JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. WEDENISSOFF

Sur les espaces métriques complets

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 9 (1930), p. 377-381.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1930_9_9__377_0>

Sur les espaces métriques complets ([1]);

PAR N. WEDENISSOFF.

(Moscou.)

Dans une Note publiée dans les *Comptes rendus* (t. 178, 1924, p. 185), M. P. Alexandroff a caractérisé au point de vue topologique les espaces métriques séparables complets de M. Fréchet ([2]). Il a donné aussi une définition topologique intrinsèque des ensembles G_δ situés dans de tels espaces. Ces résultats sont contenus dans les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Pour qu'un espace métrique séparable soit complet, il faut et il suffit que l'on puisse extraire de tout système déterminant* ([3]) *de cet espace un système déterminant clos* ([4]).

([1]) Après avoir achevé la démonstration des résultats ci-dessous (dont l'exposé a été lu au Séminaire topologique de M. Alexandroff en décembre 1926) j'apprends que M. Hausdorff est parvenu aux mêmes résultats en octobre 1926, sans les avoir publiés. Je tiens à mentionner en outre que M. Sierpinski a, lui aussi, obtenu des résultats équivalents (à paraître dans les *Fundamenta Mathematicæ*, t. XI).

([2]) On trouvera dans la Note citée de M. Alexandroff les définitions de toutes les notions élémentaires dont nous faisons usage dans le présent travail.

([3]) Le système $\gamma = \{V\}$ de sous-ensembles ouverts de l'espace (ou de l'ensemble) E est dit système *déterminant* de l'espace (ou de l'ensemble) E, si tout ensemble ouvert dans E peut être obtenu par réunion de certains ensembles du système γ.

([4]) Un système déterminant de l'espace E est appelé clos si, quelle que soit la suite décroissante de ce système : $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \ldots$, il y a des points communs à tous les $\overline{V}_n$ (où $\overline{V}_n$ désigne l'ensemble V_n augmenté de tous ses points d'accumulation). De même un système déterminant d'un ensemble M est clos, si pour toute suite décroissante d'ensembles de ce système : $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \ldots$ on a

$$M \prod_{n=1}^{\infty} \overline{V}_n \neq 0.$$

Théorème II. — *Pour qu'un ensemble M situé dans un espace métrique séparable complet soit un ensemble G_δ, il faut et il suffit que l'on puisse extraire de tout système déterminant de cet ensemble un système déterminant clos.*

Ces deux théorèmes ont pour conséquence le suivant :

Théorème III. — *Soit M un ensemble G_δ quelconque situé dans un espace séparable complet E; si l'on considère M comme espace relatif (par rapport à E), cet espace est nécessairement complet.*

La réciproque de cette proposition subsiste elle aussi; on a même plus : tout ensemble M (situé dans n'importe quel espace séparable E) est un G_δ dans E, si M considéré comme espace relatif est complet.

M. Hausdorff [1] a généralisé par un raisonnement direct le théorème III; il le démontre notamment sans supposer que l'espace est séparable.

Dans la présente Note je me propose d'étendre au cas des espaces métriques quelconques les théorèmes I et II; je remplace en outre le critère caractéristique qui figure dans ces théorèmes par une condition moins restrictive. J'obtiens ainsi les théorèmes suivants :

Théorème I. — *Pour qu'un espace métrique E soit complet, il faut et il suffit qu'il possède au moins un système déterminant clos.*

Théorème II. — *Pour qu'un ensemble M situé dans un espace métrique E soit un G_δ, il faut et il suffit qu'il possède un système déterminant clos.*

Nous démontrerons la suffisance de notre condition pour les ensembles G_δ en reproduisant avec de légères modifications un raisonnement de M. Sierpinski [2].

Soit M un ensemble possédant un système déterminant clos $\gamma = \{V\}$, ensemble situé dans un espace métrique quelconque E. Nous prouverons que M est un G_δ dans E.

Quels que soient le point $x \subset M$ et le nombre naturel n, il existe

---

(1) *Fund. Math.*, t. VI, p. 146.
(2) *Fund. Math.*, t. VI, p. 106.

un ensemble du système γ, $V_n(x)$ tel que $\delta[V_n(x)] < \frac{1}{n}$ (¹). $V_n(x)$ étant ouvert dans M, il existe une sphère $S_n(x, \delta_n)$ de rayon δ_n inférieur à $\frac{1}{n}$ et telle que $S_n(x, \delta_n).M \subset V_n(x)$. En posant :

$$G_n = \sum_{x \subset M} S_n(x, \delta_n),$$

on voit que G_n est un ensemble ouvert dans E. Démontrons qu'on a

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Comme on a évidemment $M \subset G_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, donc $M \subset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$, il suffit de démontrer que $M \supset \prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Soit en effet y un point de l'ensemble $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$. Le point y faisant partie de G_1, il existe un point $x_1 \subset M$, tel que $S_1(x_1, \delta_1) \supset y$. Soient σ_1 la distance $\rho(y, x_1)$, n_2 un nombre naturel supérieur à $\frac{2}{\delta_1 - \sigma_1}$. Le point y appartenant à G_{n_2}, on voit qu'il existe un point $x_2 \subset M$, tel que $S_{n_2}(x_2, \delta_{n_2}) \supset y$.

Pour tout point $z \subset V_{n_2}(x_2)$ on a

$$\rho(z, x_1) \leqq \rho(y, x_1) + \rho(y, x_2) + \rho(z, x_2) < \sigma_1 + \frac{2}{n_2} < \delta_1.$$

Il s'ensuit que

$$V_{n_2}(x_2) \subset S(x_1, \delta_1).M \subset V_1(x_1).$$

Posons $\sigma_2 = \rho(y, x_2) < \delta_{n_2}$ et choisissons $n_3 > \frac{2}{\delta_{n_2} - \sigma_2}$.

Il existe un point x_3 dans M, tel que $S_{n_3}(x_3, \delta_{n_3}) \supset y$, et l'on voit que

$$V_{n_3}(x_3) \subset S_{n_2}(x_2, \delta_{n_2}).M \subset V_{n_2}(x_2).$$

En procédant ainsi de suite on finit par obtenir une suite infinie d'ensembles :

$$V_1(x_1) \supset V_{n_2}(x_2) \supset V_{n_3}(x_3) \supset \ldots.$$

(¹) $\delta(P)$ désignant le diamètre de l'ensemble P.

Le système γ étant clos, il existe un point

$$x \subset \mathrm{M} \prod_{k=1}^{\infty} \overline{\mathrm{V}_{n_k}(x_k)}$$

et, comme les rayons des sphères $\mathrm{S}_1(x_1, \delta_1)$, $\mathrm{S}_{n_2}(x_2, \delta_{n_2})$, $\mathrm{S}_{n_3}(x_3, \delta_{n_3})$, ... tendent vers zéro, le point x coïncide avec y. On voit ainsi que $y \subset \mathrm{M}$.

C. Q. F. D.

Soit maintenant E un espace métrique possédant un système déterminant clos. D'après un résultat fondamental de M. Hausdorff [1], l'espace E peut être envisagé comme un sous-ensemble dense d'un espace métrique complet $\tilde{\mathrm{E}}$.

Notre condition (pour les ensembles G_δ) étant suffisante, on voit que E est un G_δ dans $\tilde{\mathrm{E}}$; il en résulte [d'après le résultat de M. Hausdorff cité p. 378 sous (1)] que E est lui-même un espace complet.

La suffisance de la condition du théorème I (pour les espaces complets) se trouve ainsi démontrée.

Soit maintenant $\gamma = \{ \mathrm{V} \}$ un système déterminant quelconque d'un espace complet E.

La démonstration des deux théorèmes sera achevée si nous prouvons que de γ on peut extraire un système déterminant clos.

Or cette dernière assertion est une conséquence immédiate du lemme suivant :

Quel que soit le système déterminant $\gamma = \{ \mathrm{V} \}$ d'un espace métrique E, on peut extraire de γ un système déterminant $\gamma^\star = \{ \mathrm{V}^\star \}$, vérifiant la condition suivante :

Si

$$\mathrm{V}_1^\star \supset \mathrm{V}_2^\star \supset \mathrm{V}_3^\star \supset \ldots$$

est une suite décroissante formée par des ensembles quelconques de $\gamma^\star$, on a nécessairement

$$\lim_{n \to \infty} \delta(\mathrm{V}_n^\star) = 0.$$

Soit en effet $\gamma_n = \{ \mathrm{V}^{(n)} \}$ l'ensemble de tous les ensembles ouverts du

---

(1) F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengelehre*, Leipzig, Veit, 1914. Chap. VIII.

système γ tels que

$$\frac{1}{n+1} \leq \delta(V^{(n)}) < \frac{1}{n}.$$

En vertu du théorème de M. Zermelo on peut ranger les ensembles de γ_n en une suite bien ordonnée

$$(1) \qquad V_1^n, \quad V_2^n, \quad V_3^n, \quad \ldots, \quad V_\omega^n, \quad \ldots, \quad V_\alpha^n, \quad \ldots, \quad \alpha < \Omega_\tau.$$

Soit maintenant $\gamma_n^\star$ le système d'ensembles ouverts qu'on obtient en enlevant de γ_n tous les ensembles V_α^n vérifiant la condition

$$V_\alpha^n \subset \sum_{\beta<\alpha} V_\beta^n.$$

Le système $\gamma^\star = \{V^\star\}$ obtenu par réunion de tous les $\gamma_n^\star$ est évidemment un système déterminant.

Soit de plus

$$V_1^\star \supset V_2^\star \supset V_3^\star \supset \ldots \supset V_k^\star \supset \ldots$$

une suite d'ensembles ouverts faisant partie de $\gamma^\star$. Il est impossible que tous les ensembles de cette suite appartiennent à un même γ_n. En effet supposons par impossible que les $V_k^\star (k = 1, 2, 3, \ldots)$ se trouvent tous parmi les V_α^n, n ayant une valeur fixe, d'ailleurs quelconque. Soient alors $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots$ les indices respectifs de $V_1^\star, V_2^\star, \ldots V_k^\star, \ldots$ dans (1).

Il résulte de notre construction que les α_k vont en décroissant, ce qui est impossible, toute suite décroissante de nombres ordinaux étant nécessairement finie.

Il résulte du raisonnement précédent qu'un système $\gamma_n^\star$ quelconque ne contient qu'un nombre fini (peut-être nul) de $V_k^\star$; les diamètres de ces derniers ensembles deviennent par conséquence infiniment petits avec $\frac{1}{k}$. C. Q. F. D.