JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BASILE DEMTCHENKO

Sur la formule de M. H. Villat résolvant le problème de Dirichlet dans un anneau circulaire

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 10 (1931), p. 201-211.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1931_9_10__201_0>

Sur la formule de M. H. Villat résolvant le problème de Dirichlet dans un anneau circulaire ;

PAR BASILE DEMTCHENKO.

---

1. On sait qu'une fonction $\mathcal{F}(z)$ analytique et régulière à l'intérieur d'une couronne circulaire et dont on connaît la partie réelle sur la frontière, est donnée par la formule, maintenant classique, de M. H. Villat ([1]),

$$(1) \qquad \mathcal{F}(z) = ik + \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi_e(\varepsilon)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$
$$- \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi} \Phi_i(\varepsilon)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon.$$

où Φ_e et Φ_i sont les valeurs de la partie réelle de la fonction $\mathcal{F}(z)$ sur les deux circonférences concentriques dont les rayons sont égaux respectivement à 1 et $q = e^{-\frac{\pi\omega_2}{i\omega_1}}$.

Il existe plusieurs démonstrations connues de cette formule ([2]). Nous en donnons ici encore une qui, à notre connaissance, n'a pas été signalée jusqu'à présent. Nous démontrerons que la formule de M. H. Villat est une conséquence directe du théorème de Cauchy et nous la généraliserons ensuite pour le cas où la fonction F a un pôle simple sur la frontière ainsi que pour le cas où cette fonction est multiforme.

([1]) H. VILLAT, *Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 33, 1912, p. 134-175.

([2]) H. VILLAT, *Leçons sur l'Hydrodynamique*. Paris, 1929. — DINI, *Circolo mat. Palermo*, 2^e^ semestre 1913, p. 1-28.

La transformation

$$(2) \qquad u = \frac{\omega_1}{i\pi} \log z$$

fait correspondre à la couronne circulaire du plan z un rectangle ABCD dans le plan $u = u' + iu''$ dont les côtés sont $2\omega_1$ et $\frac{\omega_3}{i}$.

D'après le théorème de Cauchy on a

$$(3) \qquad f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{A}} \frac{f(u_1)}{u_1 - u} du_1,$$

où l'intégrale est prise le long des côtés du rectangle ABCD et où la fonction $f(u) = \varphi + i\psi$ est analytique et régulière à l'intérieur de ce domaine. Si le point $\bar{u}$ est à l'extérieur du rectangle ABCD, on a

$$(4) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{A}} \frac{f(u_1)}{u_1 - \bar{u}} du_1.$$

Il est facile de s'assurer, d'après (4), que la formule (3) entraîne l'égalité

$$(5) \qquad f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{A}} f(u_1) \zeta(u_1 - u) du_1.$$

Il suffit pour cela de se rappeler de l'expression

$$(6) \qquad \zeta u = \frac{1}{u} + \sum{}' \left[\frac{1}{u - w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} \right],$$

où

$$w = 2n\omega_1 + 2m\omega_3 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Désignons par $\bar{u}$ le point conjugué au point u. Parmi les points $\bar{u} + w$ il n'y en a pas un seul qui se trouve à l'intérieur du rectangle ABCD et, par conséquent, on a

$$(7) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{A}} f(u_1) \zeta(u_1 - \bar{u}) du_1.$$

Calculons l'intégrale qui entre dans la partie droite de la formule (5). On a

$$\int_{\circlearrowleft} f(u_1)\zeta(u_1-u)\,du_1 = \int_0^{2\omega_1} f(u_1)\zeta(u_1-u)\,du_1$$
$$+\int_{2\omega_1}^{2\omega_1+\omega_3} f(u_1)\zeta(u_1-u)\,du_1$$
$$+\int_{2\omega_1+\omega_3}^{\omega_3} f(u_1)\zeta(u_1-u)\,du_1$$
$$+\int_{\omega_3}^{0} f(u_1)\zeta(u_1-u)\,du_1.$$

Mais la fonction $f(u)=\mathcal{F}(z)$ étant uniforme dans la couronne circulaire, on a

$$(8)\qquad f(u+2\omega_1)=f(u).$$

De l'autre côté, on a les relations

$$\zeta(u_1+2\omega_1)=\zeta u_1+2\eta_1,\qquad \zeta(u_1+\omega_3)=\zeta_3 u+\eta_3.$$

En se servant de ces propriétés, on obtient facilement

$$(9)\quad \int_{\circlearrowleft} f(u_1)\zeta(u_1-u)\,du_1 = \int_0^{2\omega_1} f_e(u')\zeta(u'-u)\,du' -$$
$$-\int_0^{2\omega_1} f_i(u')\zeta_3(u'-u)\,du'$$
$$+2\eta_1\int_0^{\omega_3} f(u'')\,du'' - \eta_3\int_0^{2\omega_1} f_i(u')\,du',$$

où $f_e(u')$ et $f_i(u')$ sont les valeurs de la fonction $f(u)$ sur les côtés $AB(0\ldots 2\omega_1)$ et $CD(\omega_3\ldots 2\omega_1+\omega_3)$ du rectangle. En substituant cette expression dans la formule (5) on obtient

$$(10)\quad f(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\omega_1}[f_e(u')\zeta(u'-u)-f_i(u')\zeta_3(u'-u)]\,du'+K,$$

où K est une constante

$$(11)\qquad K=K_1+iK_2=\frac{\eta_1}{\pi i}\int_0^{\omega_3} f(u'')\,du''-\frac{\eta_3}{2\pi i}\int_0^{2\omega_1} f_i(u')\,du'.$$

De la même manière, la formule (7) se réduit à l'équation

$$(12) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\omega_1} [f_e(u')\zeta(u'-\bar{u}) - f_i(u')\zeta_3(u'-\bar{u})]\,du' + K,$$

En changeant maintenant, dans cette formule, i en $-i$ on obtient

$$(13) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\omega_1} [\bar{f}_e(u')\zeta(u'-u) - \bar{f}_i(u')\zeta_3(u'-u)]\,du' - \bar{K},$$

où

$$\bar{f}_e = \varphi_e - i\psi_e, \qquad \bar{f}_i = \varphi_i - i\psi_i, \qquad \bar{K} = K_1 - iK_2.$$

Il nous reste seulement à additionner les deux formules (10) et (13) pour obtenir, à une constante près, la formule de Villat (1) transformée dans le plan u,

$$(14) \quad f(u) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} [\varphi_e(u')\zeta(u-u') - \varphi_i(u')\zeta_3(u-u')]\,du' + 2iK_2,$$

où

$$(14)' \qquad iK_2 = \frac{\eta_1}{\pi}\int_0^{\omega_3} \psi(u'')\,du'' - \frac{\eta_3}{2\pi}\int_0^{2\omega_1} \psi_i(u')\,du'$$

La fonction $f(u)$ étant régulière à l'intérieur du rectangle ABCD, on a

$$\int_{A(C)} f(u)\,du = 0.$$

ou d'après l'égalité (8),

$$(15) \qquad \int_0^{2\omega_1} [f_e(u') - f_i(u')]\,du' = 0.$$

C'est la condition d'uniformité de la fonction $f(u)$ qui donne la relation

$$(16) \qquad \int_0^{2\omega_1} [\varphi_e(u') - \varphi_i(u')]\,du' = 0.$$

M. H. Villat (1) a démontré que la formule (14) est tout à fait générale et est valable si les fonctions $\varphi_e(u')$ et $\varphi_i(u')$ sont sommables en valeur

(1) H. Villat, *Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 33, 1912, p. 134-175.

absolue, au sens de Lebesgue. On suppose aussi qu'elles satisfont à une condition de Lipschitz, mais cette hypothèse n'est pas nécessaire ([1]). Ainsi la formule (14) est valable si les fonctions φ_e et φ_i deviennent discontinues et même infinies comme $1/u^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ ([1]).

2. On peut se placer à un point de vue plus général et se demander quelle forme prend la formule (14) si la fonction $f(u)$ a des pôles simples sur les frontières. Pour préciser, supposons que le pôle soit unique et qu'il soit placé entre 0 et 2ω au point u_0. Décrivons, de ce point à l'intérieur du rectangle ABCD, une demi-circonférence C de rayon r. Désignons par Γ la partie du rectangle ABCD en dehors de la demi-circonférence C. D'après le théorème de Cauchy on a, si le point u est situé à l'intérieur du contour $\Gamma + \mathrm{C}$,

$$\int_\Gamma \frac{f(u_1)}{u_1 - u}\,du_1 + \int_{\mathrm{C}} \frac{f(u_1)}{u_1 - u}\,du_1 = 2\pi i f(u). \tag{17}$$

Faisons tendre le rayon r vers zéro. La première intégrale de la formule (17) prendra à la limite une valeur finie et déterminée.

Pour calculer la seconde intégrale, supposons que

$$f(u_1) = \frac{\mathrm{A}}{u_1 - u_0} + f_1(u_1). \qquad \mathrm{A} = \mathrm{A}_1 + i\mathrm{A}_2, \tag{18}$$

où $f_1(u_1)$ est une fonction régulière sur la frontière. On a

$$\lim_{r \to 0} \int_{\mathrm{C}} \frac{f(u_1)}{u_1 - u}\,du_1 = \lim_{r \to 0} \int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{A}\,du_1}{(u_1 - u_0)(u_1 - u)} = -\frac{i\pi\mathrm{A}}{u_0 - u}.$$

La formule (17) prend la forme

$$f(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\omega}} \frac{f(u')}{u' - u}\,du' - \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{A}}{u_0 - u}, \tag{19}$$

où l'intégrale $\int_{\hat{\omega}}$ a sa valeur principale au sens de Cauchy.

Si le point $\bar{u}$ se trouve à l'extérieur du rectangle ABCD on obtient

([1]) H. Villat, *Rendic. Circ. mat. Palermo*, t. 33, 1912, p. 134-175.

d'une manière tout à fait analogue, la formule

$$(20) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} \frac{f(u')}{u'-\bar{u}}\,du' - \frac{1}{2}\,\frac{A}{u_0-\bar{u}}.$$

Comme dans le cas d'une fonction régulière, on obtient de ces formules (19) et (20) deux relations fondamentales

$$(21) \qquad f(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} f(u_1)\zeta(u_1-u)\,du_1 - \frac{1}{2}A\zeta(u_0-u),$$

$$(22) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\lambda)} f(u_1)\zeta(u_1-\bar{u})\,du_1 - \frac{1}{2}A\zeta(u_0-\bar{u}).$$

où $\bar{u}$ est le point conjugué au point u. En substituant la formule (9) et en répétant les raisonnements du paragraphe précédent, on obtient

$$(23) \qquad \begin{aligned} f(u) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} &[\varphi_e(u')\zeta(u-u') - \varphi_i(u')\zeta_3(u-u')]\,du' \\ &+ iA_2\zeta(u-u_0) + 2iK_2, \end{aligned}$$

où l'intégrale a toujours sa valeur principale. Cette formule représente une généralisation de la formule (14). Il est facile de s'assurer que le point $u = u_0$ est un pôle simple de la fonction $f(u)$, donnée par la formule (23) et que le résidu correspondant est égal à $A = A_1 + iA_2$. En effet, démontrons que la fonction $f(u)$ a la forme (18). Calculons la valeur principale de l'intégrale

$$(24) \qquad \mathfrak{J} = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} \frac{A_1}{u'-u_0}\,\frac{du'}{u-u'}.$$

On a

$$(25) \qquad \mathfrak{J} = \frac{iA_1}{\pi(u-u_0)}\left[\int_0^{2\omega_1}\frac{du'}{u'-u_0} - \int_0^{2\omega_1}\frac{du'}{u'-u}\right].$$

La première intégrale de cette expression a sa valeur principale et par conséquent est égale à

$$\int_0^{2\omega_1}\frac{du'}{u'-u_0} = \lim\left[\int_0^{u_0-\varepsilon}\frac{du'}{u'-u_0} + \int_{u_0+\varepsilon}^{2\omega_1}\frac{du'}{u'-u_0}\right] = \log\frac{2\omega_1-u_0}{u_0}.$$

Quant à la deuxième, elle se réduit à

$$\int_0^{2\omega_1} \frac{du'}{u'-u} = i\pi + \log\frac{2\omega_1 - u}{u}.$$

On a par conséquent

$$(26) \qquad \mathcal{J} = \frac{i A_1}{\pi(u-u_0)}\left[\log\frac{2\omega_1 - u_0}{u_0} - \log\frac{2\omega_1 - u}{u} - i\pi\right]$$
$$= \frac{A_1}{u-u_0} + \frac{i A_1}{\pi(u-u_0)} \log\frac{(2\omega_1 - u_0)u}{(2\omega_1 - u)u_0}.$$

Il est facile de voir que la différence

$$(27) \qquad \mathcal{F}_1(u) = f(u) - \mathcal{J} - \frac{i A_2}{u-u_0}$$

est une fonction régulière sur la frontière et à l'intérieur du rectangle ABCD. En effet, on a

$$(28) \qquad \varphi_e(u') = \frac{A_1}{u'-u_0} + \varphi_1(u').$$

ou φ_1 est une fonction régulière sur le segment $0\ldots 2\omega_1$. En substituant cette expression dans les formules (23) et (27), on obtient

$$(29) \quad \mathcal{F}_1(u) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1}\left\{\varphi_1(u')\zeta(u-u') + \frac{A_1}{u'-u_0}\left[\zeta(u-u') - \frac{1}{u-u'}\right]\right.$$
$$\left. - \varphi_i(u')\zeta_3(u-u')\right\}du'$$
$$+ i A_2\left[\zeta(u-u_0) - \frac{1}{u-u_0}\right].$$

Cette formule met en évidence la continuité de la fonction $\mathcal{F}_1(u)$.

D'après (27) et (26) la fonction $f(u)$ est donc bien de la forme (18).

La condition d'uniformité (15) prend maintenant la forme

$$(30) \qquad -i\pi A + \int_0^{2\omega_1}[f_e(u') - f_i(u')]\,du' = 0.$$

D'où

$$(31) \qquad \pi A_2 + \int_0^{2\omega_1}[\varphi_e(u') - \varphi_i(u')]\,du' = 0.$$

Il y a cependant une différence essentielle entre la formule (16) et la formule ci-dessus. Dans le cas d'une fonction régulière et uniforme les valeurs φ_e et φ_i de la partie réelle sur les frontières extérieure et intérieure ne peuvent pas être arbitraires. Elles doivent vérifier la relation (16). S'il n'en est pas ainsi, la fonction est multiforme. C'est tout différent, si la fonction $f(u)$ a un pôle sur la frontière. Dans ce cas il n'existe plus aucune relation entre les valeurs frontières φ_e et φ_i. D'après la formule (31), elles déterminent seulement la partie imaginaire A_2 de résidu. En substituant son expression, dans la formule (23) on obtient

$$(32)\quad \begin{aligned} f(u) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} \Big\{ & \varphi_e(u')[\zeta(u-u') - \zeta(u-u_0)] \\ & - \varphi_i(u')[\zeta_3(u-u') - \zeta(u-u_0)]\Big\} du' + 2iK_2. \end{aligned}$$

Les raisonnements précédents ne changent pas, si le pôle de la fonction $f(u)$ se trouve sur le côté $\omega_3 \ldots 2\omega_1 + \omega_3$ du rectangle. La formule (23) prend, dans ce cas, la forme

$$(33)\quad \begin{aligned} f(u) = {} & \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} [\varphi_e(u')\zeta(u-u') - \varphi_i(u')\zeta_3(u-u')]\, du' \\ & + iA_2\zeta_3(u-u_0) + 2iK_2 \end{aligned}$$

avec la condition d'uniformité

$$(34)\quad \pi A_2 + \int_0^{2\omega_1} [\varphi_e(u') - \varphi_i(u')]\, du' = 0.$$

D'où la formule analogue à la formule (32)

$$(35)\quad \begin{aligned} f(u) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} \Big\{ & \varphi_e(u')[\zeta(u-u') - \zeta_3(u-u_0)] \\ & - \varphi_i(u')[\zeta_3(u-u') - \zeta_3(u-u_0)]\Big\} du' + 2iK_2. \end{aligned}$$

3. Nous avons supposé jusqu'à présent que la fonction $f(u)$ est uniforme. Établissons maintenant une formule analogue à la formule (14) en supposant que la fonction $f(u)$ est multiforme et vérifie la condition

$$(36)\quad f(u + 2\omega_1) = f(u) + k, \qquad k = k_1 + ik_2.$$

Calculons l'intégrale $\int_{\curvearrowleft} f(u')\zeta(u'-u)du'$. On a

$$(37)\quad \int_{\curvearrowleft} f(u')\zeta(u'-u)du' = \int_0^{2\omega_1} f(u')\zeta(u'-u)du'$$
$$+\int_0^{\omega_3} [f(u')+k][\zeta(u'-u)-2\eta_1]du'$$
$$+\int_{2\omega_1}^{0} f(\omega_3+u')[\zeta_3(u'-u)+\eta_3]du'$$
$$+\int_{\omega_3}^{0} f(u')\zeta(u'-u)du'.$$

En substituant cette expression dans la formule (5) et en effectuant l'intégration on obtient

$$(38)\quad f(u) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\omega_1} [f_e(u')\zeta(u'-u) - f_i(u')\zeta_3(u'-u)]du' \right.$$
$$\left. + 2k\eta_1\omega_3 + k\log\frac{\sigma(u-\omega_3)}{\sigma u}\right\} - K.$$

où K est donnée par la formule (11). Pour le point conjugué $\overline{u}$ on a une formule analogue à la formule (12)

$$(39)\quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\omega_1} [f_e(u')\zeta(u'-\overline{u}) - f_i(u')\zeta_3(u'-\overline{u})]du' \right.$$
$$\left. + 2k\eta_1\omega_3 + k\log\frac{\sigma(\overline{u}-\omega_3)}{\sigma\overline{u}}\right\} - K,$$

ou en changeant i en $-i$

$$(40)\quad 0 = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_0^{2\omega_1} [\overline{f}_e(u')\zeta(u'-u) - \overline{f}_i(u')\zeta_3(u'-u)]du' \right.$$
$$\left. - 2\overline{k}\eta_1\omega_3 + \overline{k}\log\frac{\sigma(u+\omega_3)}{\sigma u}\right\} - \overline{K}.$$

En additionnant les formules (38) et (40) et en remarquant que

$$(41)\quad \frac{\sigma(u-\omega_3)}{\sigma(u+\omega_3)} = -e^{2\eta_3 u}, \qquad \frac{\sigma(u+\omega_3)\sigma(u-\omega_3)}{\sigma^2 u} = -\frac{\sigma^2\omega_3\sigma_3^2 u}{\sigma^2 u},$$

on obtient finalement la formule fondamentale

$$(42) \qquad f(u) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} [\varphi_r(u')\zeta(u-u') - \varphi_i(u')\zeta_3(u-u')]du' + \frac{k_1}{\pi i}\log\frac{\sigma_3 u}{\sigma u} - \frac{\eta_3 k_2}{\pi} u + iA,$$

où A est une constante réelle.

Cette formule a été obtenue, pour k réel, par M. H. Villat (1) moyennant des considérations tout à fait différentes. Elle joue alors un rôle essentiel dans le problème de la représentation conforme des aires doublement connexes.

On détermine les périodes k_1 et k_2 de la partie réelle φ et de la partie imaginaire ψ en remarquant qu'on a toujours

$$\int_{\circlearrowleft} f(u)du = 0,$$

d'où l'on obtient

$$(43) \qquad k = k_1 + ik_2 = -\frac{1}{\omega_3}\int_0^{2\omega_1} [f_r(u) - f_i(u)]du,$$

c'est-à-dire

$$(44) \qquad \begin{cases} k_1 = -\dfrac{i}{\omega_3}\displaystyle\int_0^{2\omega_1} [\psi_r(u) - \psi_i(u)]du, \\[2ex] k_2 = \dfrac{i}{\omega_3}\displaystyle\int_0^{2\omega_1} [\varphi_r(u) - \varphi_i(u)]du. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction $f(u)$ donnée par la formule (42) a bien les périodes (44). En effet on a

$$(45) \qquad f(u+2\omega_1) - f(u) = 2\eta_1\frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1} [\varphi_r(u') - \varphi_i(u')]du' - \frac{2\omega_1\eta_3}{\pi}k_2 + k_1$$
$$= \frac{2}{\pi}\eta_1\omega_3 k_2 - \frac{2}{\pi}\omega_1\eta_3 k_2 + k_1 = k_1 + ik_2.$$

Nous attirons l'attention sur l'importance de la formule (42). En particulier, si les fonctions φ_r et φ_i sont périodiques, c'est-à-dire si

(1) H. VILLAT, *Annales de l'École Normale*, 1921, p. 183-227.

$k_1 = 0$, on obtient

$$(46) \qquad f(u) = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\omega_1}\left\{ \begin{aligned} &\varphi_e(u')\left[\zeta(u-u') - \frac{\eta_3}{\omega_3}u\right] \\ &- \varphi_i(u')\left[\zeta_3(u-u') - \frac{\eta_3}{\omega_3}u\right]\end{aligned}\right\} du' + iA.$$

Nous voyons donc que c'est cette formule qui doit être appliquée et non la formule (14) si la condition d'uniformité (16) n'est pas satisfaite.