JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Supplément au Mémoire « Conditions pour la validité des théorèmes relatifs à la courbure des lignes tracées sur une surface »

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 385-387.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__385_0>

Supplément au Mémoire « Conditions pour la validité des théorèmes relatifs à la courbure des lignes tracées sur une surface » (1);

PAR GEORGES **BOULIGAND**.

Dans le travail cité, je ne me suis occupé du théorème de Meusnier que dans le champ de la théorie des surfaces d'où il est issu. Le présent addendum a pour objet de montrer que ce théorème, extensible comme on sait aux trajectoires orthogonales d'un champ vectoriel, trouve son expression la plus simple et la plus large en théorie des ensembles. La raison profonde du théorème est ainsi mise en pleine lumière, en même temps que tout calcul est rendu superflu.

Soit O un point d'accumulation de l'ensemble ponctuel E. Supposons qu'en O, il existe une perpendiculaire Z à la *demi-tangente* Ox (au sens : rayon du contingent), telle que, dans le demi-plan (Z, x), il n'y ait qu'un seul demi-cercle C de rayon non nul qui soit limite de demi-cercles C_M passant par O, par un point M infiniment voisin de O sur E, et ayant leurs diamètres portés par Z. Considérons dès lors le contingent hémicirculaire de E relatif à Ox. Par définition, il comprend les éléments d'accumulation des demi-cercles c_M passant par O, par un point M de E infiniment voisin de O et d'abscisse positive et dont chacun a son diamètre dans le plan $x = 0$. Cela posé, si une suite de points M de E tend vers le point O de manière que la suite correspondante des C_M tende vers C, les sphères S_M passant par O et M et centrées sur Z tendent vers la sphère S décrite sur C comme grand cercle. Donc les cercles c_M, sections des sphères S_M par des plans

(1) *Journal de Mathématiques*, 9e série, t. 11, 1932, p. 131-141.

contenant Ox ne peuvent avoir pour éléments limites que des cercles de section de la sphère S par ces mêmes plans. D'où cette proposition, qui constitue le théorème de Meusnier pour les ensembles :

Si au point O *d'accumulation de l'ensemble ponctuel* E, *dans le demi-plan déterminé par la demi-tangente* Ox *et la perpendiculaire* Z (lequel pour les points de E tendant vers O dans la direction Ox est un demi-plan normal), *le contingent de courbure relatif à* Z *est formé d'un seul demi-cercle* C, *le contingent hémicirculaire relatif à* Ox *est tout entier porté par la sphère décrite sur* C *comme grand cercle* (sphère de Meusnier).

Notamment le théorème s'applique au cas où E est un fuseau (arbitrairement étroit et entre plans normaux dont le dièdre inclut Ox) de variété proprement superficielle, dont le contingent de courbure normale, relatif à la demi-tangente Ox comprend un seul cercle. Cette hypothèse est remplie, d'après mon Mémoire cité, s'il existe pour la surface une représentation analytique de la forme

$$z = \varphi_2(x, y) + (x^2 - y^2)\,\varepsilon(x, y).$$

Il suffit, pour que le théorème s'applique à la demi-tangente Ox, que cette représentation soit valable pour un certain fuseau arbitrairement étroit de la surface, déterminé par un dièdre incluant Ox. On aura le même résultat avec un ensemble E qui, dans ce fuseau, est compris entre deux surfaces S′ et S″ obtenues pour deux choix $\varepsilon'(x, y)$ et $\varepsilon''(x, y)$ de la fonction $\varepsilon(x, y)$ (qui doit tendre vers zéro dans un fuseau du type précédent).

Cette remarque permet d'agréger aux vues précédentes le prolongement bien connu du théorème de Meusnier concernant les trajectoires orthogonales d'un champ vectoriel. Soit $\varphi_2(x, y)$ une fonction douée d'une différentielle au sens classique. Supposons que les trajectoires considérées soient définies par l'équation aux différentielles totales

$$d[z - \varphi_2(x, y)] = \sqrt{x^2 + y^2}\,[\alpha(x, y, z)\,dx + \beta(x, y, z)\,dy]$$

où α, β tendent vers zéro (¹) dans un dièdre limité par deux demi-

(¹) En même temps que x, y, z; on prend ici $x > 0$.

plans $y = \pm x \operatorname{tang} \theta$ (l'angle θ pouvant encore être arbitrairement petit). Considérons les lignes intégrales issues de O tangentiellement à Ox et telles que la courbure de leurs projections sur le plan xOy ne dépasse jamais une limite assignée. La quantité $|\alpha\, dx + \beta\, dy|$ est au plus égale à $\psi(r)\, dr$ en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et appelant $\psi(r)$ le maximum de $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ à la distance r. Vu l'intervention de z, nous effectuerons la majoration en deux étapes. D'abord, nous appellerons ψ_0 le maximum de $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ dans la portion de la sphère de centre O et de rayon r_0 (longueur fixe), entre nos demi-plans $y = \pm x \operatorname{tang} \theta$. Nous délimiterons ainsi $|z - \varphi_2|$ au moyen du produit de

$$(x^2 + y^2)\psi_0,$$

par un coefficient numérique dépendant seulement de la limite assignée à la courbure, moyennant quoi, nos lignes intégrales se trouveront maintenant entre deux surfaces S_1 et S_2 engendrées par des paraboles d'axe Oz, mais avec contingents de courbure normale distincts. Cela posé, dans la seconde étape de notre majoration, nous appellerons $\psi(r)$ le maximum de $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ sur la portion du cylindre de révolution de rayon r, d'axe Oz, formée des points d'angle polaire compris entre $-\theta$ et $+\theta$, et de cote comprise entre celle de S_1 et celle de S_2. Nous en déduirons une deuxième délimination plus resserrée de $|z - \varphi_2|$: elle sera le produit de

$$\int_0^r r\psi(r)\, dr,$$

par un coefficient numérique dépendant seulement de la limite assignée à la courbure ; comme $\psi(r)$ tend vers zéro, le système des trajectoires considérées se trouvera bien inclus entre deux surfaces S' et S'' remplissant les conditions indiquées à la fin du paragraphe précédent.

C. Q. F. D.