JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HENRI CARTAN

Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 1-114.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique;

PAR HENRI CARTAN.

A tout système de deux nombres complexes x et y correspond un point d'un espace à quatre dimensions réelles. Deux domaines D et D′ de cet espace seront dits en correspondance analytique s'il existe un système de deux fonctions analytiques des variables complexes x et y,

$$x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y),$$

qui établit une correspondance *biunivoque* entre les points intérieurs des deux domaines; nous dirons aussi que D′ est un transformé analytique de D, ou encore que D se trouve représenté analytiquement sur D′. Nous dirons de façon précise, au Chapitre I, quelle sorte de domaines et quelle sorte de transformations nous envisagerons dans la suite.

Depuis le Mémoire de 1907, où Poincaré [1] a montré que deux

[1] *Les fonctions analytiques de deux variables complexes et la représentation conforme* (*Circolo Mat. di Palermo*, 23, 1907, p. 185-220).

domaines D et D′ ne peuvent pas toujours être mis en correspondance analytique, le problème de la représentation analytique semble n'avoir fait que de lents progrès jusqu'à ces toutes dernières années. L'une des difficultés consistait, il est vrai, à poser le problème; on peut, en gros, le formuler ainsi : « indiquer des règles générales permettant de reconnaître si deux domaines donnés peuvent être représentés analytiquement l'un sur l'autre, et trouver, d'autre part, des familles de domaines particuliers, caractérisés par des propriétés simples, de façon que tout autre domaine puisse se représenter analytiquement sur l'un de ces domaines particuliers. » Ce double problème n'est aujourd'hui que partiellement résolu.

Sans vouloir citer dès maintenant tous les travaux récents relatifs à la question, je me bornerai à trois d'entre eux. Dans le plus ancien, qui remonte à 1921, M. Reinhardt (1) a porté son attention sur une famille fort générale de domaines, qui comprend les domaines de convergence des séries de Taylor à deux variables; nous reparlerons (2) de ces domaines et des résultats de M. Reinhardt. Plus récemment, M. Carathéodory (3) a indiqué une méthode nouvelle permettant d'aborder le problème difficile de la représentation analytique, en même temps qu'il attirait l'attention sur des domaines plus généraux que les domaines de M. Reinhardt : les domaines *cerclés*. Enfin M. Bergmann est le fondateur d'une autre méthode (4), basée sur l'existence de systèmes orthogonaux complets de fonctions.

Dans le présent travail je ne ferai appel ni à la théorie de M. Carathéodory (5) ni à celle de M. Bergmann. Mon but est de résoudre, dans une certaine mesure, le problème de la représentation analytique pour tous les *domaines bornés qui admettent une infinité de transformations analytiques en eux-mêmes, laissant fixe un point intérieur.* Nous verrons

---

(1) *Ueber Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlichen* (*Math. Annalen*, **83**, 1921, p. 211-255).

(2) Chapitre II, § **3**; Chapitre IV, § **7**; Chapitre V, § **2**.

(3) Notamment : *Ueber die Geometrie der analytischen Abbildungen* (*Math. Sem. der Hamburg. Univ.*, **6**, 1928, p. 96-145).

(4) *Voir* surtout : *Ueber die Existenz von Repräsentantenbereichen* (*Math. Ann.*, **102**, 1929, p. 420-446).

(5) Sauf à la fin du Chapitre V.

au Chapitre IV que chacun de ces domaines peut se représenter analytiquement sur un domaine cerclé, semi-cerclé, ou inversement cerclé, ou, plus généralement, sur ce que nous appellerons un domaine (m, p) cerclé. Tous ces domaines seront définis et étudiés aux Chapitres II et III.

Dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1], j'ai énoncé sommairement quelques-uns des résultats exposés dans ce travail. Comme je le faisais prévoir, le théorème VII de cette Note n'est pas toujours exact; il est énoncé ici [2] avec toute la précision désirable.

En vue de faciliter la lecture, nous avons jugé utile de placer ici un Résumé succinct, par chapitre, des matières qui font l'objet du présent Mémoire.

RÉSUMÉ.

---

[1] *Les fonctions de deux variables complexes et les domaines cerclés de M. Carathéodory* (190, 1930, p. 354-356).

[2] Chapitre IV, théorème XX.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES DOMAINES ET LES TRANSFORMATIONS ANALYTIQUES.

1. Domaines. — Un domaine, dans l'espace des deux variables complexes x et y, sera pour nous un ensemble de points *intérieurs;* nous considérerons toujours les points frontières comme n'appartenant pas au domaine, et nous ne ferons aucune hypothèse sur la nature des frontières des domaines envisagés.

Nous ne considérerons que des domaines dont tous les points intérieurs sont à distance finie. Mais cela ne veut pas dire que nous ne nous occuperons que des domaines bornés : un domaine peut s'étendre à l'infini tout en n'étant composé que de points à distance finie. Nous n'envisagerons que des domaines *connexes*, mais nous ne ferons pas d'autre hypothèse sur la nature de nos domaines au point de vue de l'*analysis situs*.

La notion de *point intérieur à un domaine* D est claire si le domaine est *univalent* (*schlicht*) : le point x_0, y_0 sera dit intérieur à D s'il existe une hypersphère de centre x_0, y_0 dont tous les points appartiennent à D.

Un domaine n'est pas univalent lorsqu'il existe des points différents du domaine qui ont les mêmes coordonnées dans l'espace. Mais un domaine non univalent peut être univalent au voisinage de chacun de ses points; dans ce cas, la définition d'un point intérieur est la même que précédemment; nous dirons alors que le domaine *n'est pas ramifié*.

Nous envisagerons également des domaines ramifiés. Mais nous devons dire quelles sortes de ramifications nous envisagerons, et définir, de façon précise, un point *intérieur* à un domaine ramifié, dans le cas où ce point x_0, y_0 se trouve sur une variété de ramification. Nous supposerons que le voisinage du point x_0, y_0 peut être mis en correspondance biunivoque avec un domaine univalent de l'espace (u, v), contenant l'origine, à l'aide de deux fonctions holomorphes des deux variables complexes u et v,

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v),$$
$$[f(0, 0) = x_0, \; g(0, 0) = y_0],$$

et cela de façon qu'à tout système de valeurs données à x et y, voisines respectivement de x_0 et y_0, corresponde un nombre *fini* de systèmes de valeurs pour u et v. Si les fonctions x et y reprennent toutes deux les mêmes valeurs en deux points différents de l'espace (u, v), les points corrrespondants seront considérés comme deux points différents du domaine D. Les variables u et v seront dites *variables uniformisantes*.

Si le déterminant fonctionnel $\frac{D(f, g)}{D(u, v)}$ s'annule pour $u = v = 0$, il s'annule sur une ou plusieurs variétés caractéristiques passant par le point $u = v = 0$. Les transformées de ces variétés, dans l'espace (x, y), sont des variétés caractéristiques intérieures à D; ce sont des *variétés de ramification* pour D.

2. Le problème de l'inversion d'une transformation analytique (1). —

(1) *Voir* Osgood. *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. II, p. 137 et suiv.

Voici le problème : étant données deux fonctions

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v),$$

holomorphes au voisinage de $u = v = 0$, et nulles pour $u = v = 0$, exprimer, si c'est possible, u et v en fonction de x et y au voisinage de $x = y = 0$.

Rappelons d'abord le théorème classique de Weierstrass, en l'appliquant au cas de trois variables complexes : « si $F(x, y, z)$ est holomorphe au voisinage de $x = y = z = 0$, si elle est nulle pour $x = y = z = 0$, et *si* $F(0, 0, z)$ *n'est pas identiquement nulle*, alors $F(x, y, z)$ peut se mettre sous la forme

$$F(x, y, z) = P(z; x, y)\, F_1(x, y, z),$$

$F_1(x, y, z)$ étant holomorphe et non nulle au voisinage de $x = y = z = 0$, et $P(z; x, y)$ étant un polynome en z dont les coefficients sont des fonctions de x et y, holomorphes au voisinage de $x = y = 0$, nulles pour $x = y = 0$ ».

Cela posé, nous pouvons toujours supposer $f(0, v)$ et $g(0, v)$ non identiquement nulles, en effectuant au besoin une substitution linéaire convenable sur u et v. En effet, les fonctions $f(u, v)$ et $g(u, v)$ s'annulent sur un nombre *fini* de variétés caractéristiques passant par $u = v = 0$, et l'on peut donc trouver une variété

$$au + bv = 0,$$

sur laquelle aucune des fonctions $f(u, v)$ et $g(u, v)$ ne s'annule (sauf à l'origine $u = v = 0$).

Ce point étant admis, appliquons le théorème de Weierstrass à la fonction

$$x - f(u, v),$$

qui n'est pas identiquement nulle pour $x = u = 0$. Il vient

$$x - f(u, v) = P(v; x, u)\, F_1(x, u, v),$$

et, de même,

$$y - g(u, v) = Q(v; y, u)\, G_1(y, u, v).$$

Les équations

$$(1) \qquad x = f(u, v), \qquad y = g(u, v)$$

peuvent donc s'écrire, si x, y, u et v sont assez petits,

$$(2) \qquad P(v; x, u) = 0, \qquad Q(v; y, u) = 0.$$

P et Q, qui sont des polynomes en v, admettent un résultant $R(x, y, u)$, qui est une fonction holomorphe des trois variables x, y, u au voisinage de $x = y = u = 0$, nulle pour $x = y = u = 0$. L'élimination de v entre les équations (2) donne l'équation

$$(3) \qquad R(x, y, u) = 0.$$

Appliquons de nouveau le théorème de Weierstrass : *si* $R(0, 0, u)$ *n'est pas identiquement nul*, l'équation (3) peut s'écrire

$$(4) \qquad u^m + a_1 u^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

les a_i étant des fonctions holomorphes de x et y, nulles pour $x = y = 0$.

L'équation (4) donne m valeurs pour u en fonction de x et y; les équations (2) ont alors une ou plusieurs racines communes en v, qui sont elles-mêmes racines d'une équation algébrique de la même forme que l'équation (4). Remarquons que le nombre des solutions (u, v) ne dépend pas des valeurs données à x et y.

Nous avons dû écarter le cas où l'on aurait

$$R(0, 0, u) = 0.$$

S'il en était ainsi, les équations (2), ou (1), auraient toujours au moins une racine commune en v, lorsque x et y sont nuls, quel que soit u voisin de zéro; v serait fonction de u. C'est dire que *les relations*

$$f(u, v) = 0, \qquad g(u, v) = 0$$

auraient lieu sur toute une variété caractéristique passant par $u = v = 0$. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit d'ailleurs que les relations précédentes aient lieu en une infinité de points s'accumulant au voisinage de $u = v = 0$.

Pour écarter une telle éventualité, il suffit de poser la condition suivante : *dans un voisinage assez restreint de l'origine* $u = v = 0$, *les fonctions* $f(u, v)$ *et* $g(u, v)$ *ne s'annulent pas simultanément en dehors de l'origine.*

Remarquons que si $f(u, v)$ et $g(u, v)$ s'annulent, et, d'une façon générale, sont toutes deux constantes ($f=a$, $g=b$) sur une même variété V, le déterminant fonctionnel $\frac{D(f, g)}{D(u, v)}$ s'annule sur cette variété. En effet, d'après le théorème de Weierstrass, les fonctions f et g peuvent se mettre sous la forme

$$f-a=\varphi f_1, \qquad g-b=\varphi g_1,$$

$\varphi(u, v)$ étant nulle sur V, f_1 et g_1 étant holomorphes. On voit immédiatement que φ se met en facteur dans $\frac{D(f, g)}{D(u, v)}$. C. Q. F. D.

Conséquence. — Les variétés sur lesquelles $f(u, v)$ et $g(u, v)$ sont simultanément constantes sont *isolées*, sauf si les fonctions f et g ne sont pas indépendantes.

Appliquons ce qui précède à un domaine de l'espace (x, y), considéré au voisinage d'un point de ramification x_0, y_0. Par définition, il existe un système de deux variables uniformisantes u et v. On voit maintenant comment u et v peuvent inversement s'exprimer en fonctions de x et y.

Pourquoi avons-nous choisi la définition, donnée au paragraphe **1**, du voisinage d'un domaine autour d'un point de ramification? Pourquoi n'avons-nous pas, plus généralement, défini ce voisinage comme étant le domaine d'existence d'une fonction z de x et y, racine d'une équation algébrique à coefficients holomorphes en x et y? Parce qu'il n'est pas toujours possible d'établir une correspondance analytique biunivoque entre un tel voisinage et un voisinage univalent, comme je le montrerai dans un autre travail.

3. Fonctions uniformes dans un domaine. — Je dis qu'une fonction $f(x, y)$, holomorphe ou méromorphe, est uniforme au voisinage d'un point x_0, y_0 d'un domaine D, si elle peut s'exprimer à l'aide d'une fonction uniforme (holomorphe ou méromorphe) des deux variables uniformisantes u et v.

Une fonction $f(x, y)$ sera dite uniforme dans le domaine D tout entier, si elle se laisse prolonger analytiquement dans tout le domaine D, au voisinage de chaque point duquel elle est supposée uniforme, et si, de quelque façon qu'on effectue son prolongement le long d'une courbe fermée C, intérieure à D, elle revient à sa détermination initiale.

Précisons : si le domaine D n'est pas univalent, une courbe peut être *fermée dans l'espace* sans être *fermée dans le domaine;* dans la définition précédente, nous n'avons envisagé que des courbes C *fermées dans le domaine* D. Précisons maintenant la notion de *détermination* d'une fonction : nous dirons que deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ ont la même détermination en un point x_0, y_0 d'un domaine, si elles coïncident dans tout le voisinage de ce point.

Pour que deux fonctions *holomorphes* $f(x, y)$ et $g(x, y)$ aient la même détermination en un point x_0, y_0, il faut et il suffit qu'elles admettent le même développement en série double de Taylor au voisinage de ce point, ou, ce qui revient au même, que toutes leurs dérivées partielles de tous les ordres soient respectivement égales en x_0, y_0. En disant cela, nous supposons, il est vrai, que le point x_0, y_0 n'est pas un point de ramification pour le domaine d'existence des fonctions f et g; mais on peut toujours se ramener à ce cas à l'aide de deux variables uniformisantes u et v.

Il existe évidemment toujours des fonctions holomorphes dans un domaine quelconque D, ne serait-ce que x ou y. Mais, si le domaine D n'est pas univalent, une fonction telle que x possède la même détermination en deux points de D qui ont les mêmes coordonnées. Posons-nous alors le problème suivant : étant donnés un domaine D non univalent, et deux points M et M' de ce domaine qui ont les mêmes coordonnées, trouver une fonction $f(x, y)$, *holomorphe* et *uniforme* dans le domaine D tout entier, possédant en M et M' deux déterminations différentes. Nous verrons, dès le Chapitre suivant (§ 1), que *le problème précédent n'est pas toujours possible*. Cela nous conduit à faire la convention suivante, que nous désignerons par « *convention* [A] » dans tout le reste de ce travail : « *Un domaine* D *étant défini* a priori, *si deux points* M *et* M' *de ce domaine, qui ont les mêmes coordonnées, sont tels que toute fonction* $f(x, y)$, *holomorphe et uniforme dans* D, *possède la même détermination en* M *et en* M', *nous conviendrons de considérer dorénavant les points* M *et* M' *comme un seul et même point du domaine* D. »

Ainsi, un domaine étant défini *a priori*, on peut avoir à modifier la définition de ce domaine, si on veut le regarder comme un domaine d'existence de fonctions holomorphes. *Tous les domaines envisagés dans la suite seront supposés satisfaire à la convention* [A].

Voici une conséquence immédiate de la convention [A]. Partons d'un point M, intérieur au domaine D, et décrivons une courbe C, intérieure à D, et revenant en un point M' qui coïncide avec M *dans l'espace*. Si toute fonction, holomorphe et uniforme dans D, revient à la même détermination lorsqu'on la prolonge le long de C, alors la courbe C est *fermée dans le domaine* D.

4. Les transformations analytiques d'un domaine. — Soit D un domaine de l'espace (x, y), et soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux fonctions holomorphes (¹) dans D. La transformation

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y)$$

fait correspondre à tout point x, y, intérieur à D, un point X, Y, et au domaine D un domaine Δ de l'espace X, Y (cette dernière assertion sera précisée dans un instant). Le domaine Δ sera dit *transformé analytique* du domaine D. Si la convention [A] n'était pas respectée pour le domaine D, alors à deux points distincts du domaine D correspondrait toujours un seul et même point X, Y; on n'aurait donc aucun intérêt à considérer ces points comme distincts. C'est là la justification véritable de la convention [A].

Relativement aux fonctions $f(x,y)$ et $g(x,y)$, nous ferons la convention suivante, que nous appellerons dorénavant *convention* [B] : « a et b désignant des constantes quelconques, les équations

$$f(x, y) = a, \qquad g(x, y) = b$$

ne sont vérifiées qu'en des points x, y *isolés* intérieurs au domaine D ». *Nous excluons ainsi le cas où les fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ seraient simultanément constantes sur une variété caractéristique intérieure à* D.

Toutes les transformations analytiques que nous envisagerons devront satisfaire à la convention [B].

Il reste à justifier cette convention. Supposons d'abord qu'elle soit

(¹) Lorsque nous ne précisons pas, nous n'envisageons que des fonctions *uniformes* dans le domaine D.

respectée. Alors nous aurons le droit de dire que $f(x, y)$ *et* $g(x, y)$ *engendrent un domaine* Δ lorsque le point x, y décrit D. Soient en effet x_0, y_0 un point intérieur à D, et X_0, Y_0 le point correspondant. Il existe, dans le voisinge du point x_0, y_0 du domaine D, un système de deux variables uniformisantes u et v; alors X et Y s'expriment en fonctions de u et v, et ces fonctions satisfont à la condition posée (§ **1**) pour que u et v servent de variables uniformisantes pour le voisinage de X_0, Y_0 dans Δ.

Supposons maintenant que la convention [B] ne soit pas respectée. Prenons d'abord un exemple :

$$X = x, \qquad Y = xy.$$

On a ici $X = Y = 0$ si $x = 0$, quel que soit y. On a inversement

$$x = X, \qquad y = \frac{Y}{X}.$$

Cherchons le transformé du domaine D

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1.$$

C'est le domaine Δ

$$|X| < 1, \qquad |Y| < |X|.$$

A tous les points

$$x = 0, \qquad |y| < 1,$$

intérieurs à D, correspond un point unique

$$X = 0, \qquad Y = 0,$$

qui est un point *frontière* de Δ. Ainsi les domaines D et Δ sont univalents, mais la correspondance n'est pas biunivoque entre les points *intérieurs* des domaines : l'intérieur de Δ correspond à l'intérieur du domaine D *privé de la variété* $x = 0$.

Une circonstance analogue se présente dans le cas général : *si l'on a*

$$f(x, y) = a, \qquad g(x, y) = b$$

en tous les points d'une variété caractéristique V *intérieure à* D, *le point*

$$X = a, \qquad Y = b$$

est un point frontière du domaine Δ *engendré par les fonctions* f *et* g.

En effet, supposons d'abord que Δ soit univalent; si le point $X = a$, $Y = b$ était un point intérieur, x et y seraient des *fonctions holomorphes* de X et Y au voisinage de ce point, qui devrait être lui-même un *point d'indétermination*. C'est impossible.

Si Δ n'est pas univalent, et si le point $X = a$, $Y = b$ est intérieur à Δ, on peut, *par définition*, représenter le voisinage de ce point sur un voisinage univalent, et l'on est ramené au cas précédent.

En résumé, la convention [B] est *essentielle*; si on ne la faisait pas, on laisserait échapper, sans s'en apercevoir, des variétés intérieures au domaine D, lorsqu'on transformerait D en un autre domaine Δ.

CHAPITRE II.

LES DOMAINES CERCLÉS.

I. LES FONCTIONS HOLOMORPHES OU MÉROMORPHES DANS UN DOMAINE CERCLÉ.

Définition. — J'appelle *domaine cerclé* de centre (a, b) *un domaine connexe* D *qui satisfait aux conditions suivantes :*

1° *Le point $x = a$, $y = b$ est intérieur à* D;

2° *Si le point $x = a + x_0$, $y = b + y_0$ appartient à* D, *le point $x = a + x_0 e^{i\theta}$, $y = b + y_0 e^{i\theta}$ appartient aussi à* D, *quel que soit le nombre réel* θ.

Nous nous bornerons dans la suite aux *domaines cerclés ayant pour centre l'origine* ($a = b = 0$).

Relativement aux domaines cerclés non univalents, nous ferons les deux conventions suivantes :

1° L'origine (centre) n'est pas un point de ramification pour le domaine D;

2° x_0, y_0 désignant un point quelconque de D, la courbe

$$x = x_0 e^{i\theta}, \qquad y = y_0 e^{i\theta},$$

obtenue en faisant varier θ de 0 à 2π, est *fermée dans le domaine* D. Il en résulte, en particulier, que si l'on effectue, le long de cette courbe, le prolongement analytique d'une fonction $f(x, y)$ uniforme dans D, elle doit revenir à la même détermination lorsque le point x, y revient à son point de départ x_0, y_0.

Si le point x_0, y_0 est un point de ramification, le point $x = x_0 e^{i\theta}$, $y = y_0 e^{i\theta}$ est aussi un point de ramification. Comme les variétés de ramification sont analytiques, ce sont nécessairement des variétés $\frac{y}{x} = \text{const.}$

Même si l'on se borne aux domaines univalents, les domaines cerclés, tels qu'ils viennent d'être définis, sont un peu plus généraux que ceux considérés par M. Carathéodory. Nous réserverons à ces derniers le nom de domaines cerclés *étoilés*.

Définition. — Un domaine D est dit *cerclé étoilé* lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes :

1° *L'origine est intérieure à* D ;

2° *Si le point* $x = x_0$, $y = y_0$ *appartient à* D, *le point* $x = kx_0$, $y = ky_0$ *appartient aussi à* D, *quel que soit le nombre complexe k de module inférieur ou égal à un.*

Un domaine cerclé étoilé, non ramifié à l'origine, est nécessairement *univalent* et *simplement connexe* (c'est-à-dire homéomorphe à une hypersphère).

Comme l'a montré M. Carathéodory (*loc. cit.*), tout domaine cerclé D peut se représenter à l'aide d'une image I dans l'espace à trois dimensions réelles x_1, x_2, y $(x_1 + ix_2 = x)$. En effet, à tout point

$$x = re^{i\alpha}, \qquad y = r'e^{i\alpha'} \qquad (r \geqq 0,\ r' \geqq 0)$$

intérieur à D, correspondent deux points,

$$x = re^{i(\alpha-\alpha')}, \qquad y = r'$$

et

$$x = -re^{i(\alpha-\alpha')}, \qquad y = -r',$$

qui appartiennent aussi à D. Ce sont deux points de l'espace (x_1, x_2, y) symétriques par rapport à l'origine. Au domaine D tout entier correspond ainsi un domaine I de l'espace (x_1, x_2, y). L'origine est un point intérieur à I et un centre de symétrie. En outre, la section de I par $y = 0$ se compose de cercles et de couronnes centrées à l'origine.

Réciproquement, à tout domaine I de l'espace (x_1, x_2, y), qui satisfait aux trois conditions précédentes, correspond un domaine cerclé D et un seul. On voit ainsi de quel arbitraire dépend un domaine cerclé.

Les domaines D et I sont à la fois univalents ou non univalents. Si le domaine D admet des variétés de ramification $\frac{y}{x} =$ const., le domaine I se ramifie autour de segments de droite, passant en direction par l'origine (l'origine elle-même n'étant pas un point de ramification par hypothèse), et réciproquement.

Nous plaçant au point de vue de la théorie des fonctions, nous allons maintenant appliquer la convention [A] (¹) aux domaines cerclés. Nous établirons le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si deux points d'un domaine cerclé* D *coïncident avec un même point de l'espace, toute fonction $f(x, y)$, méromorphe et uniforme dans* D, *possède la même détermination en ces deux points.*

Si l'on applique la convention [A], ce théorème peut encore s'énoncer ainsi : *Tout domaine cerclé est univalent.*

2. DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION HOLOMORPHE DANS UN DOMAINE CERCLÉ. — Avant d'établir le théorème I dans le cas où $f(x, y)$ est méromorphe, nous allons d'abord nous limiter au cas où $f(x, y)$ est *holomorphe* (cela suffit d'ailleurs pour que la convention [A] entre en vigueur).

Nous montrerons le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Toute fonction $f(x, y)$, holomorphe et uniforme dans un domaine cerclé* D, *est développable en série de polynomes homogènes*

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y)$$

uniformément convergente au voisinage de tout point intérieur à D.

(¹) Chapitre I, § 3.

Il en résulte évidemment que si deux points du domaine D ont les mêmes coordonnées x et y, $f(x, y)$ possède la même détermination en ces deux points.

Avant d'aborder la démonstration du théorème II, faisons quelques remarques. Ce théorème avait été établi en 1906 par M. Hartogs [1], *dans le cas où le domaine cerclé* D *est étoilé* (et par suite univalent). Inversement, du théorème énoncé ici nous tirons la conséquence suivante :

Si une fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans un domaine cerclé D (*forcément univalent*), *elle est aussi holomorphe dans le plus petit domaine cerclé étoilé* Δ *contenant* D. Le domaine Δ est défini de la façon suivante : c'est l'ensemble des points $x = kx_0$, $y = ky_0$ ($|k| \leq 1$), x_0, y_0 étant un point quelconque de D. Il est clair, en effet, que si la série $\Sigma P_n(x, y)$ converge uniformément au voisinage de x_0, y_0, elle converge aussi uniformément au voisinage de $x = kx_0$, $y = ky_0$ ($|k| \leq 1$); sa somme $f(x, y)$ est donc une fonction holomorphe au voisinage de ce dernier point.

C. Q. F. D.

Passons à la démonstration du théorème II.

Montrons d'abord que le développement envisagé est possible d'une façon au plus. Soit en effet

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y),$$

avec

$$P_n(x, y) = \sum_{p=0}^{p=n} a_{n-p,p}\, x^{n-p} y^p.$$

Puisque, par hypothèse, la série converge uniformément au voisinage de l'origine, on peut différentier un nombre quelconque de fois par rapport à x et y, ce qui donne immédiatement

$$a_{n-p,p} = \frac{1}{p!\,(n-p)!} \frac{\partial^n f(0, 0)}{\partial x^{n-p}\, \partial y^p}.$$

---

[1] *Ueber analytische Funktionen mehrerer unabh. Veränd.* (*Math. Ann.* 62, 1906, p. 1-88). *Voir* le paragraphe II.

Les coefficients $a_{n-p,p}$ sont donc bien déterminés ; ils ne sont autres que les coefficients du développement de $f(x, y)$ en série double de Taylor.

Cela posé, soit r un nombre réel plus grand que *un*, mais aussi voisin de *un* que l'on voudra, et soit D_r le domaine homothétique du domaine D par rapport à l'origine dans le rapport $\frac{1}{r}\cdot$ Lorsque le point x, y est intérieur à D_r, le point de coordonnées $rxe^{i\theta}$, $rye^{i\theta}$ est intérieur à D. Considérons l'intégrale

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(xz, yz)\frac{dz}{z-1},$$

dans laquelle la variable complexe z décrit la circonférence C_r, de centre origine et de rayon r. C'est une fonction holomorphe et uniforme des deux variables complexes x et y, lorsque le point x, y appartient à D_r. Or l'origine est intérieure à D_r ; donc $F(x, y)$ est holomorphe au voisinage de l'origine, comme $f(x, y)$ d'ailleurs. Mais, si le point x, y est fixé et assez voisin de l'origine, la fonction

$$f(xz, yz) = \varphi(z)$$

est holomorphe pour $|z| \leqq r$, et l'on a par suite

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \varphi(z)\frac{dz}{z-1} = \varphi(1) = f(x, y).$$

Les fonctions $f(x, y)$ et $F(x, y)$, qui coïncident au voisinage de l'origine, admettent le même domaine d'existence, et elles coïncident dans tout ce domaine. En particulier, $f(x, y)$ est holomorphe et uniforme dans D_r, et l'on peut écrire

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(xz, yz)\frac{dz}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(xz, yz)\frac{dz}{z^{n+1}}\right],$$

la série étant uniformément convergente lorsque le point x, y est voisin d'un point quelconque intérieur à D_r. Posons

$$(1) \qquad P_n(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(xz, yz)\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

$P_n(x, y)$ est une fonction holomorphe et uniforme dans D_r, et l'on obtient le développement suivant

$$(2)\qquad f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x,y),$$

uniformément convergent au voisinage de tout point intérieur à D_r.

Mais on a

$$P_n(xe^{i\alpha}, ye^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(xze^{i\alpha}, yze^{i\alpha})\frac{dz}{z^{n+1}},$$

ou, en posant $ze^{i\alpha}=t$,

$$P_n(xe^{i\alpha}, ye^{i\alpha}) = \frac{e^{in\alpha}}{2\pi i}\int_{C_r} f(xt, yt)\frac{dt}{t^{n+1}} = e^{in\alpha}P_n(x,y).$$

Il en résulte que P_0 est une constante, et $P_n(x,y)$ un polynome homogène de degré n. Pour le voir, il suffit de différentier un nombre quelconque de fois l'identité

$$P_n(xe^{i\alpha}, ye^{i\alpha}) = e^{in\alpha}P_n(x,y),$$

et de faire $x=y=0$ dans les relations obtenues.

Les polynomes $P_n(x,y)$ que nous venons de trouver *ne dépendent pas de la valeur donnée à* r, puisque le développement de $f(x,y)$ en série de polynomes homogènes n'est possible que d'une seule façon au voisinage de l'origine.

Ainsi la série (2) converge uniformément au voisinage de tout point de D_r, quel que soit r plus grand que *un*; elle converge donc uniformément au voisinage de tout point de D, et le théorème II est établi.

On a

$$(3)\qquad P_n(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(xe^{i\vartheta}, ye^{i\vartheta})\,d\vartheta,$$

comme on le voit en considérant la relation (1), et en faisant rendre r vers l'unité. La relation (3) est fort importante; on en déduit immédiatement l'inégalité

$$|P_n(x_0, y_0)| \leqq \max|f(x_0e^{i\vartheta}, y_0e^{i\vartheta})|, \qquad (0\leqq\vartheta\leqq 2\pi),$$

qui généralise l'inégalité de Cauchy

$$|a_n x_0^n| \leqq \max|f(x_0e^{i\vartheta})|, \qquad (0\leqq\vartheta\leqq 2\pi),$$

relative au développement d'une fonction d'une variable, holomorphe dans un cercle.

Remarque. — Soit Δ le plus petit domaine cerclé étoilé contenant le domaine cerclé D (qui est univalent, d'après ce qui précède). Comme nous l'avons vu, si $f(x, y)$ est holomorphe dans D, elle est holomorphe dans Δ. Je dis que *si une fonction méromorphe $f(x, y)$ ne prend pas la valeur a dans* D, *elle est méromorphe dans Δ et n'y prend pas la valeur a*. En effet, la fonction

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{f(x, y) - a}$$

est holomorphe dans D, donc dans Δ. C. Q. F. D.

En particulier, si l'inégalité

$$|f(x, y)| < M$$

a lieu dans le domaine D, elle a aussi lieu dans le domaine Δ.

3. Les domaines de Reinhardt. — Avant d'aborder la démonstration du théorème I pour une fonction méromorphe, disons quelques mots sur une classe remarquable de domaines cerclés.

Un domaine connexe D est un *domaine de Reinhardt* lorsqu'il satisfait aux conditions suivantes :

1° *L'origine* (*centre*) *est intérieure à* D;

2° *Si le point $x = x_0$, $y = y_0$ appartient à* D, *le point*

$$x = x_0 e^{i\alpha}, \qquad y = y_0 e^{i\beta}$$

appartient aussi à D, *quels que soient les nombres réels α et β.*

Tout domaine de Reinhardt est cerclé, et par suite *univalent* si l'on applique la convention [A]. L'image I d'un domaine de Reinhardt, dans l'espace (x_1, x_2, y), est de révolution autour de l'axe Oy; réciproquement, si l'image d'un domaine cerclé est de révolution autour de Oy, le domaine est un domaine de Reinhardt.

Les domaines considérés effectivement par M. Reinhardt dans son Mémoire déjà cité sont un peu plus particuliers. Nous les appellerons ici des *domaines de Reinhardt complets.*

Un domaine D est un *domaine de Reinhardt complet* lorsqu'il satisfait à la condition suivante : si le point x_0, y_0 appartient à D, le domaine

$$|x| \leqq |x_0|, \qquad |y| \leqq |y_0|$$

appartient aussi à D. Par exemple, le domaine de convergence d'une série double de Taylor est un domaine de Reinhardt complet.

Je ne sais si le théorème suivant a jamais été énoncé dans le cas d'un domaine de Reinhardt quelconque :

Théorème III. — *Toute fonction $f(x, y)$, holomorphe et uniforme dans un domaine de Reinhardt* D, *est développable en série double de Taylor*

$$f(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n,$$

uniformément convergente au voisinage de tout point intérieur à D.

La démonstration est analogue à celle du théorème II. On remarque d'abord que le développement est possible d'une façon au plus. On envisage ensuite l'intégrale double

$$F(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int_{C_r}\int_{\Gamma_r} f(xz, yt)\frac{dz\,dt}{(z-1)(t-1)},$$

C_r et Γ_r désignant respectivement les circonférences $|z| = r$ et $|t| = r (r > 1)$.

Le raisonnement s'achève sans la moindre difficulté.

Corollaire. — *Si $f(x, y)$ est holomorphe dans un domaine de Reinhardt* D, *elle est aussi holomorphe dans le plus petit domaine de Reinhardt complet* Δ *contenant* D. Le domaine Δ est le domaine formé de l'ensemble des domaines

$$|x| \leqq |x_0|, \qquad |y| \leqq |y_0|,$$

x_0, y_0 étant un point quelconque de D.

Le théorème bien connu de M. Hartogs : « Si $f(x, y)$ est holomorphe pour

$$|x| < \varepsilon, \qquad |y| < 1,$$

et aussi pour

$$|x| < 1, \qquad 1 - \varepsilon' < |y| < 1,$$

elle est holomorphe pour

$$|x| < 1, \qquad |y| < 1 \text{ »}$$

n'est qu'un cas particulier de notre corollaire.

Ce corollaire se complète de la façon suivante : si une fonction méromorphe $f(x, y)$ ne prend pas la valeur a dans D, elle ne prend pas la valeur a dans Δ ; si l'inégalité

$$|f(x, y)| < M$$

a lieu dans D, elle a lieu aussi dans Δ.

4. Les fonctions méromorphes dans un domaine cerclé. — Arrivons enfin à la démonstration du théorème I. Nous allons établir le théorème plus précis suivant :

Théorème I *bis*. — *Soit* D *un domaine cerclé; soit* Δ *le plus petit domaine cerclé étoilé (univalent) contenant* D, *c'est-à-dire le domaine constitué par l'ensemble des points*

$$x = kx_0, \qquad y = ky_0 \qquad (|k| \leqq 1),$$

le point x_0, y_0 *étant un point quelconque de* D. *Toute fonction* $f(x, y)$, *méromorphe et uniforme dans* D, *est aussi méromorphe et uniforme dans* Δ.

Observons que tout point de D appartient à Δ; mais deux points distincts de D, s'ils ont les mêmes coordonnées, ne font qu'un seul et même point de Δ. C'est du moins de cette façon qu'il faut entendre la définition qui vient d'être donnée du plus petit domaine cerclé étoilé Δ contenant D.

Pour établir le théorème I *bis*, il suffit de démontrer la proposition suivante : *Si* $M(\xi, \eta)$ *est un point quelconque de* D, *mais non un point de ramification, la fonction méromorphe* $f(x, y)$ *peut se prolonger depuis le centre jusqu'au point* ξ, η *le long du segment de droite*

$$x = t\xi, \qquad y = t\eta \qquad (t \text{ réel}, 0 \leqq t \leqq 1).$$

Il résultera de là, en effet, que $f(x, y)$ est méromorphe et uniforme dans Δ, sauf peut-être au voisinage des variétés de ramification de D. Or, par hypothèse, $f(x, y)$ admet ces variétés comme singularités algébriques, et elle a une valeur bien déterminée en chaque point de la variété elle-même. Puisque, d'autre part, elle est uniforme au voisinage, elle est régulière sur ces variétés, et par suite dans le domaine Δ tout entier. C. Q. F. D.

Pour démontrer la proposition annoncée, nous aurons à nous servir d'un théorème de MM. Hartogs et Levi ([1]), qui peut s'énoncer ainsi :

Si $f(x, y)$ est méromorphe et uniforme pour

$$||x| - u| < \rho, \qquad |y| < \rho',$$

et pour

$$|x| < \rho + u, \qquad |y| < \eta, \qquad (u, \rho, \rho', \eta \text{ positifs}, \eta < \rho'),$$

elle est aussi méromorphe et uniforme pour

$$|x| < \rho + u, \qquad |y| < \rho'.$$

Cela posé, voici la marche que nous allons suivre. Joignons M au centre O par une courbe C tout entière intérieure à D, ne rencontrant aucune des variétés de ramification du domaine D ([2]). Si le nombre positif R est assez petit, tout point P de la courbe C est le centre d'une hypersphère $\Sigma(P)$, de rayon R, tout entière intérieure à D. Nous définirons dans un instant une suite finie de points pris sur C,

$$O, \quad M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_n, \quad M,$$

et une suite de domaines $D_0, D_1, \ldots, D_n$, satisfaisant aux conditions suivantes : D_0 est intérieur à $\Sigma(O)$ et contient O et M_1 ; D_1 est intérieur à $\Sigma(M_1)$ et contient M_1 et M_2, ... ; D_n est intérieur à $\Sigma(M_n)$ et contient M_n et M. Puis nous montrerons par récurrence que $f(x, y)$ est méromorphe et uniforme dans le domaine formé de Δ_p et d'un certain voisinage de l'origine ; Δ_p désigne l'ensemble des points

$$x = kx_0, \qquad y = ky_0 \qquad (|k| \leqq 1),$$

([1]) *Voir*, par exemple, E. E. Levi, *Studii sui punti singolari essenziali*, etc. (*Annali di Matem.*, 3e série, 17, 1910, p. 61-87 ; *voir* § 8).

([2]) C'est possible, comme on le voit en considérant l'image I du domaine D dans l'espace (x_1, x_2, y).

x_0, y_0 étant un point quelconque de D. La proposition annoncée sera alors établie.

Je pose

$$r = \frac{R}{\sqrt{5}},$$

et j'assujettis toutes les distances OM_1, M_1M_2, ..., M_nM à être inférieures à $\frac{r}{2}$; je puis bien trouver sur la courbe C un nombre fini de points M_1, M_2, ..., M_n, tels qu'il en soit ainsi. Soient x_p et y_p les coordonnées du point M_p. Si $|x_p| \geqq |y_p|$, je prends pour D_p le domaine suivant :

$$|x - x_p| < r, \qquad \left| y - \frac{y_p}{x_p} x \right| < r;$$

si $|x_p| < |y_p|$, je prends pour D_p le domaine

$$|y - y_p| < r, \qquad \left| x - \frac{x_p}{y_p} y \right| < r.$$

On voit aisément que D_p contient l'hypersphère de centre M_p et de rayon $\frac{r}{2}$, et est intérieur à l'hypersphère de rayon $r\sqrt{5} = R$. Les domaines D_p satisfont donc à toutes les conditions annoncées. Le domaine D_0 sera le suivant :

$$|x| < r, \qquad |y| < r.$$

Admettons qu'on ait montré que $f(x, y)$ est méromorphe et uniforme dans le domaine constitué par Δ_{p-1} et un certain voisinage de l'origine; montrons alors que $f(x, y)$ est méromorphe dans le domaine formé de Δ_p et du voisinage de l'origine.

Supposons par exemple $|x_p| \geqq |y_p|$, et faisons le changement de variables

$$X = x, \qquad Y = y - \frac{y_p}{x_p} x.$$

La fonction $f(x, y)$ devient une fonction $F(X, Y)$; le domaine D reste cerclé. Le domaine D_p devient

$$(4) \qquad |X - x_p| < r, \qquad |Y| < r.$$

Je vais montrer que $F(X, Y)$ est méromorphe dans le domaine

$$(5) \qquad |X| < |x_p| + r, \qquad |Y| < r,$$

domaine qui contient Δ_p et le voisinage de l'origine.

En effet, M_p étant intérieur à D_{p-1}, il existe un nombre positif α tel que le domaine

$$|X - x_p| < \alpha, \qquad \left|\frac{Y}{X}\right| < \alpha$$

soit intérieur à D_{p-1}. Par suite le domaine

$$(6) \qquad |X| < |x_p| + \alpha, \qquad \left|\frac{Y}{X}\right| < \alpha,$$

est intérieur à Δ_{p-1}. D'autre part, $F(X, Y)$ est méromorphe au voisinage de l'origine

$$(7) \qquad |X| < \beta, \qquad |Y| < \beta.$$

Comparons (6) et (7). Nous voyons que $F(X, Y)$ est, en particulier, méromorphe dans le domaine

$$(8) \qquad |X| < |x_p| + \alpha, \qquad |Y| < \gamma,$$

γ désignant le plus petit des nombres β et $\alpha\beta$.

Revenons alors au domaine D_p, qui est défini par (4). Comme D_p est intérieur à D, et comme d'autre part D est cerclé, le domaine

$$(9) \qquad ||X| - |x_p|| < r, \qquad |Y| < r,$$

est intérieur à D. Donc $F(X, Y)$ est méromorphe dans le domaine (9).

Si l'on a $r \leqq \alpha$, appliquons le théorème de Hartogs-Levi aux domaines (8) et (9). Nous voyons que $F(X, Y)$ est méromorphe dans le domaine (5).

Si l'on a $r > \alpha$, alors, en vertu de (9), $F(X, Y)$ est méromorphe pour

$$(9') \qquad ||X| - |x_p|| < \alpha, \qquad |Y| < r.$$

Appliquons le théorème de Hartogs-Levi aux domaines (8) et (9'). Nous voyons que $F(X, Y)$ est méromorphe pour

$$|X| < |x_p| + \alpha, \qquad |Y| < r.$$

Comparons avec (9). Finalement, F(X, Y) est méromorphe dans le domaine (5).

Ainsi, dans tous les cas, F(X, Y) est méromorphe dans le domaine (5).

C. Q. F. D.

Le théorème I *bis* est donc entièrement démontré.

Une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée permettrait d'établir la proposition suivante (*cf.* le corollaire du théorème III) :

Soient D *un domaine de Reinhardt*, Δ *le plus petit domaine de Reinhardt complet contenant* D ; *toute fonction* $f(x, y)$, *méromorphe dans* D, *est aussi méromorphe dans* Δ.

5. A propos d'une intégrale quadruple.

Théorème IV. — *Soient* $f(x, y)$ *une fonction holomorphe dans un domaine cerclé* D, *et*

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y)$$

son développement en série de polynomes homogènes. Désignons par $d\omega$ *l'élément de volume de l'espace à quatre dimensions. Pour que l'intégrale*

$$I(f) = \int\int\int\int_D |f(x, y)|^2 \, d\omega$$

existe, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int\int\int\int_D |P_n(x, y)|^2 \, d\omega$$

existe quel que soit n, et que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\int\int\int_D |P_n(x, y)|^2 \, d\omega \tag{10}$$

soit convergente. Sa somme est alors égale à $I(f)$. *On a donc*

$$\int\int\int\int_D |f(x, y)|^2 \, d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \int\int\int\int_D |P_n(x, y)|^2 \, d\omega. \tag{11}$$

M. Bergmann [1] a déjà indiqué une proposition analogue relative aux fonctions méromorphes dans un domaine de Reinhardt,

$$f(x, y) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n} x^m y^n;$$

on a alors

$$\iiiint_{D} |f(x, y)|^2 \, d\omega = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \iiiint_{D} |a_{m,n} x^m y^n|^2 \, d\omega.$$

Le présent théorème s'applique à tout domaine cerclé D (forcément univalent), étoilé ou non. Pour l'établir, nous considérerons D comme limite d'une suite infinie de domaines cerclés $D_1, \ldots, D_p, \ldots$, complètement intérieurs à D, et dont chacun est intérieur au précédent. Par définition, on a

$$\iiiint_{D} |f(x, y)|^2 \, d\omega = \lim_{p \to \infty} \iiiint_{D_p} |f(x, y)|^2 \, d\omega,$$

car la limite, si elle existe, ne dépend pas de la façon dont ont été choisis les D_p.

Admettons pour un instant qu'on ait montré que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \iiiint_{D_p} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega$$

est convergente et a pour somme

$$\iiiint_{D_p} |f(x, y)|^2 \, d\omega.$$

Supposons que l'intégrale $I(f)$ ait une valeur finie. On aura

$$\iiiint_{D_p} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega \leqq \iiiint_{D_p} |f(x, y)|^2 \, d\omega < I(f),$$

---

[1] *Ueber Hermitesche unendlichen Formen*, etc. (*Math. Zeitschrift*, **29**, 1929, p. 641-677; *voir* p. 649).

et, par suite, l'intégrale

$$\iiiint_{D} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega = \lim_{p \to \infty} \iiiint_{D_p} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega$$

aura une valeur finie. De plus l'expression

$$\sum_{n=0}^{k} \iiiint_{D} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega = \lim_{p \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \iiiint_{D_p} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega$$

sera au plus égale à $I(f)$, ce qui prouve que la série (10) sera convergente, et que sa somme sera au plus égale à $I(f)$. D'ailleurs cette somme sera au moins égale à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \iiiint_{D_p} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega = \iiiint_{D_p} |f(x, y)|^2 \, d\omega,$$

et comme cette dernière intégrale tend vers $I(f)$ lorsque p augmente indéfiniment, on aura finalement l'égalité (11).

Réciproquement, si la série (10) est convergente, l'intégrale

$$\iiiint_{D_p} |f(x, y)|^2 \, d\omega$$

reste inférieure à un nombre fixe; donc l'intégrale $I(f)$ a une valeur finie.

En résumé, il suffit, p étant fixé, d'établir la relation

$$(12) \qquad \iiiint_{D_p} |f(x, y)|^2 \, d\omega = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} \iiiint_{D_p} |P_n(x, y)|^2 \, d\omega.$$

Or, en vertu de la convergence uniforme du développement de $f(x, y)$, on peut, étant donné un nombre positif ε, déterminer un entier k tel que l'on ait

$$-\varepsilon < |f(x, y)|^2 - \left| \sum_{n=0}^{k} P_n(x, y) \right|^2 < \varepsilon$$

en tout point du domaine D_p. On aura alors

$$-\varepsilon\Omega_p < \iiiint_{D_p} |f(x, y)|^2 \, d\omega - \iiiint_{D_p} \left| \sum_{n=0}^{k} P_n(x, y) \right|^2 d\omega < \varepsilon\Omega_p,$$

Ω_p désignant le volume de D_p. Nous allons montrer que l'on a

$$(13) \qquad \iiiint_{D_p} \left| \sum_{n=0}^{k} P_n(x, y) \right|^2 d\omega = \sum_{n=0}^{k} \iiiint_{D_p} |P_n(x, y)|^2 d\omega;$$

l'égalité (12) en résultera.

Pour établir (13), nous remarquons que l'on a

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{k} P_n(x_0 e^{i\theta}, y_0 e^{i\theta}) \right|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{k} e^{in\theta} P_n(x_0, y_0) \right|^2 d\theta$$
$$= 2\pi \sum_{n=0}^{k} |P_n(x_0, y_0)|^2,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{k} P_n(x_0 e^{i\theta}, y_0 e^{i\theta}) \right|^2 - \sum_{n=0}^{k} |P_n(x_0 e^{i\theta}, y_0 e^{i\theta})|^2 \right\} d\theta = 0;$$

on aura donc

$$\iiiint_{D_p} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{k} P_n(x, y) \right|^2 - \sum_{n=0} |P_n(x, y)|^2 \right\} d\omega = 0.$$

La démonstration du théorème IV est achevée.

Corollaire. — Pour que l'intégrale $I(f)$ soit finie, il *faut* que l'intégrale

$$\iiiint_D |P_0|^2 d\omega = |P_0|^2 \Omega$$

soit finie; Ω désigne le volume du domaine D, et P_0 n'est autre que $f(0, 0)$.

Si donc

$$f(0, 0) \neq 0,$$

le volume Ω doit être fini. Inversement, on a

$$|f(0, 0)|^2 \leq \frac{I(f)}{\Omega},$$

et l'égalité ne peut avoir lieu que si

$$f(x, y) \equiv f(0, 0).$$

D'une façon générale, on a

$$I(f) \geqq \int\int\int\int_D | P_n(x, y) |^2 d\omega;$$

si le polynome $P_n(x, y)$ du développement de $f(x, y)$ est connu, l'intégrale

$$\int\int\int\int_D | f(x, y) |^2 d\omega$$

est minima pour

$$f(x, y) \equiv P_n(x, y).$$

6. Les transformations analytiques des domaines cerclés les uns dans les autres. — Toute affinité analytique

$$X = ax + by, \qquad Y = a'x + b'y$$

transforme évidemment un domaine cerclé D en un autre domaine cerclé D'; si D est étoilé, D' est étoilé. Soit

$$F(X, Y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(X, Y)$$

le développement d'une fonction holomorphe dans D'; le développement de

$$F(ax + by, a'x + b'y) \equiv f(x, y)$$

en série de polynomes homogènes en x et y n'est autre que

$$f(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(ax + by, a'x + b'y).$$

Dans l'affinité précédente, les centres des domaines cerclés D et D' se correspondent. Mais, on connaît des transformations analytiques, autres que des affinités, qui transforment un domaine cerclé en un autre domaine cerclé; par exemple, une hypersphère admet des transformations analytiques en elle-même dans lesquelles le centre vient en un point intérieur arbitraire, et ces transformations ne sont pas linéaires entières.

Laissant de côté le problème général qui consiste à trouver toutes les transformations d'un domaine cerclé en un autre, nous allons nous limiter ici à celles qui conservent le centre.

Commençons par un théorème d'ordre général :

Théorème V. — *Si un domaine cerclé* D *est en correspondance analytique avec un domaine borné* Δ, *non ramifié au point* O *homologue du centre de* D, *le domaine* D *est borné.*

Soient en effet

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y)$$

les équations de la transformation (le point x, y décrivant D, le point X, Y décrit Δ). On peut supposer

$$f(0, 0) = g(0, 0).$$

D'après l'énoncé, le déterminant fonctionnel $\frac{D(f, g)}{D(x, y)}$ n'est pas nul pour $x = y = 0$. En effectuant sur X et Y une substitution linéaire convenable, on peut supposer que l'on a

$$f(x, y) \equiv x + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv y + \ldots.$$

Cette manière abrégée d'écrire signifie

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial g(0, 0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial g(0, 0)}{\partial y} = 1.$$

D'après la relation (3) (Chap. II, § 2), on a

$$\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(xe^{i\theta}, ye^{i\theta})\, d\theta,$$

$$y \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} g(xe^{i\theta}, ye^{i\theta})\, d\theta.$$

Comme, par hypothèse, $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont bornées, on voit que x et y sont bornés. Le théorème est donc établi.

Corollaire. — *Deux domaines cerclés, dont l'un est borné et l'autre ne l'est pas, ne peuvent pas être mis en correspondance analytique, même si l'on n'astreint pas leurs centres à se correspondre.*

Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

Théorème VI. — *Si la transformation analytique*

$$X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y) \qquad [\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0]$$

établit une correspondance biunivoque entre les points de deux domaines cerclés bornés ([1]), *on a nécessairement*

$$\varphi(x, y) \equiv ax + by, \qquad \psi(x, y) \equiv a'x + b'y.$$

En particulier, toute transformation analytique d'un domaine cerclé borné en lui-même, qui conserve le centre, est linéaire.

Nous établirons le théorème VI comme conséquence d'un théorème général relatif aux domaines quelconques (théorème VII). Auparavant, faisons une remarque, en admettant provisoirement l'exactitude du théorème VI.

Les domaines cerclés, nous l'avons vu (Chap. II, § 1), dépendent de *fonctions* arbitraires. Donc, en général, deux domaines cerclés bornés ne peuvent pas se représenter l'un sur l'autre, au moins si l'on veut que les centres se correspondent dans la transformation. Nous dirons qu'un domaine cerclé borné et tous ses transformés par affinités analytiques appartiennent à une même *classe*.

Théorème VII. — *Soit* D *un domaine borné quelconque, non ramifié à l'origine supposée intérieure au domaine. Si les fonctions*

$$X = f(x, y) \equiv x + \ldots. \qquad Y = g(x, y) \equiv y + \ldots$$

sont telles que le point X, Y *reste constamment intérieur à* D *lorsque le point x, y décrit* D, *on a forcément*

$$f(x, y) \equiv x, \qquad g(x, y) \equiv y.$$

En effet, au voisinage de l'origine, les fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont développables en séries de polynomes homogènes

$$f(x, y) \equiv x + \sum_{k=2}^{\infty} P_k(x, y),$$

$$g(x, y) \equiv y + \sum_{k=2}^{\infty} Q_k(x, y).$$

([1]) D'après ce qui précède, il suffit que l'un deux soit borné pour que l'autre le soit aussi.

Supposons que les polynomes P_k ne soient pas tous identiquement nuls, et soit $P_\alpha(x, y)$ le premier d'entre eux. Considérons les fonctions, définies par récurrence,

$$f_{n+1}(x, y) \equiv f[f_n(x, y), g_n(x, y)],$$
$$g_{n+1}(x, y) \equiv g[f_n(x, y), g_n(x, y)].$$

Dans un voisinage suffisamment restreint de l'origine, $f_{n+1}(x, y)$ est développable en série de polynomes homogènes, et l'on voit tout de suite que ce développement a la forme

$$f_{n+1}(x, y) \equiv x + (n+1)P_\alpha(x, y) + \ldots,$$

ce qui est impossible, car, la fonction $f_{n+1}(x, y)$ admettant une borne supérieure indépendante de n, tous les polynomes de son développement doivent être bornés [relation (3), § **2**].

Ainsi les P_k, et de même les Q_k, sont tous identiquement nuls.

C. Q. F. D.

Première démonstration du théorème VI (¹). — Nous allons déduire le théorème VI du théorème VII. Par hypothèse, la transformation

$$X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y) \qquad [\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0]$$

transforme le domaine cerclé borné D en un domaine cerclé borné D′; soit

$$x = \Phi(X, Y), \qquad y = \Psi(X, Y) \qquad [\Phi(0, 0) = \Psi(0, 0) = 0]$$

la transformation inverse. Soit θ un nombre réel quelconque. Les formules

$$(14) \qquad \begin{cases} x' = e^{-i\theta}\Phi[e^{i\theta}\varphi(x, y), e^{i\theta}\psi(x, y)] \equiv f(x, y), \\ y' = e^{-i\theta}\Psi[e^{i\theta}\varphi(x, y), e^{i\theta}\psi(x, y)] \equiv g(x, y) \end{cases}$$

définissent une transformation de D en lui-même. Or le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$ n'est pas nul à l'origine, puisque x et y s'expriment

(¹) Au moment où j'ai énoncé le présent théorème VI dans les *Comptes rendus*, M. Behnke publiait de ce même théorème une démonstration s'appliquant aux domaines cerclés étoilés dont la frontière se compose de morceaux analytiques (*Die Abbildungen der Kreiskörper*, *Abh. math. Sem. Hamburg. Univ.*, **7**, 1930, p. 329-341). J'ai moi-même publié la présente démonstration dans une Note aux *Comptes rendus* (**190**, 1930, p. 718).

en fonctions uniformes de X et Y au voisinage de $X = Y = 0$. On voit alors immédiatement que les fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ ont la forme

$$f(x, y) \equiv x + \ldots, \qquad g(x, y) \equiv y + \ldots$$

envisagée au théorème VII. On en conclut

$$f(x, y) \equiv x, \qquad g(x, y) \equiv y,$$

et les formules (14) s'écrivent

$$\begin{aligned} \varphi(xe^{i\theta}, ye^{i\theta}) &\equiv e^{i\theta}\varphi(x, y), \\ \psi(xe^{i\theta}, ye^{i\theta}) &\equiv e^{i\theta}\psi(x, y). \end{aligned}$$

Si l'on différentie ces identités un nombre quelconque de fois par rapport à x et y, et si l'on fait ensuite $x = y = 0$, on trouve que toutes les dérivées partielles, d'ordre plus grand que *un*, des fonctions φ et ψ s'annulent à l'origine. Ainsi

$$\varphi(x, y) \equiv ax + by, \qquad \psi(x, y) \equiv a'x + b'y.$$

Deuxième démonstration [1] *du théorème VI.* — Les domaines cerclés D et D′ étant supposés se correspondre par une transformation analytique dans laquelle les centres sont homologues, on peut effectuer sur D′ une affinité analytique de façon que la transformation prenne la forme

$$X = \varphi(x, y) = x + \ldots, \qquad Y = \psi(x, y) \equiv y + \ldots.$$

Je vais montrer que l'on a

$$\varphi(x, y) \equiv x, \qquad \psi(x, y) \equiv y.$$

Pour cela, je vais montrer d'abord que l'on a

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \equiv 1. \tag{15}$$

Soient en effet Ω et Ω' les volumes de D et D′. Appliquons le théo-

---

[1] Cette deuxième démonstration est en relation étroite avec la théorie de M. Bergmann. Elle n'est pas essentiellement différente de celle que M. Welke doit faire paraître dans les *Math. Annalen*, et qu'il m'a aimablement communiquée.

rème IV. On a [1]

$$\Omega' = \int_D \left| \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right|^2 d\omega \geqq \int_D d\omega = \Omega,$$

l'égalité ne pouvant être atteinte que si (15) est vérifié. Inversement, on a

$$\Omega \geqq \Omega',$$

et, par suite,

$$\Omega = \Omega'.$$

L'identité (15) est donc établie, et l'on a

$$d\omega = d\omega'.$$

Cela posé, on a

$$\int_{D'} |X|^2 d\omega' = \int_D |\varphi(x, y)|^2 d\omega \geqq \int_D |x|^2 d\omega,$$

l'égalité ne pouvant être atteinte que si

$$\varphi(x, y) \equiv x.$$

Inversement, on a

$$\int_D |x|^2 d\omega \geqq \int_{D'} |X|^2 d\omega'.$$

et, par suite,

$$\int_D |x|^2 d\omega = \int_{D'} |X|^2 d\omega'.$$

$$\varphi(x, y) \equiv x$$

On a de même

$$\psi(x, y) \equiv y. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Modifions maintenant un peu les conditions d'application des théorèmes V et VII. Nous allons établir les théorèmes suivants :

Théorème V *bis*. — *Supposons qu'une transformation analytique*

$$X = f(x, y) \equiv ax + by + \ldots, \qquad Y = g(x, y) \equiv a'x + b'y + \ldots$$

transforme un domaine cerclé D *en un domaine* Δ *pour lequel* X *est borné. Alors* $ax + by$ *est borné dans* D.

[1] Nous écrirons un seul signe $\int$ pour désigner une intégrale quadruple.

En effet

$$ax + by = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} f(xe^{i\theta}, ye^{i\theta})\, d\theta.$$

Théorème VII *bis*. — *Soit* D *un domaine de l'espace* (x, y), *non ramifié à l'origine supposée intérieure à* D. *Si les fonctions*

$$X = f(x, y) = x + \ldots, \qquad Y = g(x, y) = y + \ldots$$

sont telles que le point X, Y *reste constamment intérieur à* D *lorsque le point* x, y *décrit* D, *et si* x *est borné dans* D, *on a forcément*

$$f(x, y) \equiv x.$$

Démonstration analogue à celle du théorème VII.

Appliquons ce théorème à la recherche des *transformations en lui-même du domaine cerclé* D *défini par*

$$|x| < 1 \qquad (y \text{ fini quelconque}).$$

Cherchons d'abord les transformations de la forme

$$X = f(x, y) = ax + by + \ldots, \qquad Y = g(x, y) = a'x + b'y + \ldots.$$

D'après le théorème V *bis*, $ax + by$ est borné dans D. On a donc forcément $b = 0$, et par suite $b' \neq 0$ (car $ab' - ba' \neq 0$). On a ensuite

$$|a| = 1;$$

en effet, si $|a|$ était supérieur à *un*, on aurait, en itérant n fois la transformation,

$$X_n = a^n x + \ldots;$$

or $a^n x$ doit être borné dans D. Si $|a|$ était inférieur à *un*, on considérerait la transformation inverse. Ainsi on a

$$X = f(x, y) = xe^{i\theta} + \ldots, \qquad Y = g(x, y) = a'x + b'y + \ldots.$$

La transformation

$$X' = e^{-i\theta} X, \qquad Y' = \frac{1}{b'}(Y - a'Xe^{-i\theta})$$

transforme aussi D en lui-même; or on a

$$X' = x + \ldots, \qquad Y' = y + \ldots;$$

en vertu du théorème VII *bis*, on a donc $X' = x$, et par suite

$$f(x, y) = xe^{i\theta}.$$

Cela posé, x étant fixé, la transformation

$$Y = g(x, y)$$

doit transformer en lui-même le plan y à distance finie. On a donc

$$g(x, y) = yu(x) + v(x), \qquad [v(0) = 0]$$

$u(x)$ et $v(x)$ étant deux fonctions holomorphes pour $|x| < 1$. La fonction $u(x)$ ne s'annule pas, car, si l'on avait $u(x_0) = 0$, on aurait $X = x_0 e^{i\theta}$, $Y = v(x_0)$, pour $x = x_0$, quel que soit y.

Pour trouver la transformation *la plus générale* de D en lui-même, on se ramène au cas précédent en effectuant une homographie sur x, et en ajoutant une constante convenable à y. La transformation la plus générale a donc la forme

$$\begin{cases} X = e^{i\theta} \dfrac{x - x_0}{1 - \bar{x}_0 x}, & [|x_0| < 1], \\ Y = yu(x) + v(x), & [u(x) \neq 0]. \end{cases}$$

Les transformations qui laissent fixe l'origine ne sont pas toutes linéaires. *Le théorème VI peut donc être en défaut si on veut l'appliquer à des domaines cerclés non bornés.*

CHAPITRE III.

DOMAINES SEMI-CERCLÉS, DOMAINES INVERSEMENT CERCLÉS, DOMAINES (m, p) CERCLÉS.

1. Les domaines semi-cerclés. — *Définition.* — J'appelle *domaine semi-cerclé* un domaine connexe D qui satisfait aux conditions suivantes :

1° *L'origine est intérieure à* D ;

2° *Si le point* $x = x_0$, $y = y_0$ *appartient à* D, *le point* $x = x_0$, $y = y_0 e^{i\theta}$ *appartient aussi à* D, *quel que soit le nombre réel* θ.

Tous les points, intérieurs au domaine D, pour lesquels $y = 0$, jouent le même rôle que l'origine : ils restent fixes dans la transformation

$$x' = x, \qquad y' = ye^{i\theta}$$

du domaine en lui-même. Tous ces points seront appelés des *centres* du domaine.

Relativement aux domaines semi-cerclés non univalents, nous ferons la convention suivante : x_0, y_0 désignant un point quelconque du domaine, la courbe

$$x = x_0, \qquad y = y_0 e^{i\theta} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

est *fermée dans le domaine*. Nous envisagerons éventuellement des domaines semi-cerclés ramifiés à l'origine.

Si le point x_0, y_0 est un point de ramification, le point $x = x_0$, $y = y_0 e^{i\theta}$ est aussi un point de ramification. Comme les variétés de ramification sont analytiques, ce sont nécessairement des variétés $x = \text{const.}$ Nous retrouverons ce résultat comme cas particulier d'une proposition générale établie au paragraphe 3.

Étant donné un domaine semi-cerclé D, l'ensemble des points x, y de D, pour lesquels y est réel, constitue un domaine I dans l'espace à trois dimensions réelles x_1, x_2, y $(x = x_1 + ix_2)$. Ce domaine contient l'origine et admet le plan $x_1 O x_2$ comme plan de symétrie. Réciproquement, à tout domaine I, de l'espace (x_1, x_2, y), qui satisfait à ces deux conditions, correspond un domaine semi-cerclé D et un seul. Mais nous verrons au paragraphe 3 qu'un domaine semi-cerclé D et son image I doivent satisfaire à d'autres conditions si l'on applique la convention [A] ; ce n'est pas étonnant si l'on se rappelle, par exemple, qu'un domaine cerclé est nécessairement univalent en vertu de la convention [A].

Tout domaine de Reinhardt est semi-cerclé. Pour qu'un domaine soit à la fois cerclé et semi-cerclé, il faut et il suffit que ce soit un domaine de Reinhardt.

2. Développement d'une fonction holomorphe dans un domaine semi-cerclé.

Théorème VIII. — *Toute fonction $f(x, y)$, holomorphe et uni-*

forme dans un domaine semi-cerclé D, est développable en série de la forme

$$(1) \qquad f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n f_n(x).$$

uniformément convergente au voisinage de tout point intérieur à D; les $f_n(x)$ sont des fonctions de x seul. holomorphes et uniformes dans tout le domaine D.

La démonstration est semblable à celle du théorème II (Chap. II). Avant de commencer, on peut supposer que l'origine n'est pas un point de ramification du domaine D, car, si c'en était un, il suffirait d'effectuer une transformation

$$X = x - x_0, \qquad Y = y.$$

Cela posé, le développement (1) est possible d'une façon au plus, car on a évidemment

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x,0)}{\partial y^n}.$$

Soient alors r un nombre réel plus grand que *un*, et D_r le domaine formé des points $x = x_0$, $y = \frac{y_0}{r}$ (x_0, y_0 désignant un point quelconque de D). Désignons par C_r la circonférence $|z| = r$. La fonction

$$F(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(x,yz)\frac{dz}{z-1}$$

est holomorphe et uniforme dans D_r, et coïncide avec $f(x,y)$ au voisinage de l'origine. Donc $f(x,y)$ est holomorphe dans D_r, et l'on a

$$(2) \qquad f(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(x,yz)\frac{dz}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x,y),$$

avec

$$\varphi_n(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(x,yz)\frac{dz}{z^{n+1}}.$$

La série (2) converge uniformément au voisinage de tout point x, y intérieur à D_r. Quant à $\varphi_n(x,y)$, c'est une fonction holomorphe et uniforme dans D_r; on vérifie sans peine qu'elle satisfait à l'identité

$$\varphi_n(x, ye^{i\alpha}) \equiv e^{in\alpha}\varphi_n(x, y),$$

d'où l'on conclut, au voisinage de l'origine,

$$\varphi_n(x, y) \equiv y^n f_n(x).$$

La fonction $f_n(x) \equiv \frac{\varphi_n(x,y)}{y^n}$, quotient de deux fonctions holomorphes dans D_r, est elle-même méromorphe dans D_r; d'ailleurs, au voisinage de l'origine, elle ne dépend que de x. C'est par suite, dans le domaine D_r tout entier, une fonction de x seul, qui ne peut devenir infinie que pour $y = 0$; elle n'est donc jamais infinie. Ainsi $f_n(x)$ est holomorphe et uniforme dans D_r.

Les fonctions $\varphi_n(x,y)$ trouvées ne dépendent pas de la valeur donnée à r. Le théorème VIII est donc établi. On a d'ailleurs

$$(3) \qquad y^n f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(x, ye^{i\theta})\, d\theta,$$

$$|y_0^n f_n(x_0)| \leq \operatorname{Max} |f(x_0, y_0 e^{i\theta})| \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Théorème IX. — *Soient $f(x,y)$ une fonction holomorphe dans un domaine semi-cerclé D, et*

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n f_n(x)$$

son développement. Pour que l'intégrale

$$I(f) = \int_D |f(x, y)|^2 d\omega$$

existe, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_D |y^n f_n(x)|^2 d\omega$$

existe quel que soit n, et que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_D |y^n f_n(x)|^2 d\omega$$

soit convergente. Sa somme est alors égale à $I(f)$.

Démonstration analogue à celle du théorème IV (Chap. II).

3. La « projection » d'un domaine semi-cerclé. — Nous sommes maintenant en mesure d'apercevoir les conséquences entraînées par l'application de la convention [A] aux domaines semi-cerclés.

A chaque point x_0, y_0 du domaine semi-cerclé D, associons, dans le plan de la variable complexe x, le point x_0, que nous appellerons *projection* du point x_0, y_0. Nous allons montrer qu'on peut définir, dans le plan x, un domaine d constitué par l'ensemble des projections de tous les points du domaine D.

Pour définir le domaine d, il nous faut, étant donnés deux points $P_0(x_0, y_0)$ et $P_1(x_0, y_1)$ du domaine D, qui ont la même coordonnée x_0, dire si leurs deux projections doivent être considérées comme deux points distincts du domaine d, ou comme un seul et même point de ce domaine.

Considérons à cet effet *les fonctions de x seul, holomorphes et uniformes dans* D. Si *toutes* ces fonctions possèdent la même détermination en P_0 et P_1, nous conviendrons de regarder les projections de P_0 et P_1 comme un seul et même point du domaine d. Au contraire, s'il existe au moins une fonction de x, holomorphe et uniforme dans D, qui ne possède pas la même détermination en P_0 et en P_1, nous conviendrons de regarder les projections de P_0 et P_1 comme deux points distincts du domaine d.

Le domaine d est ainsi parfaitement défini. Nous l'appellerons *projection du domaine* D. Remarquons que si deux points $P_0(x_0, y_0)$ et $P_1(x_0, y_1)$ peuvent être joints par une courbe intérieure à D et située dans le plan $x = x_0$, leurs projections dans d sont identiques.

L'intérêt du domaine d réside dans le théorème suivant :

Théorème X. — *A deux points distincts du domaine* D, *qui ont les mêmes coordonnées x et y, correspondent deux points distincts du domaine d.*

Pour établir cette proposition, nous appliquerons la convention [A]. Soient P_0 et P_1 deux points distincts de D qui ont les mêmes coordonnées; s'ils avaient même projection dans d, toute fonction de x, holomorphe et uniforme dans D, posséderait la même détermination en P_0

et en P_1. Soit alors $f(x, y)$ une fonction quelconque, holomorphe et uniforme dans D ; d'après le théorème VIII, elle posséderait la même détermination en P_0 et en P_1. Les points P_0 et P_1 ne seraient donc pas deux points distincts du domaine D (convention [A]).

C. Q. F. D.

Le théorème précédent peut encore s'énoncer ainsi : *tout point de* D *est défini sans ambiguïté par sa projection dans d et sa seconde coordonnée y. Les variétés de ramification* du domaine D, s'il en existe, ont la forme $x = \text{const.}$, et *correspondent aux points de ramification du domaine d.*

On voit maintenant de façon précise quelle est l'image I du domaine D dans l'espace (x_1, x_2, y) : on considère à cet effet un domaine d, univalent ou non, dans le plan $x_1 O x_2$, et à chaque point $(x_1)_0$, $(x_2)_0$ de ce domaine on associe un ou plusieurs segments, portés par la droite

$$x_1 = (x_1)_0, \qquad x_2 = (x_2)_0,$$

ces segments étant deux à deux symétriques par rapport au plan $x_1 O x_2$. L'ensemble des segments associés à tous les points du domaine d constitue le domaine I ; on suppose que l'origine est un point intérieur à I.

Nous dirons qu'un domaine semi-cerclé est *complet* si à chaque point du domaine d correspond un segment unique qui coupe le plan $x_1 O x_2$. Cette définition équivaut à la suivante : si x_0, y_0 est un point de D, $x = x_0$, $y = k y_0$ ($|k| \leqq 1$) est aussi un point de D. Cette dernière définition aurait pu être donnée dès le début du Chapitre, mais elle n'a un véritable sens que si l'on connaît la nature des domaines semi-cerclés non univalents, et nous la connaissons maintenant.

Le plus petit domaine semi-cerclé complet Δ contenant un domaine semi-cerclé donné D se compose, par définition, de l'ensemble des points

$$x = x_0, \qquad |y| \leqq |y_0|,$$

x_0, y_0 étant un point quelconque de D. Dans cette définition, deux points

$$x = x_0, \qquad y = k y_0,$$

qui correspondent aux mêmes valeurs de k, x_0, y_0, sont considérés comme distincts s'ils correspondent à deux points x_0, y_0 distincts du domaine D. Cette convention trouve sa justification dans la nature des domaines semi-cerclés non univalents.

Corollaire du théorème VIII. — Si une fonction $f(x, y)$ est holomorphe et uniforme dans un domaine semi-cerclé D, elle est aussi holomorphe et uniforme dans le plus petit domaine semi-cerclé complet contenant D.

Ce fait résulte immédiatement du développement (1). Relativement à ce développement, nous pouvons dire maintenant que les $f_n(x)$ sont holomorphes dans d.

Les développements de la forme (1) ont été longuement étudiés par M. Hartogs (*loc. cit.*). Ce géomètre a en même temps étudié les domaines obtenus en associant à chaque point x d'un domaine d un cercle

$$|y| < r(x);$$

ce sont les domaines que nous venons d'appeler semi-cerclés complets. M. Hartogs avait démontré que toute fonction $f(x, y)$, holomorphe dans un tel domaine, admet un développement de la forme (1). On voit que notre théorème VIII est plus général.

Domaines semi-cerclés normaux. — Nous dirons qu'un domaine semi-cerclé est *normal* si sa projection d est un cercle (de rayon fini ou infini). D'après cette définition, tout domaine semi-cerclé normal est univalent.

Un domaine de Reinhardt est semi-cerclé normal; ce n'est évidemment pas le domaine semi-cerclé normal le plus général.

Considérons un domaine semi-cerclé quelconque; supposons d'abord que sa projection d soit simplement connexe. Il existe une fonction holomorphe

$$X = \varphi(x)$$

qui effectue la représentation conforme de d sur un cercle (de rayon fini ou infini). La transformation

$$X = \varphi(x), \qquad Y = y$$

transforme le domaine D en un domaine semi-cerclé normal, donc univalent.

Si la projection d n'est pas simplement connexe, on sait qu'on peut toujours transformer le domaine d en un domaine univalent. Il existe donc une transformation

$$X = \varphi(x), \qquad Y = y$$

qui transforme D en un domaine univalent. D'autre part, on peut définir un domaine de recouvrement simplement connexe δ du domaine d et transformer δ en un cercle au moyen de

$$X = \varphi(x).$$

La fonction $\varphi(x)$ est uniforme localement dans d, mais non globalement. La transformation

$$X = \varphi(x), \qquad Y = y$$

transforme alors un certain domaine de recouvrement du domaine D en un domaine semi-cerclé normal.

Nous obtenons ainsi le théorème :

Théorème XI. — *Tout domaine semi-cerclé : 1° peut se représenter sur un domaine semi-cerclé univalent; 2° peut se représenter, ou possède un domaine de recouvrement qui peut se représenter sur un domaine semi-cerclé normal.*

4. Les transformations des domaines semi-cerclés. — Soient D un domaine semi-cerclé, $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions holomorphes dans D. La transformation

$$(4) \qquad X = f(x), \qquad Y = y\,g(x)$$

respecte-t-elle la convention [B]? Considérons à cet effet les équations

$$f(x) = X_0, \qquad y\,g(x) = Y_0;$$

la première donne pour x des valeurs *isolées*; soit x_0 l'une d'elles. Si l'on prend $x = x_0$, la seconde équation donne pour y une valeur bien déterminée, *sauf si* $g(x_0) = 0$. Effectivement, si $g(x)$ s'annule dans D pour $x = x_0$, on a

$$X = f(x_0), \qquad Y = 0$$

pour $x = x_0$, *quel que soit* y; donc la transformation (4) ne respecte pas la convention [B].

Au contraire, si $g(x)$ ne s'annule pas dans D, la convention [B] est respectée.

Supposons donc que $g(x)$ ne s'annule pas. La transformation (4) transforme D en un domaine Δ évidemment *semi-cerclé*. Il est clair (¹) que *la fonction*

$$X = f(x)$$

effectue une représentation conforme de la projection d *de* D *sur la projection* δ *de* Δ.

Si l'on suppose $f(0) = 0$, la transformation (4) transforme D en Δ avec conservation de l'origine; on voit que, contrairement à ce qui avait lieu pour les domaines cerclés, *les transformations d'un domaine cerclé, même borné, en un autre domaine semi-cerclé* (*avec conservation de l'origine*), *dépendent de fonctions arbitraires*.

THÉORÈME XII (²). — *Si la transformation analytique*

$$(5) \qquad X = \varphi(x, y) \equiv ax + \ldots, \qquad Y = \psi(x, y) \equiv by + \ldots \qquad (ab \neq 0)\,(^3)$$

établit une correspondance biunivoque entre les points de deux domaines semi-cerclés D *et* D′ *non ramifiés à l'origine, dont l'un au moins est borné, on a*

$$(6) \qquad \varphi(x, y) \equiv f(x), \qquad \psi(x, y) \equiv y\,g(x).$$

La transformation (5) transforme D en D′; supposons par exemple D borné. La même méthode que celle utilisée dans la première démons-

(¹) On vérifie sans peine, en effet, que deux points distincts de d ne peuvent être transformés en un même point de δ.

(²) M. Welke me communique une copie du manuscrit d'un article qui doit paraître dans les *Math. Annalen*, et dans lequel il établit ce même théorème dans le cas des domaines semi-cerclés complets univalents, en se servant de la théorie de M. Bergmann.

(³) *Voir*, au Chapitre IV, un complément à ce théorème (§ 7, théorème XXXII).

tration du théorème VI (Chap. II), conduit aux identités

$$\varphi(x, ye^{i\theta}) = \varphi(x, y),$$
$$\psi(x, ye^{i\theta}) = e^{i\theta}\psi(x, y),$$

d'où l'on déduit les identités (6). Le théorème est donc établi.

Comme nous l'avons remarqué, la fonction $g(x)$ ne s'annule pas dans le domaine D.

Le théorème XII s'étend évidemment aux transformations

$$(7) \qquad X = x_0 + ax + \ldots, \qquad Y = by + \ldots \qquad (ab \neq 0)$$

d'un domaine semi-cerclé borné en un domaine semi-cerclé; il suffit en effet de poser

$$X - x_0 = X', \qquad Y = Y'.$$

Remarquons que le théorème XII peut cesser d'être exact si aucun des domaines D et D' n'est borné, comme le montrent les transformations du domaine envisagé à la fin du paragraphe **6** (Chap. II).

Revenons aux images I et I' des domaines D et D' et cherchons la relation qui doit exister entre les domaines I et I' pour qu'on puisse passer de D à D' par une transformation de la forme (5), D étant supposé borné. La transformation a forcément la forme (6). Comme nous l'avons vu, la fonction

$$X = f(x)$$

transforme la projection d de D en la projection d' de D'. Pour chaque valeur x_0 de x, on a

$$|Y| = |y|\,|g(x_0)|:$$

par conséquent les segments de droite de I et I', correspondant respectivement à x_0 et à $X_0 = f(x_0)$, se déduisent les uns des autres par la dilatation

$$Y = y\,|g(x_0)|.$$

$|g(x)|$ n'est pas une fonction quelconque des deux variables réelles x_1 et x_2 $(x = x_1 + ix_2)$, puisque c'est le module d'une fonction holomorphe sans zéros. Par conséquent, *deux domaines semi-cerclés* D *et* D', *dont l'un est borné, ne peuvent pas en général être représentés l'un sur l'autre par une transformation de la forme* (5).

Pour plus de simplicité, bornons-nous au cas où D et D' sont *semi-*

cerclés normaux. Alors d est un cercle de rayon *fini*; donc d', transformé de d par

$$X = f(x),$$

est aussi un cercle de rayon fini, et l'on a

$$X = ax.$$

Soit D'_1 le transformé de D' par

$$X_1 = \frac{X}{a}, \qquad Y_1 = Y.$$

Si D et D' sont en correspondance analytique au moyen d'une transformation de la forme (5), alors D se transforme en D'_1 par

$$X_1 = x, \qquad Y_1 = y\,g(x),$$

et l'image I se transforme en I'_1 par

$$X_1 = x, \qquad Y_1 = y\,|\,g(x)\,| = y\,e^{u(x)},$$

$u(x)$ étant une fonction *harmonique*.

3. Les domaines semi-cerclés et les domaines cerclés.

Théorème XIII (¹). — *Si un domaine semi-cerclé borné peut se représenter sur un domaine cerclé, avec conservation de l'origine, il peut se représenter sur un domaine de Reinhardt. Un domaine semi-cerclé borné donné ne peut pas, en général, se représenter sur un domaine de Reinhardt* (l'origine restant fixe).

Soit

$$X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y) \qquad [\varphi(0, 0) = \psi(0, 0) = 0],$$

une transformation du domaine semi-cerclé D en un domaine cerclé Δ. En vertu du théorème XI, nous pouvons supposer que D n'est pas ramifié à l'origine; on a alors

$$\varphi(x, y) = ax + by + \ldots, \qquad \psi(x, y) = a'x + b'y + \ldots \qquad (ab' - ba' \neq 0).$$

(¹) Ce théorème, comme le théorème XII, figure dans le Mémoire déjà cité dont M. Welke a bien voulu me communiquer une copie.

et l'on peut, en effectuant une transformation linéaire sur Δ, supposer

$$\varphi(x, y) = x + \ldots, \qquad \psi(x, y) = y + \ldots.$$

Aux transformations

$$x' = x, \qquad y' = y e^{i\theta}$$

de D en lui-même, correspondent des transformations

$$X' = X + \ldots, \qquad Y' = Y e^{i\theta} + \ldots$$

de Δ en lui-même. Or Δ est borné, puisque D est borné (théorème V, Chap. II). Par conséquent, on a (théorème VI, Chap. II)

$$X' = X, \qquad Y' = Y e^{i\theta};$$

Δ est donc cerclé et semi-cerclé : c'est un domaine de Reinhardt.

C. Q. F. D.

Il reste à montrer que, en général, un domaine semi-cerclé borné D ne peut pas se représenter sur un domaine de Reinhardt (l'origine restant fixe). D'après ce qui précède, si la représentation est possible, on peut supposer qu'elle a la forme

$$X = \varphi(x, y) = x + \ldots, \qquad Y = \psi(x, y) = y + \ldots.$$

Le théorème XII s'applique; on a donc

$$X = f(x), \qquad Y = y g(x).$$

D'après cela, la projection d de D doit pouvoir se représenter sur un cercle; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que d soit simplement connexe.

Admettons que d soit un cercle, autrement dit que D soit semi-cerclé normal; admettons même que D soit semi-cerclé complet, et par suite simplement connexe (homéomorphe à une hypersphère). Nous allons voir que toutes ces conditions ne suffisent pas pour que D puisse se représenter sur un domaine de Reinhardt Δ. En effet, la transformation de D en Δ doit avoir la forme

$$X = a x, \qquad Y = y g(x),$$

et l'on peut supposer $a = 1$ par une transformation effectuée sur Δ. Alors, comme nous l'avons déjà vu, les frontières des images I et I' de

D et Δ doivent se correspondre dans une transformation

$$X = x, \qquad Y = ye^{u(x)},$$

$u(x)$ étant *harmonique*. Supposons en particulier que la section du domaine I par

$$|x| = r,$$

r étant un certain nombre positif, soit de révolution autour de Oy, c'est-à-dire qu'elle ait la forme

$$|y| < b.$$

Alors $u(x)$, étant harmonique, et constante pour $|x| = r$, sera nécessairement une constante. Par conséquent, dans ce cas, si le domaine D n'est pas lui-même un domaine de Reinhardt, il ne peut pas être transformé en un domaine de Reinhardt.

Le théorème XIII est établi.

6. Les domaines inversement cerclés. — *Définition.* — J'appelle *domaine inversement cerclé* un domaine connexe D qui satisfait aux conditions suivantes :

1° *L'origine (centre) est intérieure à* D ;

2° *Si le point $x = x_0$, $y = y_0$ appartient à* D, *le point $x = x_0 e^{i\theta}$, $y = y_0 e^{-i\theta}$, appartient aussi à* D, *quel que soit le nombre réel* θ.

Relativement aux domaines inversement cerclés non univalents, nous ferons la convention suivante : x_0, y_0 désignant un point quelconque du domaine, la courbe

$$x = x_0 e^{i\theta}, \qquad y = y_0 e^{-i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

est *fermée dans le domaine*. Nous envisagerons éventuellement des domaines inversement cerclés ramifiés à l'origine.

Pour qu'un point x, y reste fixe dans la transformation

$$x' = xe^{i\theta}, \qquad y' = ye^{-i\theta}$$

du domaine en lui-même, il faut et il suffit que $x = y = 0$. Il se peut que plusieurs points du domaine coïncident avec l'origine ; de tels points sont *isolés*.

Les variétés de ramification d'un domaine inversement cerclé sont de la forme $xy = \text{const}$.

Étant donné un domaine inversement cerclé D, son image I dans l'espace (x_1, x_2, y) satisfait aux mêmes conditions que l'image d'un domaine cerclé, sauf en ce qui concerne les lignes de ramification.

Tout domaine de Reinhardt est inversement cerclé. Tout domaine qui appartient à la fois à deux des trois catégories (domaines cerclés, semi-cerclés, inversement cerclés) est un domaine de Reinhardt.

7. Développement d'une fonction holomorphe dans un domaine inversement cerclé.

Théorème XIV. — *Toute fonction $f(x,y)$, holomorphe et uniforme dans un domaine inversement cerclé* D, *est développable en série de la forme*

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n f_n(u) + \sum_{n=1}^{\infty} y^n g_n(u) \qquad (u = xy), \tag{8}$$

uniformément convergente au voisinage de tout point intérieur à D: *les fonctions $x^n f_n(u)$ et $y^n g_n(u)$ sont holomorphes et uniformes dans tout le domaine* D.

La démonstration ressemble à celles des théorèmes II et VIII.

Désignons par r un nombre réel plus grand que *un*. Soit Δ_r le domaine formé de l'ensemble des points $x = \frac{x_0}{r}$, $y = ry_0$, et Δ'_r le domaine formé de l'ensemble des points $x = rx_0$, $y = \frac{y_0}{r}$ (x_0, y_0 désignant un point quelconque de D). Les domaines Δ_r et Δ'_r admettent les mêmes variétés de ramification $xy = \text{const}$. que le domaine D. Soit alors D_r le domaine commun à D, Δ_r et Δ'_r. Désignons par C_r et C'_r les circonférences $|z| = r$ et $|z| = \frac{1}{r}$. La fonction

$$y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f\left(xz, \frac{y}{z}\right)\frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'_r} f\left(xz, \frac{y}{z}\right)\frac{dz}{z-1}$$

est holomorphe et uniforme dans D_r. Elle coïncide avec $f(x, y)$ au voisinage de l'origine : en effet, la fonction de z

$$\varphi(z)=f\left(xz,\frac{y}{z}\right)$$

est holomorphe et uniforme pour

$$\frac{1}{r}\leqq|z|\leqq r,$$

et l'on a

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\varphi(z)\frac{dz}{z-1}-\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_r}\varphi(z)\frac{dz}{z-1}=\varphi(1)=f(x,y).$$

On a ainsi

$$(9)\qquad f(x,y)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x,y),$$

avec

$$(10)\qquad\left\{\begin{aligned}\varphi_n(x,y)&\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}f\left(xz,\frac{y}{z}\right)\frac{dz}{z^{n+1}},\\ \psi_n(x,y)&\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{C'_r}f\left(xz,\frac{y}{z}\right)z^{n-1}\,dz.\end{aligned}\right.$$

La série (9) converge uniformément au voisinage de tout point intérieur à D_r. Les intégrales (10) ne dépendent pas de la valeur donnée à r (r étant voisin de *un*), car l'intégrale

$$\int_{C_r}f\left(xz,\frac{y}{z}\right)\frac{dz}{z^{n+1}}=\int_{C_r}u(z)\,dz$$

ne dépend pas de la valeur de r, puisque $u(z)$ est holomorphe lorsque $|z|$ est voisin de *un*. On a donc, en prenant $r=1$,

$$(11)\qquad\left\{\begin{aligned}\varphi_n(x,y)&\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}f(xe^{i\theta},ye^{-i\theta})\,d\theta,\\ \psi_n(x,y)&\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-in\theta}f(xe^{i\theta},ye^{-i\theta})\,d\theta.\end{aligned}\right.$$

Les fonctions φ_n et ψ_n sont donc holomorphes et uniformes dans tout le domaine D et la série (9) converge au voisinage de tout point intérieur à D, car un tel point est intérieur à D_r, si r est assez voisin de *un*.

Des identités (11) on déduit les identités

$$\varphi_n(xe^{i\alpha}, ye^{-i\alpha}) \equiv e^{in\alpha}\varphi_n(x, y),$$
$$\psi_n(xe^{i\alpha}, ye^{-i\alpha}) \equiv e^{-in\alpha}\psi_n(x, y).$$

Supposons d'abord que l'origine ne soit pas un point de ramification. Alors les fonctions $\varphi_n(x, y)$ et $\psi_n(x, y)$ sont développables en séries doubles de Taylor au voisinage de l'origine, et l'on trouve, en différentiant les identités précédentes, que l'on a

$$\varphi_n(x, y) \equiv x^n f_n(u), \qquad \psi_n(x, y) \equiv y^n g_n(u) \qquad (u = xy).$$

Les fonctions $f_n(u)$ et $g_n(u)$ sont holomorphes au voisinage de l'origine. D'ailleurs $\varphi_n(x, y)$ est holomorphe et uniforme dans D; donc

$$f_n(u) \equiv \frac{\varphi_n(x, y)}{x^n}$$

est méromorphe et uniforme dans D, et ne peut devenir infinie que si l'on a $x = 0$, donc $u = 0$. De même $g_n(u)$ est méromorphe et uniforme dans D, et ne peut devenir infinie que si $u = 0$.

Si l'origine O est un point de ramification, il faut raisonner un peu différemment. La fonction

$$f_n(x, y) \equiv \frac{\varphi_n(x, y)}{x^n}$$

est méromorphe et uniforme dans D, et satisfait à l'identité

$$f_n(xe^{i\alpha}, ye^{-i\alpha}) \equiv f_n(x, y).$$

Soit x_0, y_0 un point intérieur à D: sur la courbe

$$x = x_0 e^{i\alpha}, \qquad y = y_0 e^{-i\alpha} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 2\pi),$$

on a

$$xy = x_0 y_0$$

et

$$f_n(x, y) = f_n(x_0, y_0).$$

Les deux fonctions $f_n(x, y)$ et xy, étant constantes sur cette courbe, sont constantes sur une variété caractéristique contenant cette courbe; cette variété est nécessairement

$$xy = x_0 y_0.$$

C'est dire que, lorsque xy est constant, $f_n(x,y)$ est constant. Donc $f_n(x, y)$ ne dépend que de $u = xy$. C. Q. F. D.

Le théorème XIV est établi.

Il existe, pour les domaines inversement cerclés, un théorème analogue aux théorèmes IV et IX.

8. La « projection » d'un domaine inversement cerclé. — A chaque point x_0, y_0 du domaine inversement cerclé D, associons, dans le plan de la variable complexe u, le point $u_0 = x_0 y_0$, que nous appellerons *projection* du point x_0, y_0. En procédant comme on l'a fait pour un domaine semi-cerclé, on peut définir, dans le plan u, un domaine d constitué par l'ensemble des projections de tous les points du domaine D. Pour cela, on fait intervenir l'ensemble des fonctions de $u = xy$, méromorphes et uniformes dans D.

Théorème XV. — *A deux points distincts du domaine* D, *qui ont les mêmes coordonnées, correspondent deux points distincts du domaine d.*

Ce théorème se démontre comme le théorème X.

Les variétés de ramification du domaine D, s'il en existe, correspondent aux points de ramification du domaine d.

Domaines inversement cerclés normaux. — Nous dirons qu'un domaine inversement cerclé est normal si sa projection d est un cercle (de rayon fini ou infini). Tout domaine inversement cerclé normal est univalent. Un domaine de Reinhardt est inversement cerclé normal.

9. Les transformations des domaines inversement cerclés. — Soient D un domaine inversement cerclé, $f(u)$ et $g(u)$ deux fonctions uniformes dans le domaine d (projection de D), telles que $xf(u)$ et $yg(u)$ soient *holomorphes* dans D. La transformation

$$X = xf(xy), \qquad Y = yg(xy) \tag{13}$$

transforme évidemment D en un domaine inversement cerclé Δ. Cherchons à quelles conditions la convention [B] est respectée dans cette transformation. Supposons que l'on ait

$$xf(xy) = a, \qquad yg(xy) = b$$

en tous les points d'une variété caractéristique V intérieure à D. La transformation

$$x' = x e^{i\theta}, \qquad y' = y e^{-i\theta} \tag{14}$$

transforme V en une variété V_θ, et l'on a, sur V_θ,

$$x' f(x'y') = a e^{i\theta}, \qquad y' g(x'y') = b e^{-i\theta}.$$

Je dis que $a = b = 0$. En effet, dans le cas contraire, les variétés V_θ seraient toutes distinctes, et dépendraient d'un paramètre, ce qui est absurde, puisque de telles variétés sont isolées [on suppose, bien entendu, les fonctions $xf(xy)$ et $yg(xy)$ indépendantes] (1).

Ainsi $a = b = 0$; donc la variété V se transforme en elle-même par (14) : c'est une variété $xy =$ const.

En résumé, si l'on veut que la convention [B] soit respectée par la transformation (13), *il faut supposer que $xf(xy)$ et $yg(xy)$ ne s'annulent pas simultanément sur une variété $xy =$* const. Cette condition nécessaire est suffisante. Si on la suppose remplie, la fonction

$$U = u f(u) g(u)$$

transforme la projection d de D en la projection δ de Δ.

Contrairement à ce qui avait lieu pour les domaines semi-cerclés, *il n'est pas toujours possible de transformer un domaine inversement cerclé* D *en un domaine inversement cerclé univalent* Δ (2), *au moyen d'une transformation de la forme* (13). Supposons en effet que le domaine D contienne deux points distincts qui coïncident tous deux avec l'origine : ces deux points restent fixes dans la transformation (14). Donc leurs transformés restent fixes dans la transformation

$$X' = X e^{i\theta}, \qquad Y' = Y e^{-i\theta}$$

du domaine Δ en lui-même. On a donc $X = Y = 0$ pour chacun des points transformés; ainsi, le domaine Δ n'est pas univalent.

(1) Ces fonctions sont dépendantes dans le cas où $uf(u)g(u)$ est une constante, et dans ce cas seulement.

(2) La restriction relative à la forme de la transformation peut être levée grâce au théorème XXXII (Chap. IV).

THÉORÈME XVI. — *Si la transformation analytique*

$$X = \varphi(x, y) \equiv ax + \ldots \qquad Y = \psi(x, y) \equiv by + \ldots \qquad (ab \neq 0)$$

établit une correspondance biunivoque entre les points de deux domaines inversement cerclés, non ramifiés à l'origine, dont l'un au moins est borné, on a

$$\varphi(x, y) \equiv x f(xy), \qquad \psi(x, y) \equiv y g(xy).$$

Démonstration analogue à celle du théorème XII. Le théorème XVI sera complété au Chapitre IV (§ **7**, théorème XXXII). Il peut cesser d'être exact, si aucun des deux domaines n'est borné, comme le montre l'exemple donné à la fin du paragraphe **6** (Chap. II).

10. Les domaines inversement cerclés et les domaines cerclés.

THÉORÈME XVII. — *Si un domaine inversement cerclé borné* D, *non ramifié à l'origine, peut se représenter sur un domaine cerclé, avec conservation de l'origine, il peut se représenter sur un domaine de Reinhardt* Δ. *Un domaine inversement cerclé borné donné ne peut pas, en général, se représenter sur un domaine de Reinhardt (l'origine restant fixe).*

La première partie de ce théorème s'établit comme la première partie du théorème XIII. Si la transformation de D en Δ est possible, on peut lui donner la forme (13). Pour montrer qu'elle n'est pas possible en général, bornons-nous au cas où D est inversement cerclé normal. On a alors

$$U = u f(u) g(u) \equiv au,$$

puisque d et δ sont des cercles. D'ailleurs $f(u)$ et $g(u)$ sont holomorphes, puisque ces fonctions sont holomorphes pour $u = 0$, et qu'elles ne peuvent devenir infinies que si $u = 0$. Comme on a

$$f(u) g(u) \equiv a,$$

f et g ne peuvent pas s'annuler.

On a ainsi

$$(15) \qquad X = x f(u), \qquad Y = \frac{ay}{f(u)}.$$

Supposons par exemple que la section du domaine D par

$$|u| = r$$

soit de la forme

$$\alpha < |x| < \beta,$$

les nombres α et β étant indépendants de la valeur de u, pourvu que $|u| = r$. Si D est transformé en un domaine de Reinhardt par (15), alors $|f(u)|$ est constant sur la circonférence $|u| = r$. Or, $\log|f(u)|$ est une fonction harmonique régulière. Donc $f(u)$ est une constante, et la transformation (15) se réduit à

$$X = bx, \qquad Y = cy.$$

Donc D doit être lui-même un domaine de Reinhardt. Il n'en est pas ainsi en général. C. Q. F. D.

11. Les domaines (m, p) cerclés.

Définition. — Soient m et p deux entiers positifs, nuls ou négatifs, *premiers entre eux* (si l'un des entiers est nul, nous supposerons l'autre égal à *un*). J'appelle domaine (m, p) cerclé un domaine D qui satisfait aux conditions suivantes :

1° *L'origine (centre) est intérieure à* D ;

2° *Si le point* $x = x_0$, $y = y_0$ *appartient à* D, *la courbe*

$$x = x_0 e^{im\theta}, \qquad y = y_0 e^{ip\theta} \qquad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

est intérieure à D *et fermée dans* D.

Si $mp = 0$, on peut supposer par exemple $m = 0$ ($p = 1$), et l'on a affaire à un domaine semi-cerclé. Dans ce qui suit, nous supposerons $mp \neq 0$. *Si* $mp > 0$, *nous supposerons que l'origine n'est pas un point de ramification pour le domaine* D, *et que m et p sont positifs.*

On établit sans difficulté les théorèmes suivants :

Théorème XVIII. — *Toute fonction* $f(x, y)$, *holomorphe dans un domaine* (m, p) *cerclé* D ($mp > 0$), *est développable en série de polynomes*

$$f(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, y)$$

uniformément convergente au voisinage de tout point intérieur à D. *Le polynome entier* $\varphi_n(x, y)$ *est aussi un polynome homogène, de degré n, en* $x^{\frac{1}{m}}$ *et* $y^{\frac{1}{p}}$. *On a en outre*

$$\varphi_n(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(x e^{im\theta}, y e^{ip\theta})\, d\theta.$$

Corollaire. — Tout domaine (m, p) cerclé $(mp > 0)$ est univalent.

THÉORÈME XIX [1]. — *Si deux domaines* (m, p) *cerclés, correspondant aux mêmes valeurs des entiers m et* $p\,(mp > 0)$ *sont en correspondance analytique*

$$X = \varphi(x, y) \equiv ax + \ldots, \qquad Y = \psi(x, y) \equiv by + \ldots \qquad (ab \neq 0),$$

et si l'un d'eux au moins est borné, on a

$$\varphi(x, y) \equiv ax, \qquad \psi(x, y) \equiv by.$$

COROLLAIRE. — *Si un domaine* (m, p) *cerclé* D $(mp > 0,\ m \neq p)$ *peut se représenter sur un domaine cerclé borné* Δ, *l'origine restant fixe,* D *est un domaine de Reinhardt.*

En effet, on peut effectuer sur Δ une affinité analytique telle que la transformation de D en Δ ait la forme

$$X = x + \ldots, \qquad Y = y + \ldots.$$

Mais alors Δ admet des transformations en lui-même, de la forme

$$X' = X e^{im\theta} + \ldots, \qquad Y' = Y e^{ip\theta} + \ldots;$$

comme ces transformations sont linéaires (théorème VI), Δ est un domaine de Reinhardt. Comme Δ est (m, p) cerclé, on peut appliquer le théorème XIX à la transformation de D en Δ : c'est la transformation identique. C. Q. F. D.

THÉORÈME XVIII *bis.* — *Toute fonction* $f(x, y)$, *holomorphe dans un domaine* (m, p) *cerclé* D $(mp < 0$; on supposera $m > 0$, $p = -p')$ *est*

[1] *Voir* au Chapitre IV, § 7 (théorème XXXII), un complément à ce théorème.

développable en série de fonctions holomorphes

$$f(x, y) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x, y)$$

uniformément convergente au voisinage de tout point intérieur à D: $\varphi_n(x, y)$ *a la forme*

$$\varphi_n(x, y) \equiv (x^\lambda y^\mu)^n f_n(x^{p'} y^m) \quad (^1),$$

λ *et* μ *étant deux entiers tels que* $\lambda m + \mu p = 1$. *On a en outre*

$$\varphi_n(x, y) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(x e^{im\theta}, y e^{ip\theta})\, d\theta.$$

Corollaire. — On peut définir un domaine d, projection du domaine D sur le plan $u = x^{p'} y^m$.

Théorème XIX *bis* [2]. — *Si deux domaines* (m, p) *cerclés, correspondant aux mêmes valeurs des entiers* m *et* p $(mp < 0,\ m > 0,\ p = -p')$ *sont en correspondance analytique*

$$X = \varphi(x, y) \equiv ax + \ldots, \qquad Y = \psi(x, y) \equiv by + \ldots \qquad (ab \neq 0),$$

si en outre ces domaines ne sont pas ramifiés à l'origine, et si l'un d'eux au moins est borné, on a

$$(16) \qquad \varphi(x, y) \equiv x f(x^{p'} y^m), \qquad \psi(x, y) \equiv y g(x^{p'} y^m).$$

On verrait, en procédant comme aux paragraphes **5** et **10**, que si un domaine (m, p) cerclé borné $D(mp < 0)$ peut se représenter sur un domaine cerclé, l'origine restant fixe, il peut se représenter sur un domaine de Reinhardt au moyen d'une transformation de la forme (16) et que, en général, une telle représentation est impossible.

L'étude des domaines (m, p) cerclés $(mp \neq 0)$ se ramène, dans une certaine mesure, à celle des domaines cerclés ou inversement cerclés.

---

(1) Remarquons que, pour $n = m$, on a

$$(x^\lambda y^\mu)^m f_m(x^{p'} y^m) \equiv x g_m(x^{p'} y^m).$$

(2) *Voir* au Chapitre IV, § 7 (théorème XXXII), un complément à ce théorème.

Raisonnons par exemple dans le cas où mp est positif ($m > 0$, $p > 0$), et posons

$$x^{\frac{1}{m}} = X, \qquad y^{\frac{1}{p}} = Y.$$

A chaque point x, y du domaine (m, p) cerclé D correspondent mp points X, Y d'un domaine cerclé Δ. Inversement, si le point X, Y décrit Δ, le point

$$x = X^m, \qquad y = Y^p$$

décrit le domaine D recouvert mp fois. En somme, Δ est en correspondance biunivoque avec un *domaine de recouvrement* D_1 d'ordre mp du domaine D; les variétés $x = 0$ et $y = 0$ sont des variétés de ramification pour D_1.

CHAPITRE IV.

LES DOMAINES QUI ADMETTENT UNE INFINITÉ DE TRANSFORMATIONS LAISSANT FIXE UN POINT INTÉRIEUR.

1. Généralités. — Demandons-nous si, étant donné un domaine borné quelconque D, on peut en effectuer une représentation analytique biunivoque sur un domaine cerclé, semi-cerclé ou inversement cerclé, ou, plus généralement, sur un domaine (m, p) cerclé.

Un domaine (m, p) cerclé admet, d'après sa définition, une infinité de transformations analytiques biunivoques en lui-même laissant fixe un point intérieur (l'origine). Le domaine D doit donc, lui aussi, admettre une infinité de transformations analytiques biunivoques en lui-même, laissant fixe un point intérieur.

Nous montrerons, dans ce Chapitre, que cette condition nécessaire est aussi suffisante. Bien entendu, tous les domaines envisagés sont supposés respecter la convention [A]. Énonçons dès maintenant le théorème fondamental qui sera établi au paragraphe **3**.

Théorème XX ([1]). — *Tout domaine borné* D, *univalent ou non*, *qui*

([1]) Lorsque j'ai énoncé le théorème VII de ma Note aux *Comptes rendus* (**190**, 1930, p. 354-356), je faisais prévoir qu'il souffrait sans doute des cas d'exception sous la forme où il était énoncé. Sous la forme actuelle, le théorème XX est exact et ne souffre aucun cas d'exception.

admet une infinité de transformations analytiques biunivoques en lui-même, laissant fixe un point intérieur O, *peut se représenter analytiquement sur un domaine* (m, p) *cerclé borné* Δ, *le point* O *venant au centre du domaine* Δ.

Nous nous bornerons à démontrer ce théorème *dans le cas où le point* O *n'est pas un point de ramification* (¹) pour le domaine D.

En tenant compte du dernier paragraphe du Chapitre précédent, on peut encore donner au théorème XX la forme suivante :

Étant donné un domaine borné D *qui admet une infinité de transformations en lui-même, laissant fixe un point intérieur, trois cas sont possibles :*

1° D *peut se représenter sur un domaine semi-cerclé borné ;*

2° D *peut se représenter sur un domaine cerclé borné, ou possède un domaine de recouvrement d'ordre fini qui se représente sur un domaine cerclé borné ;*

3° D *peut se représenter sur un domaine inversement cerclé borné, ou possède un domaine de recouvrement d'ordre fini qui se représente sur un domaine inversement cerclé borné.*

Nous verrons au Chapitre suivant (§ 6) qu'il existe des domaines univalents bornés, simplement connexes (homéomorphes à une hypersphère), qui n'admettent qu'un nombre *fini* de transformations en eux-mêmes laissant fixe un point intérieur quel qu'il soit. La théorie exposée dans le présent Chapitre ne s'applique donc pas à tous les domaines bornés, même univalents et simplement connexes. Nous ne ferons d'ailleurs, sur les domaines étudiés ici, aucune hypothèse relative à l'*Analysis situs*.

Le théorème qui est à la base de la théorie est le suivant :

Théorème XXI. — *Les transformations analytiques biunivoques d'un domaine borné* D *en lui-même, qui laissent fixe un point intérieur* O, *forment un groupe clos* G.

(¹) Lorsque O est un point de ramification, la démonstration est beaucoup plus compliquée, et je ne l'ai pas encore mise au point dans tous ses détails.

Pour établir ce théorème, nous nous placerons dans le cas général où le point O peut être un point de ramification.

Prenons le point O comme origine, et soit

$$(S) \qquad X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y) \qquad [f(0, 0) = g(0, 0) = 0]$$

la transformation S la plus générale du groupe G. Pour montrer que G est un groupe *clos*, nous ferons voir que, étant donné un ensemble infini de transformations S, on peut extraire de cet ensemble une suite infinie de transformations $S_1, \ldots, S_n, \ldots,$

$$(S_n) \qquad X = f_n(x, y), \qquad Y = g_n(x, y),$$

de telle manière que :

1° Les fonctions $f_n(x, y)$ et $g_n(x, y)$ convergent respectivement vers deux fonctions $f_0(x, y)$ et $g_0(x, y)$, holomorphes dans D, la convergence étant uniforme au voisinage de tout point intérieur à D;

2° La transformation

$$(1) \qquad X = f_0(x, y), \qquad Y = g_0(x, y)$$

soit bien une transformation du groupe G.

La première partie résulte immédiatement du fait que les fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$, étant uniformément bornées quelle que soit la substitution S du groupe (en effet, le domaine D est borné), forment une *famille normale* dans le domaine D. Il reste donc à faire voir que si l'on a

$$\lim f_n(x, y) = f_0(x, y),$$
$$\lim g_n(x, y) = g_0(x, y),$$

la convergence étant uniforme, *les formules* (1) *définissent une transformation biunivoque de* D *en lui-même, laissant fixe l'origine.*

On a d'abord

$$f_0(0, 0) = g_0(0, 0) = 0,$$

puisque l'on a

$$f_n(0, 0) = g_n(0, 0) = 0$$

Cela posé, désignons par

$$x = F_n(X, Y), \qquad y = G_n(X, Y)$$

la transformation inverse de la transformation S_n. Si les fonctions $F_n(X, Y)$ et $G_n(X, Y)$ ne convergeaient pas uniformément vers des fonctions limites dans le domaine D, on pourrait en tout cas extraire de la suite $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ une nouvelle suite infinie pour laquelle la convergence aurait lieu (il résultera d'ailleurs de ce qui suit que F_n et G_n convergent effectivement, sans qu'il soit besoin d'extraire une nouvelle suite).

Nous pouvons donc supposer que l'on a

$$\lim F_n(X, Y) = F_0(X, Y),$$
$$\lim G_n(X, Y) = G_0(X, Y).$$

On a évidemment

$$F_0(0, 0) = G_0(0, 0) = 0.$$

Cela posé, la transformation (1) fait correspondre à tout point voisin de l'origine O un point voisin de O. Je dis que l'on a, si le point x, y est voisin de O,

$$(2) \qquad F_0[f_0(x, y), g_0(x, y)] \equiv x, \qquad G_0[f_0(x, y), g_0(x, y)] \equiv y.$$

Cela résulte en effet des identités

$$F_n[f_n(x, y), g_n(x, y)] \equiv x, \qquad G_n[f_n(x, y), g_n(x, y)] \equiv y,$$

et de la convergence uniforme.

Je dis maintenant que la transformation (1) fait correspondre à tout point x, y intérieur à D un point X, Y *intérieur* à D. En effet, le point x, y étant fixé, le point

$$f_n(x, y), \qquad g_n(x, y)$$

est intérieur à D quel que soit n; donc, à la limite, le point

$$f_0(x, y), \qquad g_0(x, y)$$

est intérieur à D, à moins qu'il ne soit un point frontière de D. Montrons qu'il ne peut pas être un point frontière. Pour cela, raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe une courbe C, intérieure à D, partant du point O et aboutissant en un point intérieur $M_0(x_0, y_0)$, telle que le transformé d'un point quelconque M de C par (1) soit *intérieur* à D, sauf le transformé de M_0 qu'on suppose être un point *frontière* de D.

Nous allons montrer qu'une telle éventualité est impossible. Considérons en effet les fonctions

$$F_p[f_n(x, y), g_n(x, y)].$$

Si l'indice p reste fixe, et si l'indice n augmente indéfiniment, ces fonctions convergent uniformément, au voisinage de l'origine, vers

$$F_p[f_0(x, y), g_0(x, y)];$$

or ces fonctions sont uniformément bornées dans D, où elles forment par suite une famille normale. D'après un théorème connu, elles convergent uniformément dans tout le domaine D. Soit alors $\Phi_p(x, y)$ la fonction limite. On a, au voisinage de l'origine,

$$\Phi_p(x, y) \equiv F_p[f_0(x, y), g_0(x, y)]. \tag{3}$$

On établirait de même l'existence d'une fonction $\Psi_p(x,y)$, holomorphe dans D, qui satisfait, au voisinage de l'origine, à l'identité

$$\Psi_p(x, y) \equiv G_p[f_0(x, y), g_0(x, y)]. \tag{3'}$$

Des identités précédentes on tire, si le point x, y est voisin de l'origine,

$$\begin{cases} f_0(x, y) \equiv f_p[\Phi_p(x, y), \Psi_p(x, y)], \\ g_0(x, y) \equiv g_p[\Phi_p(x, y), \Psi_p(x, y)]. \end{cases} \tag{4}$$

Les identités (3) et (3') ont lieu tant que le point x, y décrit la courbe C, puisque le point $f_0(x, y)$, $g_0(x, y)$ correspondant reste intérieur à D; donc le point $\Phi_p(x, y)$, $\Psi_p(x, y)$ reste intérieur à D quand x, y décrit C. En outre, le point $\Phi_p(x_0, y_0)$, $\Psi_p(x_0, y_0)$ est bien déterminé; c'est un point *frontière*, sinon les identités (4) donneraient pour le point $f_0(x, y)$, $g_0(x, y)$ un point intérieur, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ainsi le point $\Phi_p(x_0, y_0)$, $\Psi_p(x_0, y_0)$ est frontière quel que soit p. Or, lorsque p augmente indéfiniment, les fonctions $\Phi_p(x, y)$ et $\Psi_p(x, y)$ convergent uniformément, au voisinage de l'origine, vers

$$F_0[f_0(x, y), g_0(x, y)] \equiv x \qquad \text{et} \qquad G_0[f_0(x, y), g_0(x, y)] \equiv y.$$

Comme la famille Φ_p, Ψ_p est normale, la convergence a lieu dans tout le domaine D. En particulier, le point $\Phi_p(x_0, y_0)$, $\Psi_p(x_0, y_0)$ tend vers le point *intérieur* x_0, y_0. On arrive à une contradiction, car un point intérieur ne saurait être limite de points frontières.

C. Q. F. D.

Ainsi la transformation (1) fait correspondre à tout point x, y intérieur à D un point intérieur à D. L'identité (2) a lieu alors dans tout le domaine D. Or, cela suffit pour que la transformation (1) définisse une transformation biunivoque du domaine D en lui-même.

C. Q. F. D.

THÉORÈME XXII. — *Soit* G *le groupe des transformations d'un domaine borné* D *en lui-même, qui laissent fixe un point intérieur* O *; il existe un groupe clos de substitutions linéaires homogènes*

$$X' = aX + bY, \qquad Y' = a'X + b'Y \qquad (|ab' - ba'| = 1),$$

isomorphe au groupe G.

Supposons le point O à l'origine, et *admettons d'abord que le point* O *ne soit pas un point de ramification pour le domaine* D. Toute transformation de D en lui-même, qui laisse fixe O, a la forme

$$(S) \qquad x' = ax + by + \ldots, \qquad y' = a'x + b'y + \ldots \qquad (ab' - ba' \neq 0).$$

Je lui associe la substitution linéaire

$$(\Sigma) \qquad X' = aX + bY, \qquad Y' = a'X + b'Y.$$

Il n'est pas possible qu'une même substitution Σ soit associée à deux transformations S et S′ différentes ; car, s'il en était ainsi, la transformation $S'S^{-1}$ aurait la forme

$$x' = x + \ldots, \qquad y' = y + \ldots ;$$

elle se réduirait donc à la transformation identique (Chap. II, théorème VII).

Cela posé, Σ_1 et Σ_2 désignant les substitutions associées à S_1 et S_2, la substitution associée à $S_1 S_2$ est $\Sigma_1 \Sigma_2$. Le groupe Γ des substitutions Σ et le groupe G sont donc *isomorphes*. Comme G est clos, Γ est clos.

Or, Γ ne contenant pas de substitutions dégénérées, on doit avoir

$$|ab' - ba'| = 1.$$

Passons au cas où D *est ramifié au point* O. Considérons un voisinage D_1 du point O dans le domaine D, et l'ensemble de ses transformés par toutes les transformations du groupe G. Le groupe G étant clos, si le voisinage D_1 est assez restreint, tous les transformés de D_1 ne contiendront que des points très voisins de O, et leur ensemble constituera un domaine D′, intérieur à D, et tout entier très voisin de O. Le domaine D′ se transforme évidemment en lui-même par toutes les transformations de G.

Or, d'après la définition d'un point de ramification intérieur à un domaine, il existe, dans le domaine D, un voisinage V du point O, qui peut se transformer en un domaine univalent. On peut choisir D_1 assez petit pour que D′ soit intérieur à V. Alors D′ se transformera en un domaine univalent Δ′. Au groupe G des transformations de D′ en lui-même, correspond un groupe G′ de transformations de Δ′ en lui-même, qui laissent fixe un point intérieur ([1]). A ce groupe est associé un groupe clos de substitutions linéaires, d'après ce qui précède. Le théorème XXII est donc établi dans tous les cas.

2. Recherche des groupes clos de substitutions linéaires homogènes complexes à deux variables. — Rappelons quelques résultats de la théorie des groupes.

1° *Tout sous-groupe clos* G *d'un groupe de Lie est lui-même un groupe de Lie* ([2]), à moins que G ne contienne qu'un nombre fini d'opérations.

Donc tout groupe clos G de substitutions linéaires homogènes est un groupe de Lie (nous supposons une fois pour toutes que G contient une infinité de substitutions).

Corollaire. — Les transformations analytiques d'un domaine borné en lui-même, qui laissent fixe un point intérieur, forment un groupe de Lie.

([1]) C'est là le principe de la démonstration du théorème fondamental XX dans le cas où le point fixe O est un point de ramification. Cette démonstration, trop longue, ne sera pas donnée dans ce Mémoire (*cf.* § 1).

([2]) *Voir* Élie Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (*Mémorial des Sc. math.*, XLII; Gauthier-Villars, p. 24).

2° *Tout groupe linéaire de Lie clos, à coefficients complexes, laisse invariante une forme d'Hermite définie* (¹).

Soit ici

$$A x\bar{x} + B y\bar{y} + C x\bar{y} + \bar{C}\bar{x}y$$

la forme d'Hermite invariante. Une substitution linéaire convenable, effectuée sur x et y, la ramène à la forme

$$x\bar{x} + y\bar{y}.$$

Ainsi, *étant donné un groupe clos* G *de substitutions linéaires à deux variables complexes, on peut le transformer par une substitution linéaire convenable, de façon que les substitutions du nouveau groupe* G′ *laissent invariante la forme* $x\bar{x} + y\bar{y}$.

Soit alors S une substitution quelconque de G′

$$(S) \qquad x' = ax + by, \qquad y' = a'x + b'y \qquad (|ab' - ba'| = 1).$$

Il existe deux substitutions :

$$(\Sigma) \qquad x' = xe^{i\theta}, \qquad y' = ye^{i\theta},$$
$$(\Sigma') \qquad x' = -xe^{i\theta}, \qquad y' = -ye^{i\theta},$$

telles que les substitutions ΣS et $\Sigma' S$ aient pour déterminant l'unité. Remarquons que $S\Sigma = \Sigma S$.

A toute substitution de G′ se trouvent ainsi associées deux substitutions de déterminant égal à *un*. L'ensemble de toutes les substitutions associées forme un groupe clos Γ; les substitutions de Γ laissent invariante la forme $x\bar{x} + y\bar{y}$.

Si la substitution

$$(5) \qquad x' = \alpha x + \beta y, \qquad y' = \alpha' x + \beta' y \qquad (\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1)$$

fait partie de Γ, la substitution

$$(5') \qquad x' = -\alpha x - \beta y, \qquad y' = -\alpha' x - \beta' y$$

en fait aussi partie. A l'ensemble de ces deux substitutions correspond

(¹) Pour la démonstration du théorème de H. Weyl, *voir* par exemple l'Ouvrage précédemment cité, p. 32-33.

une substitution homographique

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\alpha' z + \beta'}$$

qui jouit de la propriété suivante : si z' est transformé de z, alors $-\frac{1}{\bar{z}'}$ est transformé de $-\frac{1}{\bar{z}}$. Inversement, à toute substitution homographique jouissant de cette propriété correspondent deux substitutions telles que (5) et (5′), qui laissent invariante la forme $x\bar{x}+y\bar{y}$.

Au groupe Γ correspond donc un groupe clos H de substitutions homographiques. Or, à chaque substitution de H correspond une rotation de la sphère autour d'un diamètre (dans l'espace à trois dimensions réelles). Le groupe H est donc isomorphe à un groupe de rotations de la sphère.

Mais on connaît tous les groupes clos de rotations de la sphère :

— ou bien H n'a qu'un nombre fini d'opérations;

— ou bien H est isomorphe au groupe des rotations autour d'un diamètre, éventuellement combinées avec une rotation de 180° autour d'un diamètre perpendiculaire :

— ou bien enfin H est isomorphe au groupe de *toutes* les rotations de la sphère.

Examinons successivement ces trois cas :

Premier cas. — Γ n'a qu'un nombre fini de substitutions. A chacune d'elles correspond donc une infinité de substitutions de G′. Par suite, G′ admet une infinité de substitutions de la forme

$$(6) \qquad x' = xe^{i\theta}, \qquad y' = ye^{i\theta}.$$

Comme G′ est clos, il admet *toutes* les substitutions de cette forme, θ étant un paramètre réel quelconque. Comme ces substitutions restent invariantes par toute substitution linéaire homogène, le groupe G lui-même contient toutes les substitutions (6), éventuellement combinées avec un nombre *fini* de substitutions linéaires.

Deuxième cas. — On peut effectuer sur z une homographie convenable, de façon que les valeurs de z correspondant aux extrémités du diamètre fixe soient o et ∞. Le groupe H ainsi transformé est alors le groupe des substitutions

$$z' = kz \qquad (|k| = 1),$$

éventuellement combinées avec la substitution

$$z' = \frac{1}{z}.$$

A l'homographie effectuée il y a un instant sur z, correspond une substitution linéaire sur x et y. Le groupe Γ, après qu'il a été transformé par cette substitution, se compose des substitutions

$$x' = xe^{i\omega}, \qquad y' = ye^{-i\omega} \qquad (\omega \text{ réel quelconque}),$$

éventuellement combinées avec la substitution

$$x' = y, \qquad y' = -x.$$

Toutes les substitutions de G' ont donc la forme

$$(7) \qquad x' = xe^{i\alpha}, \qquad y' = ye^{i\beta}$$

ou, éventuellement, la forme

$$x' = ye^{i\alpha}, \qquad y' = xe^{i\beta}.$$

Or, G' est un groupe de Lie; c'est donc un groupe à un ou deux paramètres. Si G' est un groupe à deux paramètres, c'est nécessairement le groupe des substitutions (7), où α et β sont réels quelconques, éventuellement combinées avec

$$x' = y, \qquad y' = x.$$

Si G' est un groupe à un paramètre, G' se compose d'un nombre fini de familles connexes, et celle qui contient la substitution identique a la forme

$$x' = xe^{im\theta}, \qquad y' = ye^{ip\theta} \qquad (\theta \text{ réel quelconque}).$$

m et p étant des entiers positifs, négatifs ou nuls; si $mp = 0$ ($m = 0$ par exemple), on peut supposer $p = 1$; si $mp \neq 0$, on peut supposer m et p premiers entre eux.

Troisième et dernier cas. — Γ est le groupe de toutes les substitutions linéaires, de déterminant égal à *un*, qui conservent $x\bar{x}+y\bar{y}$. Ce sont les substitutions de la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} x' = xe^{i\omega}\cos\varphi - ye^{i\omega'}\sin\varphi, \\ y' = xe^{-i\omega'}\sin\varphi + ye^{-i\omega}\cos\varphi, \end{cases}$$

qui dépendent de trois paramètres réels ω, ω' et φ. On les obtient toutes en faisant varier indépendamment ω de 0 à 2π, ω' de 0 à 2π, et φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons d'abord que les substitutions de G' qui correspondent à la substitution identique du groupe Γ soient en nombre infini. Alors *toutes* les substitutions (6) appartiennent à G': par suite toutes les substitutions (8) appartiennent aussi à G', qui est ainsi le groupe (à quatre paramètres) de toutes les substitutions qui conservent $x\bar{x}+y\bar{y}$.

Supposons maintenant que les substitutions de G' qui correspondent à la substitution identique du groupe Γ soient en nombre fini. Elles ont alors la forme

$$(9)\qquad x' = xe^{2i\frac{k\pi}{n}}, \qquad y' = ye^{2i\frac{k\pi}{n}},$$

n étant un entier fixe, k un entier variable. A chaque substitution de Γ correspondent alors n substitutions de la forme (6) et n substitutions de G'. Je considère l'ensemble des substitutions de Γ qui appartiennent à G'; elles forment un groupe clos qui dépend évidemment de deux paramètres au moins. D'après ce qu'on a vu, ce groupe dépend alors de trois paramètres et se confond avec Γ. Donc Γ est un sous-groupe de G', et G' résulte de la combinaison des substitutions (8) et (9).

Résumons tous les résultats obtenus.

THÉORÈME XXIII. — *Étant donné un groupe clos de substitutions linéaires homogènes complexes à deux variables, on peut effectuer sur les variables une substitution linéaire telle que le groupe transformé rentre dans l'une des catégories suivantes :*

1° *Groupes à un paramètre :* groupe résultant de la combinaison d'un nombre fini de substitutions linéaires avec toutes les substitutions de la forme

$$x' = xe^{im\theta}, \qquad y' = ye^{ip\theta},$$

m et *p* désignant deux entiers premiers entre eux, θ un nombre réel quelconque.

2° *Groupes à deux paramètres :* groupe des substitutions

$$x' = xe^{i\alpha}, \qquad y' = ye^{i\beta} \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels quelconques}),$$

éventuellement combinées avec la substitution

$$x' = y, \qquad y' = x.$$

3° *Groupes à trois paramètres :* groupe des substitutions

$$\begin{aligned} x' &= xe^{i\omega}\cos\varphi - ye^{i\omega'}\sin\varphi, \\ y' &= xe^{-i\omega'}\sin\varphi + ye^{-i\omega}\cos\varphi, \end{aligned}$$

éventuellement combinées avec

$$x' = xe^{2i\frac{k\pi}{n}}, \qquad y' = ye^{2i\frac{k\pi}{n}}.$$

4° *Groupes à quatre paramètres :* groupe de toutes les substitutions qui laissent invariante la forme $x\bar{x} + y\bar{y}$.

Corollaire. — *Étant donné un groupe clos de substitutions linéaires homogènes à deux variables, on peut effectuer sur les variables une substitution linéaire de façon que le groupe transformé contienne un sous-groupe de la forme*

$$x' = xe^{im\theta}, \qquad y' = ye^{ip\theta}.$$

5. Démonstration du théorème fondamental. — Comme nous l'avons déjà dit, nous démontrerons le théorème XX seulement dans le cas où *le point fixe O n'est pas un point de ramification pour le domaine borné D envisagé.*

G désignant le groupe de toutes les transformations (en nombre infini) de D en lui-même, qui laissent fixe le point O supposé à l'origine, à toute transformation

$$x' = ax + by + \ldots, \qquad y' = a'x + b'y + \ldots$$

du groupe G est associée une substitution

$$X' = aX + bY, \qquad Y' = a'X + b'Y$$

d'un groupe clos Γ. On peut alors effectuer sur D une affinité analytique, de façon que le groupe Γ contienne un sous-groupe de la forme

$$(10) \qquad X' = X e^{im\theta}, \qquad Y' = Y e^{ip\theta}.$$

Si $mp \neq 0$, nous supposerons m et p premiers entre eux, et m positif; si $mp = 0$, nous supposerons $m = 0$ et $p = 1$.

Désignons par

$$(11) \qquad x' = f(x, y; \theta) = x e^{im\theta} + \ldots, \qquad y' = g(x, y; \theta) = y e^{ip\theta} + \ldots$$

la transformation de G associée à la substitution (10). Le point x, y étant fixé dans D, le point $x'y'$ décrit, lorsque θ varie de 0 à 2π, une courbe *fermée dans* D. On a évidemment

$$f[f(x, y; \theta), g(x, y; \theta); \theta'] = f(x, y; \theta + \theta'),$$
$$g[f(x, y; \theta), g(x, y; \theta); \theta'] = g(x, y; \theta + \theta').$$

Envisageons alors l'intégrale

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} f(x, y; \alpha)\, d\alpha.$$

Le point x, y étant fixé, cette intégrale existe; en effet, $f(x, y; \alpha)$ est une fonction continue de α, puisque le groupe G est clos. Cette intégrale est de plus une fonction holomorphe des variables complexes x et y dans le domaine D, comme le montre la différentiation sous le signe $\int$, différentiation qui est possible à cause de la continuité uniforme des dérivées partielles de $f(x, y; \alpha)$ par rapport à x et y [la continuité uniforme résulte de ce que les fonctions $f(x, y; \alpha)$ sont uniformément bornées]. Enfin, au voisinage de O, on a

$$e^{-im\alpha} f(x, y; \alpha) = x + \ldots,$$

et, par suite, $F(x, y)$ a la forme

$$F(x, y) = x + \ldots;$$

en particulier, $F(x, y)$ n'est pas identiquement nulle.

Envisageons de même la fonction

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ip\alpha} g(x, y; \alpha)\,d\alpha.$$

Les fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ sont *indépendantes*, puisque l'on a, au point O,

$$\frac{D(F, G)}{D(x, y)} = 1.$$

Lorsque le point x, y décrit le domaine D, le point

$$X = F(x, y), \qquad Y = G(x, y)$$

engendre un domaine Δ, sous la réserve que la condition [B] soit respectée (nous nous occuperons de cette question au paragraphe 4). Le domaine Δ est borné, car F et G sont évidemment bornées. Je dis que le domaine Δ est (m, p) cerclé. Effectuons en effet sur x et y la transformation (11). On a

$$\begin{aligned}
F(x', y') &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} f(x', y'; \alpha)\,d\alpha \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} f(x, y; \alpha - \theta)\,d\alpha \\
&= \frac{e^{im\theta}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im(\alpha-\theta)} f(x, y; \alpha - \theta)\,d(\alpha - \theta) \\
&= e^{im\theta} F(x, y).
\end{aligned}$$

De même

$$G(x', y') = e^{ip\theta} G(x, y).$$

D'ailleurs, le point X, Y étant fixé, la courbe

$$X' = X e^{im\theta}, \qquad Y' = Y e^{ip\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

est *fermée dans* Δ, puisque, le point x, y étant fixé, le point x', y' décrit une courbe fermée dans D lorsque θ varie de 0 à 2π.

Le domaine Δ n'est pas ramifié à l'origine, puisque D n'est pas ramifié en O, et puisque l'on a

$$F(x, y) \equiv x + \ldots, \qquad G(x, y) \equiv y + \ldots.$$

Le théorème fondamental XX est donc établi dans le cas où le point O n'est pas un point de ramification pour le domaine D. Comme nous l'avons déjà dit, nous nous bornerons à ce cas.

4. Compléments a la démonstration précédente. — Cherchons maintenant si la transformation trouvée

$$X = F(x, y), \qquad Y = G(x, y)$$

satisfait à la convention [B]. Peut-on avoir

$$F(x, y) = a, \qquad G(x, y) = b$$

en tous les points d'une variété V intérieure au domaine D? Soit V_θ la variété transformée de V par

$$(12) \qquad x' = f(x, y; \theta), \qquad y' = g(x, y; \theta).$$

On aurait, sur V_θ,

$$F(x', y') = ae^{im\theta}, \qquad G(x', y') = be^{ip\theta}.$$

Si $mp \neq 0$, on a forcément $a = b = 0$, sinon les variétés V_θ seraient distinctes et formeraient une famille continue, ce qui est impossible. Si $m = 0$, on a forcément $b = 0$. On voit que, dans tous les cas, la variété V se transforme en elle-même par la transformation (12).

Je dis que, *si mp est positif, la convention* [B] *est respectée d'elle-même*. Supposons en effet que l'on ait

$$F(x, y) = G(x, y) = 0$$

sur une variété V intérieure à D. A cette variété V correspondrait, dans le domaine (m, p) cerclé Δ, un point frontière qui serait à l'origine; or, Δ est *univalent* (Corollaire du théorème XVIII) et contient déjà l'origine à son intérieur. La proposition est donc établie.

Au contraire, si mp est nul ou négatif, il n'est pas sûr que la convention [B] soit respectée. Mais nous allons établir le théorème suivant :

Théorème XXIV. — *Si un domaine* D *se trouve représenté sur un domaine* (m, p) *cerclé* Δ $(mp \leq 0)$, *et si la transformation ne respecte pas la convention* [B], *on peut trouver une transformation de* D *en un autre domaine* (m, p) *cerclé* Δ_1, *transformation qui respecte la convention* [B].

PREMIER CAS : $mp = 0 (m = 0, p = 1)$.

Supposons que l'on ait

$$F(x, y) = a, \qquad G(x, y) = 0 \tag{13}$$

sur une variété V intérieure au domaine D. Considérons, d'une manière précise, l'ensemble des points de D pour lesquels ont lieu les relations (13); laissons de côté les points isolés; il reste des variétés, qui se partagent peut-être en plusieurs variétés *connexes* (en nombre fini ou infini). Je désigne par V l'une de ces variétés connexes. La variété V ne s'obtient peut-être pas tout entière par prolongement analytique d'un seul de ses éléments; appelons $V_1, V_2, \ldots, V_k, \ldots$ les variétés *indécomposables* dont l'ensemble constitue V (ces variétés ont des points communs, puisque leur ensemble est connexe).

Plaçons-nous au voisinage d'un point de V_k qui n'appartient à aucune autre $V_{k'}$; soit m_k le plus grand entier positif tel que la fonction

$$[F(x, y) - a]^{\frac{1}{m_k}}$$

soit uniforme au voisinage du point considéré; soit de même p_k le plus grand entier positif tel que la fonction

$$[G(x, y)]^{\frac{1}{p_k}}$$

soit uniforme. La théorie des fonctions de deux variables nous apprend que :

1° Les entiers m_k et p_k ne dépendent pas du point de V_k considéré;

2° La fonction

$$\frac{[G(x, y)]^{\frac{1}{p_k}}}{[F(x, y) - a]^{\frac{1}{m_k}}}$$

est holomorphe et non nulle au voisinage de tout point de V_k, autre que les points d'intersection avec une $V_{k'}$.

Cela posé, revenons au domaine semi-cerclé Δ engendré par les fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$. Soit δ sa projection sur le plan X (Chap. III, § 3). Je dis que le point $X = a$ est un point *frontière* de δ. En effet, x et y, coordonnées d'un point de D, sont des fonctions holomorphes dans Δ, et admettent des développements de la forme (Chap. III, théorème VIII)

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} Y^n f_n(X), \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} Y^n g_n(X),$$

les f_n et les g_n étant holomorphes dans δ. Si $X = a$ était un point intérieur à δ, x et y auraient des valeurs bien déterminées pour $X = a$, $Y = 0$, ce qui n'a pas lieu, puisque le point x, y est dans ce cas un point quelconque de V.

Je dis maintenant que le point $X = a$ est un point frontière *isolé* de δ. En effet, au voisinage d'un point quelconque de V, la fonction

$$X = F(x, y)$$

prend toute valeur voisine de a. C. Q. F. D.

Il y a plus : la fonction

$$[F(x, y) - a]^{\frac{1}{m_k}}$$

est uniforme au voisinage d'un point ordinaire de V_k, et la fonction

$$[F(x, y) - a]^{\frac{1}{m'}} \qquad (m' > m_k)$$

ne l'est pas. Donc $(X - a)^{\frac{1}{m_k}}$ est uniforme dans δ, et $(X - a)^{\frac{1}{m'}}$ ne l'est pas. C'est dire que le point $X = a$ est un point de ramification d'ordre m_k exactement pour le domaine δ (le point $X = a$ lui-même est en dehors de δ). On a donc

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_k = \ldots;$$

soit m la valeur commune de ces nombres, et supposons

$$p_1 \leqq p_2 \leqq \ldots \leqq p_k \leqq \ldots.$$

Faisons maintenant rentrer dans le domaine δ, pour un moment, tous les points frontières tels que $X = a$; appelons δ_1 le domaine ainsi complété. On peut construire une fonction $\Phi(X)$, holomorphe et non nulle dans δ, sauf au voisinage de $X = a$, où l'on suppose qu'elle a la forme

$$\Phi(X) \equiv (X - a)^{-\frac{p_1}{m}} \Phi_1(X),$$

$\Phi_1(X)$ étant holomorphe et non nulle pour $X = a$.

Effectuons alors sur Δ la transformation

$$(14) \qquad X_1 = X, \quad Y_1 = Y\Phi(X).$$

Le domaine Δ se transforme en un domaine semi-cerclé Δ_1. D'ailleurs Y_1 est une fonction holomorphe de x et y dans le domaine D tout entier, y compris les variétés exceptionnelles analogues à V. Montrons que Y_1 est aussi holomorphe sur la variété V elle-même. On a en effet, au voisinage de V,

$$\begin{aligned} Y_1(x, y) &\equiv \frac{Y}{[X - a]^{\frac{p_1}{m}}} \Phi_1(X) \\ &\equiv \frac{G(x, y)}{[F(x, y) - a]^{\frac{p_1}{m}}} \Phi_1[F(x, y)]; \end{aligned}$$

or, la fonction

$$\frac{G(x, y)}{[F(x, y) - a]^{\frac{p_1}{m}}}$$

est holomorphe. De plus, au voisinage d'un point de V_1, cette fonction *n'est pas nulle*. Par conséquent la transformation (14) respecte la convention [B], au moins sur la variété V_1. Mais alors le point $X = a$ fait partie de la projection du domaine Δ_1.

Je dis que la convention [B] se trouve aussi respectée sur les variétés $V_2, \ldots, V_k, \ldots$. En effet, si elle ne l'était pas, le point $X = a$ serait un point frontière pour la projection du domaine Δ_1, et nous venons de voir qu'il n'en est rien.

Ainsi la convention [B] est respectée sur la variété V tout entière.

En résumé, pour arriver à ce résultat, il a suffi de construire une fonction $\Phi(X)$ qui se comporte convenablement au voisinage de $X = a$. Si l'on veut maintenant que la convention [B] soit respectée dans le domaine D tout entier, on construira une fonction $\Phi(X)$ qui se comporte convenablement au voisinage de tous les points, tels que $X = a$, qui correspondent aux diverses variétés analogues à la variété V, et l'on effectuera la transformation

$$X_1 = X, \qquad Y_1 = Y\Phi(X).$$

Le théorème XXIV est donc établi dans le cas où $mp = 0$.

Deuxième cas : $mp < 0$.

Pour simplifier l'exposition, nous supposerons $m = 1$, $p = -1$.

Supposons que l'on ait

$$F(x, y) = G(x, y) = 0$$

sur des variétés intérieures à D. Ces variétés se partagent en variétés connexes. Considérons l'une d'elles V ; elle est constituée par des variétés indécomposables $V_1, \ldots, V_k, \ldots$.

Soit m_k le plus grand entier positif tel que

$$[F(x, y)]^{\frac{1}{m_k}}$$

soit uniforme au voisinage d'un point ordinaire de V_k ; soit p_k le plus grand entier positif tel que

$$[G(x, y)]^{\frac{1}{p_k}}$$

soit uniforme au voisinage d'un point ordinaire de V_k.

Soit δ la projection du domaine inversement cerclé Δ sur le plan $u (u = XY)$. A la variété V correspond un point de δ pour lequel $u = 0$, point que je vais appeler O (le domaine δ pouvant contenir plusieurs fois le point $u = 0$, il convient de distinguer ces points les uns des autres). On montre, comme plus haut, que le point O est en réalité un point *frontière* de δ (cela veut dire qu'il ne correspond à aucun point x, y de D', non situé sur V). On voit ensuite que O est un point frontière isolé, et que l'on a

$$m_1 + p_1 = \ldots = m_k + p_k = \ldots ;$$

le point O est un point de ramification d'ordre n pour δ, n désignant la valeur commune des sommes $m_k + p_k$.

Supposons que m_1 soit le plus petit des m_k (ou l'un des plus petits), et p_2 le plus petit des p_k. Complétons provisoirement le domaine δ en lui adjoignant les points frontières tels que O, et formons une fonction $\Phi(u)$, holomorphe et non nulle dans le domaine δ complété, sauf au voisinage du point O, où l'on suppose qu'elle a la forme

$$\Phi(u) = u^{-\frac{m_1}{n}} \Phi_1(u),$$

$\Phi_1(u)$ étant holomorphe et non nulle au point O.

Soit de même $\Psi(u)$ une fonction holomorphe et non nulle dans le domaine δ complété, sauf au voisinage de O, où l'on suppose

$$\Psi(u) = u^{-\frac{p_2}{n}} \Psi_1(u),$$

$\Psi_1(u)$ étant holomorphe et non nulle au point O.

Effectuons la transformation

$$(15) \qquad X_1 = X\Phi(XY), \qquad Y_1 = Y\Psi(XY).$$

Le domaine Δ se trouve transformé en un domaine inversement cerclé Δ. D'ailleurs X_1 et Y_1 sont des fonctions de x et y, holomorphes en tout point de D, sauf peut-être sur la variété V. Mais elles sont aussi holomorphes sur V, car on a, au voisinage de V,

$$X_1(x, y) = \frac{F(x, y)}{[F(x, y)G(x, y)]^{\frac{m_1}{n}}} \Phi_1[F(x, y)G(x, y)],$$

$$Y_1(x, y) = \frac{G(x, y)}{[F(x, y)G(x, y)]^{\frac{p_2}{n}}} \Psi_1[F(x, y)G(x, y)].$$

En outre, $X_1(x, y)$ n'est pas nulle sur V_1, et $Y_1(x, y)$ n'est pas nulle sur V_2.

Le domaine δ s'est transformé en δ_1 par

$$u_1 = X_1 Y_1 = u\Phi(u)\Psi(u).$$

Le point O s'est transformé en un point O_1 *intérieur à* δ_1. On a, en effet (théorème XIV),

$$x(X_1, Y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} X_1^n f_n(u_1) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_1^n g_n(u_1),$$

$$y(X_1, Y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} X_1^n h_n(u_1) + \sum_{n=1}^{\infty} Y_1^n k_n(u_1);$$

les fonctions $f_n(u_1)$, $g_n(u_1)$, $h_n(u_1)$, $k_n(u_1)$ sont méromorphes au point O_1; en outre, $X_1^n f_n(u_1)$, $Y_1^n g_n(u_1)$, $X_1^n h_n(u_1)$, $Y_1^n k_n(u_1)$ ne deviennent pas infinies. Or, si le point (x, y) est sur V_1, X_1 n'est pas nul; donc les $f_n(u_1)$ et les $h_n(u_1)$ restent *finies* au point O_1; de même, si x, y est sur V_2, Y_1 n'est pas nul, donc les $g_n(u_1)$ et les $k_n(u_1)$ restent finies en O_1.

La convention [B] est respectée sur V_1 et V_2. Elle l'est aussi sur V_3, ..., sinon l'on aurait $X_1 = Y_1 = 0$ sur ces variétés; mais alors $x(X_1, Y_1)$ et $y(X_1, Y_1)$ auraient des valeurs bien déterminées, ce qui serait précisément contraire à l'hypothèse.

Ainsi, au moyen de la transformation (15), la convention [B] se trouve respectée sur la variété V tout entière. Le raisonnement s'achève alors comme dans le cas d'un domaine semi-cerclé.

5. Compléments au théorème fondamental. — Soit D un domaine borné qui admet une infinité de transformations en lui-même, laissant fixe un point intérieur O, supposé à l'origine. Comme plus haut, *nous admettrons, dans ce qui suit, que le point* O *n'est pas un point de ramification pour le domaine* D.

Soient G le groupe de *toutes* les transformations de D en lui-même, qui laissent fixe O, et Γ le groupe linéaire associé. On peut effectuer sur D une affinité analytique convenable, de façon que Γ rentre dans l'une des catégories énumérées au théorème XXIII. Comme on l'a vu au paragraphe **3**, on peut alors effectuer une transformation

$$(16) \qquad X = F(x, y) = x + \ldots, \qquad Y = G(x, y) = y + \ldots$$

du domaine D en un domaine (m, p) cerclé borné Δ.

Si le groupe G dépend d'un seul paramètre, il n'y a rien à dire de plus. *Supposons maintenant que* G *dépende de deux paramètres exactement;* alors Γ contient toutes les substitutions (¹)

$$(17) \qquad X' = X e^{i\alpha}, \qquad Y' = Y e^{i\beta},$$

et, en particulier, les substitutions

$$(18) \qquad X' = X e^{i\theta}, \qquad Y' = Y e^{i\theta}.$$

(¹) Toujours à condition d'effectuer sur D une affinité convenable.

D'après le paragraphe 3, il existe donc une transformation de la forme (16) qui transforme D en un domaine *cerclé* borné Δ ; aux substitutions (17) correspondent des transformations de Δ en lui-même, de la forme

$$X' = X e^{i\alpha} + \ldots, \qquad Y' = Y e^{i\beta} + \ldots.$$

Comme Δ est cerclé et borné, ces transformations sont linéaires; ce sont donc les transformations (17) elles-mêmes. Donc *Δ est un domaine de Reinhardt.*

Supposons que G dépende de quatre paramètres. Le groupe Γ contient encore les substitutions (18); donc D peut se transformer en un domaine cerclé borné Δ, par une transformation de la forme (16). Toutes les transformations de Δ en lui-même, qui correspondent aux transformations de G, sont linéaires; Δ est donc invariant par toutes les substitutions de Γ ; or, ce sont toutes celles qui laissent invariante la forme $x\bar{x} + y\bar{y}$. Donc *Δ est une hypersphère.*

Il reste à examiner le *cas où G dépendrait de trois paramètres.* Nous allons montrer que si le groupe G dépend de trois paramètres au moins, il dépend de quatre paramètres. En effet, si G dépend de trois paramètres, Γ contient le groupe

$$(19) \qquad \begin{cases} x' = x e^{i\omega} \cos\varphi - y e^{i\omega'} \sin\varphi, \\ y' = x e^{-i\omega'} \sin\varphi + y e^{-i\omega} \cos\varphi. \end{cases}$$

Appelons

$$(20) \qquad x' = f(x, y ; \omega, \omega', \varphi), \qquad y' = g(x, y ; \omega, \omega', \varphi)$$

les transformations correspondantes du groupe G. Nous allons former un système de deux fonctions

$$(21) \qquad X = F(x, y) = x + \ldots, \qquad Y = G(x, y) = y + \ldots$$

qui subissent la substitution linéaire (19) lorsqu'on effectue sur x et y la transformation (20). Le domaine Δ, engendré par ces fonctions, sera donc invariant par toutes les substitutions (19); ce sera forcément une hypersphère. Je dis que la transformation (21) respectera la convention [B]; en effet, si l'on avait

$$F(x, y) = a, \qquad G(x, y) = b$$

en tous les points d'une variété V intérieure à D, on aurait forcément $a = b = 0$ (raisonnement déjà fait au paragraphe 4); l'hypersphère Δ devrait admettre l'origine comme point frontière, ce qui est absurde.

Puisque D peut se représenter sur une hypersphère, le groupe G dépend de quatre et non de trois paramètres. C. Q. F. D.

Il nous reste à former les fonctions $F(x, y)$ et $G(x, y)$ annoncées. Observons d'abord que l'on obtient toutes les transformations (19) en faisant varier indépendamment ω de 0 à 2π, ω' de 0 à 2π, et φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Si nous posons $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, les quatre coordonnées du point transformé de $x = 1$, $y = 0$ par la transformation (19) sont :

$$x_1 = \cos\omega\cos\varphi, \qquad y_1 = \cos\omega'\sin\varphi,$$
$$x_2 = \sin\omega\cos\varphi, \qquad y_2 = -\sin\omega'\sin\varphi.$$

On obtient ainsi une représentation paramétrique de l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

L'élément de surface (à trois dimensions) de cette hypersphère est donné par

$$d\tau(\omega, \omega', \varphi) = \sin\varphi\cos\varphi\, d\omega\, d\omega'\, d\varphi.$$

Il est invariant par toute transformation (19), car la surface de l'hypersphère n'est pas changée par une rotation autour du centre. L'élément $d\tau$ n'est d'ailleurs autre que l'*élément de volume invariant* qui existe toujours dans l'espace d'un groupe linéaire clos ([1]). Désignons par T le volume total, d'ailleurs facile à calculer.

Cela posé, envisageons la substitution inverse de (19)

$$x = x'e^{-i\omega}\cos\varphi + y'e^{i\omega'}\sin\varphi,$$
$$y = -x'e^{-i\omega'}\sin\varphi + y'e^{i\omega}\cos\varphi,$$

et les intégrales

$$\begin{aligned} F(x, y) = \frac{1}{T}\iiint [\ & e^{-i\alpha}\cos\psi\, f(x, y;\, \alpha, \alpha', \psi) \\ & + e^{i\alpha'}\sin\psi\, g(x, y;\, \alpha, \alpha', \psi)]\, d\tau(\alpha, \alpha', \psi), \\ G(x, y) = \frac{1}{T}\iiint [& -e^{-i\alpha'}\sin\psi\, f(x, y;\, \alpha, \alpha', \psi) \\ & + e^{i\alpha}\cos\psi\, g(x, y;\, \alpha, \alpha', \psi)]\, d\tau(\alpha, \alpha', \psi), \end{aligned}$$

([1]) *Voir*, par exemple, E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, t. XLII, p. 31-32).

prises entre les limites $(0, 2\pi)$ pour α et pour α', et $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pour φ. $F(x, y)$ et $G(x, y)$ sont holomorphes et bornées dans D. On vérifie sans peine qu'elles ont bien la forme (21), et que, si l'on effectue sur x et y la transformation (20), on a

$$\begin{aligned} F(x', y') &= e^{i\omega}\cos\varphi\, F(x, y) - e^{i\omega'}\sin\varphi\, G(x, y), \\ G(x', y') &= e^{-i\omega'}\sin\varphi\, F(x, y) + e^{-i\omega}\cos\varphi\, G(x, y). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Avant de résumer tous les résultats obtenus, observons que la méthode qu'on vient d'employer est tout à fait générale : *étant donné un domaine borné* D, *non ramifié à l'origine, dans l'espace d'un nombre quelconque de variables complexes, on peut trouver un système de fonctions holomorphes dans* D

$$X = F(x, y, z) = x + \ldots, \qquad Y = G(x, y, z) = y + \ldots,$$
$$Z = H(x, y, z) = z + \ldots,$$

telles que toutes les transformations de D *en lui-même, qui laissent fixe l'origine, se traduisent par des substitutions linéaires sur les fonctions* F, G, H. En effet, si les transformations envisagées sont en nombre infini, elles forment un groupe clos [1], et l'on se sert de l'élément de volume invariant du groupe linéaire clos associé. Si les transformations sont en nombre fini, on remplace les intégrales par des moyennes arithmétiques.

Résumons maintenant les résultats obtenus dans le présent paragraphe, en les combinant avec le théorème XX.

Théorème XXV. — *Si un domaine borné* D *admet une infinité de transformations analytiques biunivoques en lui-même, laissant fixe un point intérieur* [2] O, *ces transformations dépendent de un, deux ou quatre paramètres.*

Si elles dépendent d'un seul paramètre, le domaine D *peut se repré-*

---

(1) Le théorème XXI s'étend évidemment au cas d'un nombre quelconque de variables complexes.

(2) On s'est borné au cas où O n'est pas un point de ramification.

senter sur un domaine (m, p) *cerclé borné* Δ, *le point* O *venant au centre de* Δ.

Si elles dépendent de deux paramètres, le domaine D *peut se représenter sur un domaine de Reinhardt borné* Δ, *le point* O *venant au centre de* Δ.

Si elles dépendent de quatre paramètres, le domaine D *peut se représenter sur une hypersphère de rayon fini, et admet par conséquent des transformations en lui-même qui dépendent de huit paramètres, le point* O *pouvant être amené en un point quelconque de* D.

Nous avons vu [1] qu'un domaine (m, p) cerclé borné $(m \neq p)$ ne peut pas, en général, se représenter sur un domaine de Reinhardt, l'origine restant fixe. Cette proposition est encore vraie si $m = p$, car un domaine cerclé borné ne peut se transformer en un domaine de Reinhardt que par une affinité analytique, au moins si l'origine reste fixe.

En tenant compte du théorème XXV, on voit que, *en général, les transformations d'un domaine* (m, p) *cerclé borné en lui-même, qui laissent fixe le centre, dépendent d'un seul paramètre* [2].

6. Retour aux groupes clos de substitutions linéaires. — Partons du Corollaire du théorème XXIII. Cherchons tous les groupes clos de substitutions linéaires qui contiennent un sous-groupe donné de la forme

$$x' = xe^{im\theta}, \qquad y' = ye^{ip\theta}.$$

Nous distinguerons deux cas suivant que $m = p\ (= 1)$, ou $m \neq p$.

Théorème XXVI. — *Étant donné un groupe clos de substitutions linéaires homogènes complexes à deux variables, qui contient le sous-groupe*

$$(22) \qquad x' = xe^{i\theta}, \qquad y' = ye^{i\theta} \qquad (\theta \text{ réel quelconque}),$$

[1] Chap. III, § 11.

[2] *Voir*, au paragraphe 7, des propositions plus précises (théorèmes XXVIII et XXX).

on peut effectuer sur les variables une substitution linéaire telle que le groupe transformé rentre dans l'une des catégories suivantes :

1° *Groupes à un paramètre :* groupe résultant de la combinaison des substitutions (22) avec les substitutions d'un groupe de substitutions unimodulaires en nombre fini.

2° *Groupes à deux paramètres :* groupe des substitutions

$$x' = xe^{i\alpha}, \qquad y' = ye^{i\beta} \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels quelconques}),$$

éventuellement combinées avec la substitution

$$x' = y, \qquad y' = x.$$

3° *Groupes à quatre paramètres :* groupe de toutes les substitutions qui laissent invariante la forme $x\bar{x} + y\bar{y}$.

Pour établir le théorème XXVI, il suffit de passer en revue les cas énumérés au théorème XXIII.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème XXVII. — *Tout groupe clos de substitutions linéaires homogènes complexes à deux variables, qui contient un sous-groupe donné*

$$(23) \qquad x' = xe^{im\theta}, \qquad y' = ye^{ip\theta} \qquad (m \neq p)$$

rentre dans l'une des catégories suivantes :

1° *Groupes à un paramètre :* groupe résultant de la combinaison des substitutions (23) avec celles d'un groupe

$$(24) \qquad x' = xe^{2i\frac{k\pi}{n}}, \qquad y' = ye^{2i\frac{k\pi}{n}}$$

(n entier fixe, k entier quelconque), et éventuellement (mais seulement dans le cas où $m = -p$) avec une substitution de la forme

$$x' = \mathrm{R}\,ye^{i\frac{\pi}{n}}, \qquad y' = \frac{1}{\mathrm{R}}\,xe^{i\frac{\pi}{n}} \qquad (\mathrm{R} > 0)$$

[l'entier n est le même que dans la substitution (24)].

2° *Groupes à deux paramètres :* groupe des substitutions

$$(25) \qquad x' = xe^{i\alpha}, \qquad y' = ye^{i\beta} \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels quelconques}),$$

éventuellement combinées avec une substitution de la forme

$$x' = R y, \qquad y' = \frac{1}{R} x.$$

3° (Seulement dans le cas où $m = -p$) *Groupes à trois paramètres :* groupe de substitutions de la forme

$$x' = x e^{i\omega} \cos\varphi - R y e^{i\omega'} \sin\varphi,$$

$$y' = \frac{1}{R} x e^{-i\omega'} \sin\varphi + y e^{-i\omega} \cos\varphi,$$

(ω, ω', φ réels quelconques, $R > 0$ fixe),

éventuellement combinées avec les substitutions d'un groupe de la forme (24).

4° *Groupes à quatre paramètres :* groupe de la forme

$$x' = x e^{i(\theta+\omega)} \cos\varphi - R y e^{i(\theta+\omega')} \sin\varphi,$$

$$y' = \frac{1}{R} x e^{i(\theta-\omega')} \sin\varphi + y e^{i(\theta-\omega)} \cos\varphi,$$

(θ, ω, ω', φ réels quelconques, $R > 0$ fixe).

Pour établir le théorème XXVII, reprenons la démonstration du théorème XXIII. Soit

$$A x\bar{x} + B y\bar{y} + C x\bar{y} + \bar{C}\bar{x} y$$

la forme d'Hermite invariante par les substitutions du groupe considéré G. Comme G contient les substitutions (23), on a $C = 0$. Effectuons le changement de variables

$$X = x, \qquad Y = \sqrt{\frac{B}{A}}\, y.$$

Le groupe transformé G′ laisse invariante la forme $X\bar{X} + Y\bar{Y}$. Nous avons vu qu'à toute substitution (S) de G′ on peut associer deux substitutions unimodulaires, dont les coefficients sont opposés, en multipliant la substitution (S) successivement par deux substitutions de la forme (22). Les substitutions obtenues forment un groupe clos Γ et nous avons étudié toutes les formes que peut avoir Γ, en nous servant des groupes clos de rotations de la sphère. Mais ici, comme G′ contient les substitutions (23), Γ contient toutes les substitutions

$$X' = Xe^{i\omega}, \qquad Y' = Ye^{-i\omega} \qquad (\omega \text{ réel quelconque}). \tag{26}$$

Deux cas seulement sont possibles :

— ou bien Γ contient toutes les substitutions unimodulaires qui conservent la forme $X\overline{X} + Y\overline{Y}$;

— ou bien Γ se compose des substitutions (26), éventuellement combinées avec la substitution

$$X' = Y, \qquad Y' = -X. \tag{27}$$

Examinons ces deux cas.

Premier cas : Γ contient *toutes* les substitutions unimodulaires qui conservent $X\overline{X} + Y\overline{Y}$.

Si $m + p \neq 0$, G' contient une infinité de substitutions de déterminant différent de *un* [les substitutions (23)]. Donc, à la substitution identique du groupe Γ correspondent dans G' une infinité de substitutions de la forme (22). Mais alors G' contient *toutes* les substitutions (22); Γ est donc un sous-groupe de G', et G' n'est autre que le groupe de toutes les substitutions qui conservent $X\overline{X} + Y\overline{Y}$.

Si $m + p = 0$, ou bien G' contient une infinité de substitutions (22), et l'on retombe alors sur le cas précédent, ou bien G' n'en contient qu'un nombre fini, et résulte alors de la combinaison des substitutions de Γ avec celles d'un groupe (¹)

$$X' = Xe^{2i\frac{k\pi}{n}}, \qquad Y' = Ye^{2i\frac{k\pi}{n}}. \tag{28}$$

Deuxième cas : Γ se compose des substitutions (26), éventuellement combinées avec la substitution (27).

Supposons d'abord que G' contienne une infinité de substitutions de la forme (22). Alors G' les contient toutes; Γ est donc un sous-groupe de G'. On voit que G' se compose, dans ce cas, de toutes les substitutions

$$X' = Xe^{i\alpha}, \qquad Y' = Ye^{i\beta} \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels}),$$

(¹) Pour le détail du raisonnement, se reporter à la démonstration du théorème XXIII.

éventuellement combinées avec la substitution

$$X' = Y, \qquad Y' = X.$$

Il reste à examiner le cas où G' ne contient qu'un nombre fini de substitutions de la forme (22). Alors elles sont toutes de la forme (28). Supposons d'abord que Γ ne contienne pas la substitution (27); alors G' résulte de la combinaison des substitutions

$$(29) \qquad X' = X e^{im\theta}, \qquad Y' = Y e^{ip\theta}$$

et des substitutions (28). Supposons maintenant que Γ contienne la substitution (27); alors G' contient une substitution de la forme

$$(30) \qquad X' = Y e^{i\alpha}, \qquad Y' = -X e^{i\alpha};$$

en la combinant plusieurs fois avec la substitution (29), on voit sans peine que G' contient les substitutions

$$X' = X e^{i(m+p)\theta}, \qquad Y' = Y e^{i(m+p)\theta} \qquad (\theta \text{ réel quelconque});$$

on a donc forcément $m + p = 0$. G' comprend alors toutes les substitutions (26) combinées avec les substitutions (28), et en outre contient toutes les substitutions de la forme

$$X' = Y e^{i\left(\alpha - \omega + 2k\frac{\pi}{n}\right)}, \qquad Y' = -X e^{i\left(\alpha + \omega + 2\frac{\pi}{n}\right)},$$

où l'entier n et le nombre réel α sont fixés, tandis que l'entier k et le nombre réel ω sont arbitraires. Si l'on écrit que le carré d'une telle substitution appartient encore à G', on trouve que ces substitutions peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$X' = Y e^{i\left(\frac{\pi}{n} - \omega + 2k\frac{\pi}{n}\right)}, \qquad Y' = X e^{i\left(\frac{\pi}{n} + \omega + 2k\frac{\pi}{n}\right)}.$$

En résumé, les substitutions de G' s'obtiennent toutes par la combinaison des substitutions (26) et (28) avec la substitution

$$X' = Y e^{i\frac{\pi}{n}}, \qquad Y' = X e^{i\frac{\pi}{n}}.$$

Il suffit de revenir du groupe G' au groupe G, des variables X, Y aux variables x, y, et de poser $\sqrt{\frac{B}{A}} = R$, pour obtenir le théorème XXVII.

7. Application aux transformations des domaines (m, p) cerclés. — Dans tout ce paragraphe, il ne s'agit que de domaines *non ramifiés à l'origine*.

Théorème XXVIII [1]. — *Si un domaine cerclé borné* D *n'est pas transformé d'un domaine de Reinhardt par une affinité analytique, le groupe des transformations analytiques de* D *en lui-même, qui laissent fixe le centre, résulte de la combinaison des substitutions*

$$x' = x e^{i\theta}, \qquad y' = y e^{i\theta}$$

avec les substitutions d'un groupe de substitutions linéaires unimodulaires en nombre fini (groupe qui se réduit, en général, à la transformation identique).

En effet, les transformations cherchées sont linéaires (Chap. II, théorème VI); il suffit de leur appliquer le théorème XXVI.

Théorème XXIX [2]. — *Si un domaine de Reinhardt borné* D *n'a pas la forme*

$$A x\bar{x} + B y\bar{y} < 1 \qquad (A > 0, B > 0) \tag{31}$$

toutes les transformations de D *en lui-même, qui laissent fixe le centre, ont la forme*

$$x' = x e^{i\alpha}, \qquad y' = y e^{i\beta}$$

et, éventuellement, la forme

$$x' = R y e^{i\alpha}, \qquad y' = \frac{1}{R} x e^{i\beta}.$$

En effet, les transformations cherchées sont linéaires (théorème VI). Elles forment un groupe clos G qui contient le sous-groupe

$$x' = x, \qquad y' = y e^{i\theta},$$

et auquel on peut donc appliquer le théorème XXVII. Ainsi G dépend de deux ou quatre paramètres. Si G dépend de quatre paramètres, et

---

[1] La démonstration de ce théorème, comme celle du suivant, ne suppose pas connus les résultats généraux énoncés au théorème XXV.

[2] Ce théorème a déjà été établi par M. Reinhardt (*loc. cit.*) pour les domaines de Reinhardt convexes.

si le domaine D contient le point $x = x_0$, $y = 0$, il contient tous les points x, y tels que

$$|x|^2 + R^2 |y|^2 \leq |x_0|^2 ;$$

D aurait donc la forme (31). Donc G dépend de deux paramètres. Le théorème est établi.

Remarque. — *Pour qu'un domaine de Reinhardt* D *puisse se représenter sur une hypersphère* Σ *de rayon fini, il faut et il suffit qu'il ait la forme* (31). La condition est évidemment suffisante. Elle est nécessaire; soit, en effet, x_0, y_0 le point de Σ qui correspond au centre de D; on peut transformer Σ en elle-même de manière à amener x_0, y_0 au centre de Σ. Or Σ est bornée; donc D est borné (théorème VII); si D n'avait pas la forme (31), les transformations de Σ en elle-même, laissant fixe le centre, ne dépendraient que de deux paramètres (théorème précédent), ce qui est absurde. C. Q. F. D.

Théorème XXX. — *Si un domaine* (m, p) *cerclé borné* D $(m \neq p)$ *ne peut pas se représenter sur un domaine de Reinhardt dans une transformation qui laisse fixe l'origine, il n'admet pas d'autres transformations en lui-même, laissant fixe l'origine, que les substitutions*

$$x' = x e^{im\theta}, \qquad y' = y e^{ip\theta},$$

éventuellement combinées avec des substitutions, en nombre fini, de la forme

$$x' = x e^{2i\frac{k\pi}{n}} + \ldots, \qquad y' = y e^{2i\frac{k\pi}{n}} + \ldots \qquad (n \text{ fixe, } k \text{ variable}).$$

et peut-être aussi (mais seulement dans le cas où $m = -p$*) avec une substitution de la forme*

$$x' = R y e^{i\frac{\pi}{n}} + \ldots, \qquad y' = \frac{1}{R} x e^{i\frac{\pi}{n}} + \ldots.$$

En effet, dire que D ne peut pas se représenter sur un domaine de Reinhardt dans une transformation qui laisse fixe l'origine, c'est dire (théorème XXV) que les transformations de D en lui-même, qui laissent fixe l'origine, dépendent d'un seul paramètre. Il suffit alors de leur appliquer le théorème XXVII. C. Q. F. D.

Corollaire. — En tenant compte des résultats du Chapitre III, on voit que :

1° Si $mp > 0$ $(m \neq p)$, les transformations d'un domaine (m, p) cerclé borné D en lui-même, qui laissent fixe le centre, ont la forme

$$x' = xe^{i\left(m\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)},$$
$$y' = ye^{i\left(p\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)},$$

à moins que D ne soit un domaine de Reinhardt.

2° Les transformations d'un domaine semi-cerclé borné D en lui-même, qui laissent fixe l'origine, ont toutes la forme

$$x' = f(x), \qquad y' = y\,g(x),$$

sauf peut-être dans le cas où D peut se représenter sur un domaine de Reinhardt avec conservation de l'origine.

3° Les transformations d'un domaine inversement cerclé borné D en lui-même, qui laissent fixe le centre, ont la forme

$$x' = x\,f(xy), \qquad y' = y\,g(xy),$$

ou la forme

$$x' = y\,f_1(xy), \qquad y' = x\,g_1(xy),$$

sauf peut-être dans le cas où D peut se représenter sur un domaine de Reinhardt avec conservation de l'origine.

4° Si $mp < 0$ $(m > 0, p = -p', m \neq p')$, les transformations d'un domaine (m, p) cerclé borné D en lui-même, qui laissent fixe le centre, ont toutes la forme

$$x' = x\,f(x^{p'}y^m), \qquad y' = y\,g(x^{p'}y^m),$$

sauf peut-être dans le cas où D peut se représenter sur un domaine de Reinhardt, avec conservation de l'origine.

Pour trouver la forme des transformations d'un domaine (m, p) cerclé borné D en lui-même, qui laissent fixe l'origine, dans le cas où D peut se représenter sur un domaine de Reinhardt, il suffit de combiner les résultats du Chapitre III avec le théorème XXIX. Nous laissons ce soin au lecteur.

THÉORÈME XXXI. — *Si un domaine* (m, p) *cerclé borné* D *peut se transformer en un domaine* (m', p') *cerclé* D', *l'origine restant fixe, et si l'on a*

$$mp' - pm' \neq 0,$$

alors D *peut se transformer en un domaine de Reinhardt (l'origine restant fixe), sauf peut-être si,* $mm' - pp'$ *étant nul, la transformation a la forme*

$$X = by + \ldots, \qquad Y = a'x + \ldots$$

Nous pouvons supposer $m \neq p$ et $m' \neq p'$; nous avons vu en effet (Chap. III) que si un domaine (m, p) cerclé peut se représenter sur un domaine cerclé (l'un au moins des deux domaines étant borné), il peut se représenter sur un domaine de Reinhardt ([1]).

Cela posé, soit

$$X = \varphi(x, y) \equiv ax + by + \ldots, \qquad Y = \psi(x, y) \equiv a'x + b'y + \ldots$$
$$(ab' - ba' \neq 0)$$

la transformation envisagée. Le domaine D admet les transformations suivantes en lui-même :

$$\varphi(x', y') = e^{im'\theta}\varphi(x, y),$$
$$\psi(x', y') = e^{ip'\theta}\psi(x, y);$$

ces transformations ont la forme

$$(32)\quad \begin{cases} (ab' - ba')x' = (ab'e^{im'\theta} - ba'e^{ip'\theta})x + bb'(e^{im'\theta} - e^{ip'\theta})y + \ldots, \\ (ab' - ba')y' = aa'(e^{ip'\theta} - e^{im'\theta})x + (ab'e^{ip'\theta} - ba'e^{im'\theta})y + \ldots. \end{cases}$$

Supposons que D ne puisse pas être représenté sur un domaine de Reinhardt, dans une transformation laissant fixe l'origine. Alors on peut appliquer le théorème XXX aux transformations de D en lui-même. On doit donc avoir, quel que soit θ :

ou bien

$$ab'e^{im'\theta} - ba'e^{ip'\theta} = ab'e^{ip'\theta} - ba'e^{im'\theta} = 0,$$

ou bien

$$aa'(e^{ip'\theta} - e^{im'\theta}) = bb'(e^{im'\theta} - e^{ip'\theta}) = 0.$$

([1]) Bien entendu, il s'agit toujours uniquement de transformations laissant fixe l'origine.

Dans le premier cas, on aurait $ab' = ba' = 0$, ce qui est impossible ($ab' - ba' \neq 0$). On a donc

$$aa' = bb' = 0,$$

ce qui est possible de deux façons :

1° $$b = a' = 0;$$
2° $$a = b' = 0.$$

Dans le premier cas, le domaine D admet des transformations en lui-même, de la forme

$$x' = x e^{im'\theta} + \ldots, \qquad y' = y e^{ip'\theta} + \ldots$$

et, comme il est (m, p) cerclé ($mp' - pm' \neq 0$), il admet des transformations

$$x' = x e^{i\alpha} + \ldots, \qquad y' = y e^{i\beta} + \ldots \qquad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels quelconques}).$$

D'après le théorème XXV, il pourrait se représenter sur un domaine de Reinhardt.

Dans le deuxième cas, D admet des transformations en lui-même, de la forme

$$x' = x e^{ip'\theta} + \ldots, \qquad y' = y e^{im'\theta} + \ldots;$$

s'il ne peut pas se représenter sur un domaine de Reinhardt, on a forcément

$$mm' - pp' = 0.$$

Le théorème XXXI est établi.

Théorème XXXII. — *Si un domaine (m, p) cerclé borné D $(m \neq p)$ ne peut pas se transformer en un domaine de Reinhardt, l'origine restant fixe, toute transformation de D en un autre domaine (m, p) cerclé, qui laisse fixe l'origine, a l'une des formes suivantes :*

1° *Si $mp > 0$* (¹),

$$X = ax, \qquad Y = b'y;$$

(¹) Dans ce cas, l'hypothèse de l'énoncé se réduit à la suivante : D n'est pas un domaine de Reinhardt.

2° *Si* D *est semi-cerclé*,

$$X = f(x), \qquad Y = y g(x);$$

3° *Si* D *est inversement cerclé*,

$$X = x f(xy), \qquad Y = y g(xy),$$

ou

$$X = y f_1(xy), \qquad Y = x g_1(xy);$$

4° *Si* $mp < 0$ $(m > 0, p = -p', m \neq p')$,

$$X = x f(x^{p'} y^{m}), \qquad Y = y g(x^{p'} y^{m}).$$

Soit, en effet,

$$X = ax + by + \ldots, \qquad Y = a'x + b'y + \ldots$$

la transformation envisagée. D'après la démonstration du théorème précédent, on a

$$b = a' = 0$$

ou

$$a = b' = 0;$$

mais la seconde éventualité n'est possible que si $m + p = 0$. Il n'y a plus alors qu'à tenir compte des résultats du Chapitre III pour obtenir le théorème XXXII.

Théorème XXXIII. — *Soit* D *un domaine de Reinhardt borné qui n'a pas la forme*

$$(31) \qquad A x\bar{x} + B y\bar{y} < 1 \qquad (A > 0, B > 0).$$

Toute transformation qui laisse fixe l'origine et qui représente D *sur un domaine* (m, p) *cerclé* $\Delta (m \neq p)$ *a la forme*

$$X = ax + \ldots, \qquad Y = b'y + \ldots$$

ou la forme

$$X = by + \ldots, \qquad Y = a'x + \ldots.$$

Soit, en effet,

$$X = ax + by + \ldots, \qquad Y = a'x + b'y + \ldots$$

la transformation envisagée. En raisonnant comme pour le théorème XXXI, on voit que D admet des transformations en lui-même de la forme (32) (où l'on remplacerait m' et p' respectivement par m et p). En vertu du théorème XXIX, on conclut

$$aa' = bb' = 0.$$

D'où le présent théorème. C. Q. F. D.

Corollaires :

1° *Si un domaine de Reinhardt borné* D *n'a pas la forme* (31), *toute transformation de* D *en un autre domaine de Reinhardt, qui laisse fixe l'origine, a la forme*

$$X = ax, \qquad Y = b'y$$

ou la forme

$$X = by, \qquad Y = a'x \quad [1].$$

En effet, le théorème précédent et le théorème VI s'appliquent.
C. Q. F. D.

2° *Si un domaine de Reinhardt borné* D *n'a pas la forme* (31), *toute transformation de* D *en un autre domaine de Reinhardt* Δ

$$(33) \qquad X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y) \qquad [\varphi(0, 0) = X_0, \ \psi(0, 0) = 0],$$

a la forme

$$(34) \qquad X = f(x), \qquad Y = y\,g(x)$$

ou la forme

$$(35) \qquad X = f_1(y), \qquad Y = x\,g_1(y).$$

Posons, en effet,

$$X - X_0 = X', \qquad Y = Y';$$

le domaine Δ devient un domaine Δ′ semi-cerclé. Le théorème XXXIII s'applique à la transformation de D en Δ′. Il suffit alors de se servir du théorème XII, relatif aux transformations des domaines semi-cerclés. C. Q. F. D.

Nous avons là une proposition qui peut servir de point de départ

(1) M. Reinhardt a donné cet énoncé dans le cas des domaines convexes.

pour la recherche de toutes les transformations d'un domaine de Reinhardt borné en lui-même ([1]).

3° Le théorème XXXIII, combiné avec les résultats du Chapitre III, permet de déterminer la forme la plus générale de la transformation d'un domaine (m, p) cerclé en un domaine (m', p') cerclé (l'origine restant fixe) lorsqu'ils peuvent se représenter sur un domaine de Reinhardt (l'origine restant fixe).

CHAPITRE V.

LES DOMAINES MAXIMA.

On sait que, étant donné un domaine dans l'espace des deux variables complexes x et y, il n'est pas toujours possible de construire une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans ce domaine et non prolongeable au delà. Nous dirons qu'un domaine D est *maximum* s'il existe au moins une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans D et non prolongeable au delà.

1. Les domaines cerclés maxima. — Nous avons vu (Chap. II, théorème II), que toute fonction $f(x, y)$, holomorphe dans un domaine cerclé D non ramifié à l'origine, admet un développement en série de polynomes homogènes

$$f(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x, y)$$

uniformément convergent au voisinage de tout point intérieur à D.

([1]) M. Behnke m'écrit (22 mai 1930) que M. Thullen vient de résoudre complètement cette question. D'après M. Thullen, seuls, parmi les domaines de Reinhardt bornés, les domaines

$$|x| < \mathrm{A}, \qquad |y| < \mathrm{B}$$

et

$$\mathrm{A}\,|x|^2 + \mathrm{B}\,|y|^\alpha < 1 \qquad (\alpha > 0)$$

admettent des transformations en eux-mêmes qui ne laissent pas fixe le centre, et ces transformations sont bien faciles à trouver.

Nous en avons déduit que D est nécessairement univalent (convention [A]), et que $f(x, y)$ est holomorphe dans le plus petit domaine cerclé étoilé contenant D. Il en résulte qu'*un domaine cerclé, pour être maximum, doit être étoilé*. Nous allons voir que cela ne suffit pas.

Donnons-nous *a priori* une série de polynomes homogènes

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x, y),$$

$\mathrm{P}_n(x, y)$ étant de degré n. M. Hartogs [1] a démontré le beau théorème suivant : *Si la série $\Sigma \mathrm{P}_n(x, y)$ converge en tous les points d'un domaine, le domaine total de convergence Δ contient l'origine à son intérieur, et c'est un domaine de convergence uniforme.* Dans cet énoncé, le domaine total de convergence est, par définition, l'ensemble des points x_0, y_0 tels que, au point x_0, y_0 et en tous les points voisins, la série converge. Dire que Δ est un domaine de convergence uniforme, c'est dire que la convergence est uniforme au voisinage de tout point intérieur à Δ.

Le domaine de convergence Δ est évidemment un domaine cerclé étoilé.

Théorème XXXIV. — *Le domaine total de convergence d'une série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_n(x, y)$$

est un domaine cerclé maximum; réciproquement, tout domaine cerclé maximum est le domaine total de convergence d'une certaine série de polynomes homogènes.

La seconde partie de l'énoncé se démontre immédiatement : soit Δ un domaine cerclé maximum, et soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans Δ et non prolongeable au delà; $f(x, y)$ possède un développement $\Sigma \mathrm{P}_n(x, y)$ qui admet évidemment Δ comme domaine total de convergence.

La première partie du théorème va être plus longue à établir.

---

[1] Dans son Mémoire des *Math. Ann.* cité au Chapitre II (§ 2).

Soient $\Sigma P_n(x,y)$ une série de polynomes homogènes, et Δ son domaine total de convergence. Nous voulons montrer que Δ est maximum. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_p, \ldots$ une suite de nombres positifs croissants qui augmentent indéfiniment, et soit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p, \ldots$ une suite de nombres positifs décroissants qui tendent vers zéro. Soit E'_p l'ensemble des points (x,y) en lesquels on a, quel que soit n,

$$|P_n(x,y)| < A_p,$$

et soit Δ'_p le domaine formé des points intérieurs à E'_p. Prenons les homothétiques E_p et Δ_p de E'_p et Δ'_p par rapport à l'origine dans le rapport $1-\eta_p$; l'ensemble E_p est l'ensemble des points (x,y) en lesquels on a, quel que soit n,

$$|P_n(x,y)| < A_p(1-\eta_p)^n,$$

et Δ_p est le domaine formé des points intérieurs à E_p.

Tout point de Δ_p est évidemment intérieur à Δ. Réciproquement, tout point x_0, y_0 de Δ est intérieur à Δ_p si p est assez grand. En effet, la série $\Sigma P_n(x,y)$ converge uniformément au voisinage de x_0, y_0; donc $|P_n(x,y)|$ admet une borne supérieure indépendante de n et du point x, y voisin de x_0, y_0. Prenons un entier q assez grand pour que A_q soit supérieur à cette borne; alors le point x_0, y_0 est intérieur à Δ'_q, et, par suite, le point $x = kx_0, y = ky_0$ appartient à Δ'_q, quel que soit k suffisamment voisin de *un*. Choisissons $p (p \geqq q)$ assez grand pour que le point

$$x = \frac{x_0}{1-\eta_p}, \qquad y = \frac{y_0}{1-\eta_p}$$

appartienne à Δ'_q; il appartiendra *a fortiori* à Δ'_p; donc x_0, y_0 appartient à Δ_p. C. Q. F. D.

Ainsi, le domaine Δ se présente comme limite d'une suite infinie de domaines fermés Δ_p, complètement intérieurs à Δ, et dont chacun contient le précédent.

Je dis que le domaine Δ jouit de la propriété suivante, que j'appellerai « propriété [P] » dans la suite de cette étude :

Propriété [P] : Un domaine Δ jouit de la propriété [P] si, étant donnée une suite infinie quelconque de régions $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_p, \ldots$, intérieures à Δ et n'ayant aucun point d'accumulation intérieur à Δ, on peut former une fonction $f(x, y)$, holomorphe dans Δ, qui s'annule en un point au moins de chacune des régions Σ_p.

Il est clair que tout domaine qui jouit de la propriété [P] est maximum; en effet, il suffit de prendre une suite infinie de régions s'accumulant au voisinage de tout point frontière du domaine considéré ([1]). En outre, tout transformé analytique d'un domaine qui jouit de la propriété [P] jouit aussi de cette propriété, et, en particulier, est maximum.

Revenons alors au domaine total de convergence Δ de la série $\Sigma P_n(x, y)$ et aux domaines Δ_p précédemment définis. Étant donnée la suite des régions Σ_p, je puis associer à chaque Σ_p un domaine $\Delta_{p'}$ tel que Σ_p soit extérieure à $\Delta_{p'}$, et cela de façon que p' augmente indéfiniment avec p. Pour la commodité du langage, nous pouvons supposer $p' = p$. Cela posé, il existe évidemment dans Σ_p un point x_p, y_p qui n'appartient pas à E_p (car si tous les points de Σ_p appartenaient à E_p, ils appartiendraient à Δ_p). Puisque x_p, y_p n'appartient pas à E_p, il existe une valeur n_p de n pour laquelle on a

$$|P_{n_p}(x_p, y_p)| \geqq A_p(1 - \eta_p)^{n_p},$$

alors que, dans Δ_p, on a

$$|P_{n_p}(x, y)| < A_p(1 - \eta_p)^{n_p}.$$

Je pose

$$\frac{P_{n_p}(x, y)}{P_{n_p}(x_p, y_p)} = Q_p(x, y).$$

On a

$$Q_p(x_p, y_p) = 1,$$

et, dans Δ_p,

$$|Q_p(x, y)| < 1;$$

par suite, dans Δ_{p-1}, on a

$$|Q_p(x, y)| < \left(\frac{1 - \eta_{p-1}}{1 - \eta_p}\right)^{n_p} = k_p \qquad (k_p < 1).$$

([1]) Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à mon article intitulé : *Les domaines d'existence des fonctions analytiques*, qui paraîtra bientôt dans le *Bulletin de la Soc. Math. de France*.

Il reste à former un produit convergent

$$(1)\qquad f(x,y)=\prod_{p=1}^{\infty}[1-Q_p(x,y)]e^{R_p(x,y)},$$

$R_p(x,y)$ étant un polynome destiné à assurer la convergence. Donnons-nous à cet effet une série convergente $\Sigma\varepsilon_p$ à termes positifs; la série

$$\log(1-Q_p)=Q_p+\frac{1}{2}(Q_p)^2+\ldots$$

convergeant uniformément dans Δ_{p-1}, on peut prendre un nombre suffisant de termes, de façon que le reste soit inférieur à ε_p dans Δ_{p-1}; l'ensemble de ces premiers termes constitue un polynome $R_p(x,y)$, qui rend le produit (1) uniformément convergent au voisinage de tout point intérieur à Δ.

Ainsi, nous venons de montrer que Δ jouit non seulement de la propriété [P], mais d'une propriété que nous appellerons [P'] et qui peut s'énoncer ainsi :

Propriété [P'] : Un domaine Δ jouit de la propriété [P'] si, étant donnée une suite infinie quelconque de régions Σ_p intérieures à Δ, n'ayant aucun point d'accumulation intérieur à Δ, on peut former une fonction $f(x,y)$, holomorphe dans Δ, qui s'annule sur des variétés de la forme

$$Q_p(x,y)=1\qquad (Q_p \text{ polynome homogène, } p=1,\ldots,n,\ldots),$$

la variété $Q_p=1$ contenant des points intérieurs à Σ_p.

Théorème XXXV. — *Tout domaine cerclé maximum jouit de la propriété* [P'].

En effet, si Δ est cerclé maximum, Δ est le domaine total de convergence d'une certaine série de polynomes homogènes et jouit, par conséquent, de la propriété [P'].

Corollaire. — *Tout transformé analytique d'un domaine cerclé maximum est un domaine maximum.*

Théorème XXXVI. — *Pour qu'un domaine univalent* Δ, *qui contient* *l'origine, soit cerclé et maximum, il faut et il suffit que, étant donnés un domaine fermé quelconque Δ_0 intérieur à Δ, et une hypersphère quelconque Σ extérieure à Δ, il existe une variété*

$$|Q(x, y)| = 1 \qquad (Q \text{ polynome homogène}),$$

extérieure à Δ_0 et ayant des points intérieurs à Σ.

La condition est nécessaire. Soit, en effet, Δ un domaine cerclé maximum; c'est le domaine de convergence d'une série $\Sigma P_n(x, y)$. Reprenons les notations utilisées dans la démonstration du théorème XXXIV. Si p est assez grand, Δ_0 sera intérieur à Δ_p. Or, Σ est extérieure à Δ_p et contient des points qui n'appartiennent pas à E_p (sinon, tous les points de Σ appartiendraient à Δ_p). Soit donc x_0, y_0 un point de Σ qui n'appartient pas à E_p; il existe une valeur de n pour laquelle on a

$$|P_n(x_0, y_0)| \geqq A_p(1 - \eta_p)^n,$$

alors que, dans Δ_p, et *a fortiori* dans Σ, on a

$$|P_n(x, y)| < A_p(1 - \eta_p)^n.$$

Il suffit donc de prendre

$$Q(x, y) = \frac{P_n(x, y)}{P_n(x_0, y_0)}.$$

Montrons maintenant que la condition est suffisante. D'abord, si un domaine Δ satisfait aux conditions du théorème XXXVI, il est cerclé étoilé. Supposons en effet le point x_0, y_0 intérieur à Δ, et le point kx_0, ky_0 ($|k| < 1$) extérieur à Δ. On pourrait trouver un domaine fermé Δ_0, intérieur à Δ, et contenant le point x_0, y_0. En prenant pour Σ une hypersphère de centre kx_0 ky_0 et de rayon assez petit, on arriverait à une contradiction.

Ainsi Δ est cerclé. Il reste à faire voir que Δ est maximum. Or Δ peut être considéré comme limite d'une suite infinie de domaines fermés $D'_1, D'_2, \ldots, D'_p, \ldots$ dont chacun contient le précédent. Soit $\eta_1, \ldots, \eta_p, \ldots$ une suite de nombres positifs, qui décroissent et tendent vers zéro. Soit D_p l'homothétique de D'_p par rapport à l'origine dans le rapport $1 - 2\eta_p$. Le domaine Δ peut être aussi considéré comme limite des domaines D_p. Soit alors Σ'_p une hypersphère extérieure à D, et telle que l'homothétique Σ_p de Σ'_p par rapport à l'origine, dans le rapport $1-\eta_p$, soit intérieure à D. Nous pouvons choisir les hypersphères Σ'_p de façon que tout point frontière de Δ soit un point d'accumulation pour les Σ'_p (ou, ce qui revient au même, pour les Σ_p). D'après l'hypothèse faite sur Δ, on peut, à D'_p et Σ'_p, attacher un polynome homogène $Q_p(x, y)$, de degré n_p, tel que la variété

$$|Q_p(x, y)| = 1$$

soit extérieure à D'_p et contienne des points intérieurs à Σ'_p. Alors la variété

$$\left|\frac{Q_p(x, y)}{(1-\eta_p)^{n_p}}\right| = 1$$

contiendra des points intérieurs à Σ_p, et l'on aura, dans D_p,

$$\left|\frac{Q_p(x, y)}{(1-\eta_p)^{n_p}}\right| < \left(\frac{1-2\eta_p}{1-\eta_p}\right)^{n_p} = k_p \qquad (k_p < 1).$$

On pourra donc, comme plus haut, former, à l'aide d'un produit convergent, une fonction $f(x,y)$, holomorphe dans Δ, qui s'annule sur une infinité de variétés admettant tout point frontière de Δ comme point d'accumulation. Δ est donc bien maximum.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Tout domaine cerclé Δ, limite d'une suite infinie de domaines cerclés Δ_p, dont chacun est maximum et contient le précédent, est lui-même maximum.*

En effet, soient Δ_0 un domaine fermé intérieur à Δ, et Σ une hypersphère extérieure à Δ ; Δ_0 est intérieur à Δ_p si p est assez grand. Donc il existe une variété

$$|Q(x, y)| = 1.$$

extérieure à Δ_p (et par suite à Δ_0), et qui contient des points de Σ.

C. Q. F. D.

Les domaines cerclés *convexes*, étudiés par M. Carathéodory, se présentent comme un cas particulier des domaines cerclés maxima : si, dans l'énoncé du théorème XXXVI, on assujettit le polynome homogène $Q(x, y)$ à être du premier degré, on trouve la condition pour qu'un domaine soit cerclé et convexe. On sait par ailleurs que tout domaine convexe, cerclé ou non, est maximum.

De même qu'il existe un plus petit domaine cerclé convexe contenant un domaine cerclé donné, de même il existe un *plus petit domaine cerclé maximum* contenant un domaine cerclé donné, ainsi que nous allons le voir maintenant.

THÉORÈME XXXVII. — *Étant donné un domaine cerclé* D, *il existe un domaine cerclé maximum* Δ, *contenant* D, *qui jouit de la propriété suivante : tout domaine cerclé maximum contenant* D *contient* Δ.

Pour la démonstration, nous supposerons d'abord que D est borné. Nous nous appuierons alors sur la proposition suivante :

THÉORÈME XXXVIII. — *Pour qu'un domaine borné* D *soit cerclé maximum, il faut et il suffit que ce soit le domaine commun à des domaines de la forme*

$$|Q(x, y)| < 1 \qquad (Q \text{ polynome homogène}),$$

en nombre fini ou infini.

La condition est évidemment suffisante, car, si elle est remplie, les conditions d'application du théorème XXXVI sont aussi remplies.

La condition est nécessaire. Soit en effet $P(x, y)$ un polynome homogène quelconque de degré quelconque; si le nombre positif a est assez grand, la variété

$$|P(x, y)| = a$$

est tout entière extérieure à D, puisque D est borné. Soit b la borne inférieure des valeurs de a pour lesquelles il en est ainsi. La variété

$$|P(x, y)| = b$$

n'a pas de points intérieurs à D, et contient au moins un point frontière de D. Faisons de même pour tous les polynomes homogènes de tous les degrés, et considérons le domaine Δ commun à tous les domaines tels que

$$|P(x, y)| < b.$$

Δ contient évidemment D. Je dis que Δ est identique à D. Supposons en effet qu'il existe une hypersphère Σ intérieure à Δ et extérieure à D. Soit k un nombre positif plus petit que *un*, mais assez voisin de *un* pour que l'homothétique Σ' de Σ par rapport à l'origine, dans le rapport k, soit encore extérieure à D; soit D′ l'homothétique de D dans la même homothétie. D'après le théorème XXXVI, il existe une variété

$$|Q(x, y)| = 1.$$

extérieure à D′, qui contient des points de Σ'. Soit n le degré de Q. Alors le domaine

$$|Q(x, y)| < \frac{1}{k^n}$$

contient D et ne contient pas tous les points de Σ, donc ne contient pas tous les points de Δ. Ceci est en contradiction avec la façon dont on a défini Δ. C. Q. F. D.

Passons à la démonstration du théorème XXXVII pour un domaine cerclé borné D. Pour chaque polynome homogène $P(x, y)$, définissons, comme plus haut, une variété $|P(x, y)| = b$ qui n'a pas de points intérieurs à D, et qui contient au moins un point frontière de D. Soit Δ le domaine commun à tous les domaines

$$|P(x, y)| < b.$$

Δ contient D et est cerclé maximum. Soit alors Δ' un domaine maximum contenant D. On voit sans peine que tout point de Δ appartient à Δ'; car s'il n'en était pas ainsi, on appliquerait le théorème XXXVI et l'on arriverait à une contradiction. Le théorème XXXVII est donc démontré si D est borné. Remarquons que Δ est borné.

Si le domaine D n'est pas borné, on le considère comme limite d'une suite infinie de domaines cerclés bornés $D_1, \ldots, D_p, \ldots$, dont chacun contient le précédent. Soit alors Δ_p le plus petit domaine cerclé maximum contenant D_p. Les domaines Δ_p sont bornés, et chacun d'eux contient le précédent; l'ensemble de tous ces domaines constitue un domaine Δ, qui est cerclé et maximum (corollaire du théorème XXXVI) et qui contient D. Tout domaine maximum Δ', contenant D, contient D_p, donc Δ_p, quel que soit p, donc Δ.

C. Q. F. D.

THÉORÈME XXXIX. — *Si une fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans un domaine cerclé* D, *elle est holomorphe dans le plus petit domaine cerclé maximum* Δ *contenant* D.

En effet, on a dans D

$$f(x, y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y),$$

et le domaine de convergence de la série est un domaine cerclé maximum qui contient D, donc contient Δ. C. Q. F. D.

Corollaires. — 1° Si $f(x, y)$ est méromorphe et ne prend pas la valeur a dans D, elle est méromorphe et ne prend pas la valeur a dans Δ.

2° Tout domaine maximum, cerclé ou non, qui contient D, contient Δ.

THÉORÈME XL. — *Si un domaine cerclé* D *est maximum au sens large, il est maximum* [1].

Nous dirons qu'un domaine cerclé D est maximum au sens large si, étant donné un point frontière quelconque x_0, y_0 de D, il existe une fonction $f(x, y)$, holomorphe dans D, et non holomorphe en x_0, y_0.

Soient alors D un domaine cerclé, maximum au sens large, Δ le plus petit domaine cerclé maximum contenant D. Pour montrer que Δ est identique à D, je vais montrer que tout point frontière de D est un point frontière de Δ. Or, soient x_0, y_0 un point frontière de D, et $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans D et non holomorphe en x_0, y_0 ; comme $f(x, y)$ est holomorphe dans Δ, le point x_0, y_0 est un point frontière de Δ. C. Q. F. D.

2. LES DOMAINES DE REINHARDT MAXIMA. — La théorie précédente s'applique, avec quelques simplifications, aux domaines de Reinhardt maxima. Cette fois, ce sont les séries doubles de Taylor qui jouent un

---

[1] M. BEHNKE (*Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ.*, V, 3, 1927, p. 290-312) a établi un théorème un peu plus général, mais en faisant une hypothèse restrictive sur la nature des frontières.

rôle primordial. Je voudrais montrer comment l'on retrouve ainsi certaines propriétés de ces séries, notamment en ce qui concerne les rayons de convergence associés.

Voici brièvement la suite du raisonnement.

Le domaine total de convergence d'une série

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m\,n}\,x^m y^n$$

est un domaine de Reinhardt complet, et c'est un domaine de convergence uniforme. Donc tout domaine de Reinhardt maximum est complet. Mais ce n'est pas tout.

THÉORÈME XXXIV *bis*. — *Le domaine total de convergence d'une série double de Taylor est un domaine de Reinhardt maximum; réciproquement, tout domaine de Reinhardt maximum est le domaine total de convergence d'une certaine série de Taylor.*

THÉORÈME XXXV *bis*. — *Tout domaine de Reinhardt maximum jouit de la propriété* [P″].

Propriété [P″] : un domaine Δ jouit de la propriété [P″] si, étant donnée une suite infinie quelconque de régions Σ_p intérieures à Δ, n'ayant aucun point d'accumulation intérieur à Δ, on peut former une fonction $f(x, y)$, holomorphe dans Δ, qui s'annule sur des variétés V_p de la forme

$$x^{m_p} y^{n_p} = a_p \qquad (m_p \geqq 0,\ n_p \geqq 0),$$

la variété V_p contenant des points intérieurs à Σ_p.

THÉORÈME XXXVI *bis*. — *Pour qu'un domaine univalent Δ soit un domaine de Reinhardt maximum, il faut et il suffit que, étant donnés un domaine fermé quelconque Δ_0 intérieur à Δ, et une hypersphère quelconque Σ extérieure à Δ, il existe une variété*

$$|a x^m y^n| = 1 \qquad (m \geqq 0,\ n \geqq 0).$$

extérieure à Δ_0, et ayant des points intérieurs à Σ.

On peut donner à cette condition la forme simple suivante.

Posons

$$\xi = \log|x|, \qquad \eta = \log|y|.$$

Un domaine de Reinhardt D a pour image un domaine I du plan ξ, η, domaine qui contient le voisinage de $\xi = \eta = -\infty$. Autrement dit, il existe un nombre réel A, tel que la région

$$\xi < A, \qquad \eta < A$$

appartienne à I. Cela posé, pour que D soit maximum, *il faut et il suffit* que le domaine I soit *convexe*. Nous retrouvons le théorème de Fabry-Faber-Hartogs, qui concerne la forme de la relation $R_2 = \varphi(R_1)$ existant entre les rayons de convergence associés d'une série double de Taylor.

Étant donnés un domaine de Reinhardt quelconque D, et son image I dans le plan ξ, η, le plus petit domaine convexe contenant I définit le *plus petit domaine de Reinhardt maximum* Δ contenant D.

Théorème XXXIX *bis*. — *Si une fonction $f(x,y)$ est holomorphe dans un domaine de Reinhardt* D, *elle est holomorphe dans le plus petit domaine de Reinhardt maximum Δ contenant* D.

Corollaires. — 1° Si $f(x, y)$ ne prend pas la valeur a dans D, $f(x, y)$ ne prend pas la valeur a dans Δ.

2° Tout domaine maximum contenant D contient Δ. *En particulier, le plus petit domaine cerclé maximum contenant* D *n'est autre que* Δ.

Prenons une série de polynomes homogènes

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x, y), \tag{2}$$

et soit

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{m,p}x^m y^p \tag{3}$$

la série de Taylor obtenue en séparant les différents termes des polynomes. Soient D et Δ les domaines respectifs de convergence des séries (2) et (3); D est cerclé maximum, Δ est un domaine de Reinhardt maximum; Δ est évidemment intérieur à D. Je dis que Δ est le plus grand domaine de Reinhardt inscrit dans D. En effet, supposons qu'il existe un domaine de Reinhardt Δ', contenant Δ et intérieur à D; puisque $f(x, y)$ est holomorphe dans Δ', le développement (3) converge dans Δ' (Chap. II, théorème III); donc Δ' est identique à Δ. C. Q. F. D.

On déduit de là que *le plus grand domaine de Reinhardt inscrit dans un domaine cerclé maximum est lui-même maximum.*

Signalons enfin que la théorie exposée au paragraphe **1** s'étend aux domaines (m, p) cerclés $(mp > 0)$, à condition de remplacer la considération des polynomes homogènes par celle des polynomes qui sont à la fois des polynomes entiers en x et y et des polynomes homogènes en $x^{\frac{1}{m}}$ et $y^{\frac{1}{p}}$.

5. Domaines semi-cerclés maxima; domaines inversement cerclés maxima. — Les méthodes exposées plus haut s'appliquent avec quelques modifications à l'étude des domaines semi-cerclés maxima, ou inversement cerclés maxima. Bornons-nous, faute de place, à énoncer les principaux résultats. Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} y^n f_n(x)$ ont d'ailleurs fait l'objet d'importants travaux de M. Hartogs [1].

Le théorème XXXIV reste vrai si l'on remplace, dans son énoncé, « cerclé » par « semi-cerclé », et « $\sum_0^{\infty} P_n(x, y)$ » par « $\sum_0^{\infty} y^n f_n(x)$ ».

On voit aussi que tout domaine semi-cerclé maximum [2] jouit de la propriété [P]. Étant donné un domaine semi-cerclé D, de projection d sur le plan x, il existe toujours un plus petit domaine semi-cerclé maximum Δ, contenant D, qui a même projection d sur le plan x; toute fonction holomorphe dans D est holomorphe dans Δ. Le plus petit domaine semi-cerclé maximum contenant un domaine de Reinhardt donné, est lui-même un domaine de Reinhardt. Le plus grand domaine de Reinhardt inscrit dans un domaine semi-cerclé maximum est lui-même maximum.

---

(1) *Loc. cit.* (*voir* Chap. II, § **2** du présent travail).

(2) Tout domaine semi-cerclé maximum est complet.

Les domaines inversement cerclés, et, plus généralement, les domaines (m, p) cerclés $(mp < 0)$ possèdent des propriétés analogues.

4. Application aux domaines bornés qui admettent une infinité de transformations en eux-mêmes laissant fixe un point intérieur. — Soit D un tel domaine. On peut le représenter sur un domaine (m, p) cerclé D′ (Chap. IV). Pour fixer les idées, supposons D′ cerclé. Soient

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y) \tag{4}$$

les équations de la transformation de D en D′, et soient

$$x = F(x', y'), \quad y = G(x', y') \tag{5}$$

les équations de la transformation inverse.

$F(x', y')$ et $G(x', y')$ sont holomorphes et bornées dans D′; elles sont donc holomorphes et bornées (¹) dans Δ', plus petit domaine cerclé maximum contenant D′ (théorème XXXIX). La transformation (5) transforme Δ' en un domaine Δ contenant D. Mais cette transformation respecte-t-elle la convention [B]?

Bornons-nous alors au *cas où* D *n'est pas ramifié*. Dans ce cas, la fonction

$$\frac{D(F, G)}{D(x', y')} = u(x', y')$$

ne s'annule pas dans D′; donc elle ne s'annule pas dans Δ', et la convention [B] est certainement respectée. En outre, le domaine Δ n'est pas ramifié. Quant aux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$, elles sont holomorphes dans Δ, qu'elles transforment en Δ'.

Soit maintenant $\varphi(x, y)$ une fonction quelconque holomorphe dans D; je dis qu'elle est holomorphe dans Δ. En effet, supposons que le point x', y' appartienne à D′, et posons

$$\varphi[F(x', y'), G(x', y')] = \Phi(x', y').$$

$\Phi(x', y')$, qui est holomorphe dans D′, est holomorphe dans Δ'. La

(¹) Car si $F(x', y')$ ne prend dans D′ aucune valeur de module plus grand que M, elle ne prend dans Δ' aucune de ces valeurs (corollaire du théorème XXXIX).

fonction

$$\Phi[f(x, y), g(x, y)]$$

est donc holomorphe dans Δ, et comme elle coïncide avec $\varphi(x, y)$ dans le domaine D, la proposition est établie.

Je dis enfin que Δ est un domaine maximum. En effet, Δ est transformé d'un domaine cerclé maximum Δ', et le corollaire du théorème XXXV s'applique.

Nous obtenons ainsi le théorème :

THÉORÈME XLI. — *Soit* D *un domaine borné non ramifié qui admet une infinité de transformations en lui-même, laissant fixe un point intérieur. Il existe un domaine borné maximum* Δ, *non ramifié, qui contient* D *et jouit de la propriété suivante : toute fonction holomorphe dans* D *est aussi holomorphe dans* Δ.

Il est probable que le théorème reste vrai si l'on supprime les mots « non ramifié ».

Nous dirons qu'un domaine Δ *non ramifié* est *maximum au sens large* si, étant donné un point frontière quelconque x_0, y_0 de Δ, il existe une fonction $f(x, y)$ holomorphe dans Δ et non holomorphe en x_0, y_0.

THÉORÈME XLII. — *Si un domaine borné* D *non ramifié admet une infinité de transformations en lui-même laissant fixe un point intérieur, et s'il est maximum au sens large, il est maximum.*

En effet, il existe un plus petit domaine maximum Δ contenant D ; en raisonnant comme pour le théorème XL, on montre que Δ est identique à D.

5. LES DOMAINES MAJORABLES. — Nous dirons qu'*un domaine* D *est majorable, s'il n'est pas ramifié, et s'il existe un domaine* Δ, *non ramifié, maximum au sens large, qui contient* D *et jouit de la propriété suivante : toute fonction* $f(x, y)$ *holomorphe dans* D *est aussi holomorphe dans* Δ. On voit sans peine que si un domaine Δ' jouit vis-à-vis de D de la même propriété que Δ, Δ' est identique à Δ. Le domaine Δ sera dit associé au domaine D.

Tout domaine maximum au sens large, et *a fortiori* tout domaine maximum, est évidemment majorable. Tout domaine (m, p) cerclé est majorable.

THÉORÈME XLIII. — *Soient D un domaine majorable, et Δ le domaine associé. Si une transformation*

$$x' = f(x, y), \qquad y' = g(x, y) \tag{6}$$

transforme D en un domaine D' non ramifié, D' est lui-même majorable, et le domaine Δ' associé à D' n'est autre que le transformé de Δ par (6).

En effet, $f(x, y)$ et $g(x, y)$, étant holomorphes dans D, sont holomorphes dans Δ. En outre, la fonction

$$\frac{D(f, g)}{D(x, y)},$$

qui est holomorphe et non nulle dans D, est holomorphe et non nulle dans Δ. La transformation (6) transforme donc Δ en un domaine non ramifié Δ'. Soit

$$x = F(x', y'), \qquad y = G(x', y') \tag{7}$$

la transformation inverse. Il faut montrer :

1° Que toute fonction $\varphi(x', y')$ holomorphe dans D' est holomorphe dans Δ';

2° Que Δ' est maximum au sens large.

Le premier point s'établit à l'aide d'une méthode déjà utilisée pour le théorème XLI.

Pour montrer que Δ' est maximum au sens large, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe un point frontière x'_0, y'_0 de Δ' jouissant de la propriété suivante : toute fonction holomorphe dans Δ' est holomorphe en x'_0, y'_0. Alors $F(x', y')$ et $G(x', y')$ seraient holomorphes en x'_0, y'_0; en outre, $\frac{D(F, G)}{D(x', y')}$ serait holomorphe et non nulle en x'_0, y'_0. Il existerait donc un voisinage univalent V' de x'_0, y'_0, qui serait transformé en un voisinage univalent V par (7); V serait à son tour transformé en V' par (6). Le point

$$x_0 = F(x'_0, y'_0), \qquad y_0 = G(x'_0, y'_0)$$

serait un point frontière de Δ. Or il existe une fonction $u(x, y)$, holomorphe dans Δ, et non en x_0, y_0. La fonction

$$U(x', y') \equiv u[F(x', y'), G(x', y')]$$

serait holomorphe dans Δ', donc holomorphe en x'_0, y'_0. Mais alors la fonction

$$U[f(x, y), g(x, y)]$$

serait holomorphe en x_0, y_0; comme cette fonction coïncide dans Δ avec $u(x, y)$, nous arrivons à une contradiction.

C. Q. F. D.

En même temps que le théorème XLIII, nous venons d'établir la proposition suivante :

Corollaire. — *Si Δ est un domaine non ramifié, maximum au sens large, tout domaine Δ' non ramifié, tranformé analytique de Δ, est maximum au sens large.*

Pour obtenir ce résultat, nous n'avons eu besoin d'aucune hypothèse *a priori* sur la nature de la correspondance entre les frontières.

Voici une application intéressante du théorème XLIII. Soient Δ_1 un domaine cerclé non maximum, et Δ le plus petit domaine cerclé maximum contenant Δ_1. Soit D un domaine quelconque, uniquement assujetti à contenir Δ_1 et être contenu dans Δ. Je dis que D est majorable; en effet, Δ est univalent et maximum, et toute fonction holomorphe dans D est holomorphe dans Δ, puisqu'elle est holomorphe dans Δ_1. En outre, le domaine associé à D n'est autre que Δ. D'après le théorème XLIII, *toute transformation analytique de* D *en lui-même transforme Δ en lui-même.*

Il est probable que les transformations d'un domaine cerclé borné en lui-même laissent nécessairement fixe le centre, sauf si le domaine est d'un type particulier [1]; il n'y aura donc, en général [2], que les transformations

$$x' = xe^{i\theta}, \qquad y' = ye^{i\theta}.$$

---

[1] M. Thullen a démontré qu'il en est bien ainsi dans le cas des domaines de Reinhardt. *Voir* la note du paragraphe 7 (Chap. IV).

[2] Chapitre IV, § 7, théorème XXVIII.

Or, on peut manifestement choisir le domaine D de façon qu'il n'admette aucune de ces transformations. Alors D *n'admettra aucune transformation en lui-même.*

Sous la réserve qu'on démontre un jour la proposition, relative aux domaines cerclés, qui vient d'être admise, nous apercevons ici l'existence d'une classe très étendue de domaines univalents, qu'on peut supposer bornés et simplement connexes, et qui n'admettent aucune transformation en eux-mêmes.

6. Sur les transformations analytiques d'une classe particulière de domaines. — Nous allons donner effectivement l'exemple d'une classe de domaines bornés, simplement connexes (homéomorphes à une hypersphère), qui jouissent de la propriété suivante : les transformations en lui-même d'un domaine de cette classe, qui laissent fixe un point intérieur *quel qu'il soit*, sont en nombre *fini* si elles existent. Parmi ces domaines, il en est qui admettent néanmoins des transformations en eux-mêmes dépendant de paramètres; il en est d'autres, au contraire, dont les transformations en eux-mêmes forment un groupe proprement discontinu.

Il faudra nous servir de la « métrique » de M. Carathéodory [1].

Voici en peu de mots ce dont il s'agit : si D est borné, la famille des fonctions $f(x, y)$, holomorphes et de module plus petit que *un* dans D, définit une *pseudo-distance* attachée à un couple de deux points quelconques $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ de D; la pseudo-distance est la borne supérieure de la distance non euclidienne des deux points $z_0 = f(x_0, y_0)$ et $z_1 = f(x_1, y_1)$, marqués dans le cercle $|z| < 1$. Cette pseudo-distance $d_D(M_1, M_2)$ est invariante par toute transformation analytique du domaine D. Si D est contenu dans Δ, on a

$$d_D(M_0, M_1) \geqq d_\Delta(M_0, M_1).$$

La pseudo-distance existe aussi, bien entendu, pour un domaine situé dans le plan d'une seule variable complexe.

Cela posé, je vais définir mon domaine D. Je considère quatre domaines bornés simplement connexes; les deux premiers A_1 et A'_1

---

[1] *Voir*, par exemple, le Mémoire cité dans l'Introduction.

sont dans le plan de la variable complexe x, et ont en commun une région simplement connexe B_1 ; les deux autres A_2 et A'_2 sont dans le plan y, et ont en commun une région simplement connexe B_2. Dans l'espace (x, y), D sera formé de l'ensemble des domaines Δ et Δ' ainsi définis

$$(\Delta) \qquad x \text{ dans } A_1 \text{ et } y \text{ dans } A_2,$$

$$(\Delta') \qquad x \text{ dans } A'_1 \text{ et } y \text{ dans } A'_2.$$

Désignons par C_1 l'ensemble des domaines A_1 et A'_1, par C_2 l'ensemble des domaines A_2 et A'_2.

Soient x_0 et x_1 deux points de B_1, y_0 et y_1 deux points de C_2; supposons

$$d_{B_1}(x_0, x_1) < d_{C_2}(y_0, y_1).$$

Soient alors M_0 le point de D qui a pour coordonnées x_0 et y_0, et M_1 le point de D qui a pour coordonnées x_1 et y_1. Je dis que l'on a

$$(8) \qquad d_D(M_0, M_1) = d_{C_2}(y_0, y_1).$$

En effet, le domaine

$$x \text{ intérieur à } B_1, \qquad y \text{ intérieur à } C_2$$

est intérieur à D; donc la pseudo-distance de M_0 et M_1 dans ce domaine est au moins égale à $d_D(M_0, M_1)$; d'ailleurs, d'après M. Carathéodory (¹), elle est égale à $d_{C_2}(y_0, y_1)$. Ainsi

$$d_D(M_0, M_1) \leqq d_{C_2}(y_0, y_1).$$

D'autre part, le domaine

$$(9) \qquad x \text{ intérieur à } C_1, \qquad y \text{ intérieur à } C_2$$

contient D; donc la pseudo-distance de M_0 et M_1 dans ce domaine est au plus égale à $d_D(M_0, M_1)$. On a d'ailleurs

$$d_{C_1}(x_0, x_1) \leqq d_{B_1}(x_0, x_1) < d_{C_2}(y_0, y_1);$$

(¹) On doit à M. Carathéodory la proposition classique suivante : « si D est formé de D_1 dans le plan x et D_2 dans le plan y, la pseudo-distance dans D des points x_0, y_0 et x_1, y_1 est égale à la plus grande des quantités $d_{D_1}(x_0, x_1)$ et $d_{D_2}(y_0, y_1)$ ».

il en résulte que la pseudo-distance de M_0 et M_1 dans le domaine (9) est $d_{C_2}(y_0, y_1)$.

Ainsi

$$d_D(M_0, M_1) \geqq d_{C_2}(y_0, y_1).$$

L'égalité (8) est donc établie.

Cela posé, je vais montrer que toute transformation de C en lui-même, si elle est suffisamment voisine de la transformation identique, a la forme

$$(10) \qquad x' = \varphi(x), \qquad y' = \psi(y).$$

Soient x_0 un point de B_1, et y_0, y_1, y_2 trois points distincts de C_2. La position d'un point quelconque y de C_2 est déterminée sans ambiguïté par les pseudo-distances $d_{C_2}(y, y_0)$, $d_{C_2}(y, y_1)$ et $d_{C_2}(y, y_2)$, au moins si les points y_0, y_1, y_2 n'ont pas été choisis d'une manière spéciale. Désignons par ε un nombre positif; soient x un point quelconque de B_1, tel que l'on ait

$$d_{B_1}(x, x_0) < \varepsilon.$$

et y un point quelconque de C_2, tel que l'on ait

$$d_{C_2}(y, y_3) < \varepsilon:$$

y_3 désigne un point de C_1, distinct de y_0, y_1 et y_2. On a choisi ε de façon que les pseudo-distances, dans C_2, de deux quelconques des quatre points y_0, y_1, y_2, y_3 soient supérieures à 3ε. Dans ces conditions, on a

$$d_{C_2}(y, y_0) > 2\varepsilon, \qquad d_{C_2}(y, y_1) > 2\varepsilon, \qquad d_{C_2}(y, y_2) > 2\varepsilon,$$

et, par suite,

$$(11) \quad d_{C_2}(y, y_0) > \varepsilon + d_{B_1}(x, x_0), \qquad d_{C_2}(y, y_1) > \varepsilon + d_{B_1}(x, x_0), \qquad \ldots.$$

Désignons par (Σ) une transformation de D en lui-même. Soient (x'_0, y'_0), (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x', y') les transformés respectifs des points (x_0, y_0), (x_0, y_1), (x_0, y_2), (x, y). Si (Σ) est voisine de la transformation identique, les points x'_0, x'_1, x'_2 sont voisins de x_0, le point x' est voisin de x, etc. En vertu des inégalités (11), on peut donc, si (Σ) est assez voisine de la transformation identique, supposer que l'on a

$$d_{C_2}(y', y'_0) > d_{B_1}(x', x'_0), \qquad d_{C_2}(y', y'_1) > d_{B_1}(x', x'_1),$$
$$d_{C_2}(y', y'_2) > d_{B_1}(x', x'_2).$$

La pseudo-distance des points x'_0, y'_0 et x', y' est alors égale à $d_{C_2}(y', y'_0)$; or elle est la même que la pseudo-distance de x_0, y_0 et x, y. Donc

$$d_{C_2}(y', y'_0) = d_{C_2}(y, y_0);$$

on a de même

$$d_{C_2}(y', y'_1) = d_{C_2}(y, y_1), \qquad d_{C_2}(y', y'_2) = d_{C_2}(y, y_2).$$

Le point y' est donc bien déterminé lorsqu'on connaît le point y. Ainsi, lorsque le point (x, y) est voisin du point (x_0, y_3), on a, si (x', y') désigne le transformé de (x, y),

$$y' = \psi(y).$$

Mais cette relation a alors lieu dans le domaine D tout entier; ainsi y' ne dépend pas de x. On a de même

$$x' = \varphi(x).$$

Étudions alors la transformation. A tout point y intérieur à C_2 correspond un point y' intérieur à C_2, et inversement; donc $y' = \psi(y)$ effectue une transformation biunivoque du domaine C_2 en lui-même. De même, $x' = \varphi(x)$ transforme le domaine C_1 en lui-même.

Ce n'est pas tout. Soit x_0 un point de B_1; lorsque y décrit C_2, le point

$$x'_0 = \varphi(x_0), \qquad y' = \psi(y)$$

est le transformé du point x_0, y. Or y' décrit C_2; donc x'_0 est intérieur à B_1, sinon le point x'_0, y' ne serait pas toujours intérieur à D. Ainsi la transformation $x' = \varphi(x)$ transforme le domaine B_1 en lui-même. De même, $y' = \psi(y)$ transforme B_2 en lui-même.

Voyons si toutes ces propriétés ne sont pas contradictoires. La transformation $x' = \varphi(x)$ doit transformer A_1 en lui-même, et A'_1 en lui-même. *Supposons que* A_1 *soit un cercle.* Alors

$$x' = \varphi(x)$$

ne peut être qu'une substitution homographique hyperbolique admettant pour points doubles α_1 et β_1 les points d'intersection de la circonférence A_1 avec la frontière de A'_1. Le domaine D ne possède donc aucun point invariant dans la transformation. Donc, *étant donné un point quelconque intérieur à* D, *les transformations qui laissent fixe ce point sont en nombre fini*; car, s'il y en avait une infinité, elles formeraient un groupe clos, et l'on pourrait en trouver qui soient arbitrairement voisines de la transformation identique, ce qui serait en contradiction avec ce qui précède.

D'ailleurs, si A'_1 est un domaine quelconque, il n'est conservé par aucune des substitutions hyperboliques envisagées; alors D *n'admet pas de transformation en lui-même très voisine de la transformation identique.*

Supposons au contraire que A_1, A'_1, A_2 et A'_2 soient des cercles; soient α_1 et β_1 les points d'intersection de A_1 et A'_1, α_2 et β_2 les points d'intersection de A_2 et A'_2. La transformation

$$\frac{x'-\alpha_1}{x'-\beta_1}=k_1\frac{x-\alpha_1}{x-\beta_1}, \qquad \frac{y'-\alpha_2}{y'-\beta_2}=k_2\frac{y-\alpha_2}{y-\beta_2}$$

dépend de deux paramètres positifs k_1 et k_2, et transforme D en lui-même.