycles d'un tel anneau est positif ou négatif, l'espace étant supposé orienté. L'opération paratactique d'angle α d'un anneau de cycles (ou orienté) est définie comme la composition de deux rotations d'angle α autour des cycles de l'anneau. On établit ainsi : 1° que deux anneaux orthogonaux de cycles, de sens contraires, tels que chaque cycle de l'un soit cosphérique à chaque cycle de l'autre, ont en commun deux « bissecteurs » conjugués; 2° que deux opérations paratactiques quelconques relatives à ces deux anneaux respectifs sont permutables entre elles. Il est aisé ensuite d'en déduire : l'existence de ∞^2 anneaux définissant, avec le même angle α, une même opération paratactique : la théorie des congruences et opérations paratactiques de M. Hadamard. Rappelons ici que deux opérations paratactiques de même sphère principale I (imaginaire) et de sens différents sont permutables et que leur produit est une rotation circulaire; que tout cycle orthogonal à I est commun à deux congruences paratactiques de cycles P, N, de sphère principale I, dont la première est positive et la seconde négative, et qu'inversement deux telles congruences définissent un cycle déterminé qui leur est commun; enfin que les opérations paratactiques de même sens, de sphère principale I, forment un groupe.

L'isomorphisme du groupe de ces opérations avec celui des rotations d'une sphère autour de son centre s'ensuivait, bien qu'elle n'apparaisse pas aussi simplement qu'avec la représentation que M. Gambier a trouvée de son côté.

Nous avons d'ailleurs établi une propriété équivalente à celle que cet auteur a établie élémentairement (*Enseignement scientifique*, 3e année, n° 22, p. 33 à 38) : pour que deux cycles (P_1, N_1) et (P_2, N_2) orthogonaux à I soient cosphériques, il faut et il suffit que « l'angle des congruences positives P_1 et P_2 relatives aux deux cycles » soit égal à l'angle des congruences négatives N_1 et N_2 (l'angle de deux congruences paratactiques de sphère principale I et de même sens est l'angle des cycles de ces congruences issus d'un même point de l'espace, il est indépendant de ce point. M. Gambier a pris en somme pour ce point le pôle de l'inversion négative I).

Plus généralement, en étudiant la composition de deux transpositions autour de cycles quelconques (P_1, N_1) et (P_2, N_2) orthogonaux à I, on obtient le théorème (signalé sans démonstration dans notre article de l'*Enseignement scientifique*, n° 18, p. 233) : les angles fondamentaux V, V' d'un système de deux cycles quelconques orthogonaux à I sont la demi-somme et la demi-différence de l'angle θ des congruences P_1 et P_2 et de l'angle φ des congruences N_1 et N_2 (P_1, N_1) et (P_2, N_2) définissant, comme plus haut, les deux cycles.

Ce qui précède donne comme corollaires les propositions bien connues sur le système de deux cercles paratactiques, dues à M. Von Weber, Coolidge, Bloch et Hadamard : notre méthode de recherche des cercles perpendiculaires communs à deux cercles (dont l'inversion principale I est négative) était au fond celle de M. Gambier, à la forme près; celle de cet auteur utilisant les distances sphériques est plus intuitive.

Signalons ici, d'après une suggestion de M. Hadamard, que le théorème de Goursat-Bloch (sur la réduction d'une opération sphérique quelconque à deux opérations sphériques simples conjuguées) peut être aussi donné comme corollaire de cette étude : soit une opération sphérique donnée $\mathfrak{T}$, elle transforme une inversion négative I en une autre inversion négative I'; il est possible également d'échanger I et I' par deux inversions, dont l'une J est sûrement négative. Donc l'opération $U = \mathfrak{T}J$ transforme I en I, d'où il résulte que U est le produit de deux rotations conjuguées orthogonales à I (d'après la composition des rotations orthogonales à I, toute opération sphérique changeant I en I, par des modifications successives des rotations composantes, peut être ramenée au produit de rotations *toutes* orthogonales à I). Mais U est le produit de deux transpositions circulaires de ∞^2 façons, on peut supposer que le cercle axe de l'une de ces transpositions soit orthogonal à J, en le faisant passer par les points limites du faisceau (I, J) : soit C ce cercle, soit C' le cercle conjugué de C par rapport à J, on a $J = CC'$. Donc

$$\mathfrak{T} = UJ = DC.CC' = DC',$$

D et C' étant deux transpositions circulaires. De ce résultat se déduit le théorème de Goursat-Bloch en utilisant les sphères de M. Hadamard pour le système de deux cercles réels D et C'.

B. En étudiant les cyclides de Dupin à quatre séries de cercles réels, qu'il y aurait lieu d'appeler *cyclides paratactiques* et qui sont les plus simples surfaces de la géométrie anallagmatique après les sphères, nous avons été conduits à considérer, pour une congruence paratactique donnée K, une famille de ∞^4 cycles qui lui est associée, savoir les cycles Γ tels qu'un cercle de K leur soit conjugué : ce sont aussi les cercles *caractéristiques* des sphères de l'espace; lorsqu'on transforme une telle sphère par les opérations paratactiques de K, elle enveloppe une cyclide paratactique. Les cycles de K passant par les divers points d'un « cercle caractéristique » Γ coupent Γ sous un même angle V (ne dépendant que de Γ).

C. *Étude d'un système de deux congruences paratactiques quelconques* K_1 *et* K_2 *de l'espace* (*congruences de cycles*). — Tout d'abord, pour que K_1 et K_2 aient en commun un cycle, il faut et il suffit que K_1 et K_2 soient « tangentiellement inverses » dans une certaine inversion (deux cycles sont dits tangentiellement inverses dans une inversion donnée *positive* lorsque le cycle *opposé à l'un d'eux* se déduit ponctuellement de l'autre par cette inversion : si l'inversion est négative il n'y a pas au contraire de différence entre deux cycles tangentiellement ou ponctuellement inverses) :

Dans le cas général, on peut déduire K_2 de K_1 par ∞^1 opérations conformes *simples* (ou produit de deux inversions). Quand K_1 et K_2 sont de même sens, ces opérations sont sphériques; quand K_1 et K_2 sont de sens contraires, ce sont des homothéties circulaires négatives. Le premier cas se subdivise en deux autres selon que toutes les opérations sphériques sont des rotations circulaires, et alors elles ont lieu autour des cercles passant par deux points fixes γ, γ', ou qu'elles contiennent les trois espèces d'opérations simples, rotations, homothéties ou, exceptionnellement, translations circulaires. Quand il y a des homothéties circulaires, le lieu de leurs points doubles est un cercle Γ; les cycles de K_1 et K_2 issus d'un même point de Γ sont tangents en ce point; Γ est d'ailleurs un des cercles communs aux familles F_1, F_2 de cercles *caractéristiques* (Γ_1 ou Γ_2) qui peuvent être associées, comme on a vu plus haut, à K_1 et K_2.

Plus généralement, il existe ∞^2 cercles communs aux deux familles F_1, F_2. En tout point m d'un tel cercle Γ', les tangentes positives aux cycles K_1 et K_2 issus de ce point forment, non seulement des angles constants V_1 et V_2 avec la demi-tangente en m à Γ', mais *entre elles* un angle constant, quand m varie sur Γ'.

D. Les problèmes consistant à construire des cycles paratactiques à plusieurs cycles donnés, effectifs ou réduits à des points, ont été posés pour la première fois par M. Hadamard (dans son article des *Nouvelles Annales* cité plus haut). Ils ne se laissent pas résoudre par les considérations précédentes et nous ont conduit à envisager une « géométrie cyclique » dont les objets sont les cycles et les relations à étudier celles de parataxie (le contact est un cas particulier de parataxie). Les congruences paratactiques, ou de contact (c'est-à-dire les familles de cycles ayant en un point donné une tangente positive donnée) sont les plus simples assemblages de cycles; il serait désirable cependant d'en définir de plus étendues, par voie réelle : citons la famille ∞^4 de cycles dont les premiers foyers sont sur une sphère imaginaire donnée S et dont les seconds foyers sont sur la sphère imaginaire conjuguée S_0.

Les « transformations cycliques » sont des transformations portant uniquement sur les objets précédents et conservant la parataxie de deux cycles; elles peuvent ramener certains cycles à des points.

L'étude systématique de ces transformations, par voie réelle anallagmatique, est un problème encore non abordé; leur représentation analytique, qui est la suivante, servira de guide. Soit T une transformation conforme de l'espace en lui-même, exprimée analytiquement, par exemple, par une substitution linéaire orthogonale sur les coordonnées pentasphériques $x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ d'un point, supposées telles que $\Sigma x_i^2 = 0$; les coefficients de T étant complexes, T dépend de 20 paramètres réels.

Soit T_0 la transformation conjuguée (c'est-à-dire telle que T et T_0 changent respectivement deux points imaginaires conjugués en deux points conjugués); si l'on transforme respectivement les foyers f, f_0 d'un cycle réel C par T et T_0, on obtient les points φ, φ_0 qui sont foyers d'un cycle réel Γ; cette transformation est cyclique, car une droite isotrope décrite par f (ou f_0) est changée par T (ou T_0) en une droite isotrope décrite par φ (ou φ_0).

Les plus simples transformations cycliques connues jusqu'à présent sont la *dilatation* des cycles (Petersen) et leur transformation par tangentes réciproques (Laguerre); généralisées par voie anallagmatique elles correspondent à des cas où T est une opération *simple*, mais n'ont guère été envisagées que pour les cycles d'un plan. Néanmoins une dilatation convenable permet de ramener le problème des cycles paratactiques à trois cycles donnés au problème plus simple où l'un, puis deux des cycles sont ponctuels.

Un cycle orthogonal à une sphère réelle $(x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0)$ a évidemment pour images ses deux traces sur cette sphère, qu'on distingue en orientant la sphère. Signalons qu'en prenant pour T l'homothétie de centre O(0, 0, 0) et de rapport i (donc pour T_0 l'homothétie analogue de rapport $-i$) le cycle est transformé (cycliquement) en un nouveau cycle dont les foyers sont sur la sphère imaginaire pure $x^2+y^2+z^2+1=0$, ou cycle orthogonal à une inversion *négative;* les images du cycle primitif peuvent servir d'images au nouveau cycle; cette représentation est identique à celle de M. B. Gambier; elle transforme une congruence de *contact* orthogonale à la sphère *réelle* en une congruence paratactique proprement dite orthogonale à la sphère imaginaire.

E. En cherchant à constituer une théorie des dilatations généralisées, nous avons reconnu l'utilité d'un lemme dont nous détaillerons prochainement une démonstration : lorsqu'on représente un cycle orthogonal à une sphère (réelle ou imaginaire pure, mais effective) par deux images [traces ou points (a, α) de M. Gambier selon le cas] la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait parataxie entre ce cycle et un cycle donné F *quelconque* de l'espace est que les deux images soient homologues dans une certaine opération *conforme* $\mathcal{T}$ transformant la sphère des images en elle-même avec *renversement* du sens des angles sur cette sphère. Réciproquement $\mathcal{T}$ peut être prise arbitrairement parmi les opérations de cette espèce, mais le cycle F qui lui correspond a 4 déterminations dont 2 réelles et 2 imaginaires conjuguées. Il y a donc correspondance entre les ∞^6 opérations conformes et les ∞^6 cycles de l'espace (non orthogonaux à la sphère pour que l'opération ne soit pas dégénérée).

Ceci permet de préciser la correspondance entre deux congruences paratactiques passant respectivement par deux cycles fixes et *unies* entre elles, c'est-à-dire ayant un cycle commun. Nous avons ainsi pu discuter complètement le problème des cycles paratactiques à trois cycles donnés.