JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ARNAUD DENJOY

Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 333-375.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__333_0>

Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore;

PAR ARNAUD DENJOY.

Le présent article a pour objet d'élucider une question laissée en suspens par Poincaré dans l'un de ses mémoires célèbres sur les équations différentielles à variables réelles [1].

Poincaré se limite à l'hypothèse du coefficient différentiel holomorphe (et même rationnel par rapport aux coordonnées cartésiennes sur le tore). En fait ce caractère trop précis ne joue aucun rôle nécessaire dans la question posée par Poincaré. Je reprends entièrement la théorie de l'illustre géomètre en me plaçant dès l'abord dans les conditions à la fois simples et générales suffisantes pour que les phénomènes numériques découverts par Poincaré se produisent. Ensuite j'examine à quels effets correspondent deux restrictions que j'introduis successivement dans les hypothèses, et je montre, ce qui est le principal objet de ce travail, l'impossibilité d'obtenir une certaine circonstance singulière, dont l'éventualité paraissait vraisemblable à Poincaré.

La généralité des hypothèses n'offre pas seulement un intérêt logique, par l'avantage d'aborder plus immédiatement les véritables causes des faits. Mais encore, les conditions d'holomorphie, raisonnablement admises à l'intérieur des domaines parcourus par les variables, souvent sont en défaut aux frontières de ces domaines. Pour ce

---

[1] POINCARÉ, *Œuvres complètes*, t. I, p. 137-158, article primitivement paru sous le titre : *Sur les courbes définies par les équations différentielles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. I, p. 167-244 (1885)].

cas, il est utile de disposer de résultats valables sous les conditions le moins rigoureuses possibles. Nous ne faisons appel dans ce travail qu'à la continuité et à la première dérivabilité du coefficient différentiel.

1. Soit M un point mobile sur un tore sans point double. Le méridien de M sera défini par l'angle φ qu'il fait avec un méridien origine.

Sur le méridien de M, θ mesurera l'angle du rayon de M avec le rayon du point le plus rapproché de l'axe. φ et θ ne sont définis qu'à l'addition près d'un multiple quelconque de 2π.

Considérons une équation différentielle

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta). \tag{1}$$

Supposons que A possède une valeur déterminée en chaque point du tore. A est donc périodique de période 2π en φ et en θ séparément. Supposons qu'en chaque point $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ du tore : 1° soit A, soit $\frac{1}{A}$ est continu en φ et θ, d'où résulte que le plus petit des deux nombres $|A|$, $\frac{1}{|A|}$ est uniformément borné sur le tore; 2° dans un domaine d_0 entourant M_0,

$$|A(\varphi, \theta') - A(\varphi, \theta)| < K|\theta' - \theta|$$

dans le premier cas,

$$\left|\frac{1}{A(\varphi', \theta)} - \frac{1}{A(\varphi, \theta)}\right| < K|\varphi' - \varphi|$$

dans le second cas, K étant indépendant des points (φ, θ), $(\varphi, \theta')(\varphi', \theta)$ considérés dans d_0.

On en conclut immédiatement la possibilité de trouver un nombre positif η indépendant de M_0 et tel que : 1° dans tout domaine d_0 défini par $|\varphi - \varphi_0| < \eta$, $|\theta - \theta_0| < \eta$, l'une des deux fonctions A, $\frac{1}{A}$ est continue, et 2° la condition de Lipschitz correspondante est vérifiée avec un nombre K indépendant de φ_0, θ_0; 3° par le point $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ passe une courbe intégrale unique pouvant être prolongée de part et d'autre de M_0 jusqu'au contour du domaine d'_0.

Aux points où A est infini, cette courbe est tangente à un cercle méridien.

Poincaré donne le nom de « caractéristique » à toute courbe intégrale de l'équation (1). Ainsi, par tout point du tore passe une caractéristique et une seule. Deux caractéristiques ne peuvent avoir un point commun sans coïncider dans leur totalité. Une caractéristique ne peut avoir un point double sans être une courbe fermée simple que Poincaré appelle un « cycle ». Toute caractéristique qui n'est pas un cycle se prolonge indéfiniment dans l'un et l'autre sens. Poincaré dit qu'elle n'a pas de « point d'arrêt », c'est-à-dire de point vers lequel elle tend sans prolongement défini au delà de ce point (1).

Considérons une caractéristique non cyclique. Les points au voisinage desquels elle passe une infinité de fois forment un ensemble fermé pouvant coïncider avec la totalité du tore, ou former des lignes, celles-ci vérifiant évidemment l'équation différentielle. Au voisinage de chaque point de l'une de ces lignes le point décrivant celle-ci passe une infinité de fois. Il en sera ainsi naturellement quand la ligne est fermée. Poincaré l'appelle alors un « cycle limite ». Mais *a priori* cette courbe limite n'est pas nécessairement fermée. C'est un cas de cette sorte qui serait réalisé dans une éventualité étudiée par Poincaré. Nous nous proposons de montrer *que celle-ci ne peut pas se produire* dans l'hypothèse où se plaçait Poincaré, de A holomorphe, ni même *quand la variation totale de* $\frac{\partial A}{\partial \theta}(\varphi, \theta)$ *en* θ *est uniformément bornée* (31-33).

2. Considérons plus spécialement avec Poincaré le cas où les méridiens sont des « cycles sans contact », c'est-à-dire ne sont tangents à aucune caractéristique. Il faut et il suffit pour cela que $\frac{1}{A}$ ne soit jamais nul. A continu est borné. Les méridiens coupent les caractéristiques sous un angle dont la borne inférieure est positive.

Nous supposerons donc $A(\varphi, \theta)$ *continu sur la totalité du tore*, et bien

(1) Les points d'arrêt considérés dans les mémoires de Poincaré sont les *nœuds* où viennent aboutir une infinité d'intégrales tangentes entre elles, et les *foyers* autour desquels une infinité de caractéristiques s'enroulent en spirale. Les *cols* où se joignent un nombre fini de caractéristiques ne sont pas des points d'arrêt.

entendu, admettant la période 2π en φ et en θ séparément. $A(\varphi, \theta)$ est continu, uniforme, dans le champ $-\infty < \varphi < +\infty$, $-\infty < \theta < +\infty$. D'après la théorie générale de l'intégration, à tout système (φ_0, θ_0) de données initiales, correspond au moins une intégrale et en général une infinité d'intégrales de l'équation (1), prolongeables dans tout le champ $-\infty < \varphi < +\infty$.

Nous supposerons que les conditions analytiques vérifiées par $A(\varphi, \theta)$ sont telles *que cette intégrale est unique, quels que soient* φ_0 *et* θ_0.

Il en sera en particulier ainsi moyennant la condition de Lipschitz en θ :

$$|A(\varphi, \theta') - A(\varphi, \theta)| < K|\theta' - \theta|,$$

K étant indépendant de φ, de θ et de θ'.

Puisque toute intégrale est définie pour $\varphi = \varphi_0$, nous supposerons ce dernier nombre invariable, et l'intégrale θ de (1) sera caractérisée par la valeur θ_0 qu'elle prend pour $\varphi = \varphi_0$. Nous l'écrirons $\theta = u(\varphi, \theta_0)$.

3. $u(\varphi, \theta_0)$, regardé comme fonction de φ, n'est évidemment pas périodique. Quand φ s'accroît de $2q\pi$, si θ reprend la même valeur, augmentée de $2p\pi$ (p et q entiers), la caractéristique est un *cycle* s'enroulant p et q fois autour du cercle moyen et de l'axe du tore.

Il est bon de noter que $\dfrac{u(\varphi, \theta_0) - u(\varphi', \theta_0)}{\varphi - \varphi'}$ est compris entre le minimum et le maximum de A sur le tore. Il en est ainsi en particulier de $\dfrac{u(\varphi, \theta_0) - \theta_0}{\varphi - \varphi_0}$.

4. Étudions $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ *comme fonction de* θ_0 :

1° Évidemment $u(\varphi, \theta_0) + 2\pi$ substitué à θ vérifie l'équation (1) avec les conditions initiales $(\varphi_0, \theta_0 + 2\pi)$. Comme par hypothèse l'intégrale correspondant à celles-ci est unique, on a

$$u(\varphi, \theta_0 + 2\pi) = u(\varphi, \theta_0) + 2\pi.$$

Donc, si

$$\theta = u(\varphi, \theta_0) = \theta_0 + v(\varphi, \theta_0),$$

v *admet en* θ_0 *la période* 2π. v s'annule pour $\varphi = \varphi_0$, quel que soit θ_0.

Géométriquement, aux deux valeurs θ_0 et $\theta_0 + 2\pi$ correspond la même caractéristique.

2° Soit $\theta' = u(\varphi, \theta'_0)$. Si $\theta'_0 - \theta_0$ n'est pas multiple de 2π, $\theta' - \theta$ ne peut l'être pour aucune valeur de φ. Sinon les deux caractéristiques coïncideraient, ce qui est absurde, puisqu'elles diffèrent pour $\varphi = \varphi_0$. Donc $u(\varphi, \theta'_0) - u(\varphi, \theta_0)$ *est toujours compris entre les mêmes multiples de* 2π *que* $\theta'_0 - \theta_0$ *lui-même.*

En particulier l'inégalité $\theta_0 < \theta'_0$ entraine

$$u(\varphi, \theta_0) < u(\varphi, \theta'_0)$$

quel que soit φ. *Pour une valeur invariable quelconque de* φ, θ *croît avec* θ_0.

De même $\theta_0 < \theta'_0 < \theta_0 + 2\pi$ entraîne $\theta < \theta' < \theta + 2\pi$ quel que soit φ.

3° $u(\varphi, \theta_0)$ *est continu en* θ_0. Ceci est vrai pour $\varphi = \varphi_0$, d'après $u(\varphi_0, \theta_0) = \theta_0$. Soit φ invariable et différent de φ_0. u est croissant en θ_0. Donc $u(\varphi, \theta_0 + 0)$ et $u(\varphi, \theta_0 - 0)$ existent. On sait que ces deux fonctions de φ, étant limites d'intégrales, sont elles-mêmes des intégrales. Si donc, l'intégrale $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ est unique, elle coïncide avec les deux précédentes, ce qui exprime la continuité.

Si l'on supposait vérifiée la condition de Lipschitz, rappelons que la démonstration classique de l'unicité des intégrales de (1) donnerait

$$e^{-K|\varphi-\varphi_0|} < \frac{\theta' - \theta}{\theta'_0 - \theta_0} < e^{K|\varphi-\varphi_0|}.$$

Donc, les nombres dérivés de θ en θ_0 sont bornés en ce cas ainsi que leurs inverses (pour φ variable dans un champ borné).

4° Soient $\beta(\varphi)$ et $\gamma(\varphi)$ le *minimum* et le *maximum* de $v(\varphi, \theta_0)$ et

$$\Delta(\varphi) = \gamma(\varphi) - \beta(\varphi).$$

Je dis que $\Delta(\varphi)$ *est toujours inférieur à* 2π $[\Delta(\varphi_0) = 0]$. Sinon, il y aurait trois nombres, φ', θ'_0, θ''_0 avec $\theta'_0 < \theta''_0 < \theta'_0 + 2\pi$, ($v$ est périodique en θ_0) pour lesquels

$$v(\varphi', \theta''_0) - v(\varphi', \theta'_0) = \pm 2\pi.$$

Mais alors

$$u(\varphi, \theta''_0) - u(\varphi, \theta'_0) = \theta'' - \theta'$$

prend pour $\varphi = \varphi_0$ la valeur $\theta''_0 - \theta'_0$, pour $\varphi = \varphi'$ la valeur $\theta''_0 - \theta'_0 \pm 2\pi$. Donc, pour au moins un φ'' intermédiaire à φ_0 et à φ', $\theta'' - \theta' = 2\pi$ ou zéro, ce qui est impossible.

5. Posons
$$\theta_n = u(\varphi_0 + 2n\pi, \theta_0) = \theta_0 + \psi_n(\theta_0),$$

n étant un entier quelconque. Le point $M_n(\varphi_0 + 2n\pi, \theta_n)$ sera appelé le $n^{\text{ième}}$ *conséquent* de M_0 sur le cercle méridien $\varphi = \varphi_0$ que nous désignerons par C. Si $n < 0$, M_n est appelé le $(-n)^{\text{ième}}$ *antécédent* de M_0 sur C.

Suivant les cas, il nous sera utile de considérer simplement le point M_n c'est-à-dire d'assimiler entre eux tous les nombres $\theta_n + 2h\pi$, $\varphi_0 + 2n\pi + 2h'\pi$ (h et h' entiers quelconques) ou au contraire de distinguer pour un même point M_n les valeur précises θ_n et $\varphi_0 + 2n\pi$ de ses arguments coordonnés.

Si nous amenons φ de φ_0 à $\varphi_0 + 2n\pi$ avec la valeur initiale θ_{-n}, nous retrouvons θ_0. On a, quel que soit n,

$$u(\varphi_0 + 2n\pi, \theta_{-n}) = \theta_0.$$

M_0 est le $n^{\text{ième}}$ conséquent de M_{-n} pour $n > 0$. On a, quel que soit n,

$$\theta_{-n} - \theta_0 = \psi_{-n}(\theta_0) = -\psi_n(\theta_{-n}).$$

En appliquant à $\theta_n = u(\varphi_0 + 2n\pi, \theta_0)$ et à $\psi_n(\theta_0) = v(\varphi_0 + 2n\pi, \theta_0)$ les résultats établis pour $u(\varphi, \theta_0)$ et pour $v(\varphi, \theta_0)$, φ étant quelconque, nous voyons que :

1° θ_n *est une fonction continue et croissante de* θ_0. *L'inégalité* $\theta_0 < \theta'_0 < \theta_0 + 2\pi$ *entraîne* $\theta_n < \theta'_n < \theta_n + 2\pi$ (et si la condition de Lipschitz est vérifiée, les nombres dérivés de θ_n en θ_0 ainsi que leurs inverses sont inférieurs à $e^{2Kn\pi}$).

2° $\psi_n(\theta_0) = \theta_n - \theta_0$ *admet la période* 2π *en* θ_0, *et si* $n\beta_n$ *et* $n\gamma_n$ *désignent son maximum et son minimum, on a* $n(\gamma_n - \beta_n) < 2\pi$.

Des premières propriétés de θ_n résulte que, si M_0 décrit dans le sens direct ou dans le sens rétrograde un arc géométrique (arc inférieur à 2π en valeur absolue) u_0 de C, M_n décrit dans le même sens un arc géométrique u_n de C.

Si sur l'arc u_0 parcouru dans le sens direct, M_0, M'_0 ... se succèdent, sur u_n parcouru dans le sens direct M_n, M'_n, ... se succèdent de la même manière.

6. Ces derniers résultats géométriques s'expriment indépendamment de la détermination choisie pour l'argument θ_n de M_n. Revenons à la définition analytique de θ_n.

Soit $n = pr + s$ ($n, p \geqq 1$; $0 \leqq s \leqq p - 1$). Des formules

$$p\beta_p \leqq \theta_{mp} - \theta_{(m-1)p} \leqq p\gamma_p \qquad (m = 1, 2, \ldots, r),$$
$$\beta_1 \leqq \theta_k - \theta_{k-1} \leqq \gamma_1 \qquad (k - rp = 1, 2, \ldots, s),$$

on déduit

$$rp\beta_p + s\beta_1 \leqq n\beta_n < n\gamma_n \leqq rp\gamma_p + s\gamma_1.$$

Laissant p fixe et faisant croître n indéfiniment, on trouve

$$\beta_p \leqq \varliminf_{n\infty} \beta_n \leqq \varlimsup_{n\infty} \gamma_n \leqq \gamma_p.$$

D'après $\gamma_p - \beta_p < \frac{2\pi}{p}$, on conclut immédiatement que β_n et γ_n *ont une limite commune* $2\pi\alpha$ *et que* α *vérifie la double inégalité*

$$\beta_p \leqq 2\pi\alpha \leqq \gamma_p$$

quel que soit p.

Donc si l'on pose

$$n\beta_n = 2n\pi\alpha - \beta'_n, \qquad n\gamma_n = 2n\pi\alpha + \gamma'_n,$$

β'_n et γ'_n sont non négatifs avec $\beta'_n + \gamma'_n < 2\pi$ et l'on a

$$(2) \qquad -\beta'_n \leqq \psi_n(\theta_0) - 2n\pi\alpha \leqq \gamma'_n,$$

les termes extrêmes étant les bornes atteintes par le terme médian (qui est continu).

La même formule s'applique au cas de $n < 0$. Remplaçons θ_0 par θ_{-n} et $\psi_n(\theta_{-n})$ par $-\psi_{-n}(\theta_0)$. On trouve

$$-\gamma'_n \leqq \psi_{-n}(\theta_0) + 2n\pi\alpha \leqq \beta'_n.$$

La formule (2) est donc générale et de plus $\gamma'_n = \beta'_{-n}$, $\beta'_n = \gamma'_{-n}$, quel que soit n.

7. Supposons que parmi les caractéristiques, il y ait un cycle, et que le mobile décrivant la trajectoire revienne à son point de départ (sur le méridien C) pour la première fois pour $\varphi = \varphi_0 + 2q\pi$, θ ayant augmenté de $2p\pi$. Il est évident que sur cette trajectoire particulière, si φ passe de φ_0 à $\varphi_0 + 2rq\pi$, θ augmente de $2pr\pi$, quel que soit r entier. Donc, d'après cette valeur particulière de θ_0, α vaut $\frac{p}{q}$. Donc, β *est rationnel* quand il y a un cycle parmi les caractéristiques.

Réciproquement, si α est rationnel et vaut la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, on a

$$-\beta'_q \leq \psi_q(\theta_0) - 2p\pi \leq \gamma'_q.$$

β'_q et γ'_q étant non négatifs et définissant des valeurs *atteintes* par la fonction continue $\psi_q(\theta_0)$, il existe au moins une valeur θ'_0 telle que $\psi_q(\theta'_0) = 2p\pi$.

La caractéristique correspondante $\theta' = u(\varphi, \theta'_0)$ est un cycle. Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un cycle est que α soit rationnel.*

7 *b*. Continuons l'examen de ce cas. Observons que l'on a $\theta_{n-q}(\theta'_0) = \theta_n(\theta'_0)$ puisque $\theta_q(\theta'_0) = \theta'_0$. Donc $\theta_1(\theta'_0), \theta_2(\theta'_0) \ldots \theta_{q-1}(\theta'_0)$ vérifient eux aussi la condition $\psi_q(\theta_0) = 2p\pi$. Les q points sont distincts, sinon α serait égal à une fraction $\frac{p'}{q'}$ avec $q' < q$, ce qui est impossible. Les points $M(\theta'_0, \varphi_0)$ forment sur C un ensemble fermé E, qui admet la transformation en lui-même $\theta_1(E) = E$.

Si E coïncide avec C, toutes les caractéristiques sont des cycles. Il n'y a pas de cycle limite. Supposons E non identique à C.

Soit u_0 ou $M'_0 M''_0$ un arc direct de C contigu à E.

Si u_n est l'intervalle formé des $n^{\text{ièmes}}$ conséquents des points de u_0, u_n est identique à l'arc direct $M'_n M''_n$. u_n ne contient pas de point de E, sinon le $n^{\text{ième}}$ antécédent de ce point serait intérieur à u_0 et appartiendrait à E. u_0 ne serait pas un contigu. Donc u_n est un contigu de E. Par suite deux u_n quelconques sont distincts ou identiques.

D'ailleurs u_q a mêmes extrémités que u_0, donc lui est identique. Si $s = 0, 1 \ldots, q-1$, M_s est distinct de M_0, quel que soit M_0. Donc, u_s est différent de u_0. Ainsi les q contigus $u_0, u_1, \ldots, u_{q-1}$ sont deux à deux distincts et u_{qr+s} est identique à u_s.

Soit M_0 un point de u_0. M_{rq+s} est dans u_s, comme nous venons de le voir. M_q est dans u_0 comme M_0. Mais sur l'arc direct u_0, M_q peut être antérieur ou postérieur à M_0. Les deux arcs M_0M_q de u_0 et M_nM_{q+n} de u_s (si $n=rq+s$) seront en même temps directs ou rétrogrades. En particulier, $M_{rq}M_{(r+1)q}$ est de même sens que M_0M_q. Donc M_{rq} varie dans un sens constant sur u_0 quand r croît. Pour r infini positif, M_{rq} a un point limite qui coïncide avec son propre $q^{\text{ième}}$ conséquent. Donc, ce point limite appartient à E. C'est M''_0 si M_0M_q est direct, et M'_0 si M_0M_q est rétrograde. Pour r infini négatif, ces points limites s'échangent.

De même pour s fixe, M_{qr+s} situé sur u_s tendra, pour $r=+\infty$, vers M''_s si M_0M_q est direct, vers M'_s si M_0M_q est rétrograde. Ce sera l'inverse pour $r=-\infty$.

8. Soit maintenant α *irrationnel*. Alors, d'après ce que nous venons de voir, aucune caractéristique ne se ferme. Les antécédents et les conséquents d'un même point sont tous distincts. Quels que soient n et θ_0, $\psi_n(\theta_0)$ est différent de tout multiple de 2π. Donc $\psi_n(\theta_0)$, $2n\pi\alpha-\beta'_n$ et $2n\pi\alpha+\gamma'_n$, et *a fortiori* $2n\pi\alpha$, sont compris entre deux multiples consécutifs de 2π (égalité exclue). (Il en était de même, pour $\alpha=\frac{p}{q}$ irréductible, n non divisible par q.)

Soient trois points M_r, M_p, M_q, conséquents ou antécédents d'un même point M_0 sur C. Soit Γ un cercle de rayon 1. Considérons les points λ_r, λ_p, λ_q de Γ ayant pour arguments respectifs $2r\pi\alpha$, $2p\pi\alpha$, $2q\pi\alpha$. Je dis que si l'on parcourt C dans le sens direct de M_r à M_r (nous dirons que C est parcouru de M_r^+ à M_r^-) et si l'on parcourt Γ de λ_r^+ à λ_r^-, *l'ordre de succession géométrique des points* M_p, M_q *sur* C *d'une part, et l'ordre de* λ_p, λ_q *sur* Γ *seront les mêmes.*

Sous une autre forme, l'arc géométrique M_pM_q de C ne contenant pas M_r et l'arc géométrique $\lambda_p\lambda_q$ de Γ ne contenant pas λ_r sont de même sens.

Observons d'abord que le sens du premier arc est indépendant de M_0. Car il ne pourrait changer dans un déplacement continu de M_0 que si deux des trois points M_r, M_p, M_q venaient à coïncider, ce qui est absurde. En amenant M_0 au point M coïncidant avec M_{-r}, on voit qu'il suffit d'établir la proposition pour $r=0$, p et q quelconques. On peut de même placer M_0 en une position quelconque. Si θ_0 désigne un argument de M_0, on peut supposer $\theta_0 = 0$. Dès lors, si $\overline{\theta_p}$, $\overline{\theta_q}$ d'une part, $\overline{\omega_p}$, $\overline{\omega_q}$ d'autre part sont les arguments compris entre 0 et 2π, de M_p, M_q d'une part, de λ_p, λ_q d'autre part, nous voulons montrer que les deux différences $\overline{\theta_q} - \overline{\theta_p}$ et $\overline{\omega_q} - \overline{\omega_p}$ sont de même signe.

D'après $\theta_0 = 0$, le $n^{\text{ième}}$ conséquent θ_n de θ_0, savoir $\theta_n = \theta_0 + \psi_n(\theta_0)$, est compris entre les mêmes multiples de 2π que $2n\pi\alpha$. Si donc

$$2k\pi < 2p\pi\alpha < 2(k+1)\pi, \qquad 2h\pi < 2q\pi\alpha < 2(h+1)\pi,$$

on a

$$\overline{\theta}_p = \theta_p - 2k\pi, \qquad \overline{\theta}_q = \theta_q - 2h\pi.$$
$$\overline{\omega}_p = 2p\pi\alpha - 2k\pi, \qquad \overline{\omega}_q = 2q\pi\alpha - 2h\pi.$$

Mais $\theta_n(\theta_0) - \theta_0$ admettant la période 2π en θ_0, on a, quel que soit n :

$$\theta_n(\theta_0 + 2m\pi) = \theta_n + 2m\pi.$$

D'après ceci,

$$\theta_{q-p}(\overline{\theta}_p) = \theta_q - 2k\pi = \overline{\theta}_q + 2(h-k)\pi.$$

Mais $\theta_{q-p}(\overline{\theta_p}) - \overline{\theta_p}$ est compris entre les mêmes multiples de 2π que $2(q-p)\alpha$. Or

$$\theta_{q-p}(\overline{\theta}_p) - \overline{\theta}_p = \overline{\theta}_q - \overline{\theta}_p + 2(h-k)\pi$$

et

$$2(q-p)\pi\alpha = \overline{\omega}_q - \overline{\omega}_p + 2(h-k)\pi.$$

Donc $\overline{\theta_q} - \overline{\theta_p}$ et $\overline{\omega_q} - \overline{\omega_p}$ sont compris entre les mêmes multiples de 2π. Comme ces deux nombres sont compris entre -2π et 2π, ils ont le même signe. C. Q. F. D.

Le résultat précédent montre qu'un nombre quelconque de conséquents ou d'antécédents M_r, M_s, M_m, ..., d'un point M_0 de C et les points λ_r, λ_s, λ_m, ... de Γ ayant pour arguments $\omega_0 + 2r\pi\alpha$, $\omega_0 + 2s\pi\alpha$, $\omega_0 + 2m\pi\alpha$, ..., sont rencontrés dans le même ordre géométrique sur C et sur Γ parcourus l'un et l'autre une fois dans le sens direct, à partir des deux points M_r, λ_r homologues (Poincaré).

9. Désignons par $\Omega(M_0)$, $\Omega^+(M_0)$, $\Omega^-(M_0)$ les ensembles $\sum_{-\infty}^{\infty} M_n$,

$\sum_{1}^{\infty} M_n$, $\sum_{-\infty}^{-1} M_n$. Soient $J(M_0)$, $J^+(M_0)$, $J^-(M_0)$ leurs dérivés. Ou bien $J(M_0)$ coïncide avec C quel que soit M_0. Ou bien $J(M_0)$ ne contient pas la totalité de C pour une certaine position de M_0. Examinons cette dernière hypothèse.

Si E est un ensemble de points de C, soit E_n l'ensemble formé par les $n^{\text{ièmes}}$ conséquents $(n > 0)$ ou par les $(-n)^{\text{ièmes}}$ antécédents $(n < 0)$ M'_n des points M'_0 de E. E_1 sera dit le conséquent, E_{-1} l'antécédent de E.

Nous dirons qu'un ensemble F de points de C est *invariant* [sous entendu : par la transformation $\theta_1(\theta_0)$] s'il coïncide avec son conséquent F_1. Les antécédents de deux ensembles identiques coïncident. Donc $F_{-1} \equiv F$. F est donc invariant par la transformation $\theta_{-1}(\theta_0)$. La réciproque est évidente. On en conclut $F_n \equiv F$ quel que soit n si F est invariant. $\Omega(M_0)$ est évidemment invariant quel que soit M_0.

Le dérivé d'un ensemble invariant est invariant. Soient F' le dérivé de F et μ un point de F'. Je dis que μ_1 est aussi dans F'. En effet, il existe par hypothèse une suite $M', M'', \ldots$, appartenant à F et tendant vers μ. D'après la continuité de $\theta_1(\theta_0)$ en θ, la suite M'_1, M''_1, ... tend vers μ_1. Cette suite appartient à F_1, donc à $F \equiv F_1$. μ_1 est donc dans F'. D'où $F' \geqq F'_1$. De même $F' \geqq F'_{-1}$. Donc $F'_1 \equiv F'$.

Ainsi, $J(M_0)$ est invariant et de même son dérivé $J'(M_0)$.

9 *b*. Cela posé, considérons un ensemble fermé F invariant, ne coïncidant pas avec C, comme c'est par hypothèse le cas de $J(M_0)$. Le complémentaire de F, donc l'ensemble des contigus à F est invariant. Soit u ou AB un arc direct contigu à F. Comme nous l'avons montré plus haut, tout u_k coïncide avec l'arc direct $A_k B_k$ et les u_k sont des contigus deux à deux distincts. Entre deux contigus quelconques u_p, u_q en existent une infinité d'autres, formés par les homologues d'un point M'_0 situés entre M'_p et M'_q, si M'_0 décrit u (cette propriété des u_n n'entraîne pas que F soit parfait discontinu). Puisqu'un contigu quelconque à F contient au plus un point de $\Omega(M'_0)$, le *dérivé* $J(M'_0)$ *de* $\Omega(M'_0)$ *n'a aucun point étranger à* F, *quel que soit* F *invariant et fermé, et quel que soit* M'_0 *sur* C.

Donc $J(M_0)$ invariant fermé contient $J(M'_0)$ et réciproquement.

Donc, *il existe un ensemble fermé* J *coïncidant avec* J(M_0), *quel que soit* M_0 *sur* C.

Mais, en outre, J est tout entier dans son dérivé J′ qui est invariant fermé comme J. Donc J coïncide avec son dérivé. J *est parfait.*

9 *c*. L'ensemble frontière G d'un ensemble invariant F est invariant. En effet, par définition, un point ν est frontière de F, si dans dans tout arc-intervalle (extrémités exclues) contenant ν, existe un point de F et un point du complémentaire de F. ν_1 jouit évidemment de la même propriété vis-à-vis du conséquent F_1 de $F \equiv F_1$. Donc $G_1 \leqq G$. De même $G_{-1} \leqq G$. Donc, $G_1 \equiv G$.

Si F est en outre fermé, il est connu que G est non dense.

G étant invariant et fermé, contient J. Donc J est non dense. J est un *ensemble parfait totalement discontinu* (Poincaré).

9 *d*. Enfin, montrons que $J^+(M_0)$ et $J^-(M_0)$ sont identiques à J. Soient ϖ une portion quelconque de J, $\beta\gamma$ un arc direct de C contenant ϖ et sur lequel ϖ coïncide avec J. Puisque tout point de ϖ appartient à J(M_0), il y a sur $\beta\gamma$ au moins deux points M_p, M_q. Entre M_p et M_q, sur $\beta\gamma$, il y a une infinité de points $M_n (n > 0)$. Donc $\beta\gamma$ contient au moins un point de $J^+(M_0)$. Comme $J^+(M_0)$ est dans J (identique à ϖ sur $\beta\gamma$), ϖ contient un point de $J^+(M_0)$. Donc $J^+(M_0)$ est partout dense sur J. Il est fermé, contenu dans J. Donc $J^+(M_0) \equiv J$. De même $J^-(M_0) \equiv J$.

En résumé, si α est irrationnel, ou bien d'une part les conséquents $M_n (n > 0)$, et d'autre part, les antécédents M_{-n} de tout point M_0 de C forment un ensemble partout dense sur C. Ou bien chacun de ces ensembles est non dense quel que soit M_0, et ils ont tous le même dérivé J qui est totalement discontinu.

10. Contrairement à ce que supposait Poincaré, *il n'est pas nécessaire que tous les contigus de* J *forment une seule suite* $i_k (-\infty < k < +\infty)$. Nous montrerons la possibilité qu'ils se répartissent en une infinité de séries distinctes $i_k^{(h)} (h = 1, 2, \ldots)$.

L'ensemble F invariant fermé le plus général contient J. S'il a des points hors de J, donc intérieurs à au moins un arc contigu i de J, il forme sur l'arc-segment i un ensemble fermé $f(i)$ (pouvant coïncider avec i). F contiendra $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_k(i)$. Dans chaque série $\sum_{k=-\infty}^{k+\infty} i_k^{(h)}$ distincte, F ou bien sera vide, ou bien sera constitué par un ensemble analogue au précédent.

11. Étant donnée la fonction $\theta_1(\theta_0)$, établissons une correspondance *géométrique* entre les points de C et ceux d'un cercle Γ de rayon 1, où t désignera l'arc, de façon qu'à un point M'_0 de C et à son conséquent M'_1 correspondent respectivement deux points de Γ ayant pour arguments t et $t + 2\pi\alpha$.

Choisissons indifféremment un point M_0 sur C. Soit μ_0 un point de Γ que nous regarderons comme l'unique homologue de M_0. Si $\theta_n = \theta_n(\theta_0)$, à $M_n(\theta_n)$, faisons correspondre $\mu_n(t_0 + 2n\pi\alpha)$. Les points μ_n sont partout denses sur Γ. Sur C et sur Γ parcourus dans le sens direct, l'ordre géométrique des M_n et celui des μ_n est le même. Quand, sur l'arc géométrique direct de $\mu_p\mu_q$ de Γ, se trouve un point μ_r, le point M_r est sur l'arc géométrique direct M_pM_q de C et réciproquement.

Excluons de C le point M_0 et de Γ le point μ_0 de façon qu'il nous reste deux intervalles circulaires C', Γ' dont les points forment deux ensembles ordonnés. Un point M de C' est antérieur ou ultérieur au point M' de C' selon que l'arc MM' ne contenant pas M_0 est direct ou rétrograde. On définit pareillement l'ordre relatif de deux points μ, μ' de Γ', qui est Γ sectionné au point μ_0.

Cela posé, les μ_n sont partout denses sur Γ'. Un point μ de Γ' partage les points géométriques μ_n en deux classes, l'une formée des μ_p antérieurs à μ, l'autre formée des μ_q ultérieurs à μ. Ces deux classes sont l'une et l'autre non vides puisque sur Γ' aucun point μ n'est ni antérieur à tous les μ_n, ni ultérieur à tous. Tout point μ_n appartient à l'une ou à l'autre de ces deux classes, sauf μ_m lui-même si μ est identique à μ_m.

Aux μ_p correspondent sur C un ensemble de points M_p et aux μ_q un ensemble de points M_q, tels que tout point M_n (sauf M_m si $\mu \equiv \mu_m$) est un M_p ou un M_q, et tels que tout M_p est antérieur à tout M_q. La borne ultérieure stricte des M_p est un point M' qui n'est ultérieur à aucun M_q. La borne antérieure stricte des M_q est un point M'' qui n'est pas antérieur à M'. Ou bien M' et M'' coïncident avec un même point M qui sera par définition l'homologue de μ. Ou bien M' et M'' sont distincts et l'arc-segment direct $M'M''$ ou i, dont chaque point sépare les M_{n} des M sera dit correspondre tout entier à μ.

De même, à μ_0, faisons correspondre selon les cas le point unique M_0 ou le segment direct $M'_0M''_0$ (contenant M_0) si M'_0 est la borne ultérieure de tous les M_n sur C' et M''_0 leur borne antérieure, et si ces deux points M'_0, M''_0 ne coïncident pas.

12. Ainsi, *à tout point géométrique t de* Γ *correspond soit un point* M, *soit un segment* $M'M''$ *ou i de* C. Le point M dans le premier cas, chacun des deux points M' et M'' dans le second cas sont limites de points M_n (bilatéralement pour M, unilatéralement pour M' et M''). Au contraire, aucun point intérieur à un i n'est limite des M_n. Donc J est formé des points M (qui en sont les points de deuxième espèce) et des points M', M'' qui en sont les points de première espèce. Les i sont les arcs contigus à J.

A deux points μ', μ'' distincts de Γ correspondent deux points ou segments, M' ou i' et M'' ou i'' distincts, puisqu'ils sont doublement séparés par une infinité de points M_n homologues de points μ_n, les uns situés sur l'arc direct $\mu'\mu''$, les autres sur l'arc direct $\mu''\mu'$. L'arc direct joignant les homologues de μ' et μ'' correspond à l'arc direct $\mu'\mu''$ de Γ.

Réciproquement, deux points de C, ou bien appartiennent à un même segment contigu i de J, et alors ils ont un homologue commun qui est le point μ homologue de la totalité de i. Ou bien ils sont séparés par une infinité de points M_n sur chacun des arcs directs joignant l'un des deux points à l'autre et ils ont alors sur Γ deux homologues distincts comme étant séparés pareillement par une double infinité de μ_n.

A un point M correspond un point μ et un seul, et quand M décrit C dans le sens direct une fois, μ décrit Γ une fois dans le sens direct.

13. Nous regardons θ et t comme variables dans le champ $-\infty$, $+\infty$, de façon que $t-t_0$ et $\theta-\theta_0$ soient toujours compris entre les mêmes multiples de 2π (à moins que $t-t_0=2k\pi$, t_0 ayant pour homologue un segment $\theta'_0 \theta''_0$ avec $\theta'_0 < \theta_0 < \theta''_0 < \theta'_0 + 2\pi$, auquel cas l'homologue de $t_0 + 2k\pi$ sera le segment $\theta'_0 + 2k\pi$, $\theta''_0 + 2k\pi$).

Dans ces conditions, *t est une fonction de* θ *bien déterminée* dans le champ $-\infty < \theta < +\infty$, continue, non décroissante, constante pour $\theta' < \theta < \theta'' < \theta' + 2\pi$ si l'arc direct $M'(\theta')$ à $M''(\theta'')$ est contigu à J.

Le changement de θ en $\theta_1(\theta)$ change chaque point $M_n(\theta_n)$ en $M_{n+1}(\theta_{n+1})$, et par suite, chaque point $\mu_n(t_0 + 2n\pi)$ en le point $\mu_{n+1}[t_0 + (2n+2)\pi]$. Donc, au conséquent M'_1 ou i'_1 du point M' ou du contigu i' correspondant à $\mu'(t)$ correspond le point $\mu'_1(t + 2\pi\alpha)$ de Γ. Cela quel que soit t.

Soit η l'ensemble des t homologues des segments i contigus à J. η est dénombrable et partout dense sur Γ puisqu'il admet la transformation t, $t + 2\pi\alpha$ en lui-même.

Au contraire, *la fonction* $\theta(t)$, qui est *bien déterminée si t est étranger à* η et définit un point M de seconde espèce de J, est *indéterminée si t définit un point* λ de η, et si χ est l'argument de λ, $\theta(\chi)$ est l'un quelconque des nombres arguments des points du segment i.

θ est croissant en t, mais θ subit une discontinuité égale à la longueur de i quand t franchit χ.

14. Soit δ un nombre positif inférieur à 2π. La fonction $\theta(t+\delta) - \theta(t)$ a un maximum $h(\delta)$ et un minimum $k(\delta)$, l'un et l'autre croissant avec δ. $h(+0)$ est égal au plus grand, soit ι des arcs i.

Si deux points $M'_0(\theta'_0)$, $M''_0(\theta''_0)(\theta'_0 < \theta''_0 < \theta'_0 + 2\pi)$ sont séparés par un point de J, l'arc direct $M'_0 M''_0$ contient une infinité de conséquents et une infinité d'antécédents de ι. On aura donc une infinité de valeurs positives et négatives de n telles que $u(\varphi_0 + 2n\pi, \theta''_0) - u(\varphi_0 + 2n, \theta'_0) > \iota$ si petit que soit $\theta''_0 - \theta'_0$. D'autre part, si δ' vérifie $\theta''_0 - \theta'_0 \leqq k(\delta')$, on aura, quel que soit n, $\theta''_n - \theta'_n < h(\delta')$. Car θ'_0 et θ''_0 correspondent à des valeurs t'_0, t''_0 telles que $0 < t''_0 - t'_0 \leqq \delta'$. D'après $t''_n - t'_n = t''_0 - t'_0$, on a $\theta''_n - \theta'_n \leqq h(\delta')$. En prenant $\theta''_0 - \theta'_0$ suffisamment petit, l'écart $\theta''_n - \theta'_n$ peut être rendu inférieur à $\iota + \varepsilon$, pour toute valeur de n si petit que soit ε donné positif.

14 *b*. Si le dérivé J, que nous désignons plus précisément par $J(\varphi_0)$, des points $M_n(\theta_n)$ situés sur C est parfait discontinu, la même circonstance se présentera sur tout méridien. En effet, soit $J(\varphi)$ l'ensemble des points de rencontre avec le méridien d'argument φ des caractéristiques I passant par les divers points de $J(\varphi_0)$. $J(\varphi) \equiv J(\varphi + 2\pi)$. Il suffit d'étudier le champ $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$.

$J(\varphi)$ est décrit par le point φ, $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ quand (φ_0, θ_0) décrit $J(\varphi_0)$. En effet, φ et φ_0 restant invariables, θ et θ_0 sont l'un en l'autre des fonctions croissantes, continues, à nombres dérivés bornés. L'ensemble parfait totalement discontinu $J(\varphi_0)$ se change donc en un ensemble de même nature $J(\varphi)$ et réciproquement. $M_n(\varphi, \theta_n)$ se change en $N_n[\varphi, u(\varphi, \theta_n)]$. Le dérivé de ΣM_n, soit $J(\varphi_0)$, se changera en le dérivé de ΣN_n. Or le dérivé de ce dernier ensemble est $J(\varphi)$.

14c. Ainsi que Poincaré le fait remarquer : 1° les trajectoires $\theta' = u(\varphi, \theta'_0)$, $\theta'' = u(\varphi, \theta''_0)$ correspondant à deux valeurs initiales θ'_0, θ''_0 appartenant au même arc-segment contigu i à $J(\varphi_0)$ ont une distance angulaire $\theta'' - \theta'$ tendant vers zéro quand φ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. En effet, ces trajectoires coupent le méridien C pour $\varphi = \varphi_0 + 2n\pi$ dans le segment contigu i_n qui tend vers zéro pour $n = \pm\infty$. Il en est *a fortiori* de même de $\theta''_n - \theta'_n$. Par suite, il en est de même de $\theta'' - \theta'$. Car si n est défini par $\varphi_0 + 2n\pi < \varphi < \varphi_0 + 2(n+1)\pi$, et si $\varphi - 2n\pi = \psi$, $\theta'' - \theta' = u(\psi, \theta''_n) - u(\psi, \theta'_n)$ avec $0 < \psi < 2\pi$. Donc, $\theta'' - \theta'$ tend vers zéro quand $|n|$ croît.

2° Au contraire, si θ'_0 et $\theta''_0 (\theta'_0 < \theta''_0 < \theta'_0 + 2\pi)$ n'appartiennent pas au même contigu, si petit que soit $\theta''_0 - \theta'_0$, toute la bande du tore formée par les trajectoires joignant les points de i aux points de i_1 séparera une infinité de fois sur l'arc direct $M'(\varphi, \theta')$, $M''(\varphi, \theta'')$ les deux caractéristiques décrites par M' et M'' passant simultanément pour $\varphi = \varphi_0$ en M'_0 et M''_0.

15. Montrons qu'en se bornant à la condition de la *simple continuité de la fonction $\theta_1(\theta_0)$, on peut faire coïncider J avec un ensemble E parfait discontinu quelconque situé sur C, en même temps que les contigus à J se répartissent en une infinité de séries invariantes distinctes.*

Soit E un ensemble parfait discontinu quelconque situé sur Γ. Soient, d'autre part, ω', ω'', ..., $\omega^{(h)}$, ... une infinité dénombrable de nombres tels qu'aucune relation $\frac{\omega^{(p)} - \omega^{(q)}}{2\pi} = r\alpha + s$ ne soit jamais possible avec des coefficients r, s entiers. Alors les points de Γ ayant les arguments $\omega^{(h)} + 2n\pi\alpha$, où $h > 0$ et n de signe quelconque, prennent toutes les valeurs entières possibles, sont tous distincts. Ils forment un ensemble dénombrable η partout dense sur Γ. On peut faire correspondre chacun à chacun avec conservation de l'ordre relatif les contigus de E et les points de η. Il en résulte, comme nous l'avons expliqué plus haut, la correspondance biunivoque et continue des points M de deuxième espèce de E et des points μ de Γ étrangers à η.

Définissons $\theta_1(\theta_0)$: 1° le contigu i de E étant l'homologue du point λ de η ayant pour argument χ, on prend pour i_1 l'homologue du point $\lambda_1(\chi + 2\pi\alpha)$ appartenant lui aussi à η ; 2° M étant le point de deuxième espèce de E homologue de $\mu(t)$ étranger à η, on prend pour M_1 l'homologue de $\mu_1(t + 2\pi\alpha)$ qui est lui aussi étranger à η ; 3° on établit entre les points $M_0(\theta_0)$ de chaque arc-segment contigu i et les points $M_1(\theta_1)$ de son conséquent i_1 une correspondance $\theta_1 = \theta_1(\theta_0)$ continue croissante, et à cela près quelconque.

Alors il est visible que : 1° la fonction $\theta_1(\theta_0)$ est définie quel que soit θ_0, et cette fonction est continue, croissante; 2° les contigus à E se répartissent en une infinité (évidemment dénombrable) de séries deux à deux distinctes dont chacune est formée des conséquents et des antécédents des contigus homologues respectivement de $t = \omega', \omega'', \ldots, \omega^{(h)}, \ldots$; 3° J est identique à E, relativement à la transformation $\theta_1(\theta_0)$.

16. Il nous reste à montrer la possibilité de *former une équation différentielle du type* (1) (A *continu*) *admettant en chaque point du tore une caractéristique et une seule*, dont les points de rencontre successifs avec C obéissent à la loi de conséquence trouvée $\theta_1 = \theta_1(\theta_0)$ *de façon que l'ensemble* J *limite coïncide avec* E et offre toutes les particularités envisagées comme possibles.

Nous achevons de fixer la fonction $\theta_1(\theta_0)$ en la faisant linéaire sur chaque contigu à i à E décrit par θ_0.

Nous prendrons pour caractéristique I passant au point $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ la courbe I d'équation $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ avec

$$\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi, \quad u(\varphi, \theta_0) = \theta_0 \cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{4} + (\theta_1 - 2\beta\pi) \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{4} + \beta(\varphi - \varphi_0),$$

β est supposé indépendant de φ et de θ_0.

On a bien $u(\varphi_0, \theta_0) = \theta_0$, $u(\varphi_0 + 2\pi, \theta_0) = \theta_1$. En outre,

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \beta + \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{4} - \frac{\beta\pi}{2}\right) \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}$$

est continu sur l'arc défini de I et vaut β aux deux extrémités. Donc si l'origine ($\varphi = \varphi_0$) d'un arc coïncide avec l'extrémité ($\varphi = \varphi_0 + 2\pi$) d'un autre arc, les deux arcs se raccordent. Ainsi, la courbe I se prolonge indéfiniment avec une tangente continue.

Pour $\varphi_0 + 2n\pi \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2(n+1)\pi$, on pose

$$u(\varphi, \theta_0) = u(\varphi - 2n\pi, \theta_n)$$
$$= \theta_n \cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0 - 2n\pi}{4} + (\theta_{n+1} - 2\beta\pi) \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0 - 2n\pi}{4} + \beta(\varphi - \varphi_0 - 2n\pi),$$

θ_1 étant croissant et continue en θ_0 et s'augmentant de 2π avec θ_0, $u(\varphi, \theta_0)$ possède visiblement les mêmes propriétés. Les deux courbes $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ et $\theta = u(\varphi, \theta_0 + 2\pi) = 2\pi + u(\varphi, \theta_0)$ coïncident géométriquement, et quand θ_0 augmente continûment de 2π, la courbe I passe une fois et une seule par tout point de chaque méridien.

A tout point M du tore correspondent deux nombres $\bar{\varphi}$, $\bar{\theta}_0$ appartenant au domaine (Δ) :

$$\varphi_0 \leqq \bar{\varphi} < \varphi_0 + 2\pi, \qquad \theta'_0 \leqq \bar{\theta}_0 < \theta'_0 + 2\pi,$$

et tels que $\bar{\varphi}$ et $\bar{\theta} = u(\bar{\varphi}, \bar{\theta}_0)$ soient deux arguments coordonnés de M parcourant le domaine (Δ') :

$$\varphi_0 \leqq \bar{\varphi} < \varphi_0 + 2\pi, \qquad u(\bar{\varphi}, \theta'_0) \leqq \bar{\theta} < u(\bar{\varphi}, \theta'_0) + 2\pi.$$

La correspondance entre $(\bar{\varphi}, \bar{\theta}_0)$ dans Δ et $(\bar{\varphi}, \bar{\theta})$ dans Δ' étant biunivoque et réciproque, et $\bar{\theta}$ étant visiblement continue en $\bar{\varphi}$ et $\bar{\theta}_0$, il en résulte que réciproquement $\bar{\theta}_0$ est continu en $\bar{\theta}$ et $\bar{\varphi}$. Les bords des domaines Δ et Δ' ne créent pas de difficultés puisqu'ils peuvent être déplacés en raison des périodicités.

La fonction

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \beta + \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{4} - \frac{\beta\pi}{2}\right) \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \qquad (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi)$$

est continue en θ_0 et φ, donc en θ et φ. Elle est continue et périodique de période 2π en θ et en φ. En chaque point M, elle a donc une valeur déterminée que nous appelons $A(\varphi, \theta)$.

Les courbes I vérifient l'équation

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = A(\varphi, \theta). \tag{1}$$

17. Pour montrer que celle-ci n'admet pas d'autres courbes intégrales que I, il nous suffit d'observer que dans chaque région R décrite par les courbes I joignant ($\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$) un contigu i de E à son conséquent i_1, A vérifie la condition de Lipschitz.

En effet, θ_1 étant par hypothèse linéaire en θ_0 sur i, si $M_0(\varphi_0, \theta_0)$ et $M'_0(\varphi_0, \theta'_0)$ sont dans i, on a

$$\theta'_1 - \theta_1 = \frac{i_1}{i}(\theta'_0 - \theta_0),$$

et si

$$\theta = u(\varphi, \theta_0), \qquad \theta' = u(\varphi, \theta'_0) \qquad (\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi),$$

on a

$$\theta' - \theta = (\theta'_0 - \theta_0)\cos^2\frac{\varphi - \varphi_0}{4} + (\theta'_1 - \theta_1)\sin^2\frac{\varphi - \varphi_0}{4},$$

$$A(\varphi, \theta') - A(\varphi, \theta) = \frac{\theta'_1 - \theta_1 - \theta'_0 + \theta_0}{4}\sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2}.$$

Donc

$$\frac{|A(\varphi, \theta') - A(\varphi, \theta)|}{|\theta' - \theta|} = \frac{1}{4}\,\frac{\sin\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\,|i_1 - i|}{i\cos^2\frac{\varphi - \varphi_0}{4} + i_1\sin^2\frac{\varphi - \varphi_0}{4}},$$

qui a pour maximum $\frac{1}{4}\left|\sqrt{\frac{i_1}{i}} - \sqrt{\frac{i}{i_1}}\right|$ [pour $\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi$, M_0 et M'_0 dans i].

Si $\frac{i_1}{i}$ et $\frac{i}{i_1}$ ne sont pas bornés à la fois, la condition de Lipschitz ne peut pas être vérifiée sur la totalité du tore, ce qui était évident *a priori*. Mais autour de tout point M intérieur à une région R, la condition de Lipschitz est satisfaite. Donc, par M ne passe qu'une courbe intégrale de l'équation (1). Cette caractéristique est donc la courbe I. Soit I(E) l'ensemble des points des courbes I passant par les divers points de E.

Deux courbes I quelconques, si elles ne sont pas identiques, sont sans point commun. En particulier, une courbe I ayant un point hors de I(E) est tout entière étrangère à I(E). D'ailleurs, si M et M′ situés sur I(E) n'appartiennent pas à la même courbe I, il est impossible de joindre M à M′ par une ligne continue sans sortir de I(E), donc sans traverser une région R. Donc, même si la condition de Lipschitz n'est vérifiée en aucun point de I(E), *il ne passe qu'une intégrale et une seule par chaque point du tore*. Et ces trajectoires rencontrent le méridien C en des points M_n dont *le dérivé* J *coïncide avec* E et offre les singularités démontrées compatibles avec la seule condition de continuité de la fonction $\theta_1(\theta_0)$.

Si la condition de Lipschitz est vérifiée par A sur la totalité du tore, il est évident que les rapports $\frac{i_1}{i}$ et $\frac{i}{i_1}$ sont bornés. Si l'on se donne un ensemble E dont les contigus i, rangés en une suite décroissante j_1, $j_2, \ldots, j_n, \ldots$, sont tels que $\frac{j_{n+1}}{j_n}$ tend vers o, la condition de Lipschitz ne sera vérifiée en aucun point de I(E), bien que l'équation (1) correspondante n'ait qu'une intégrale passant par chaque point du tore.

18. Si l'on abandonne la faculté de choisir arbitrairement l'ensemble singulier E avec lequel coïncide J, nous pouvons *réaliser le cas de* J *totalement discontinu, avec des dérivées* $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ *et* $\frac{\partial A}{\partial\theta}$ *continues.*

$\omega', \omega'', \ldots, \omega^{(h)}, \ldots$ étant une suite de nombres quelconques (indépendants), arguments de points de Γ, plaçons sur Γ tous les points $\lambda^{(h)}_{\pm n}$ $(\omega^{(h)} \pm 2n\pi\alpha)(n \geqq 0)$. Dans le futur ensemble E à construire, nous ferons correspondre à $\lambda^{(h)}_{\pm n}$ un intervalle contigu $i^{(h)}_{\pm n}$ de longueur $2\pi\frac{\varepsilon^{(h)}}{(n+h+1)(n+h+2)}$. Étudions le rapport $\frac{i_1}{i}$ si i coïncide avec un de ces contigus.

Si i est un $i^{(h)}_n$ $(n \geqq 0)$, le rapport $\frac{i_1}{i}$ vaut $\frac{n+h+1}{n+h+3}$. Si i est un $i^{(h)}_{-n}$ $(n \geqq 1)$, $\frac{i_1}{i}$ vaut $\frac{n+h+2}{n+h}$.

Sur tout contigu i, prenons $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ de la forme $1 + k\frac{(\theta''_0-\theta_0)(\theta_0-\theta'_0)}{i^2}$. D'où

$$i_1 = \int_i \left(\frac{d\theta_1}{d\theta_0}\right) d\theta_0 = i\left(1 + \frac{k}{6}\right).$$

Nous devons donc faire

$$k = -\frac{12}{n+h+3} \quad \text{sur } i_n^h \qquad (n \geqq 0)$$

et

$$k = \frac{12}{n+h} \quad \text{sur } i_{-n}^h \qquad (n \geqq 1).$$

Dans ces conditions : sur i_n^h,

$$1 \geqq \frac{d\theta_1}{d\theta_0} \geqq 1 - \frac{3}{n+h+3} \geqq \frac{1}{4} \qquad (n \geqq 0);$$

sur i_{-n}^h,

$$1 \leqq \frac{d\theta_1}{d\theta_0} \leqq 1 + \frac{3}{n+h} \qquad (n \geqq 1).$$

Enfin, sur l'ensemble E, qui résultera de ces conventions, nous ferons $\frac{d\theta_1}{d\theta_0} = 1$.

18 *b*. Dans ces conditions, si elles sont réalisables, $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ sera évidemment continue. En effet, sur chaque i, $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ est continu et vaut 1 aux deux extrémités de l'intervalle. D'ailleurs, le maximum de $\left|\frac{d\theta_1}{d\theta_0} - 1\right|$ sur $i_{\pm n}^h$ tend vers zéro quand $n+h$ devient infiniment grand. Donc, en un point $M(\theta)$ de deuxième espèce de E (ou en un point de première espèce, du côté où il est limite de E), $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ tend vers 1 quand θ_0 tend vers θ, soit que θ_0 se déplace sur E, soit que θ_0 traverse une suite d'intervalles contigus. Car pour ceux-ci, la somme $n+h$ a pour limite ∞, puisque les intervalles contigus pour lesquels $n+h < N$ sont en nombre fini avec N.

Si e est une portion de E, c'est-à-dire un ensemble parfait qui coïncide avec E sur un arc de C contenant e, les homologues sur Γ des points de e forment un arc de Γ. La transformation $\theta_1(\theta_0)$ appliquée à e change e en e_1 dont la mesure est

$$\int_e \frac{d\theta_1}{d\theta_0} d\theta_0 = \int_e d\theta_0 = \text{mes}\, e.$$

Donc, e_1 a même mesure que e. Donc, tous les arcs e ont même mesure. Comme ils correspondent à des arcs σ_n égaux de Γ, se recouvrant partiellement une infinité de fois, en des proportions partout denses, un raisonnement simple montre que chaque portion e de E a une mesure proportionnelle à celle de l'arc Γ homologue de e.

19. De $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(n+h+1)(n+h+2)} = \frac{1}{h+2}$, on déduit pour la mesure totale des arcs de la série h :

$$2\pi\varepsilon^{h}\left[\frac{1}{(h+1)(h+2)} + \frac{2}{h+2}\right] = 2\pi\varepsilon^{h}\frac{2h+3}{(h+1)(h+2)}.$$

Soit

$$1-\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{h}\frac{2h+3}{(h+1)(h+2)}.$$

Pour que E puisse exister, il faut que $\xi > 0$. Supposons les ε^{h} satisfaisant à cette condition. Dès lors, E dont la mesure est $2\pi\xi$ est réalisable et il est défini à une rotation près de C sur lui-même.

Prenons sur Γ un point origine quelconque $\bar{\mu}$ d'argument $\bar{t}$, étranger à η pour simplifier, et faisons-lui correspondre $\overline{M}$ d'argument $\bar{\theta}$ situé sur C. A un point $\mu(t)$, défini par l'arc géométrique direct

$$\bar{\mu}\mu = t - \bar{t},$$

nous faisons correspondre le point (ou les points) $M(\theta)$ tel que

$$\theta - \bar{\theta} = \xi(t-\bar{t}) + (\bar{\mu}\Sigma\mu)\, i_{\pm n}^{h} + \rho\, i_m^{h},$$

avec $\rho = 0$ si μ est étranger à η, $\rho =$ indifféremment 0 et 1 si μ coïncide avec η_m^h (donc deux homologues à μ dans ce dernier cas). Le second terme s'énonce : « somme des $i_{\pm n}^{h}$ entre $\bar{\mu}$ et μ » et désigne la somme des longueurs des $i_{\pm n}^{h}$ situés sur l'arc-intervalle (extrémités exclues) direct $\bar{\mu}\mu$.

L'ensemble des points $M(\theta)$ ainsi définis est E.

20. Considérons pour cet ensemble E l'équation (1) formée au n° **16**. Pour une valeur donnée de $\varphi(\varphi_0 \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + 2\pi)$, supposons ci-après θ_0

remplacé en fonction continue de (θ, φ) d'après $\theta = u(\varphi, \theta_0)$.

$$\frac{\partial u}{\partial \theta_0} = \cos^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{4} + \frac{d\theta_1}{d\theta_0} \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{4}$$

est continu en θ_0 et φ, donc en θ et φ et surpasse $1/4$ comme $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ lui-même. Donc $\frac{\partial \theta_0}{\partial \varphi}$ existe, est continu et est donné par $1 = \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta_0}$.

D'autre part,

$$\mathrm{A}(\varphi, \theta) = \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \beta + \left(\frac{\theta_1 - \theta_0}{4} - \frac{\beta \pi}{2}\right) \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2},$$

d'où

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta} = \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{d\theta_1}{d\theta_0} - 1\right) \sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{1 + \left(\frac{d\theta_1}{d\theta_0} - 1\right) \sin^2 \frac{\varphi - \varphi_0}{4}}.$$

D'après $\frac{d\theta_1}{d\theta_0} \geqq \frac{1}{4}$, $\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta}$ est continu en θ_0 et en φ, donc en θ et φ. Sur les caractéristiques de l'ensemble limite $\mathrm{I}(\mathrm{E})$, on a

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta} = 0.$$

21. Nous n'avons admis aucune restriction aux valeurs de α, qui peut être de signe et de grandeur quelconques tout en restant compris entre les bornes de A $\left(\text{comme le rapport } \frac{\theta - \theta_0}{\varphi - \varphi_0} \text{ qui tend vers } \alpha \text{ sur chaque caractéristique}\right)$. Il est évident cependant que si l'on se borne à étudier un ensemble $\mathrm{J}(\varphi_0)$ sans suivre la variation de cet ensemble pour $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi$, on ne change rien à $\mathrm{J}(\varphi_0)$ en remplaçant α par $\alpha + k$ si k est entier. En renversant au besoin le sens positif sur les méridiens, on peut encore se ramener au cas $-1/2 \leqq \alpha < 1/2$.

Considérons la transformation $\varphi' = \varphi$, $\theta' = \pm \theta + k\varphi$, dont la signification géométrique est évidente. Le tore conserve chacun de ses méridiens et subit une torsion uniforme autour de son cercle moyen. Un point $\mathrm{M}(\varphi, \theta)$ du tore est changé en un autre point $\mathrm{M}'(\varphi', \theta')$ et réciproquement parce que si l'on ajoute à θ et à φ des multiples quelconques de 2π, θ' et φ' éprouvent la même modification, donc ne cessent de définir le même point. L'équation (1) devient

$$\frac{d\theta'}{d\varphi'} = k \pm A(\varphi, k\varphi \pm \theta') = A'(\varphi', \theta').$$

A' vérifie évidemment les conditions de périodicité et de continuité en φ', θ' et celle de Lipschitz en θ'.

Quant à $\alpha' = \lim_{\varphi'\infty} \frac{\theta'}{\varphi'}$, c'est évidemment $k \pm \alpha$. D'où la possibilité de réduction annoncée.

21 *b*. Généralement, si m, n, p, q sout quatre entiers vérifiant $mq - np = \varepsilon = \pm 1$, les formules de transformation

$$\theta' = m\theta + n\varphi, \qquad \varphi' = p\theta + q\varphi$$

(avec la possibilité d'ajouter des constantes pour faire correspondre deux points donnés d'avance), d'où

$$\varepsilon\theta = q\theta' - n\varphi', \qquad \varepsilon\varphi = -p\theta' + m\varphi',$$

changent encore un point géométrique $M(\varphi, \theta)$ en un point géométrique unique $M'(\varphi', \theta')$. $A(\varphi, \theta)$ se changera en une fonction $A'(\varphi', \theta')$ bien déterminée en tout point du tore, donc admettant la période 2π en φ' et en θ' et continue. Mais, en général, A' n'aura ses nombres dérivés bornés en θ' que si A vérifie la condition de Lipschitz en φ et θ simultanément. L'équation (1) devient

$$\frac{d\theta'}{d\varphi'} = \frac{mA' + n}{pA' + q} = B(\varphi', \theta').$$

On suppose $-\frac{q}{p}$ extérieur au segment des valeurs extrêmes de $A(\varphi, \theta)$. Sous cette réserve, B est continue en φ' et en θ' et vérifie la condition de Lipschitz en les deux variables.

Le nombre caractéristique correspondant est $\alpha' = \lim_{\varphi'\infty} \frac{\theta'}{\varphi'} = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}$. α et α' sont rationnels ou non en même temps comme il fallait s'y attendre. α et A subissent la même transformation homographique. Le dénominateur de α' n'est pas nul, d'après $m \leqq \alpha \leqq M$.

22. On ne dispose d'aucune méthode générale pour la détermination de α à partir de $A(\varphi, \theta)$ sans connaître au moins une intégrale particulière de l'équation. Observons que, dans le cas où l'ensemble limite des caractéristiques [des cycles si α est rationnel, un ensemble $I(E)$ pour α irrationnel] ne couvre pas la totalité du tore, si, à l'intérieur d'un contour γ fermé situé à une distance positive de cet ensemble limite, on modifie indifféremment A sans le changer sur γ lui-même et sans qu'il cesse de vérifier la condition de Lipschitz, on n'altère aucune des caractéristiques appartenant à l'ancien ensemble limite, donc on ne change pas α.

De même, s'il existe un cycle, une modification arbitraire de A, sauf sur le trajet du cycle (en conservant la continuité et la condition de Lipschitz) laisse α inchangé. Ce n'est que dans le cas où α est irrationnel et où chaque caractéristique est partout dense sur le tore que les valeurs de A en tous les points du tore paraissent concourir à déterminer α.

A fortiori, n'aura-t-on en général aucune indication sur les nombres $-\beta'_n$, γ'_n limitant strictement $\psi_n(\theta_0) - 2n\pi\alpha$. Aussi semble-t-il difficile de tirer parti des remarques suivantes permettant, si α est irrationnel, d'exclure la possibilité de l'ensemble limite J parfait discontinu sur C.

23. Nous observons que, d'après β'_n, $\gamma'_n \geqq 0$, il y a pour chaque n au moins un nombre θ_0 tel que $\psi_n(\theta_0) = 2n\pi\alpha$.

1° Supposons que β'_n ou γ'_n s'annulent pour une valeur particulière q de n. Je dis que le cas singulier est impossible.

En effet, supposons $\beta'_q = 0$ et soit $n = rq$. Observons que $\beta'_n \leqq r\beta'_q = 0$, d'où $\beta'_n = 0$. Soit θ_0 tel que $\psi_n(\theta_0) = 2n\pi\alpha$. Cette égalité définit sur C un ensemble fermé e_r. Pour cette valeur de θ_0, et $m = 1, 2, \ldots, r$, posons

$$\theta_{mq} - \theta_{m-1\,q} - 2q\pi\alpha = \varepsilon_m(\theta_0).$$

On a $\varepsilon_m(\theta_0) \geqq 0$, et d'autre part

$$\sum_{m=1}^{m=r} \varepsilon_m(\theta_0) = \theta_n - \theta_0 - 2n\pi\alpha = 0.$$

Donc tous les ε_m sont nuls. Donc e_r contient e_{r+1}. Ces ensembles fermés ont en commun au moins un point $M(\theta_0)$. En ce point

$$\psi_n(\theta_0) = 2n\pi\alpha,$$

quel que soit n multiple de q. Donc, les M_n sont partout denses. Le cas singulier est impossible.

La démonstration serait pareille pour $\gamma'_q = 0$.

2° Supposons que β'_q ou γ'_q tendent vers zéro, pour une suite particulière de valeurs de q de façon que au nombre q soit associé un entier q' infiniment grand avec q et vérifiant en outre les conditions

$$\lim_{q=\infty} q'\beta'_q = 0, \qquad q\alpha = \frac{p+\eta(q)}{q'}, \qquad \frac{p}{q'} \text{ irréductible}, \qquad \lim_{q=\infty} \eta(q) = 0.$$

Ces hypothèses sont relatives à une suite infinie β'_q. On pourrait faire les mêmes pour une suite γ'_q.

Soit θ_0 tel que $\psi_{qq'}(\theta_0) - 2qq'\pi\alpha = 0$. Posons

$$\theta_{mq} - \theta_{m-1\,q} - 2q\pi\alpha = \varepsilon_m(\theta_0) - \beta'_q \qquad (m = 1, 2, \ldots, q').$$

On a

$$\varepsilon_m(\theta_0) \geqq 0, \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=1}^{m=q'} \varepsilon_m(\theta_0) = q'\beta'_q.$$

Or

$$\theta_{rq} = \theta_0 - 2rq\pi\alpha - \sum_{m=1}^{m=r} \varepsilon_m(\theta_0) - r\beta'_q.$$

$$\theta_{rq} - \theta_0 = 2\pi\frac{rp}{q'} + \rho_r, \qquad \text{avec} \qquad |\rho_r| < (q'-r)\beta'_q + 2\pi|\eta(q)|.$$

ρ_r tend donc vers zéro uniformément quand q croît.

Mais pour $r = 1, 2, \ldots, q'$ les parties fractionnaires des nombres $\frac{rp}{q'}$ forment la même suite que les nombres $\frac{r}{q'}$, puisque p et q' sont par hypothèse premiers entre eux. On en conclut que, quel que soit l'arc i de C, le nombre des conséquents d'un point M_0 pénétrant dans i est non borné. Le cas singulier ne se présente pas.

Observons que la condition que $\psi_n(\theta_0)$ ne peut jamais être un multiple de 2π entraîne que, si n est le dénominateur Q_m d'une réduite du développement de α en fraction continue, l'un des deux nombres β'_n

ou γ'_n (suivant la parité de m) est inférieur à $\frac{2\pi}{Q_{m+1}}\cdot$ Mais on ne peut pas tirer parti des propriétés arithmétiques de α pour éliminer le cas singulier, puisque, pour toute valeur irrationnelle de α, ce cas est compatible avec $\theta_1(\theta_0)$ continu et J choisi indifféremment, ou $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ continu, mais J convenablement choisi.

24. La seule hypothèse générale faite jusqu'ici serait la continuité de $A(\varphi, \theta)$ et la détermination unique de la caractéristique passant en un point quelconque M du tore. Cette dernière condition serait assurée par l'inégalité de Lipschitz vérifiée par A en θ. Mais la condition de détermination est seule indispensable pour édifier entièrement la théorie de Poincaré sur l'ensemble des points de rencontre d'une caractéristique avec un méridien donné.

Nous allons maintenant faire intervenir l'hypothèse $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ *continue*, et nous l'assurerons par cette condition que $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ soit une fonction continue sur la totalité du tore. Il est connu que $\theta = u(\varphi, \theta_0)$ admet alors une dérivée en θ_0. On l'établit par exemple grâce à la suite d'approximations

$$\eta_0 = \theta_0, \qquad \eta_n = \theta_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} A(\varphi, \eta_{n-1})\,d\varphi.$$

qui montre de proche en proche que $\frac{\partial \eta_n}{\partial \theta_0}$ existe, est continu et converge uniformément vers une limite $\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}$ vérifiant

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = 1 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial A}{\partial \theta}\,\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0}\,d\varphi.$$

On tire de ceci

$$\frac{\partial \theta}{\partial \theta_0} = e^{\lambda(\varphi, \theta_0)}, \qquad \text{avec} \qquad \lambda(\varphi, \theta_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{\partial A(\varphi, \theta)}{\partial \theta}\,d\varphi.$$

θ étant dans cette intégrale définie, remplacé par $u(\varphi, \theta_0)$. λ est donc une fonction continue de θ_0 et de φ. $\lambda(\varphi, \theta_0)$ admet en θ_0 la période 2π.

λ prend les deux signes, puisque

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} e^{\lambda(\varphi,\theta_0)}\,d\theta_0 = u(\varphi,\,\theta_0+2\pi) - u(\varphi,\,\theta_0) = 2\pi,$$

en sorte que la valeur moyenne de $e^{\lambda(\varphi,\theta_0)}$ entre θ_0 et $\theta_0+2\pi$ est 1, pour chaque valeur de φ.

En particulier si

$$h(\theta_0) = \log\frac{d\theta_1}{d\theta_0}, \qquad h(\theta_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} \frac{\partial A}{\partial\theta}\,d\varphi,$$

et de même

$$\log\frac{d\theta_n}{d\theta_0} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2n\pi} \frac{\partial A}{\partial\theta}\,d\varphi.$$

Si la caractéristique $\theta = u(\varphi,\,\theta_0)$ est un cycle et si

$$\theta_q = \theta_0 + 2p\pi \qquad \left(\alpha = \frac{p}{q}\right),$$

Cette équation en θ_0 donne $h_q(\theta_0) = \log\dfrac{d\theta_q}{d\theta_0} = 0$ quand θ_0 n'est pas isolé. Et comme la même circonstance se présente sur tout méridien,

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2q\pi} \frac{\partial A}{\partial\theta}\,d\varphi = 0.$$

Pour un cycle isolé, selon que $h_q(\theta_0) < 0$ ou que $h_q(\theta_0) > 0$, le cycle est attractif ou répulsif quand φ croît à $+\infty$. C'est l'inverse quand φ décroît à $-\infty$. On peut avoir $h_q(\theta_0) = 0$ pour un cycle isolé. La position de la courbe $y = \theta_q(x)$ par rapport à la droite $y = x + 2p\pi$, autour de $x = \theta_0$ montre alors de quelle façon le cycle est limite.

25. Plaçons-nous dans le cas où le nombre α de la théorie générale est irrationnel, et supposons réalisé le cas singulier de l'enssmble J totalement discontinu. Nous avons vu que ce cas est compatible avec $h(\theta_0)$ continu. Établissons la correspondance habituelle entre les points $M(\theta)$ de C et les points $\mu(t)$ de Γ de façon qu'à $M_1(\theta_1)$, conséquent de $M_0(\theta_0)$ sur C, corresponde $\mu_1(t_1)$, avec $t_1 = t_0 + 2\pi\alpha$, si $\mu_0(t_0)$ correspond à M_0. La fonction $h(\theta)$ devient $g(t)$.

Si $M(\theta)$ est un point de deuxième espèce de J, $g(t)$ a une valeur bien déterminée. Si $N(\theta')$ est sur un segment i contigu à J, il correspond à N un point $\lambda(\chi)$ homologue de i et élément d'un ensemble dénombrable η. Laissons indéterminé $g(\chi)$ entre les bornes de $h(\theta')$ sur i. Si l'on accordait, sur chacun des i, la même indétermination à $h(\theta)$, celui-ci resterait continu, bilatéralement en chaque point $M(\theta)$ de deuxième espèce, et unilatéralement du côté de J en chaque extrémité de contigu i. Donc $g(t)$ est continu en tout point μ étranger à η, et en chaque point λ, $g(\chi - o)$ et $g(\chi + o)$ sont déterminés.

Si i_1 est le conséquent de i, l'égalité $i_1 = \int_i \frac{d\theta_1}{d\theta_0} \cdot d\theta_0$ montre que $i_1 = ie^{h(\tau)}$, τ étant un certain point particulier pris dans l'intervalle i. $h(\tau)$ est compris entre les bornes strictes de $h(\theta)$ sur i. Donc en posant

$$g(\chi) = h(\tau) = \log \frac{i_1}{i},$$

nous ne troublons pas les continuités démontrées pour $g(t)$.

Soient $\tau^{(n)}$ le point τ relatif à i_n et $\lambda_n(\chi_n)$ l'homologue de i_n,

$$g(\chi_n) = h(\tau^{(n)}) = \log \frac{i_{n+1}}{i_n}.$$

Donc

$$\sum_{m=r}^{m=s} g(\chi_m) = \log \frac{i_{s+1}}{i_r}$$

et par suite :

$$\log \frac{i_n}{i} = \sum_{m=0}^{m=n-1} g(\chi_m) \qquad (n > o),$$

$$\log \frac{i}{i_{-n}} = \sum_{m=0}^{m=n-1} g(\chi_{m-n}).$$

26. Nous allons établir une propriété de $g(t)$.

Les intervalles i contigus à J peuvent être rangés en une suite j^1, j^2, ..., j^q, ..., par ordre de longueurs non croissantes. Sur Γ, soit χ^q le point λ homologue de j^q.

$h(\theta)$ étant continu sur C, à tout nombre $\varepsilon > o$, correspond un nombre ρ tel que, si $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \rho$, l'oscillation de $h(\theta)$ sur cet arc est inférieure à ε quel que soit θ_0. Excluons de C les intervalles contigus i de longueur au moins égale à ρ. Ils sont en nombre fini N, puis subdivisons chacun des N arcs restants en arcs inférieurs à ρ, par des points de deuxième espèce pour simplifier. A ces points de subdivision et aux intervalles $j^1, j^2, \ldots, j^N$ correspondent sur Γ des points, les uns étrangers à η, les autres coïncidant avec $\varkappa^1, \varkappa^2, \ldots, \varkappa^N$. Ils séparent ensemble un certain nombre d'arcs $\sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^p$ de Γ. Sur chaque arc-intervalle σ^r, l'oscillation de $g(t)$ est inférieure à ε.

Cela posé, i étant un contigu quelconque de E et $\lambda(\chi)$ son homologue sur Γ, considérons la suite des conséquents $i, i_1, i_2, \ldots, i_n (n > 0)$ et les points correspondants $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_n(\chi + 2n\pi\alpha)$. Quand n croît, admettons que les points $\lambda_m (m \leqq n)$ se répartissent sur les σ^r d'une façon sensiblement proportionnelle à la longueur de σ^r. (Le fait est aisé à démontrer. On le prouve d'abord dans l'hypothèse où toutes les longueurs σ^r sont des multiples d'une même longueur σ, puis on passe au cas où ces rapports mutuels des σ^r ne sont pas tous rationnels.)

On voit aisément la possibilité de fixer N', tel que, si $n > N'$, le nombre des λ_m intérieurs à σ^r est $n\frac{\sigma^r}{2\pi}(1 + \delta_r \varepsilon)$. (Nous désignons ci-après par la lettre δ avec ou sans indice un nombre de carré inférieur à 1.)

Considérons la formule

$$\log \frac{i_{n+1}}{i} = \sum_{m=0}^{m=n} g(\chi_m).$$

Dans σ^r prenons un point quelconque t^r. Pour les λ_m intérieurs à σ^r, on a

$$g(\chi_m) = g(t^r) + \delta'_m \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma g(\chi_m) = n\frac{\sigma^r}{2\pi}[g(t_r) + \delta''_r \varepsilon](1 + \delta_r \varepsilon).$$

Donc

$$\log \frac{i_{n+1}}{i} = \frac{n}{2\pi}\left[\sum_{r=1}^{r=p} g(t_r)\sigma^r + \delta\varepsilon\right](1 + \delta'\varepsilon) + \delta'' \sum_{k=1}^{k=N} |g(\varkappa^k)|,$$

le dernier terme englobant les nombres $g(\chi_m)$ relatifs aux λ_m étrangers aux σ, donc situés en l'un des points $\varkappa^n$ représentant les intervalles $j^1, j^2, \ldots, j^N$.

La fonction $g(t)$ n'ayant qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité est intégrable au sens de Riemann. Donc

$$\sum_{r=1}^{r=p} g(t^r)\,\sigma^r = \int_0^{2\pi} g(t)\,dt + \delta'''\rho'.$$

$\rho' > 0$ étant indépendant du choix des σ^r et tendant vers zéro en même temps que le plus grand des σ^r, donc en même temps que ε. Finalement

$$\log\frac{i_{n+1}}{i} = n[\mathrm{I}(g) + \delta^{\text{iv}}\rho''], \qquad \mathrm{I}(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\,dt.$$

ρ'' positif ne dépendant que de ε et tendant vers zéro avec ε.

Cette formule vaut pour tout intervalle i. Appliquons-la au contigu i_{-n-1} substitué à i. Il vient

$$\log\frac{i}{i_{-n-1}} = n[\mathrm{I}(g) + \delta^{\text{v}}\rho''].$$

Mais i_{n+1} et i_{-n-1} tendent vers zéro quand n croît.

D'où l'égalité nécessaire :

$$\mathrm{I}(g) = 0.$$

Signalons cette conséquence de l'hypothèse $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ *continue*, dans le cas d'un ensemble singulier parfait discontinu : $\sqrt[n]{i_n}$ *tend vers* 1 *pour* $n = \pm\infty$, *pour toute série de conséquents ou d'antécédents à un même contigu i de l'ensemble* J.

27. Les mêmes conclusions vaudraient sans supposer $h(\theta)$ continu, mais simplement $g(t)$ intégrable au sens de Riemann, condition suffisante pour que $\Sigma g(t^r)\sigma^r$ tende vers une limite quand ε tend vers zéro.

On pourrait examiner les conséquences que cette hypothèse entraînerait pour $h(\theta)$. Il faudrait distinguer deux cas selon que J est de mesure nulle ou de mesure positive, et dans ce dernier cas rechercher si les ensembles de mesure positive se correspondent ou non sur J et sur Γ. Les questions que nous soulevons ainsi chemin faisant semblent perdre de leur intérêt pour les applications aux équations différentielles, si l'on tient compte du théorème établi plus loin (33).

Quand θ_1 *est en* θ_0 *à nombres dérivés bornés* (ou simplement finis positifs sur J), et réciproquement, *si* J *est de mesure positive* (épais), *toute* *portion de* J *est de mesure positive*. En effet, soient ϖ une portion quelconque de J et ϖ_1 sa conséquente. Si l'un des deux ensembles ϖ ou ϖ_1 est de mesure nulle, il en est de même de l'autre. Sinon, $\left|\log \frac{\text{mes}\,\omega_1}{\text{mes}\,\omega}\right|$ est compris entre le minimum et le maximum de $h(\theta)$ sur ϖ et *a fortiori* sur J. Donc, si ϖ était de mesure nulle, tous les ϖ_n seraient de mesure nulle, ce qui est absurde, puisque, de même qu'avec un nombre fini de transformations $t_1 = t + 2\pi\alpha$ d'un arc σ de Γ on couvre Γ, de même avec un nombre fini de portions ϖ_n on couvre J. J ayant une mesure positive, il en est de même par suite de ϖ, quel que soit ϖ.

Donc ou bien J est de mesure nulle, ou bien il est épais en lui-même.

28. Dans les exemples que nous avons construits et dans ceux que nous allons former ci-après, on se donne sur J la loi d'ordonnance de la substitution $\theta_1(\theta_0)$, c'est-à-dire la substitution $\theta_1(\theta_0)$, à une transformation près continue et de sens constant du cercle C en lui-même (une transformation de cette dernière sorte permet de changer *géométriquement* l'un de deux ensembles parfaits quelconques situés sur C en l'autre). Il suffit pour cela de définir un nombre fini ou une infinité dénombrable de séries indépendantes $\lambda_n^{h} = \omega^{(h)} + 2n\pi\alpha\,(h = 1, 2, \ldots)$ qui sont *données* comme les arguments des points λ_n^{h} de Γ homologue des divers contigus $i_n^{(h)}$ de J, avec identité de l'ordre géométrique des $\lambda_n^{(h)}$ sur Γ et des $i_n^{(h)}$ sur C. Tous les ensembles parfaits discontinus J admettant cette correspondance ont la même fonction $\theta_1(\theta_0)$, à la transformation près de C en lui-même, qui remplace simultanément θ_0 et θ_1 par $\psi(\theta_0)$ et $\psi(\theta_1)$, $\psi(\theta_0)$ étant continu croissant, et $\psi(\theta_0) - \theta_0$ admettant la période 2π en θ_0.

Aux nos 15-17, nous avons montré la possibilité de former une équation du type (1), avec A continu et une caractéristique déterminée en chaque point du tore (d'où θ_1 défini et continu en θ_0), en se donnant indifféremment l'ensemble singulier J lui-même et la fonction $\theta_1(\theta_0)$ sur J elle-même.

Aux nos 18-20 nous avons réalisé un exemple avec $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ continu, d'où θ_1 défini et $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ continu. On se donnait : 1° la loi d'ordonnance de $\theta_1(\theta_0)$ sur J ; 2° $\frac{d\theta_1}{d\theta_0} = 1$ sur J ; 3° la mesure de J, positive ou nulle.

Nous allons maintenant (29-30) construire un exemple où $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ et $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ sont encore continus, et où seront donnés : 1° la loi d'ordonnance de $\theta_1(\theta_0)$ sur J ; 2° $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ ou $h(\theta_0)$ continu, mais quelconque sur J, sous réserve de la seule condition $I(g) = 0$, et d'une irrégularité modérée ; 3° la mesure angulaire $2\pi\xi$, positive ou nulle de J.

28 *b*. Les données nous fournissent : 1° les points $\omega', \omega'', \ldots, \omega^{(h)}, \ldots$, c'est-à-dire l'ensemble η des $\lambda_n^{(h)}[\chi_n^{(h)} = \omega^{(h)} + 2n\pi\alpha]$; 2° $\log \frac{d\theta_1}{d\theta_0} = h(\theta_0)$ sur J, θ_0 étant simplement défini par son rang par rapport aux contigus de J ; donc la fonction $g(t)$ définie et continue en tout point $\lambda(t)$ étranger à η, avec $g(t) = h(\theta)$ si $M(\theta)$ est de deuxième espèce sur J_0, $g(t)$ non défini en un point $\lambda(\chi)$ de η, mais vérifiant $g(\chi - 0) = h(\theta')$, $g(\chi + 0) = h(\theta'')$ si λ est homologue de $i \equiv [M'(\theta'), M''(\theta'')]$.

Soit

$$a = e^{g(\chi-0)}, \qquad b = e^{g(\chi+0)}.$$

Sur i, posons

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_0} = \frac{a(\theta''_0 - \theta_0) + b(\theta_0 - \theta'_0)}{i} + k\,\frac{(\theta_0 - \theta'_0)(\theta''_0 - \theta_0)}{i^2},$$

d'où

$$i_1 = i\,\frac{a+b}{2}\left[1 + \frac{k}{3(a+b)}\right].$$

L'oscillation de $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ sur i est inférieure à $|b-a| + |k|$. Nous ferons en sorte que le nombre k relatif à l'intervalle $i_n^{(h)}$ tende vers zéro pour $n+h$ infini. La propriété analogue du nombre $b - a$ relatif à $i_n^{(h)}$ résulte des hypothèses sur la continuité de $g(t)$. De la sorte, si nous réalisons un ensemble J avec $\log \frac{d\theta_1}{d\theta_0} = h(\theta_0)$ en chaque point de J, $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ sera continu sur J, donc sur la totalité de C. Posons

$$r_n^{(h)} = \frac{1}{2}[g(\chi_n^{(h)} - 0) + g(\chi_n^{(h)} + 0)], \qquad s_n^{(h)} = \frac{1}{2}[g(\chi_n^{(h)} + 0) - g(\chi_n^{(h)} - 0)].$$

Pour l'intervalle $i_n^{(h)}$, $r_n^{(h)}$ et $s_n^{(h)}$ sont fournis par les données. $\frac{a+b}{2}$

est

$$e^{r_n^{(h)}} \frac{e^{s_n^{(h)}} + e^{-s_n^{(h)}}}{2} = e^{r_n^{(h)} + v_n^{(h)}}.$$

Observons que, $s_n^{(h)}$ tendant vers zéro quand $n + h$ croît, *a fortiori* en est-il de même pour $v_n^{(h)}$, sensiblement équivalent à $\frac{1}{2}[s_n^{(h)}]^2$. Pour $i_n^{(h)}$, soit $k_n^{(h)}$ la valeur de k et posons

$$1 + \frac{k_n^{(h)}}{3(a_n^{(h)} + b_n^{(h)})} = e^{l_n^{(h)}}.$$

Ceci déterminera $k_n^{(h)}$ si nous nous donnons $l_n^{(h)}$. Puisque $\log a_n^{(h)}$ et $\log b_n^{(h)}$ sont bornés, la condition $\lim\limits_{n+n\infty} k_n^{(h)} = 0$ équivaut à $\lim\limits_{n+n\infty} l_n^{(h)} = 0$.

28 c. Définissons donc les $l_n^{(h)}$. Nous stipulons dès maintenant que $l_n^{(h)}$ *sera négatif pour* $n \geqq 0$ *et positif pour* $n < 0$. Pour i identique à $i_n^{(h)}$, on a

$$\log \frac{i_1}{i} = r_n^{(h)} + v_n^{(h)} + l_n^{(h)}.$$

Supposons $n \geqq 0$. On a

$$\log \frac{i_{n+1}^{h}}{i_0^{(h)}} = \sum_{m=0}^{m=n} (r_m^{(h)} + v_m^{(h)}) + \sum_{m=0}^{m=n} l_m^{(h)}.$$

Les $r_m^{(h)}$ sont des nombres dont les valeurs oscillent indéfiniment entre les bornes de $g(t)$. Mais d'après $\mathrm{I}(g) = 0$, nous avons vu que $\frac{1}{n} \sum\limits_{m=0}^{m=n} r_m^{(h)}$ tend vers zéro (indépendamment de h) quand n croît.

De même $\frac{1}{n} \sum\limits_{m=0}^{m=n} v_m^{(h)}$ tend vers zéro, pour h donné, n croissant (et aussi pour $n + h$ croissant), puisqu'il en est ainsi de $v_n^{(h)}$. Posons

$$\sum_{m=0}^{m=n} (r_m^{(h)} + v_m^{(h)}) = n \eta_n^{(h)}.$$

$\eta_n^{(h)}$ tend vers zéro quand n croît, pour h donné. Soit $w_n^{(h)}$ le maximum de $|\eta_{n'}^{(h)}|$ pour $n' \geqq n$. $w_n^{(h)}$ est non croissant et tend vers zéro quand n croît, pour h donné. En outre $w_n^{(h)} \geqq |\tau_n^{(h)}|$. Nous prenons pour $-l_n^{(h)}$ le plus petit des deux nombres $\frac{1}{h+1}$ et $w_n^{(h)} + \frac{2}{n+h+1}$. $l_n^{(h)}$ tend vers zéro en même temps que $h+n$ augmente (et n'est jamais croissant en n).

D'autre part, il existe, pour h donné, un entier n'' (supposé minimum) tel que, si $n > n''$, $w_n^{(h)} < \frac{1}{h+1} - \frac{2}{n+h+1}$. Donc, si $n > n''$,

$$\log \frac{i_{n+1}^{(h)}}{i_0^{(h)}} = n\tau_n^{(h)} - \frac{n''}{h+1} - \sum_{m=n''+1}^{m=n} \left[w_m^{(h)} + \frac{2}{m+h+1} \right]$$
$$< -n(w_n^{(h)} - \tau_n^{(h)}) + n'' w_n^{(h)} - 2\log\frac{n+h+1}{n''+h+1},$$

où

$$\log \frac{i_{n+1}^{(h)}}{i_0^{(h)}} < \log \frac{a_h}{(n+h+1)^2},$$

a_h étant indépendant de $n (> n'')$. Finalement quel que soit $n \geqq 0$,

$$i_{n+1}^{(h)} < \frac{A_h}{(n+h+1)^2} i_0^{(h)}.$$

A_h étant indépendant de n et de $i_0^{(h)}$. De la sorte, pour h donné (et les coefficients dépendant seulement de leurs indices), la série $\sum_{n=0}^{n\infty} i_n^{(h)}$ est convergente et inférieure à $i_0^{(h)}\left(1 + \frac{A_h}{h}\right) = A'_h i_0^{(h)}$.

Pour les antécédents de $i_0^{(h)}$, nous adoptons pour le choix de $l_{-n}^{(h)} (n > 0)$ la même règle que ci-dessus pour $-l_n^{(h)}$. Les $l_{-n}^{(h)}$ sont *positifs*. On en conclut $\frac{i_0^{(h)}}{i_{-n-1}^{(h)}} > \frac{(n+h+1)^2}{B_h} (B_h > 0)$. La série $\sum_{n=0}^{\infty} i_{-n-1}^{(h)}$ est donc inférieure à $i_0^{(h)} B'_h$.

28 *d*. On choisira enfin les $i_0^{(h)}$ de façon que la série $\sum_{h=0}^{h\infty} i_0^{(h)} (A'_h + B'_h)$ soit convergente et de somme $2\pi(1-\xi)$. Dès lors *les longueurs de tous les contigus à* E *sont déterminées*, d'après le rang de ces contigus.

29. Si E est *de mesure nulle* ($\xi = 0$), E est connu à une rotation près de C sur lui-même.

Soit $\overline{\mu}(\overline{t})$ un point de Γ étranger à γ_1, auquel on fait indifféremment correspondre $\overline{\mathrm{M}}(\overline{\theta})$ sur C. On posera $\theta = \overline{\theta} + (\overline{\mu}\Sigma\mu)\, i_n^h + \rho\, i_m^k$ ($\rho = 0$ si μ est étranger à γ_1, $\rho = 0$ et 1 si μ est λ_m^k) comme plus haut (19). Les divers points $\mathrm{M}(\theta)$ forment l'ensemble parfait E.

Montrons que $\dfrac{d\theta_1}{d\theta_0}$ existe en tout point de E et y possède les valeurs données.

1° Soit $\mu(t)$ étranger à γ_1. Donnons à t un accroissement Δt très petit qui amène μ en μ^+ si Δt est positif et en μ^- si Δt est négatif. Supposons d'abord μ^+ et μ^- étrangers à γ_1. Il en résulte les accroissements

$$\Delta\theta = (\mu\Sigma\mu^+)\, i_n^h \qquad \text{ou} \quad -(\mu^-\Sigma\mu)\, i_n^h.$$

d'où

$$\Delta\theta_1 = (\mu_1\Sigma\mu_1^+)\, i_n^h = (\mu\Sigma\mu^+)\, i_{n-1}^h \qquad \text{ou} \quad -(\mu^-\Sigma\mu)\, i_{n-1}^h.$$

Quand λ_n^h tend vers μ d'un côté ou de l'autre, $\dfrac{i_{n-1}^h}{i_n^h} \sim e^{r_n^h}$ tend vers $e^{g(t)}$. Donc $\dfrac{\Delta\theta_1}{\Delta\theta_0}$ tend lui-même vers cette dernière limite.

2° Soit maintenant μ^- sur γ_1 et coïncidant avec λ_m^k dont l'homologue sur C est i_m^k. Soit $\theta_m'^k$ l'argument de l'origine de i_m^k. Alors, si $\mathrm{M}'_0(\theta'_0)$ est sur le segment i_m^k et a pour conséquent $\mathrm{M}'_1(\theta'_1)$, nous écrivons

$$\theta'_0 = \overline{\theta} - (\overline{\mu}\Sigma\mu^-)\, i_n^h - (\theta'_0 - \theta'^k_m)$$

(les i_n^h de la somme correspondent aux λ_n^h situés sur l'arc-intervalle $\overline{\mu}\mu^-$, extrémités exclues), et

$$\theta'_1 = \overline{\theta} - (\overline{\mu}\Sigma\mu_1^-)\, i_n^h - (\theta'_1 - \theta'^k_{m-1}):$$

d'où

$$\frac{\theta'_1 - \theta_1}{\theta'_0 - \theta} = \frac{(\mu\Sigma\mu^-)\, i_{n-1}^h - \theta'_1 - \theta'^k_{m-1}}{(\mu\Sigma\mu^-)\, i_n^h - \theta'_0 - \theta'^k_m}.$$

Or, sur i_m^k, $\log\dfrac{d\theta_1}{d\theta_0}$ diffère de $\log\dfrac{i_{m-1}^k}{i_m^k} \sim r_m^k$ d'une quantité qui tend vers zéro pour $m+k$ infini, donc quand θ'_0 tend vers θ. La même conclusion vaut donc pour $\log\dfrac{\theta'_1 - \theta'^k_{m-1}}{\theta'_0 - \theta'^k_m}$ quel que soit $\mathrm{M}'_0(\theta'_0)$ sur i_m^k. Mais quand θ'_0 tend vers θ, r_m^k (comme r_n^h) tend vers $g(t)$.

Donc $\dfrac{\theta'_1 - \theta_1}{\theta'_0 - \theta}$ tend vers $e^{g(t)}$. Finalement en tout point $\mathrm{M}(\theta)$ de deuxième espèce de E, la dérivée droite $\left(\frac{d\theta_1}{d\theta_0}\right)_+$ existe et vaut $e^{g(t)}$, égal au nombre donné $e^{h(\theta)}$.

3° Si μ était en un point λ de τ_1, et si l'on choisissait sur E pour homologue à μ l'extrémité $M''(\theta'')$ de i, intervalle homologue de λ, la même démonstration établirait qu'en M'', la dérivée droite $\left(\frac{d\theta_1}{d\theta_0}\right)_+$ existe et vaut $e^{g(t-0)}$, soit le nombre donné $e^{h(\theta'')}$.

4° Une démonstration analogue prouve qu'en tout point $M(\theta)$ de deuxième espèce de E, en tout point $M'(\theta')$ de première espèce gauche de E, la dérivée gauche $\left(\frac{d\theta_1}{d\theta_0}\right)_-$ existe et vaut respectivement les nombres donnés $e^{h(\theta)}$, $e^{h(\theta')}$.

5° D'ailleurs, nous avons initialement défini θ_1 sur le contigu i parcouru par θ_0, de façon que θ_1 admette en M'' la dérivée gauche $e^{h(\theta'')}$ et en M' la dérivée droite $e^{h(\theta')}$.

Donc, le problème est résolu dans le cas de E mince. En tout point de E, $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ existe et a la valeur $e^{h(\theta)}$ *donnée en fonction de* M *sur l'ensemble* E. La définition de l'équation différentielle (1) se fait comme au n° **16**. Pour cette équation, l'ensemble $J(\varphi_0)$ existe et coïncide avec E.

30. Réalisons le cas de J *épais* $(0 < \xi < 1)$.

Supposons qu'il existe une fonction $f(t)$ mesurable, admettant en la période 2π, vérifiant l'équation

$$f(t+2\pi\alpha)-f(t)=g(t), \tag{5}$$

et telle que $e^{f(t)}$ soit sommable. Si f existe, il n'est déterminé qu'à l'addition près d'une constante (sauf sur un ensemble de mesure nulle) En effet, si $f(t)+k(t)$ est une seconde solution de (5), $k(t)$ est mesurable et vérifie l'équation $k(t+2\pi\alpha)-k(t)=0$.

Si petit que soit $\varepsilon > 0$, il existe une valeur a telle que l'ensemble $e(\varepsilon)$ défini par $a-\varepsilon < k(t) < a+\varepsilon$ soit de mesure positive. Il existe un arc de Γ sur lequel $e(\varepsilon)$ a une épaisseur moyenne supérieure à $1-\varepsilon'$ (ε' donné positif quelconque). Mais $e(\varepsilon)$ admet la transformation t, $t+2\alpha$ en lui-même. On en conclut que $e(\varepsilon)$ a une épaisseur moyenne supérieure à $1-\varepsilon'$ sur Γ. $e(\varepsilon)$ est une pleine épaisseur de Γ. Par suite, le complémentaire de l'ensemble $k(t)=a$ est de mesure nulle. Ce complémentaire peut coïncider avec un ensemble de mesure nulle quelconque admettant la transformation t, $t+2\pi\alpha$.

En tout cas, si l'équation (5) admet une solution vérifiant les conditions posées, $\int_0^{2\pi} e^{f(t)}\,dt$ est déterminé à un facteur près. Nous pouvons donc ajouter la condition que cette intégrale vaut 1.

Soit

$$m(t)=2\pi\xi\int_{\bar t}^{t} e^{f(t)}\,dt.$$

Nous définissons les points $M(\theta)$ par

$$\theta=\bar\theta+m(t)+(\bar\mu\Sigma\mu)\,i_n^{h}+\varphi' i_m^{k},$$

$m(t)$ est la mesure de E entre $\bar\theta$ et θ. On a, que $M'_0(\theta+\Delta\theta)$ soit ou non sur E, et si $t_1=t+2\pi\alpha$ définit θ_1,

$$m(t+\Delta t)-m(t)=2\pi\xi\int_{t}^{t+\Delta t} e^{f(t)}\,dt,$$

$$m(t_1+\Delta t_1)-m(t_1)=2\pi\xi\int_{t+2\pi\alpha}^{t+2\pi\alpha+\Delta t} e^{f(t)}\,dt=2\pi\xi\int_{t}^{t+\Delta t} e^{f(t-\alpha)}\,dt.$$

Donc $\dfrac{m(t_1+\Delta t_1)-m(t_1)}{m(t+\Delta t)-m(t)}$ tend, soit vers $e^{g(t+0)}$, soit vers $e^{g(t-0)}$ selon que $\Delta\theta$ tend vers zéro positivement ou négativement.

θ_1 et θ sont donc chacun la somme de deux termes, $c+d$, c_1+d_1, tel que $\frac{c_1}{c}$, $\frac{d_1}{d}$ tendent à la fois vers $e^{g(t+0)}$ ou vers $e^{g(t-0)}$, quand Δt ou $\Delta\theta$ tendent vers zéro avec un signe déterminé. Donc dans tous les cas $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}=h(\theta_0)$, quel que soit $M_0(\theta_0)$ sur E.

30 *b*. Nous n'insisterons pas sur la détermination de $f(t)$ pour toute fonction $g(t)$ satisfaisant aux conditions posées.

Considérons les développements de Fourier (convergents ou non) de $g(t)$ et de $f(t)$, qui existent d'après les hypothèses faites, f et g étant sommables.

Si

$$g(t) \sim \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mt + \omega_m),$$

on trouve pour $f(t)$ le développement formel :

$$f(t) \sim A_0 - \sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \frac{\cos(mt + \omega_m - m\pi\alpha)}{2 \sin m\pi\alpha}.$$

Le problème est en tout cas résolu si $g(t)$ est un polynome trigonométrique, ou si la série $\sum \frac{A_m}{\sin m\pi\alpha}$ est absolument convergente. En ce cas g et f sont continus. Le cas de $g(t)$ discontinu sur γ_1 serait plus délicat à étudier. Toujours est-il que l'ensemble J *peut avoir une mesure positive en même temps que* $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ *est continu sur* C *et variable sur toute portion de* J.

31. Nous allons faire au sujet de $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ une hypothèse de plus que la continuité. Nous supposerons que cette fonction est *à variation totale bornée*. Et avec cette nouvelle restriction, *la possibilité du cas singulier disparaît*.

Nous aurons besoin de rappeler un résultat élémentaire de la théorie des fractions continues.

Soit $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots)$, les a_k étant entiers, tous positifs à partir de a_1. Posons

$$\frac{P_m}{Q_m} = (a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

d'où

$$\alpha = \frac{P_m x_m - P_{m-1}}{Q_m x_m + Q_{m-1}}, \qquad x_m = (a_{m-1}, a_{m-2}, \ldots).$$

Posons

$$Q_m \alpha - P_m = d_m,$$

d'où

$$d_m = \frac{(-1)^m}{Q_m x_m - Q_{m-1}} \quad \text{et} \quad d_{m-1} = \frac{-1)^{m-1} x_m}{Q_m x_m + Q_{m-1}}.$$

Nous tirons immédiatement de là l'inégalité $|d_m| < |d_{m-1}|$, qui n'est remplacée par l'égalité que dans le seul cas $x_m = 1$, d'où

$$\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_2, a_m, 1) \qquad \text{et} \qquad d_{m+1} = 0.$$

Ce cas d'exception ne se présentera pas si α est irrationnel, et, si α est rationnel, il est spécial aux deux avant-dernières réduites possibles.

Soit maintenant $\frac{p}{q}$ une fraction qui ne soit pas une réduite de α. Je dis que si q est inférieur à Q_{m+1} et diffère de Q_m, $q\alpha - p = d$ surpasse d_m en valeur absolue.

Il suffit de le prouver pour $Q_m < q < Q_{m+1}$.

Admettons en effet $|d| \leqq |d_m|$. Nous pouvons supposer $\frac{p}{q}$ irréductible, puisqu'en divisant p et q par un même entier, on diminue d. On a

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|d|}{q} < \frac{|d_m|}{Q_m} = \left|\alpha - \frac{P_m}{Q_m}\right|.$$

D'après un résultat bien connu, la fraction $\frac{p}{q}$ est comprise entre $\frac{P_m}{Q_m}$ et $\frac{P_{m-1}}{Q_{m-1}}$. Donc $\frac{p}{q} = \frac{\beta P_m + \gamma P_{m-1}}{\beta Q_m + \gamma Q_{m-1}}$, β et γ étant deux entiers positifs premiers entre eux, ce qui donne au second membre une fraction irréductible. D'où $q = \beta Q_m + \gamma Q_{m-1}$. D'après $q < Q_{m+1}$, on a $\beta \leqq a_{m+1} - 1$, ce qui exige $a_{m+1} \geqq 2$.

D'ailleurs

$$|d| = |q\alpha - p| = \frac{\gamma x_m - \beta}{Q_m x_m + Q_{m-1}}.$$

Peut-on avoir $\gamma x_m - \beta < 1$? D'après $x_m \geqq a_{m+1}$, $\beta \leqq a_{m+1} - 1$, l'inégalité est impossible. Pour avoir l'égalité, il faut $x_m = a_{m+1}$, $\beta = a_{m+1} - 1$, $\gamma = 1$. Mais alors $\frac{p}{q}$ est une réduite de $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_m, a_{m+1} - 1, 1)$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

32. Cela posé, admettons que, pour une équation différentielle (1), $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$, soit continu (restriction en fait superflue) et *à variation totale bornée* en θ_0 sur l'intervalle $\theta'_0 < \theta_0 < \theta'_0 + 2\pi$. Il en est de même de $h(\theta_0) = \log \frac{d\theta_1}{d\theta_0}$, car $\frac{e^u - e^{u'}}{u - u'}$ est compris entre deux nombres positifs fixes, si u et u' sont bornés. Soit donc V la variation totale de $h(\theta_u)$.

Si l'on considère une suite quelconque de nombres θ^k vérifiant

$$\theta^0 \leqq \theta^k < \theta^{k+1} \leqq \theta^0 + 2\pi = \theta^m,$$

V est par définition le maximum de

$$\sum_{k=0}^{k=m-1} |h(\theta^{k-1}) - h(\theta^k)|.$$

Supposons que l'ensemble singulier J existe et faisons comme toujours correspondre sur le cercle Γ aux contigus de J un ensemble dénombrable τ_i et aux points de deuxième espèce de J les points étrangers à τ_i.

Soit λ un point quelconque de τ_i. Prenons $n = Q_m$, $\frac{P_m}{Q_m}$ étant une réduite du développement de α en fraction continue.

L'arc trigonométrique $\lambda\lambda_n$ vaut $2\pi Q_m \alpha$. L'arc géométrique minimum $\lambda\lambda_n$ vaut $2\pi[Q_m \alpha - P_m] = 2\pi d_m$. Il est évidemment indépendant de λ en grandeur et en sens. En outre, si $-n < q < 2n$, $q \neq 0$ et $\neq n$, le point λ_q est étranger à l'arc $\lambda\lambda_n$, puisque sa distance circulaire à λ, pour $-n < q < n$, et à λ_n pour $0 < q < 2n$, est de la forme $2\pi|\alpha|q| - p'|$ ou $2\pi|\alpha|q-n| - p''|$ qui surpassent l'un et l'autre $2\pi|d_m|$, d'après $n > |q|$ dans le premier cas, $n > |q-n|$ dans le second.

Il suit de là que si nous considérons sur Γ les deux ensembles de points

$$\lambda, \quad \lambda_1, \quad \ldots, \quad \lambda_p, \quad \ldots, \quad \lambda_{n-1} \quad \text{et} \quad \lambda_{-n}, \quad \lambda_{-n-1}, \quad \ldots, \quad \lambda_{-n-p}, \quad \ldots, \quad \lambda_{-1}$$
$$(p = 0, 1, \ldots, n-1).$$

l'arc géométrique $\lambda_{-n+p}\lambda_p$ est égal à $2\pi d_m$, de sens constant, et ne contient entre ses extrémités aucun point de l'une ni de l'autre suite. Ces deux suites sont donc formées de points alternant géométriquement.

Il en est de même sur C pour les intervalles i_k correspondant aux λ_k de ces deux suites, et en particulier pour les points $M^k(\tau^k)$, M^k étant dans i_k et ayant pour argument τ^k tel que $h(\tau^k) = \log \frac{i_{k-1}}{i_k}$. Donc

$$\left| \sum_{p=0}^{p=n-1} h(\tau^p) - \sum_{p=0}^{p=n-1} h(\tau^{-n+p}) \right| \leqq \mathrm{V},$$

ou

$$\left| \log \frac{i_n}{i} - \log \frac{i}{i_{-n}} \right| \leqq \mathrm{V},$$

et enfin

$$e^{-\mathrm{V}} \leqq \frac{i_n\, i_{-n}}{i^2} < e^{\mathrm{V}}$$

quels que soient i et $n = \mathrm{Q}_m$. Ceci est impossible puisque, i étant fixe, i_n et i_{-n} tendent vers zéro quand n croît. *Le cas singulier est donc impossible* ([1]).

33. $\frac{d\theta_1}{d\theta_0}$ aura en particulier une variation totale bornée dans le champ $\theta'_0 < \theta_0 < \theta'_0 + 2\pi$ s'il en est de même de $\frac{\partial \mathrm{A}(\varphi, \theta)}{\partial \theta}$. Car,

$$h(\theta_0^{k+1}) - h(\theta_0^k) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} \left[\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \theta}(\varphi, \theta^{k+1}) - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \varphi}(\varphi, \theta^k) \right] d\varphi.$$

([1]) Les mêmes raisonnements donnent

$$e^{-\mathrm{V}} \leqq \frac{i_k \,.\, i_{-n}}{i \,.\, i_{-n+k}} \leqq e^{\mathrm{V}} \qquad (0 \leqq k \leqq n)$$

et généralement

$$e^{-\mathrm{V}} \leqq \prod_{p=0}^{p=n-1} \left(\frac{i_{p-1}}{i_p} \, \frac{i_{-n+p}}{i_{-n+p-1}} \right)^{a_p} \leqq e^{\mathrm{V}}$$

($a_p = -1$, 0 ou 1 indifféremment), inégalités dont on pourrait peut-être tirer parti pour le cas de α rationnel.

La valeur de n, savoir Q_m, est fournie par le lemme (**27**). Elle n'intervient pas effectivement dans le raisonnement. Si l'on considère le minimum en valeur absolue ρ_q des arcs géométriques $\lambda\lambda_p$ (pour $p = 1, \ldots, q$), ce minimum tend vers zéro quand q croît. Les valeurs n de q pour lesquelles ρ_q diminue ($\rho_n < \rho_{n-1}$) existent *a priori*. Ce sont ces entiers n dont la propriété sert dans le raisonnement ci-dessus. La valeur exacte $n = \mathrm{Q}_m$ n'ajoute aucune précision utilisée.

La démonstration donnée dans le texte a été publiée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. **194**, 7 mars 1932, p. 830-833). On pourra consulter une seconde Note sur le même sujet (*Id. ibid.*, 6 juin 1932, p. 2014-2016).

si $\theta^k = u(\varphi, \theta_0^k)$, $\frac{\partial A}{\partial \theta}$ étant supposé continu en θ (et en φ). Donc, si

$$\sum_{k=0}^{k=m} \left| \frac{\partial A}{\partial \theta}(\varphi, \theta^{k-1}) - \frac{\partial A}{\partial \theta}(\varphi, \theta^{k}) \right|$$

est borné dans le champ $\theta^0 \leqq \theta^k < \theta^{k-1} \leqq \theta^0 + 2\pi = \theta^m$, indépendamment du choix des θ^k, par un nombre $W(\varphi)$, lui-même borné indépendamment de φ par un nombre W, on aura

$$\sum_{k=0}^{k=m} \left| h(\theta_0^{k-1}) - h(\theta_0^k) \right| < 2\pi W,$$

si $\theta_0^0 \leqq \theta_0^k < \theta_0^{k-1} \leqq \theta_0^0 + 2\pi = \theta_0^m$.

Donc, *dans le cas où* $\frac{\partial A}{\partial \theta}(\varphi, \theta)$ *est en* θ *à variation totale uniformément bornée dans un champ* $\varphi_0 \leqq \varphi < \varphi_0 + 2\pi$, $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$, *et dans le cas où le nombre* α *est irrationnel, les caractéristiques de l'équation* (1) *coupent tout méridien* C *en un ensemble partout dense.* Toute caractéristique passe une infinité de fois au voisinage de tout point du tore. Selon l'expression de Poincaré, les trajectoires définies par l'équation (1) sont *stables*.

En particulier il en sera ainsi quand $\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2}$ *est continu* (ou simplement borné) sur tout le tore, et *a fortiori si* $A(\varphi, \theta)$ *est holomorphe en* φ *et* θ, hypothèse où se plaçait Poincaré.