JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LUCIEN FÉRAUD

Stabilités et périodicité au voisinage d'un point d'équilibre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 109-130.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__109_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Stabilités et Périodicité au voisinage d'un point d'équilibre [1];

PAR LUCIEN FÉRAUD.

I. — Étude géométrique de la stabilité permanente.

Système de type stable général. Stabilité linéaire, complète, permanente. Les systèmes complètement stables, leur forme normale (N_c) et ses propriétés. Transformations (F) et (T). Problème final de la stabilité : conditions de convergence qui le résolvent entièrement. Réduction de l'ordre du système à l'aide de k ($k < s$) intégrales convergentes π. Comparaison avec le théorème de Liouville-Lie. Il en résulte une nouvelle analogie entre les systèmes complètement stables et les systèmes canoniques. La stabilité permanente assure l'existence d'intégrales uniformes dans le voisinage considéré. Le cas du centre $s = 1$. Pour s quelconque définition d'une « surface invariante de périodicité », d'un « centre » sur une telle surface. Définition de la stabilité permanente « relative ». Les deux manières d'obtenir les « variétés invariantes stables ». Comment elles se rattachent à des études relatives aux séries multiples. Nouvelles propriétés des variétés invariantes stables.

(1) Les principaux résultats ont été énoncés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 192, p. 1699; 193, p. 136, 455 et 516 ; le présent travail contient les démonstrations qui les établissent.

Il a encore pour objet de mettre en évidence le rôle de ces conclusions quand on les envisage au point de vue de la généralisation de la « théorie des centres » et de les compléter en signalant leurs conséquences les plus importantes.

Soit (S) le système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_{2s}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2s),$$

où X_i sont des fonctions rélles s'annulant pour un point O

$$(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{2s}^0)$$

que nous prendrons pour origine : $(X_i)^0 = 0$ et dans le voisinage duquel les X_i seront supposées analytiques. Ce système sera dit de *type stable général* dans le voisinage considéré lorsqu'il satisfera aux conditions générales de stabilité *du premier ordre* ou stabilité *linéaire* c'est-à-dire lorsque ses exposants caractéristiques se présenteront en paires conjuguées d'imaginaires pures,

$$\pm \lambda_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

les λ_j n'étant liés par aucune « relation linéaire de commensurabilité » c'est-à-dire par aucune relation telle que $\Sigma m_j \lambda_j = 0$ où les entiers m_j ne sont pas tous nuls. Ces deux conditions à imposer aux λ_j seront désignées comme conditions *générales* de stabilité du premier ordre.

Un système (S) de type stable général pourra être amené par une substitution linéaire à la forme

$$(S_1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp_j}{dt} = \lambda_j p_j + P_j, \\ \dfrac{dq_j}{dt} = -\lambda_j q_j + Q_j, \end{cases}$$

où $\pm \lambda_j$ sont les exposants caractéristiques, P_i, Q_i commencent par des termes du second degré au moins, de plus p_j, q_j et P_j, Q_j, sont deux à deux imaginaires conjugués.

Les conditions de stabilité d'ordre 1 ne sont pas suffisantes. La notion de *stabilité complète* conduit à des conditions nécessaires supplémentaires dont l'introduction ne suffit pas encore à assurer la stabilité — au sens absolu du mot — (*permanente*) mais doit tout de même être considérée comme une étape importante dans la détermination de ses critères. La définition et la théorie de la stabilité complète sont de

M. Birkhoff : « Stability and the Equations of Dynamics » (1) et « Dynamical Systems » (2).

Le résultat fondamental qui sert à caractériser les systèmes complètement stables (S_c) est la possibilité (au point de vue formel) de réduire (S_1) à la *forme normale*

$$(N_c) \qquad \frac{d\xi_j}{dt} = \xi_j M_j, \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = -\eta_j M_j,$$

M_j étant des séries purement imaginaires à coefficients constants par rapport aux s produits

$$\xi_1\eta_1, \quad \xi_2\eta_2, \quad \ldots, \quad \xi_s\eta_s.$$

Le changement de variables qui permet de passer de (S_1) à (N_c) s'écrit

$$(F) \qquad \begin{cases} p_j = \xi_j + f_j(\xi \mid \eta), \\ q_j = \eta_j + g_j(\xi \mid \eta), \end{cases}$$

les f_j, g_j étant des séries entières à coefficients constants en ξ, η commençant par des termes du second degré au moins et non nécessairement convergentes.

Tout système (S_c) admet s « intégrales formelles » dont les premiers membres sont des séries réelles commençant par des formes quadratiques, chacune de ces dernières étant le produit de deux facteurs linéaires conjugués — les $2s$ facteurs linéaires étant indépendants.

La forme normale (N_c) est invariante par rapport au groupe (formel) des transformations

$$(T) \qquad \xi_j = \bar{\xi}_j R_j, \qquad \eta_j = \bar{\eta}_j S_j,$$

où R_j, S_j sont des séries entières par rapport aux produits $\bar{\xi}_j\bar{\eta}_j$, chacune d'elles avec un terme constant égal à 1. Cette forme met au premier plan le caractère de presque-périodicité qui suit immédiatement de la définition d'un mouvement « stable permanent ».

(1) *American Journal of Mathematics*, t. 49, I, 1927, p. 1.

(2) *American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. 9 (New-York, 1927).

Nous nous sommes jusqu'ici placés au point de vue purement formel; nous avons employé des séries entières en laissant entièrement de côté l'étude de leur nature. Cette manière d'aborder le problème, classique depuis Poincaré, a joué un rôle immense en Mécanique céleste. Toutefois on est immanquablement amené — ne serait-ce que par des préoccupations purement théoriques à envisager la convergence des séries que l'on a écrites. On se trouve ainsi en présence de problèmes beaucoup plus difficiles pour lesquels la simplicité et l'élégance des conclusions précédentes disparaissent. En fait il s'agit alors de la détermination des conditions nécessaires et suffisantes à la stabilité permanente; c'est le problème final de la question sur lequel on ne possède que quelques résultats fragmentaires et dont la résolution peut être considérée comme le but définitif de toute la théorie de la stabilité.

La forme (N_c) montre immédiatement que si les séries $M_j(x)$ sont convergentes, il y a stabilité permanente; si pour un point P_0 (de coordonnées x^0) du voisinage de O les séries $M_j(x^0)$ sont convergentes, la trajectoire passant par ce point restera dans le voisinage considéré pour toutes les valeurs de *t même infiniment grandes*, positives ou négatives.

Le système (N_c) admet alors s intégrales $\pi_j = c_j$ $(\pi_j = \xi_j^* \eta_{1j}^*)$ les ξ_j^*, η_j^* sont les fonctions obtenues par l'inversion des formules (F) qui sont distinctes et en involution. Il doit donc en vertu du théorème de Liouville-Lie se ramener à des quadratures, de plus dans ce cas les quadratures s'effectuent immédiatement. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité permanente pour un système (S_c) est la convergence des séries M_j (¹). Elle peut être remplacée par la convergence des π_j — ou d'après le théorème de séparation de Weierstrass par celle des ξ_j^*, η_{1j}^* ou encore — à condition de partir de (S_1) — par celle des f_j, g_j.

(¹) Il s'agit des séries $M_j(x)$ et non des séries $M_j(\pi)$ dont la convergence est nécessaire mais non suffisante ainsi que les considérations que nous aurons à faire dans la suite, le mettront nettement en évidence. Pour éviter toute difficulté nous pourrons d'ailleurs nous limiter au cas général, défini plus loin (page 121) comme « non-dégénéré ».

En raisonnant de la même manière que dans le cas de stabilité permanente si nous supposons seulement $k < s$ des produits π_r convergents, nous en déduirons la convergence des ξ_r^*, η_r^*, il en résultera celle des M_r^* et $2k$ équations intégrées

$$\xi_r = \xi_r^0 e^{M_j^0(t-t_0)}, \qquad \eta_r = \eta_r^0 e^{-M_j^0(t-t_0)} \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

l'ordre du système (S_c) sera réduit de $2k$ unités. On pourra d'ailleurs à l'aide d'une transformation (T) ramener à ce cas celui où l'on connaît k intégrales réelles et analytiques, ne dépendant que des π_j.

L'intérêt de cette propriété des systèmes (S_c) apparaît si l'on reprend le parallèle d'une si grande puissance de synthèse que M. Birkhoff établit entre les systèmes complètement stables et les systèmes canoniques (H). En se plaçant d'abord seulement à un point de vue « formel » on peut soit les regarder comme équivalents parce qu'ils sont réductibles à la même forme normale — soit les distinguer et mettre en évidence la plus grande généralité des premiers en portant son attention sur le changement de variables (F) qui conduit à la forme normale. Toutefois les principales différences entre ces deux types de systèmes résultent de leurs propriétés d'intégrabilité c'est-à-dire de la convergence des séries qui s'introduisent dans leur étude. Il est donc intéressant de remarquer que même dans cette dernière manière de voir il y a une analogie importante entre les (S_c) et les (H). Il suffit pour l'apercevoir de rapprocher la réduction de $2k$ unités que subit, comme nous venons de l'établir, l'ordre de (S_c) en vertu de la connaissance des k intégrales $\pi_j = c_j$, du théorème de Liouville-Lie sur la réduction de l'ordre (de $2k$ unités également) des systèmes canoniques que permet la connaissance de k intégrales (non quelconques) mais distinctes et en involution.

Une autre remarque théorique découle de la condition nécessaire et suffisante de stabilité permanente (pour un système S_c) : la convergence des π_j. La stabilité permanente nécessite l'existence de s intégrales uniformes dans le voisinage considéré. On arrivera donc à des critères d'instabilité dans tous les cas où l'on pourra établir la « non-existence », dans le voisinage du point O, d'intégrales uniformes.

Dans le cas de stabilité permanente tel que nous venons de le définir et pour $s = 1$ tous les mouvements sont périodiques dans le voisinage de O, les trajectoires sont des courbes fermées qui s'enveloppent. Le point d'équilibre est alors un centre au sens de Poincaré [1]. Par conséquent la méthode de M. Birkhoff, par la réduction à la forme normale, donne une nouvelle manière d'obtenir les conditions, pour qu'un point d'équilibre soit un centre.

Pour un système d'ordre $2s$ on pourra toujours porter son attention sur les solutions du système (N_c) pour lesquelles les ξ^0, η^0 initiaux sont nuls à l'exception de deux d'entre eux ξ_0^1, η_0^1 par exemple. On obtient ainsi dans l'espace des x une variété définie par

$$\xi_2^* = 0, \quad \dots \quad \xi_s^* = 0; \qquad \eta_2^* = 0, \quad \dots, \quad \eta_s^* = 0,$$

sur laquelle les solutions du système (S_c) — dans le cas de stabilité permanente que nous considérons toujours — seront non seulement stables mais périodiques (dans le voisinage considéré).

Pour abréger nous appellerons surfaces invariantes de périodicité ou seulement surfaces de périodicité les s variétés à deux dimensions que l'on peut ainsi définir et nous dirons que le point O est un centre sur chacune de ces surfaces.

Nous allons abandonner maintenant le cas de stabilité permanente pour d'autres, qui paraissent être ceux qui s'en rapprochent le plus, dans lesquels la stabilité permanente sera réalisée seulement lorsque l'on assujettit les trajectoires à rester sur certaines variétés que nous allons déterminer. Nous pourrons dire qu'il y aura alors stabilité permanente *relative*. Supposons d'abord que les séries f_j, g_j convergent seulement lorsque certaines relations, réelles mais non nécessairement analytiques, sont vérifiées par les π_j. Une transformation (T) permet de supposer ces relations réduites à

$$\pi_1 = \pi_2 = \dots = \pi_k = 0$$

et, par suite,

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_k = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_k = 0.$$

Les séries f_j, g_j où l'on fait

$$\xi_1 = \dots = \xi_k = \eta_1 = \dots = \eta_k = 0,$$

(1) *Journal de Liouville*, Chap. XI, 1885.

sont alors convergentes, elles définissent une variété analytique à $2(s-k)$ dimensions qui sera invariante et contiendra une famille a $2(s-k)$ constantes arbitraires de trajectoires toutes stables dans le voisinage dont nous nous occupons. On peut arriver aux *variétés invariantes stables* que nous venons ainsi de définir d'une autre manière : soit k relations invariantes réelles distinctes, non obligatoirement analytiques,

$$f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_k(x)=0,$$

on pourrait admettre en effectuant une transformation préliminaire sur (S_r) qu'elles sont réduites à $x_1=x_2=\ldots=x_k=0$; supposons que les M_j ou les π_j sont convergentes seulement lorsque les x satisfont à ces relations.

Quelques remarques montrent comment on est amené à considérer ces variétés invariantes stables et ainsi à la notion de stabilité permanente relative.

Une série entière de plusieurs variables réelles admet en général comme domaine de convergence autour de l'origine un prismatoïde défini par des inégalités $|x_i|<|x_i^0|$. Mais les séries que nous employons sont en général (¹) divergentes au voisinage de l'origine. Diverses circonstances peuvent donc se présenter :

1° Le prismatoïde a toutes ses dimensions nulles, nous dirons qu'il y a divergence totale.

2° Un certain nombre seulement de dimensions du prismatoïde sont réduites à 0, il y aura convergence dans les portions du voisinage qui font partie du prismatoïde. On pourra dire qu'il y aura convergence relative. C'est à ce dernier cas que correspondent les variétés invariantes stables et la stabilité permanente relative. Enfin ce point de vue peut être rapproché de celui qu'indique M. Birkhoff au début de son Mémoire (²) : « Divergente Reihen und singuläre Punkte gewöhnlicher Differentialgleichungen » bien que dans celui-ci il ne soit pas question de stabilité permanente mais d'une stabilité pour un

---

(¹) Nous reviendrons là-dessus dans la suite.

(²) *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1929, p. 171.

intervalle de temps très grand seulement et pouvant s'étendre dans les deux sens.

Aux deux propriétés : stabilité et invariance que nous avons donnés en même temps que nous définissions les variétés que nous considérons, nous ajouterons les suivantes : elles déterminent autour de O diverses régions, toute trajectoire restera dans une seule de ces régions tant qu'elle n'échappera pas au voisinage considéré. Une telle variété à $2h$ dimensions contiendra toujours h surfaces de périodicité, sur chacune de celles-ci le point O pourra être considéré comme un centre. Si $h=1$ la variété se réduit à la surface de périodicité elle-même : à ce point de vue les mouvements stables peuvent être regardés comme la généralisation pour s quelconque des mouvements périodiques du cas $s=1$. Remarquons encore que la stabilité permanente relative donne une classification de certains points d'équilibre d'après le nombre des dimensions : $2h$ de la variété invariante stable (d'ordre maximum) qui passe en chacun d'eux.

II. — Étude arithmétique de la stabilité permanente.

Distribution des mouvements périodiques dans les cas de stabilité permanente, au moins « relative ». Les petits diviseurs et la convergence des développements ; le rôle fondamental de leur nature arithmétique dans les méthodes de Poincaré, Bohlin, Glydén. Les Mémoires récents de M. Petersson et de M. Wintner pour le cas des perturbations. Nouvelles opérations formelles conduisant aux séries $P^\star$, $Q^\star$. L'absence de termes séculaires dans les séries que l'on en tire par l'intégration terme à terme met en évidence la signification de la « stabilité complète ». Terme général des séries majorantes pour $P^\star$ et $Q^\star$. Ordre d'approximation par des nombres rationnels : inégalités de Liouville. La convergence des $P^\star$, $Q^\star$ assure la stabilité permanente lorsque ν n'est pas un nombre de Liouville. Détermination d'une trajectoire par ses conditions initiales : points stables. Il en résulte deux distributions pour les mouvements stables dans le voisinage du point d'équilibre considéré. La propriété d'admettre un ordre d'approximation déterminée joue le rôle essentiel — différence avec l'étude des conditions de convergence au « sens des astronomes ». Les trajectoires instables seront les plus « voisines » des trajectoires périodiques.

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'avec $s = 1$ et aussi sur une surface de périodicité, tous les mouvements stables étaient périodiques. En général il n'en sera pas ainsi, la périodicité d'un mouvement nécessitera en plus de sa stabilité que ses « fréquences » $M_j^0 = M_j(\pi^0)$ aient deux à deux des rapports rationnels.

Cette manière de s'exprimer sous-entend que nous nous bornons — ainsi que nous le ferons sans cesse à partir de maintenant — aux cas où les séries $M_j(\pi)$ sont convergentes c'est-à-dire où à tout point ξ^0, η^0 correspondent des nombres M_j^0 bien déterminés.

Si l'on prend les $2s$ constantes qui déterminent le point initial de la trajectoire d'une manière quelconque on a un mouvement stable, pour qu'il soit périodique il suffit que le groupe des s constantes M_j^0 satisfasse à $s - 1$ relations de commensurabilité. La restriction qui détermine les mouvements périodiques dans l'ensemble des mouvements stables revient à celle qui consiste à prendre parmi les points d'un espace à $s - 1$ dimensions seulement ceux dont les coordonnées sont rationnelles.

Les mêmes considérations s'appliquent à la distribution des mouvements périodiques sur une variété invariante stable : sur une de ces variétés à $2h$, dimensions, on devra choisir h constantes satisfaisant à $h - 1$ relations de commensurabilité. Nous verrons dans ce qui va suivre que la nature arithmétique des M_j ou plutôt de leurs valeurs initiales M_j^0 joue également un rôle important lorsque l'on considère les conditions capables d'assurer la stabilité permanente.

Dans le Mémoire déjà cité, M. Birkhoff remarque que l'on doit s'attendre, en général, à la divergence des séries f_i, g_i parce qu'elles contiennent des « petits diviseurs ». En partant de cette idée nous allons considérer le rôle de ces petits diviseurs dans les problèmes de convergence qui restent encore à résoudre lorsque le côté formel de la question a été complètement éclairci, c'est-à-dire lorsque dans l'hypothèse de stabilité complète S_c a été réduit à sa forme normale.

Nous commencerons par noter que si les petits diviseurs constituent une cause de la divergence, ce n'est pas la seule et que dans les cas où ils n'interviennent pas — comme nous aurons l'occasion d'en rencontrer par la suite — on n'est pas du tout assuré de la convergence. Lorsqu'ils figurent aux dénominateurs des termes des séries formelles on peut s'attendre à ce que leur rôle dépende avant tout de leur nature arithmétique. On sait en effet l'importance de cette dernière dans les méthodes de Poincaré : par exemple la propriété pour le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ (qui correspond à ce que nous appellerons ν dans les pages suivantes) d'être *à peu près* commensurable [1]. C'est elle qui détermine la place des petits diviseurs et par conséquent domine les méthodes (Delaunay, Bohlin, Glydén) qui tendent à conserver aux développements classiques la convergence *au sens des astronomes* (POINCARÉ, *Méthodes nouvelles*, t. II; Introduction et Chap. XIX, XX, XXI).

Mais même pour la convergence *au sens des géomètres* les propriétés arithmétiques des nombres qui fixent la structure des petits diviseurs seront fondamentales. C'est à ce point de vue que se sont placés M. Petersson et M. Wintner dans des Mémoires récents consacrés aux séries de la théorie des perturbations.

Les théorèmes de M. Petersson [2] permettent de faire disparaître les petits diviseurs des séries majorantes et montrent que ceci peut être réalisé à l'exception des points d'un ensemble de mesure nulle. En étudiant plus particulièrement le cas d'une série double M. Wintner [3] établit à l'aide d'un théorème de M. Borel [4] sur les séries à termes positifs que les petits diviseurs de la série majorante

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mu^{n+m}}{|n-\rho m|}$$

peuvent entraîner sa divergence, avec $\mu < 1$, seulement si ρ appar-

---

(1) POINCARÉ, *Méthodes nouvelles*, t. II, n° 101.

(2) *Abhandlungen aus dem Math. Seminar, Hamburg*, Band III, 1924, p. 324.

(3) *Mathematische Zeitschrift*, Band 31, 1930, p. 434.

(4) *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 63-69; Gauthier-Villars, Paris.

tient à un ensemble de mesure nulle (ayant la puissance du continu).

Nous effectuerons d'abord de nouvelles opérations formelles en retournant au système (S_1). Dans les seconds membres seulement de ce système nous ferons le changement de variables (F) qui conduit à (N). En remplaçant ensuite dans les développements obtenus

$$\xi_j \quad \text{par} \quad \xi_j^0 e^{M_j^0 t}, \qquad \eta_j \quad \text{par} \quad \eta_j^0 e^{-M_j^0 t},$$

on arrive à un système

$$\frac{dp_j}{dt} = P_j^*(t), \qquad \frac{dq_j}{dt} = Q_j^*(t),$$

où les termes des séries P_j^*, Q_j^* sont de la forme

$$A_{\alpha_1\ldots\alpha_s\beta_1\ldots\beta_s} e^{\sum(\alpha_j-\beta_j)M_j t} |\xi_1|^{\alpha_1} |\xi_2|^{\alpha_2} |\eta_1|^{\beta_1} |\eta_2|^{\beta_2}$$

(nous écrivons, comme nous le ferons souvent encore dans la suite, ξ, η, M au lieu de ξ^0, η^0, M^0).

L'intégration terme à terme des séries P^*, Q^* fournira une solution formelle sur laquelle nous étudierons les problèmes de convergence qui ont été jusqu'ici entièrement laissés de côté; remarquons qu'en particulier nous n'avons même pas eu à supposer l'analyticité des P_j, Q_j c'est-à-dire des X_i initiaux.

Nous sommes assurés que l'intégration des P^*, Q^* n'introduira aucun terme séculaire parce qu'il n'en existe évidemment pas dans les développements obtenus directement pour les p, q. D'ailleurs c'est précisément *dans cette possibilité d'exprimer p, q sans terme séculaire que réside le rôle et même le sens de l'hypothèse de stabilité complète que nous faisons sans cesse.*

Le cas $s=1$ ne fait pas intervenir de petits diviseurs, nous prendrons $s=2$. Comme λ_1, λ_2 sont des imaginaires pures nous avons immédiatement des séries majorantes de terme général

$$\frac{|A_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}| \times |\xi_1|^{\alpha_1} |\xi_2|^{\alpha_2} |\eta_1|^{\beta_1} |\eta_2|^{\beta_2}}{|(\alpha_1-\beta_1)M_1+(\alpha_2-\beta_2)M_2|},$$

ou à un facteur près

$$\frac{|A_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}| \times |\xi_1|^{\alpha_1} |\xi_2|^{\alpha_2} |\eta_1|^{\beta_1} |\eta_2|^{\beta_2}}{|(\alpha_1-\beta_1)\nu+(\alpha_2-\beta_2)|},$$

en posant $\nu = \frac{M_1}{M_2}$ (soit pour fixer les idées $M_1 < M_2$ c'est-à-dire $\nu < 1$). Dans cette série distinguons deux parties Σ et Σ' en mettant à part dans Σ' tous les termes tels que

$$\frac{|A_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}|}{\alpha_2-\beta_2}|\xi_1|^{\alpha_1}|\xi_2|^{\alpha_2}|\eta_1|^{\beta_1}|\eta_2|^{\beta_2}$$

pour lesquels $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, dont aucun ne fait intervenir de petit diviseur. Portons notre attention sur la première partie Σ et particulièrement sur ses petits diviseurs

$$\left|\nu - \frac{\alpha_2-\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}\right| \qquad (\alpha_1 \neq \beta_1).$$

Mettons tout de suite à part le cas de ν rationnel où il n'y a pas de petits diviseurs. Soit ν un nombre irrationnel algébrique de degré $\omega > 1$ il satisfait à l'inégalité de Liouville

$$\left|\nu - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{n^\omega} \qquad (K > 0),$$

quels que soient m et n dès que n est assez grand. Mais les inégalités de Liouville peuvent également avoir lieu pour des nombres transcendants. M. Borel montre que l'on peut trouver une infinité de nombres transcendants se comportant au point de vue de l'approximation comme les nombres algébriques du second degré : *Leçons sur la théorie des fonctions* [1] (p. 32). Ces nombres se définissent par des fractions continues dont les quotients incomplets sont limités, le même auteur les désigne *nombres de la première classe*. Cf. : *Leçons sur la théorie de la croissance* (p. 132) [2].

On peut donc dire qu'un nombre algébrique ou transcendant est d'ordre d'approximation ω (en abrégé d'ordre ω) lorsqu'il satisfait à une inégalité de Liouville où ω figure en exposant. Un nombre est en réalité *d'ordre ω ou moins* car il est évidemment de tous les ordres supérieurs à ω. En supposant ν d'ordre ω nous pourrons remplacer le

---

(1) Gauthier-Villars, Paris.
(2) Gauthier-Villars, Paris.

terme général de Σ par

$$|A_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}|\,|\alpha_1-\beta_1|^{\omega-1}|\zeta_1|^{\alpha_1}|\zeta_2|^{\alpha_2}|\eta_1|^{\beta_1}|\eta_2|^{\beta_2} \qquad (\alpha_1 \neq \beta_1).$$

Cette série admettra le même domaine de convergence que la série initiale $P^\star$ (ou $Q^\star$) ; soit $D^\star$ ce domaine ; à son intérieur on sera assuré de la convergence des deux séries Σ et Σ' (1). Nous arrivons donc à la couclusion suivante : *pour tous les nombres ν ayant un ordre d'approximation déterminé, la convergence absolue des séries $P_j^\star$, $Q_j^\star$ suffit à assurer la stabilité permanente.*

Cette conclusion tombe donc en défaut seulement pour les nombres transcendants obtenus par Liouville (2) dont l'ensemble (L) a la puissance du continu et une mesure nulle.

Nous avons vu que chaque trajectoire était déterminée par des conditions initiales ξ_1^0, η_1^0, ξ_2^0, η_2^0 deux à deux imaginaires conjuguées. Considérons le plan réel dont les coordonnées sont les deux modules de ces quantités ou ce qui revient au même le plan π_1^0, π_2^0. Nous avons encore à envisager dans ce plan le voisinage de l'origine. Comme les relations qui déterminent M_1, M_2 sont résolubles par rapport à π_1, π_2 [on suppose $|c_{jh}| \neq 0$ (3)], on aura une correspondance biunivoque entre le voisinage du point origine dans le plan π_1, π_2 et le voisinage du point λ_1, λ_2 dans le plan M_1, M_2. Il nous suffira d'ailleurs de considérer une projection de ce plan sur l'axe des $\nu = \frac{M_1}{M_2}$. Par le procédé inverse nous passerons d'une valeur de ν aux points ξ_1^0, η_1^0, ξ_2^0, η_2^0 qui lui correspondent.

Comme les conditions de convergence précédemment obtenues font

---

(1) Il suffit de se reporter à l'expression donnée par M. Hadamard dans sa Thèse (p. 8) pour le rayon de convergence d'une série à une seule variable

$$\rho = 1 : \overline{\lim}\,|\sqrt[m]{a^m}|$$

la limite supérieure étant définie au sens de du Bois Reymond.

(2) M. Maillet leur a donné le nom de « nombres de Liouville ». *Cf.* J. HADAMARD et E. MAILLET, Édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, I, n° 65, p. 17.

(3) Les c_{jh} sont les coefficients des termes linéaires en π dans les M_j. On exclut ainsi le cas de dégénérescence.

intervenir la nature arithmétique de ν seulement, nous supposerons que parmi les constantes initiales dont dépend une trajectoire on donne précisément ce nombre ν et il est toujours entendu que les trois autres constantes sont prises sans aucun égard à leurs propriétés arithmétiques mais de telle sorte que le point initial soit toujours dans le voisinage dont nous nous occupons. En désignant l'ensemble des quatre coordonnées initiales données de la manière que nous venons d'indiquer comme un « point du voisinage » le résultat auquel nous sommes arrivés précédemment donne les deux possibilités suivantes pour la distribution des mouvements stables autour du point d'équilibre considéré :

1° Tous les points du voisinage sont stables.

2° Il y a exception pour tous les points correspondant à un nombre ν de Liouville.

Il suit de là que toute propriété de l'ensemble (L) de Liouville aura son interprétation mécanique relativement aux trajectoires instables correspondant aux nombres ν de cet ensemble.

Nous ferons encore quelques remarques qui mettent en évidence la signification de nos conclusions.

La propriété arithmétique de ν, qui intervient dans notre étude, est seulement la possibilité de lui assigner un ordre d'approximation déterminé (à l'aide des nombres rationnels) et non la valeur de cet ordre.

C'est de cette manière qu'apparaît la distinction entre le point de vue auquel nous nous sommes placés : la recherche des conditions d'analyticité, et celui que les astronomes adoptent souvent : l'aptitude des développements à fournir une bonne approximation. En effet pour cette dernière ce serait la grandeur de l'ordre ω de l'approximation qui jouerait le rôle essentiel en déterminant le rang à partir duquel on rencontrerait les petits diviseurs.

Nous avons vu que les mouvements périodiques correspondent aux valeurs rationnelles de ν. Les trajectoires instables que nous avons mises en évidence sont à un certain sens — défini avec précision par ce qui précède — les plus proches des trajectoires périodiques. C'est ainsi que se manifeste dans la distribution des trajectoires la conclusion de

M. Borel que nous citons textuellement : « un nombre est d'autant plus transcendant ou plus éloigné par sa nature des nombres rationnels qu'il est possible de l'approcher davantage par des nombres rationnels » (*Leçons sur la théorie de la croissance*, p. 126).

III. — La périodicité conditionnelle.

Dans l'hypothèse de stabilité permanente, représentation des mouvements périodiques par les « points périodiques » de l'espace π_j. Étude de la distribution de ces points. Les axes de coordonnées en donnent une première catégorie qui correspond aux « surfaces invariantes de périodicité » du paragraphe I. Répartition des mouvements périodiques en un ensemble dénombrable de familles continues. La correspondance **M**(Π), les cas où elle est particulièrement simple : les formes normales « réduites ». Application à deux cas classiques de la théorie de la stabilité complète. Étude de la distribution des périodes; à l'intérieur d'une famille le point représentatif caractérise la période.

En supposant les séries $M_j(\pi)$ convergentes, nous avons indiqué au cours du paragraphe II les conditions de périodicité. Nous allons poursuivre leur étude en faisant de plus l'hypothèse de stabilité permanente. Parmi les $2s$ constantes arbitraires dont dépend une trajectoire, il y en a seulement s qui interviennent pour déterminer la périodicité : les valeurs initiales π_j^0. Reprenons la représentation que nous avons déjà employée à propos de la stabilité, pour $s=2$, c'est-à-dire considérons les π_j comme les coordonnées d'un point Π d'un espace réel à s dimensions. A un mouvement donné, défini par $2s$ valeurs initiales ξ_j^0, η_j^0 correspondra un seul point Π en raison de la propriété du système (N_c) d'admettre les intégrales $\pi_j=c_j$. Les « points périodiques » seront ceux qui correspondront à des mouvements périodiques — tout mouvement correspondant à un de ces points sera nécessairement périodique.

Envisageons maintenant la distribution de ces points périodiques. Ceux qui se présentent d'abord sont donnés par les axes de coordonnées de l'espace ϖ_j. On retrouve ainsi les s familles continues de mouvements périodiques que nous avons mises en évidence au paragraphe I lorsque nous avons défini les *surfaces invariantes de périodicité*. Ces points mis à part notre représentation permet d'interpréter géométriquement les conditions de périodicité en les ramenant à la rationalité des paramètres directeurs de la droite **OM** (**M** étant le point de coordonnées M_j). Les séries convergentes $M_j(\varpi)$ définissent une correspondance biunivoque entre les points **M** au voisinage du point A (de coordonnées λ_j) et les points H au voisinage de l'origine. On arrive ainsi à la conclusion : *la totalité des mouvements périodiques appartenant au voisinage considéré se répartit en un ensemble dénombrable de familles continues.*

On peut préciser davantage lorsque la correspondance **M**(H) est particulièrement simple, ainsi que cela a lieu dans des cas fort importants qui se présentent d'eux-mêmes dans la théorie de la stabilité complète. En effet, dans la forme normale les M_j ne sont pas complètement déterminés : le procédé de calcul des f_j, g_j annule certains termes des M_j mais ne fixe pas la valeur de ceux qui subsistent. On peut encore déduire cette remarque de l'invariance de la forme (X_n) par rapport aux transformations (T). Par conséquent même sous sa forme normale le système s'écrira de différentes manières et l'on pourra choisir la plus appropriée au problème que l'on aura en vue. C'est ainsi que vont se révéler particulièrement importants les cas pour lesquels on peut obtenir une *forme normale réduite*, dont nous rencontrerons des exemples dans le reste de ce paragraphe.

La forme réduite la plus simple

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \xi_j(\lambda_j - \varpi_j), \qquad \frac{d\eta_j}{dt} = -\eta_j(\lambda_j - \varpi_j)$$

se présente dans le cas où les $M_j - \lambda_j$ sont respectivement divisibles par ϖ_j. Cette hypothèse n'est d'ailleurs pas introduite arbitrairement mais joue déjà un rôle important dans la théorie de la réduction de (S) à une forme hamiltonienne [1]. La correspondance **M**(H) n'est

[1] Par une « non-extended transformation » (*Amer. Journal of Math.*, *loc. cit.*, p. 30).

alors qu'une simple translation et le lieu des points Π périodiques est constitué par un ensemble dénombrable de portions de droites. Ce dernier résultat subsiste dans un deuxième cas particulier que l'on peut regarder comme une extension du précédent. Supposons en effet que les M_j puissent être réduits à ne contenir que des termes de degré inférieur à deux (par rapport aux π_j), soit :

$$M_j = \lambda_j + \Sigma a_{jh}\pi_h.$$

Ce cas est encore intéressant relativement à la réduction du système à une forme hamiltonienne. Une condition nécessaire à cette réduction : l'existence de constantes c satisfaisant à

$$\frac{a_{jh}}{a_{hj}} = \frac{c_h}{c_j} \qquad (|a_{jh}| \neq 0)$$

devient suffisante dans l'hypothèse caractéristique de ce deuxième cas, on passe alors de (S) à (H) par l'homothétie $\bar{\pi}_j = \pi_j c_j$. Ce que nous avons vu pour le premier cas particulier s'applique encore; mais la correspondance entre M et Π est une homographie au lieu d'une translation.

La représentation géométrique dans l'espace π_i permet d'étudier la distribution des périodes. Prenons pour fixer les idées, $s = 2$, on arrive sans difficulté aux résultats suivants. Les points M d'abscisse déterminée $M_1 = c$ correspondent à des périodes qui sont toutes des multiples de celle que donne le point de même abscisse c et d'ordonnée nulle. En intervertissant les rôles de l'abscisse et de l'ordonnée, on obtient une propriété tout à fait semblable. Sur un rayon issu de O on n'obtiendra jamais deux fois la même période mais on passera aux multiples d'une période donnée en effectuant sur les points M une homothétie de rapport $\frac{1}{p}$, p entier quelconque. Sur deux rayons déterminés une construction géométrique immédiate relie les points qui donnent la même période. Sur chaque rayon il y aura donc un point et un seul correspondant à une période donnée, lorsque celle-ci sera choisie entre les limites convenables. On arrive ainsi à la conclusion : pour chacune des familles continues de mouvements périodiques que nous avons précédemment définies, lorsque les M seront distincts, les périodes correspondantes seront différentes : le point représentatif Π caractérise donc la période à l'intérieur d'une famille.

En résumé, dans tout ce qui précède, l'étude des conditions de périodicité comme celle de la distribution des périodes se fait sur les points M qui appartiennent au voisinage de A. On passe ensuite aux points Π à l'aide de la correspondance $M(\Pi)$. Comme nous avons toujours considéré des systèmes stables de *type général*, sur la droite OA il n'y aura pas de points périodiques. Il suffit de se proposer d'étudier le voisinage de cette droite pour concevoir que vont intervenir les propriétés arithmétiques des exposants caractéristiques λ_i, c'est en effet ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

IV. — Conséquences de la nature arithmétique des exposants caractéristiques.

THÉORÈME. — *On peut calculer une limite inférieure de la période lorsque le rapport des exposants caractéristiques* ($s = 2$) *satisfait à une inégalité de Liouville.* Les deux cas des formes normales réduites : applications aux mouvements d'approximation dans l'hypothèse de stabilité d'ordre m; caractérisation de cette hypothèse par un énoncé réciproque. Le cas « intermédiaire » : stabilité complète et convergence des $M_j(\pi)$, une condition caractéristique.

Nous reprendrons le cas de $s = 2$ et d'une forme normale réduite pour laquelle $M_1 = \lambda_1 + \pi_1$, $M_2 = \lambda_2 + \pi_2$. Le coefficient angulaire de la droite OM sera $\frac{\lambda_2 + \pi_2}{\lambda_1 + \pi_1}$ et $l = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ celui de OA. Avec l'hypothèse qui définit le cas général de type stable, l est un nombre irrationnel. Nous allons approfondir le rôle que joue la nature arithmétique de ce nombre. Nous supposerons qu'il satisfait à une inégalité de Liouville, d'ordre ω :

$$\left| l - \frac{m}{n} \right| > \frac{A}{n^\omega} \qquad (A > 0)$$

quels que soient m et n (entiers) dès que n est assez grand, soit $n > B$.

Le cercle de centre A de rayon $r = \frac{\varepsilon\lambda_1}{\sqrt{1+(l+\varepsilon)^2}}$ est entièrement à l'intérieur de l'angle des rayons issus de l'origine dont le coefficient angulaire est compris entre $l-\varepsilon$ et $l+\varepsilon$. Pour tous les points de ce cercle, le rapport $\frac{M_2}{M_1}$ s'écartera de l de moins de ε. On obtiendra un point périodique en prenant un rapport $\frac{M_2}{M_1}$ rationnel soit $\frac{m}{n}$ que nous choisissons irréductible et la période correspondante sera $\frac{2\pi n}{M_2}$. Nous commencerons par nous débarrasser de la condition adjointe de l'inégalité de Liouville en excluant les valeurs de n inférieures à B. A ces valeurs correspondent un nombre fini de droites, nous enlèverons des domaines circulaires de centre A que nous allons considérer les points appartenant à ces droites. C'est ce que l'on peut encore réaliser en excluant les périodes inférieures à $2\pi B$; ρ étant le rayon du cercle de centre A que l'on envisage, soit $C > B$, prenons $\varepsilon = \frac{A}{C^\omega}$ et soit ρ_C le rayon du cercle correspondant, que nous représenterons par (ρ_C), notation que nous emploierons pour tous les cercles de centre A. Il résulte de l'inégalité de Liouville qu'à l'intérieur de (ρ_C) il n'y a pas de points qui donnent une période inférieure à $\frac{\lambda_2+\rho_C}{2\pi C}$. En effet si un point intérieur à (ρ_C) défini par $\frac{M_2}{M_1} = \frac{m}{n}$ (irréductible) donnait une période

$$\frac{2\pi n}{M_2} < \frac{2\pi C}{\lambda_2+\rho_C},$$

on aurait $n < C$. De plus comme nous l'avons indiqué précédemment le coefficient angulaire de **OM** satisferait à

$$\left| l - \frac{m}{n} \right| < \frac{A}{C^\omega},$$

d'où l'on déduirait :

$$\left| l - \frac{m}{n} \right| < \frac{A}{n^\omega},$$

ce qui serait contradictoire avec l'inégalité de Liouville puisque n'interviennent dans nos considérations que les valeurs de $n > B$.

Dans le cas particulier que nous avons pris, on passe de **M** à Π par une translation et nous arrivons à l'énoncé :

Lorsque le rapport des exposants caractéristiques $l = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ *satisfait à une inégalité de Liouville, définie par* A, B, ω, *il ne peut pas exister à l'intérieur du cercle de centre* **O** *et de rayon* $\rho = \dfrac{A\lambda_1}{C^{\omega}\sqrt{1+\left(l+\frac{A}{C^{\omega}}\right)^2}}$ *des points correspondant à une période comprise entre* $\frac{2\pi B}{\lambda_2 - \rho_C}$ *et* $\frac{2\pi C}{\lambda_2 + \rho_C}$, C *étant un nombre arbitraire supérieur à* B.

Il est évident que la première catégorie ([1]) de points périodiques donnée par les axes de coordonnées reste toujours en dehors de nos considérations. La limite inférieure $\frac{2\pi C}{\lambda_2 + \rho_C}$ augmente avec C tandis que le rayon diminue et d'autant plus rapidement que ω est plus grand; pour les nombres algébriques d'autant plus vite que l'ordre est plus élevé. Remarquons encore que l'on peut remplacer la limite $\frac{2\pi B}{\lambda_2 - \rho_C}$ par $\frac{2\pi B}{\lambda_2 - \rho_B}$ qui est moins bonne mais indépendante de C.

L'application de notre résultat à la recherche des mouvements périodiques au voisinage d'un point d'équilibre est évidente mais là n'est pas limité son intérêt ainsi que cela va être mis en évidence par ce qui suit. Nous obtiendrons en effet des théorèmes semblables à celui que nous venons d'énoncer en faisant sur la stabilité du système des hypothèses différentes et plus larges que celles que nous avons adoptées tout d'abord.

Commençons par substituer à la forme réduite que nous avons employée jusqu'ici, celle pour laquelle les $M_j(\pi)$ se réduisent à leurs termes de degré inférieur à 2 : c'est le deuxième cas particulier du paragraphe précédent. La seule modification à apporter au raisonnement que nous avons fait est la suivante : aux points **M** intérieurs au cercle (ρ_C) de centre A correspondront des points Π intérieurs à une ellipse E_C homographique de (ρ_C) et de centre **O**.

Au lieu de faire l'hypothèse de stabilité complète, nous allons main-

([1]) *Voir* § III, p. 123.

tenant imposer au système (S) seulement la stabilité du troisième ordre (il restera toujours de rang $2s = 4$ et de type stable général).

Désignons par

$$\mu_1 = \lambda_1 + \Sigma a_{1h}\pi_h, \qquad \mu_2 = \lambda_2 + \Sigma a_{2h}\pi_h,$$

les termes de plus bas degré dans M_1 et M_2. En prenant

$$\xi_j = \xi_j^{(0)} e^{\mu_j^{(0)}(t-t_0)}, \qquad \eta_j = \eta_j^{(0)} e^{-\mu_j^{(0)}(t-t_0)} \qquad (j = 1, 2),$$

on obtient une solution approchée qui représente le mouvement [1] avec une erreur (sur les x) inférieure à

$$K\varepsilon^6 \frac{(t-t_0)^2}{2} + N\varepsilon^5 |t - t_0|$$

pendant un intervalle

$$|t - t_0| \leqq L\varepsilon^{-4},$$

K, L, N sont des constantes positives et $\varepsilon = \sqrt{\Sigma(x_i^0)^2}$. Ces mouvements approchés sont solutions d'un système du type de ceux que nous avons considéré en dernier lieu. Il en résulte donc que lorsque le rapport l des exposants caractéristiques satisfera à une inégalité de Liouville, on pourra assigner une limite inférieure à la période des mouvements périodiques issus de points initiaux intérieurs à une ellipse E_c de centre **O** (après avoir enlevé de l'intérieur de cette ellipse d'une part les points situés sur les axes et, d'autre part, ceux qui correspondent à $n < B$).

L'extension de notre résultat aux cas de stabilité d'ordre m ne présente aucune difficulté nouvelle. Le degré d'approximation de la solution que l'on considérera

$$\xi_j = \xi_j^0 e^{M_j^0(t-t_0)}, \qquad \eta_j = \eta_j^0 e^{-\bar{M}_j^0(t-t_0)}$$

$\left(\bar{M}_j^0\right.$ sont des polynomes par rapport aux $\pi^{(0)}$ de degré $\frac{1}{2}(m-1)$ au $\left.\text{plus}\right)$ sera donné par une formule analogue. On devra remplacer l'ellipse E_c par une région ρ_c entourant le point **O**; on pourra d'ailleurs substituer à cette dernière un cercle de centre **O** qui lui est tout entier intérieur. Ainsi, si l'on considère parmi les mouvements approchés que

---

[1] *Amer. Journal of Math.*, *loc. cit.*, p. 23.

définit la théorie de la stabilité des différents ordres ceux qui donnent la meilleure approximation, ils satisferont pour chaque valeur de m à un théorème jouant le même rôle que celui que nous avons énoncé. D'une manière réciproque lorsqu'il existera d'une part une inégalité de Liouville avec des constantes A, B, ω déterminées, et d'autre part, un mouvement périodique d'approximation

$$K\varepsilon^{m+3}\frac{(t-t_0)^2}{2}+N\varepsilon^{m+2}|t-t_0|$$

pour un intervalle $|t-t_0|\leqq L\varepsilon^{-(m+1)}$ le théorème qui correspond à l'ordre m donnera une condition nécessaire à la stabilité de cet ordre.

Nous sommes ainsi amenés à considérer le cas de stabilité complète où de plus les séries $M_j(\tau)$ convergent. C'est alors aux solutions de (S) elles-mêmes que s'appliquera un théorème tout à fait analogue à celui que nous avons établi. Et réciproquement, avec comme hypothèses préliminaires la stabilité complète et l'inégalité de Liouville, on tirera de ce théorème une condition nécessaire à la convergence des séries $M_j(\tau)$; cette condition, comme nous l'avons déjà remarqué, ne suffira pas à assurer la stabilité permanente, mais pourra être regardée comme définissant un cas intermédiaire entre celle-ci et la stabilité complète. Les extensions à $s>2$ et aux cas de stabilité permanente *relative* se conçoivent immédiatement.