JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES GIRAUD

Sur quelques problème de Dirichlet et de Neumann

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 11 (1932), p. 389-416.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1932_9_11__389_0>

Sur quelques problèmes de Dirichlet et de Neumann;

PAR GEORGES GIRAUD.

INTRODUCTION.

On sait combien simplement la méthode de Fredholm permet de résoudre le problème classique de Dirichlet (relatif aux fonctions harmoniques) quand certaines conditions de régularité sont remplies par les données [1]. La méthode s'applique également au problème classique de Neumann. Cette méthode si élégante pouvait être généralisée, et M. Picard l'a étendue [2] aux questions analogues concernant l'opération $\Delta u - u$ (au lieu de Δu).

Dans plusieurs travaux récents [3], cette méthode a été de nouveau généralisée de façon à atteindre les équations linéaires les plus géné-

(1) On sait d'ailleurs s'affranchir, par d'autres considérations, des hypothèses ici mentionnées. Voir GEORGES BOULIGAND, *Fonctions harmoniques, principes de Picard et de Dirichlet*, dans le *Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule XI, 1926; FLORIN VASILESCO, *Journ. de Math.*, **9**, 1930, p. 81 à 111.

(2) ÉMILE PICARD, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, **37**, 1914, p. 249 à 261 (Mémoire se trouvant aussi dans *Selecta*, p. 231 à 247). M. Picard a encore donné cette étude dans *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*, Paris, 1928, p. 168 à 184, et partiellement dans *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, Paris, 1930, p. 260 à 263. M. Picard n'a considéré explicitement que le cas de trois variables, mais il n'y a aucun changement dans le cas général.

(3) *Ann. sc. Éc. Norm.*, **46**, 1929, p. 131-245; **47**, 1930, p. 197-266; **49**, 1932, p. 1-104 et 245-308; *Bull. Sc. math.*, **53**, 1929, p. 367-395; *C. R. Acad. Sc.*, **190**, 1930, p. 613; **191**, 1930, p. 244, 478 et 1110; **192**, 1931, p. 471 et 1338; **193**, 1931, p. 353 et 818; **194**, 1932, p. 1142; **195**, 1932, p. 98 et 454.

rales du type elliptique (sauf des conditions de régularité) et même à embrasser d'autres questions analogues. Or si l'on applique au cas particulier du laplacien la méthode résultant de ces généralisations successives, on obtient une méthode différente de la méthode de Fredholm qui a servi de point de départ; cette méthode nouvelle embrasse directement même le cas où la frontière n'est pas d'un seul tenant, ce qui, s'il s'agit du problème de Dirichlet, n'est pas le cas de la méthode classique (1).

Les travaux qui ont servi à constituer cette nouvelle méthode sont d'une lecture assez longue. Il a paru intéressant d'exposer, en un travail plus court et pouvant être lu isolément, ce que donne cette méthode non seulement dans le cas du laplacien, mais dans le cas de l'opération $\Delta u + cu$, où c est une fonction donnée; le nombre des variables est quelconque. Cela fournit en même temps une occasion de revenir sur quelques points qui précédemment avaient été franchis sans doute trop rapidement : on trouvera ici la démonstration détaillée de l'applicabilité de la méthode de Fredholm à certains systèmes d'équations intégrales ainsi que la formation de la *solution élémentaire principale* de l'équation $\Delta u = u$. Ces éclaircissements amènent d'ailleurs un résultat nouveau : la théorie générale enseigne la formation de certains systèmes d'équations dépendant d'un entier positif p; on avait établi précédemment que, si $p \geqq 2$, la théorie de Fredholm s'applique, et l'on a ainsi la solution complète des questions posées; il résulte des explications données ici que ces conclusions subsistent pour $p = 1$, et c'est là une simplification notable, qui s'étend d'elle-même au cas général.

La solution élémentaire principale $G(X, A)$ de l'équation $\Delta u = u$ se réduit, dans le cas de trois variables, à $\frac{e^{-r}}{4\pi r}$, où r est la distance des deux points. Cela permet de sauter, dans une première lecture, le Chapitre II de ce travail, à condition de faire $m = 3$ dans les chapitres suivants et de donner à G cette expression.

On a traité, pour l'opération $\Delta u + cu$, les problèmes de Neumann

(1) JOSEF PLEMELJ, *Ueber lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie* (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, Bd 15, 1904, p. 337-411; Bd 18, 1907, p. 180-210).

Voir aussi la remarque finale du présent Mémoire.

et de Dirichlet (la première expression est prise ici dans une acception plus étendue qu'on ne fait d'habitude). On rencontre ainsi les principales circonstances de la théorie générale, à ceci près que l'opération $\Delta u + cu$ est identique à son adjointe; l'introduction de l'adjointe est nécessaire dans le cas général ([1]).

Si la frontière n'est pas d'un seul tenant, une méthode tout à fait analogue permet de traiter des problèmes mixtes, où certaines parties de la frontière portent des données de Dirichlet pendant que les autres portent des données de Neumann. Ces problèmes ont été ici passés sous silence, car ils ne nécessitent point de considération vraiment nouvelle.

SOMMAIRE.

CHAPITRE I.

SUR CERTAINS SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DE FREDHOLM.

1. Considérons le système suivant d'équations intégrales, où les inconnues sont une fonction $u(x_1, \ldots, x_m)$ de m variables dans un domaine borné $\mathcal{O}$, et une fonction $v(y_1, \ldots, y_{m-1})$ de $m-1$ variables dans un domaine borné $\mathcal{S}$, fonctions qui sont désignées abréviativement par $u(X)$ et $v(Y)$:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &u(X) - \lambda\int_{\mathcal{O}}^{(m)} G_1(X, A)\,u(A)\,dV_A - \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_2(X, B)\,v(B)\,dS_B = \varphi(X), \\ &v(Y) - \lambda\int_{\mathcal{O}}^{(m)} G_3(Y, A)\,u(A)\,dV_A - \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_4(Y, B)\,v(B)\,dS_B = \psi(Y); \end{aligned}\right.$$

([1]) On peut cependant étendre les conclusions à certains cas où l'adjointe n'existe pas; *voir* le Mémoire du Tome 49 des *Ann. sc. Éc. Norm.*, ainsi qu'un Mémoire *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*, sous presse dans le *Bull. des Sc. math.*

les fonctions $G_1(X, A)$, $G_2(X, B)$, $G_3(Y, A)$, $G_4(Y, B)$, $\varphi(X)$, $\psi(Y)$, sont données quand X et A sont quelconques dans $\mathfrak{D}$, Y et B quelconques dans $\mathfrak{S}$; les fonctions G_k ($k = 1$ à 4) seront nommées ici les *sous-noyaux*, et le tableau de ces quatre fonctions sera le *tableau nucléaire*. Nous supposons que ces fonctions données sont bornées; de plus elles sont supposées continues en tout point ou système de points des domaines donnés et de leurs frontières, sauf peut-être sur un nombre fini de multiplicités à un nombre p quelconque de dimensions, sur chacune desquelles les coordonnées du point variable ou des points variables sont fonctions continues de p d'entre elles. On a posé (¹)

$$dV_A = d(a_1, \ldots, a_m), \qquad dS_B = d(b_1, \ldots, b_{m-1}),$$

$a_1, \ldots, a_m$ étant les coordonnées de A et $b_1, \ldots, b_{m-1}$ celles de B.

Je dis que *la théorie de Fredholm est applicable à ce système.*

Pour le démontrer, introduisons un autre système d'équations intégrales de la façon suivante. Une des inconnues sera encore $u(X)$, à définir dans $\mathfrak{D}$. L'autre sera une fonction $w(y_1, \ldots, y_{m-1}, s)$ ou $w(Z)$, à définir quand $y_1, \ldots, y_{m-1}$ sont les coordonnées d'un point Y quelconque de $\mathfrak{S}$ et quand, en outre, s est quelconque entre 0 et 1; nous nommerons C le point $(b_1, \ldots, b_{m-1}, t)$ avec $0 \leqq t \leqq 1$, le point B ou $(b_1, \ldots, b_{m-1})$ étant quelconque sur $\mathfrak{S}$. Notre nouveau système est

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & u(X) - \lambda \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} G_1(X, A)\, u(A)\, dV_A \\ & \qquad - \lambda \int_0^1 \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G_2(X, B)\, w(C)\, dS_B\, dt = \varphi(X), \\ & w(Z) - \lambda \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} G_3(Y, A)\, u(A)\, dV_A \\ & \qquad - \lambda \int_0^1 \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G_4(Y, B)\, w(C)\, dS_B\, dt = \psi(Y), \end{aligned}\right.$$

où ne figurent en définitive que des intégrales d'ordre m. La théorie

(¹) *Voir* la notation ici employée pour les intégrales et différentes définitions dans *Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, 43, 1926, p. 1-128, spécialement Chap. I, p. 6 et suiv.

de Fredholm est certainement applicable à ce système, car maintenant les deux fonctions inconnues dépendent de m variables. Or le premier terme $w(Z)$ de la seconde équation est seul à pouvoir contenir s; donc en réalité $w(Z)$ ne dépend pas de s et l'on peut poser

$$w(Z) = v(Y).$$

Mais alors le système (2) se confond avec le système (1). La démonstration est donc faite.

2. Nous avons considéré d'abord le cas où les sous-noyaux et les seconds membres φ et ψ sont bornés. Mais d'autres cas se rencontrent dans les applications.

Supposons qu'une partie de la multiplicité $x_m = 0$ fasse partie de $\mathcal{D}$ ou de sa frontière et que $\mathcal{S}$ soit précisément cette partie de multiplicité. Désignons par X_1 et A_1 les projections $(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)$ et $(a_1, \ldots, a_{m-1}, 0)$ de X et de A sur $\mathcal{S}$. Posons

$$L(X, A) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_m - a_m)^2}$$

et supposons que

$$(3)\quad \begin{cases} G_1(X, A) = O[L^{\alpha-m-1}(X_1, A_1)], & G_2(X, B) = O[L^{\beta-m-1}(X_1, B)], \\ G_3(Y, A) = O[L^{\gamma-m-1}(Y, A_1)], & G_4(Y, B) = O[L^{\delta-m-1}(Y, B)], \end{cases}$$

α, β, γ, δ étant des constantes *positives*. Quand les deux points dont dépend chacune de ces fonctions se projettent sur $\mathcal{S}$ en des points différents, nous supposerons qu'il n'y a que des discontinuités de la sorte dont il a été parlé au paragraphe **1**.

Il va être démontré que *la théorie de Fredholm s'applique*, grâce au procédé classique de l'itération.

Considérons pour cela des fonctions $H_k (k = 1 \text{ à } 4)$ dont chacune porte sur les mêmes points que la fonction G_k de même indice et a une limitation de même sorte, α, β, γ, δ étant seulement remplacés par d'autres nombres positifs α', β', γ', δ'. Nous avons évidemment

$$u(X) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{m} K_1(X, A)\, u(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{m-1} K_2(X, B)\, v(B)\, dS_B = \varphi_1(X),$$

$$v(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{m} K_3(Y, A)\, u(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{m-1} K_4(Y, B)\, v(B)\, dS_B = \psi_1(Y).$$

avec

$$\varphi_1(X) = \varphi(X) + \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_1(X, A)\,\varphi(A)\,dV_A + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_2(X, B)\,\psi(B)\,dS_B,$$

$$\psi_1(Y) = \psi(Y) + \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_3(Y, A)\,\psi(A)\,dV_A + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_4(Y, B)\,\psi(B)\,dS_B;$$

$$K_1(X, A) = G_1(X, A) - H_1(X, A) + \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_1(X, A')\,G_1(A', A)\,dV_{A'} + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_2(X, B')\,G_3(B', A)\,dS_{B'},$$

$$K_2(X, B) = G_2(X, B) - H_2(X, B) + \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_1(X, A')\,G_2(A', B)\,dV_{A'} + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_2(X, B')\,G_4(B', B)\,dS_{B'},$$

$$K_3(Y, A) = G_3(Y, A) - H_3(Y, A) + \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_3(Y, A')\,G_1(A', A)\,dV_{A'} + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_4(Y, A')\,G_3(B', A)\,dS_{B'},$$

$$K_4(Y, B) = G_4(Y, B) - H_4(Y, B) + \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_3(Y, A')\,G_2(A', B)\,dV_{A'} + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_4(Y, B')\,G_4(B', B)\,dS_{B'}.$$

Or si les exposants de L, dans les membres de droite des relations suivantes, sont négatifs, on a (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 46, 1929, p. 147 et suiv.).

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_1(X, A')\,G_1(A', A)\,dV_{A'} = O[L^{\alpha+\alpha'-m+1}(X_1, A_1)],\\
&\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_2(X, B')\,G_3(B', A)\,dS_{B'} = O[L^{\gamma+\beta'-m+1}(X_1, A_1)],\\
&\int_{\mathcal{D}}^{(m)} H_1(X, A')\,G_2(A', B)\,dV_{A'} = O[L^{\beta+\alpha'-m+1}(X_1, B)],\\
&\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H_2(X, B')\,G_4(B', B)\,dS_{B'} = O[L^{\delta+\beta'-m+1}(X_1, B)];
\end{aligned}\right.$$

les intégrales qui figurent dans K_3 et dans K_4 ont des limitations analogues, en remplaçant X_1 par Y, α' par γ' et β' par δ'.

Si l'exposant de L dans un des seconds membres vient à être nul, il faut remplacer ce second membre par $O(\log L)$, pour L plus petit qu'un nombre fixe plus petit que *un*. Si l'exposant était positif, il faudrait remplacer le second membre par $O(1)$; il y a alors en outre continuité si les sous-noyaux composants sont continus quand les deux points sont différents.

De là résulte bien que l'itération, suffisamment répétée, conduit finalement à des sous-noyaux bornés. D'autre part, les changements dans l'ordre des intégrations qui se rencontrent dans la théorie sont ici légitimes; la théorie de Fredholm s'applique donc.

3. Supposons maintenant que les limitations des sous-noyaux ne soient plus du type (3), mais du type

$$(5)\quad \begin{cases} G_1(X, A) = O[L^{\alpha-m}(X, A)], & G_2(X, B) = O[L^{\beta-m+1}(X, B)], \\ G_3(Y, A) = O[L^{\gamma-m+1}(Y, A)], & G_4(Y, B) = O[L^{\delta-m+1}(Y, B)], \end{cases}$$

α, β, γ, δ étant encore positifs; supposons encore que les limitations des H_k soient de l'un quelconque des types (3) ou (5), α, β, γ, δ étant remplacés par d'autres nombres positifs α', β', γ', δ'; ne changeons rien aux autres hypothèses.

Si les limitations des H_k sont du type (3), les limitations (4) sont encore valables (*voir* le Mémoire cité); si elles sont du type (5), on a

$$\begin{aligned} &\int_{\varpi}^{(m)} H_1(X, A')\, G_1(A', A)\, dV_{A'} \\ &\quad = O[L^{\alpha+\alpha'-m}(X, A)] && (\alpha + \alpha' < m), \\ &\quad = O[\log L(X, A)] && [\alpha + \alpha' = m,\ L(X, A) < L_0 < 1], \\ &\quad = O(1) && (\alpha + \alpha' > m), \end{aligned}$$

et les autres limitations (4) subsistent.

Donc pour les limitations (5), un certain nombre d'itérations ramène encore à des sous-noyaux bornés et *la théorie de Fredholm s'applique donc encore.*

4. Le système qui doit être appelé l'*associé* du système (1), pour l'application de la théorie de Fredholm, est évidemment

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&u'(X) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G_1(A, X)\, u'(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_3(B, X)\, v'(B)\, dS_B = \varphi'(X),\\
&v'(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G_2(A, Y)\, u'(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_4(B, Y)\, v'(B)\, dS_B = \psi'(Y),
\end{aligned}
\right.
$$

φ' et ψ' étant des fonctions données, et u' et v' étant des inconnues.

5. Si, au lieu de

$$dS_B = d(b_1, \ldots, b_{m-1}),$$

on avait, dans les équations (1),

$$dS_B = \sigma(B)\, d(b_1, \ldots, b_{m-1}),$$

où σ est une fonction continue positive donnée, rien ne serait changé aux paragraphes **1** à **3**. Le système (6) pourrait encore jouer le rôle du système associé de (1), pour l'application de la théorie de Fredholm, comme on le voit par les changements d'inconnues

$$w(Y) = \sqrt{\sigma(Y)}\, v(Y), \qquad w'(Y) = \sqrt{\sigma(Y)}\, v'(Y).$$

Dans ce cas, par une généralisation de la définition usuelle, nous dirons encore que *le système* (6) *est associé au système* (1).

6. Supposons maintenant que, dans le système (1), $\mathcal{S}$ représente, par exemple, la frontière de $\mathcal{D}$ et dS_B la mesure de l'élément de $\mathcal{S}$ correspondant à B. Supposons encore qu'on puisse recouvrir $\mathcal{S}$ par un nombre fini de régions, tout point de $\mathcal{S}$ étant intérieur au moins à l'une d'elles, de façon que les coordonnées des points de chacune de ces régions puissent s'exprimer par des fonctions de $m - 1$ paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, les dérivées de ces fonctions étant continues. Supposons enfin qu'on puisse définir un paramètre s_m, nul sur $\mathcal{S}$, de façon qu'on puisse, à tout point de l'espace assez voisin de $\mathcal{S}$, faire correspondre un et un seul point de $\mathcal{S}$ et une et une seule valeur de s_m, et que, réciproquement, à un point de $\mathcal{S}$ et à une valeur de s_m assez voisine de zéro, corresponde un point de l'espace et un seul, la correspondance étant continue dans les deux sens.

Si les dérivées secondes de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, relativement à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ existent et sont continues, si de plus les m déterminants fonctionnels de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ ne s'annulent pas ensemble, l'hypothèse relative aux points voisins de $\mathfrak{S}$ est satisfaite, car la plus courte distance à $\mathfrak{S}$ peut jouer le rôle de s_m.

Si, outre la condition relative aux déterminants fonctionnels, on suppose seulement que les dérivées de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont hölderiennes d'exposant quelconque, c'est-à-dire remplissent des conditions de Hölder,

$$|f(s_1, \ldots, s_{m-1}) - f(t_1, \ldots, t_{m-1})| < \mathrm{M}[(s_1 - t_1)^2 + \ldots + (s_{m-1} - t_{m-1})^2]^{\frac{h}{2}}$$
$$(0 < h \leqq 1),$$

il a été établi ailleurs (mémoire cité, pages 165 et 166) qu'il est encore possible de définir s_m.

Si ces hypothèses sont remplies, *la théorie de Fredholm s'applique encore au système* (1). Pour le voir, il faut partager $\mathfrak{S}$ en régions de façon que chaque point de $\mathfrak{S}$ appartienne à une et une seule région et que chaque région soit repérable dans son entier par un seul mode de représentation paramétrique. Alors on concevra v comme remplacé par autant de fonctions inconnues qu'il y a telles régions. Les conclusions du paragraphe **1** subsistent évidemment.

Si l'on veut étendre les résultats des paragraphes **2** et **3**, on concevra en outre que u est remplacé par autant de fonctions inconnues de $s_1, s_2, \ldots, s_m$ qu'il y a de telles régions, plus encore une fonction inconnue à définir quand le point variable n'est pas dans une des régions ainsi repérables (sa distance à $\mathfrak{S}$ a alors une borne inférieure positive).

Le paragraphe **4**, complété par le paragraphe **5**, s'applique aussi.

7. Il est évident qu'on aurait des résultats analogues dans le cas d'un nombre quelconque de fonctions inconnues, le nombre des variables variant d'une façon quelconque d'une inconnue à l'autre.

8. Considérons maintenant le cas où, $\mathfrak{S}$ appartenant à $\mathcal{D}$, on a une équation du type

$$(7) \qquad u(\mathrm{X}) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, u(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} - \lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{B})\, u(\mathrm{B})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{B}} = \varphi(\mathrm{X}),$$

où les sous-noyaux $G(X, A)$ et $H(X, B)$, et le second membre $\varphi(X)$, sont des fonctions données. On suppose que $\mathcal{S}$, sans être nécessairement frontière de $\mathcal{D}$, satisfait aux hypothèses du paragraphe **6**.

On peut remplacer cela par un système tel que (1). En effet, soit Y un point variable de $\mathcal{S}$, et soient $v(Y)$ et $\psi(Y)$ les valeurs de $u(X)$ et de $\varphi(X)$ quand X vient sur $\mathcal{S}$. On a

$$u(X) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, u(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(X, B)\, v(B)\, dS_B = \varphi(X),$$

$$v(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(Y, A)\, u(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(Y, B)\, v(B)\, dS_B = \psi(Y),$$

ce qui est du type (1). On a donc le moyen d'appliquer la théorie de Fredholm. Le *système associé* (§ **4**) est

$$u'(X) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(A, X)\, u'(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(B, X)\, v'(B)\, dS_B = \varphi'(X),$$

$$v'(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H(A, Y)\, u'(A)\, dV_A - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(B, Y)\, v'(B)\, dS_B = \psi'(Y).$$

9. Les conclusions du paragraphe précédent s'étendent à des systèmes où un nombre quelconque d'inconnues figurent chacune sous des intégrales d'ordres variés ([1]).

CHAPITRE II.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE PRINCIPALE DE L'ÉQUATION $\Delta u = u$.

1. Si l'on suppose que la fonction u ne dépend que de la distance r du point variable X ou $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ à un point fixe A ou $(a_1, a_1, \ldots, a_m)$, on trouve immédiatement que

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{du}{dr}.$$

([1]) *Voir* sur ce sujet LEON LICHTENSTEIN, *Bemerkungen über belastete Integralgleichungen*, dans *Studia Mathematica*, III, 1931, p. 212 à 225.

L'équation $\Delta u = u$ devient donc

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{du}{dr} - u = 0. \tag{1}$$

Posons

$$u = r^{\frac{1-m}{2}} v, \qquad 2r = z;$$

l'équation (1) devient

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left[\frac{1-(m-2)^2}{4z^2} - \frac{1}{4}\right] v = 0. \tag{2}$$

Cette équation (2) est un cas particulier de l'équation hypergéométrique confluente

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{1-4n^2}{4z^2}\right) w = 0,$$

étudiée par M. Whittaker [1]; il suffit de prendre $k = 0$, $n = \frac{m-2}{2}$. D'après cela, l'équation (2) admet la solution particulière

$$v(z) = \frac{\exp\left(-\frac{z}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m-3}{2}} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\frac{m-3}{2}} e^{-t}\, dt \qquad (m > 1), \tag{3}$$

formule où z peut recevoir n'importe quelle valeur complexe, les valeurs réelles négatives ou nulles étant seules exceptées; la détermination de

$$\left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\frac{m-3}{2}}$$

est celle qui se réduit à 1 pour $t = 0$; l'intégrale est prise le long du

---

(1) WHITTAKER et WATSON, *Modern Analysis*, 3e édition, Cambridge, 1920, Chap. XVI. L'étude qui suit peut être, si l'on veut, évitée, à condition de se reporter aux expressions de la solution élémentaire principale pour $m = 2$ et pour $m = 3$ (*voir* à la fin du présent chapitre) et de remarquer que, si $u(r)$ est cette solution pour une certaine valeur de m, $\frac{-1}{2\pi r}\frac{du}{dr}$ est la solution élémentaire principale relative à l'entier $m + 2$.

demi-axe réel positif. Cette même solution s'écrit aussi, si m est pair,

$$(4)\quad v(z)=\frac{\exp\left(-\frac{z}{2}\right)}{2\pi i}\int_{-\infty i}^{\infty i}\frac{\Gamma(s)\,\Gamma\left(-s-\frac{m-3}{2}\right)\Gamma\left(-s+\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-m}{2}\right)}z^s\,ds$$

$$(m \text{ pair}),$$

le chemin d'intégration commençant et finissant par des demi-droites portées par l'axe purement imaginaire et étant courbé de façon à laisser à sa gauche l'origine et les entiers négatifs et à sa droite les points

$$n-\frac{m-3}{2}\qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ +\infty).$$

Si

$$z=re^{i\varphi}\qquad \left(-\frac{3\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2},\ r>0\right).$$

on prend

$$z^s=\exp(s\log r).\qquad \log z=\log r+i\varphi,$$

et la fonction ainsi représentée est analytique pour toutes ces valeurs de z; cette nouvelle formule nous donne donc le prolongement analytique de la fonction représentée par (3), quand z traverse le demi-axe réel négatif sans atteindre l'axe purement imaginaire.

Que m soit pair ou impair (mais $m>1$), la fonction $v(z)$ admet, pour $-\alpha<\varphi<\alpha$ $\left(\alpha \text{ étant un angle fixe inférieur à } \frac{3\pi}{2}\right)$, l'expression asymptotique

$$(5)\quad v(z)=\exp\left(-\frac{z}{2}\right)\times\left\{1+\sum_{n=1}^{p}\frac{[1-(m-2)^2][3^2-(m-2)^2]\ldots[(2n-1)^2-(m-2)^2]}{2^{2n}n!\,(-z)^n}+O(z^{-p-1})\right\}$$

quand $|z|$ augmente indéfiniment; si m est impair, il suffit de prendre $p\geqq\frac{m-3}{2}$ pour être certain que le reste $O(z^{-p-1})$ est nul : on a donc dans ce cas une expression de $v(z)$ à l'aide d'un nombre fini de fonctions élémentaires.

2. D'après la théorie de Fuchs, l'équation (1) admet une solution particulière $P(r^2)$ qui est une fonction entière non nulle à l'origine; on fera en sorte que $P(0) = 1$. Si m est impair, une autre solution particulière est $r^{2-m}Q(r^2)$, Q étant une autre fonction entière telle que $Q(0) = 1$; si m est pair, la seconde solution particulière sera

$$r^{2-m}Q(r^2) + hP(r^2)\log r,$$

h étant une certaine constante et Q étant une fonction entière telle que $Q(0) = 1$.

La solution générale est donc

$$\mathrm{A}r^{2-m}Q(r) + \mathrm{B}P(r^2) \qquad (m \text{ impair}),$$
$$\mathrm{A}r^{2-m}Q(r^2) + P(r^2)(\mathrm{A}h\log r + \mathrm{B}) \qquad (m \text{ pair}).$$

Si r tend vers zéro, cette solution générale est donc un infiniment grand équivalent à $\mathrm{A}r^{2-m}$ si $m > 2$, à $\mathrm{A}h\log r$ si $m = 2$ ($\mathrm{A} \neq 0$).

Nous nous proposons de trouver un infiniment grand équivalent à $v(z)$ quand z tend vers zéro; cela nous fournira un infiniment grand équivalent à la fonction u correspondante, lequel devra être d'un des types qui viennent d'être prévus (on verra en effet que A n'est pas nul).

Si m est impair, la formule (5) nous fournit directement la partie principale de v, savoir

$$\frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} z^{-\frac{m-3}{2}},$$

qui, d'après une formule connue de Legendre et de Gauss [1], s'écrit aussi

$$\frac{2^{m-3}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)z^{-\frac{m-3}{2}}.$$

Si m est pair, nous devons recourir à l'expression (4). Si $m \geqq 4$, nous avons, d'après la théorie de M. Whittaker, à prendre le résidu de la fonction à intégrer, pour $s = -\frac{m-3}{2}$, et à changer le signe;

[1] WHITTAKER et WATSON, *Moder Analysis*, 3e édition, 12-15, p. 240.

nous trouvons ainsi la partie principale cherchée

$$\frac{\Gamma(m-2)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} z^{-\frac{m-2}{2}} = \frac{2^{m-3}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) z^{-\frac{m-2}{2}}.$$

c'est-à-dire la même expression que dans le premier cas. Si $m = 2$, $s = \frac{1}{2}$ est un pôle double; nous avons alors

$$z^s = z^{\frac{1}{2}}\left[1 + \left(s - \frac{1}{2}\right)\log z + \ldots\right],$$

en prenant toujours $\log z = \log r + i\varphi$, r et φ ayant les significations déjà dites; puis

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - s\right) = \frac{-1}{s - \frac{1}{2}} - C + \ldots,$$

où C est la constante d'Euler; enfin

$$\Gamma(s) = \sqrt{\pi}\left[1 - (C + 2\log 2)\left(s - \frac{1}{2}\right) + \ldots\right].$$

Donc

$$\Gamma(s)\Gamma^2\left(\frac{1}{2} - s\right) z^s = \sqrt{\pi z}\left[1 + (C - 2\log 2 + \log z)\left(s - \frac{1}{2}\right) + \ldots\right]\left(s - \frac{1}{2}\right)^{-2},$$

d'où l'équivalent cherché

$$-\sqrt{\frac{z}{\pi}}\log z.$$

La fonction

$$u(r) = r^{\frac{1-m}{2}} v(2r)$$

équivaut donc, si $r \to 0$, à

$$\frac{2^{\frac{m-3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right) r^{2-m} \qquad (m > 2),$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\log r \qquad (m = 2).$$

3. Nous appelons *solution élémentaire* de l'équation $\Delta u = u$ toute solution qui, quand $r \to 0$, équivaut à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m-2}{2}\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}} r^{2-m} \qquad (m > 2),$$

$$-\frac{1}{2\pi}\log r \qquad (m = 2).$$

Quand on a une solution élémentaire, on en obtient d'autres en ajoutant à la première le produit de $P(r^2)$ par une constante arbitraire, ou une solution quelconque partout régulière.

Nous appelons *solution élémentaire principale* la solution élémentaire qui tend vers zéro quand r croît indéfiniment.

Il est évident par ce qui précède que la solution élémentaire principale est

$$G(X, A) = \frac{v(2r)}{2(2\pi r)^{\frac{m-1}{2}}} \qquad (m \geqq 2),$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad G(X, A) = \frac{e^{-r}}{2\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)(2\pi r)^{\frac{m-1}{2}}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m-3}{2}}\left(1 + \frac{t}{2r}\right)^{\frac{m-3}{2}} e^{-t}\,dt.$$

Il n'y a pas d'autre solution élémentaire principale; cela résulte de ce que, d'une part, la différence de deux solutions élémentaires principales s'annule à l'infini et est holomorphe partout ailleurs (même en A, on peut le démontrer), et de ce que, d'autre part, cette différence ne peut, à cause de l'équation $\Delta u = u$, atteindre nulle part de maximum positif ni de minimum négatif : en effet, pour un maximum par exemple, Δu est une somme de termes négatifs ou nuls, et par suite, si u est positif, l'équation est contredite (ce raisonnement bien connu est dû à Paraf); cette différence ne peut donc être qu'identiquement nulle.

La solution élémentaire principale de $\Delta u = g^2 u (g > 0)$ se définit de même et est par suite

$$\frac{v(2gr)}{2g}\left(\frac{g}{2\pi r}\right)^{\frac{m-1}{2}} \qquad (m \geqq 2).$$

Cette solution élémentaire principale a été donnée par M. Picard, sous une forme équivalente, pour $m = 2$ (¹) ainsi que pour $m = 3$ (²), cas où elle se réduit à $\frac{e^{-r}}{4\pi r}$ si $g = 1$.

Si $m = 1$, la solution élémentaire principale sera, par définition,

$$G(x, a) = \begin{cases} \dfrac{e^{a-x}}{2} & (x \geqq a), \\ \dfrac{e^{x-a}}{2} & (x < a). \end{cases}$$

CHAPITRE III.

PROBLÈME DE NEUMANN POUR L'OPÉRATION $\Delta u + cu$.

1. Nous considérons un domaine $\mathcal{D}$ borné et ouvert. Nous supposons que sa frontière $\mathcal{S}$ est telle que les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de ses points peuvent s'exprimer par des fonctions de $m - 1$ paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, fonctions dont les dérivées existent et remplissent une condition de Hölder (I, 6), et dont les m déterminants fonctionnels ne peuvent s'annuler ensemble; plus exactement, on peut trouver un nombre fini de régions de $\mathcal{S}$ telles que tout point de $\mathcal{S}$ soit intérieur à une au moins de ces régions, et que chaque région puisse être entièrement représentée de la façon qui vient d'être dite; on ne suppose pas que $\mathcal{S}$ soit d'un seul tenant, mais une parallèle à n'importe quelle normale ne doit rencontrer $\mathcal{S}$ qu'en un seul point infiniment voisin du pied de cette normale. Si $m = 1$, $\mathcal{D}$ est un intervalle ouvert (a, b) $(b > a)$.

Nous nous donnons deux fonctions $c(X)$ et $f(X)$ hölderiennes dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et deux fonctions $\psi(Y)$ et $\varphi(Y)$ continues d'un point Y de $\mathcal{S}$. En étendant un peu l'expression ordinaire, nous entendrons par *problème de Neumann pour l'opération* $\Delta u + cu$ la question de trouver une fonction $u(X)$ continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, satisfaisant dans $\mathcal{D}$ à

(¹) Émile Picard, *Bull. de la Soc. math.*, **28**, 1900, p. 186 à 191; *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, p. 191 à 193.

(²) *Voir* l'Introduction du présent Mémoire.

l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + cu = f,$$

et sur $\mathfrak{S}$ à l'équation

$$(2) \qquad \frac{du}{dn} + \psi u = \varphi,$$

où du/dn désigne la dérivée suivant la normale extérieure à $\mathfrak{S}$; si $m = 1$, $\frac{du}{dn} = \frac{du}{dx}$ en b, $= -\frac{du}{dx}$ en a.

2. Nous introduisons la solution élémentaire principale $G(X, A)$ de $\Delta u = u$ (II, 3) et nous cherchons la fonction u parmi les fonctions du type

$$(3) \qquad u(X) = -\int_{\varpi}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A + 2\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, B)\sigma(B)\,dS_B,$$

où ρ et σ sont deux fonctions inconnues; si $m = 1$, le second terme est à remplacer par

$$2G(x, a)\sigma(a) + 2G(x, b)\sigma(b).$$

Supposons que ρ soit höldérien, et posons $\chi = c + 1$; la condition (1) se traduit par

$$(4) \qquad \rho(X) - \lambda\chi(X)\int_{\varpi}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A + 2\lambda\chi(X)\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, B)\sigma(B)\,dS_B = f(X),$$

car c'est le même calcul que pour les potentiels ordinaires; le paramètre λ doit être pris égal à un.

Pour la condition (2), nous introduirons, pour une fonction v quelconque, la notation

$$(5) \qquad \Theta v(Y) = \frac{dv}{dn} + \psi(Y)v(Y);$$

s'il s'agit d'une fonction de deux points, telle que $G(X, A)$, l'opération $\Theta G(X, A)$ portera sur le premier point X, supposé situé sur $\mathfrak{S}$; si nous voulons faire porter la *même* opération sur le second point A, comme nous en aurons besoin plus tard, nous appellerons cela $ZG(X, A)$

(dzêta de G). Alors la condition (2) s'écrit

$$(6)\qquad \sigma(Y) - \lambda\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} \theta G(Y, A)\varphi(A)\,dV_A + 2\lambda\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \theta G(Y, B)\sigma(B)\,dS_B = \varphi(Y),$$

ou, si $m=1$,

$$(6\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &[1+2\lambda\psi(a)]\sigma(a) + 2\lambda\,\theta G(a, b)\sigma(b) - \lambda\int_a^b \theta G(a, t)\varphi(t)\,dt = \varphi(a);\\ &2\lambda\,\theta G(b, a)\sigma(a) + [1+2\lambda\psi(b)]\sigma(b) - \lambda\int_a^b \theta G(b, t)\varphi(t)\,dt = \varphi(b); \end{aligned}\right.$$

on doit encore prendre $\lambda = 1$.

Nous allons voir que la théorie de Fredholm s'applique au système [(4), (6)] ou [(4), (6 *bis*)]. Posons

$$G^{(1)} = G_1 = G. \qquad G^{(n)}(X, \Xi) = \int_{\mathfrak{D}}^{m} G^{(n-1)}(X, A)\chi(A)G(A, \Xi)\,dV_A.$$

$$G_p = \sum_{n=1}^{p} \lambda^{n-1} G^{(n)}.$$

Si $m > 1$, nous pouvons remplacer l'équation (6) par

$$(7)\qquad \sigma(Y) - \lambda^p\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} \theta G^{(p)}(Y, A)\varphi(A)\,dV_A + 2\lambda\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \theta G_p(Y, B)\sigma(B)\,dS_B$$
$$= \varphi(Y) + \lambda\int_{\mathfrak{D}}^{(m)} \theta G_{p-1}(Y, A)f(A)\,dV_A \qquad (p \geqq 2);$$

le système [(4), (7)] est évidemment équivalent au système [(4), (6)]. Dans le nouveau système, le paramètre λ n'entre pas de la façon classique (G_p est un polynome en λ, avec p termes). Néanmoins quand le système des équations (4) et (7) n'admet, pour $f=0$ et $\varphi=0$, que la solution zéro, la solution, pour f et φ quelconques, se présente sous la forme d'un quotient de deux séries entières en λ, celle du dénominateur, qui ne dépend pas de X, n'étant pas nulle pour la valeur considérée de λ : cela résulte (I, 3) de ce que, quand $A \to Y$,

$$\Theta G^{p}(Y, A) = \begin{cases} O[L^{2p-m-1}(Y, A)] & (2p < m+1), \\ O[\log L(Y, A)] & (2p = m+1), \\ O(1) & (2p > m+1). \end{cases}$$

Pour reproduire alors les raisonnements classiques ([1]), on a seulement à remarquer que les intégrations qu'on rencontrera en chemin sont permutables, comme dans les cas classiques; ainsi

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, Y) \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \Theta G(Y, A)\, \rho(A)\, dV_A\, dS_Y$$
$$= \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \rho(A) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, Y)\, \Theta G(Y, A)\, dS_Y\, dV_A;$$

cela se voit en ôtant du domaine $\mathcal{D}$, où varie A, d'une part une hypersphère infiniment petite de centre X (X étant dans $\mathcal{D}$), d'autre part les points situés entre $\mathcal{S}$ et une hypersurface infiniment voisine; les intégrales retranchées sont infiniment petites dans les deux membres, car $\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, Y)\Theta G(Y, A)\, ds_Y$ est borné quand A varie d'une façon quelconque dans $\mathcal{D}$, X étant fixe dans $\mathcal{D}$. Donc la théorie de Fredholm s'applique aux équations (4) et (6).

Si $m = 1$, les fonctions G et ΘG sont bornées. On peut tirer $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ des équations (6 *bis*) et porter les valeurs obtenues dans l'équation (4). De cette façon on obtient pour $\rho(x)$, $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ des valeurs égales à des quotients de deux séries entières en λ; le dénominateur commun des trois expressions ne dépend pas de x; la théorie de Fredholm s'applique donc encore.

3. Lemme. — *Si les fonctions ρ et σ satisfont au système* [(4), (6)] *homogène* (c'est-à-dire le système obtenu en remplaçant f et φ par zéro) *et si la fonction u définie par* (3) *est identiquement nulle dans* $\mathcal{D}$,

---

([1]) *Voir* Édouard Goursat, *Cours d'Analyse*, t. 3, 2[e] édition, Chap. XXXI, section II, p. 391 et suiv. Les mémoires antérieurs n'utilisaient pas directement le système [(4), (6)]; la marche adoptée ici et dans le chapitre suivant peut être employée dans le cas de l'équation générale du type elliptique.

ρ *et* σ *sont identiquement nuls. Si* $m=1$, *l'équation* (6 *bis*) *doit remplacer l'équation* (6) *dans cet énoncé* (on suppose partout que $\lambda=1$).

En effet la fonction u satisfait hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ à l'équation $\Delta u=u$; d'autre part elle est nulle à l'infini à cause des propriétés de G; elle tend enfin vers zéro si X vient sur $\mathcal{S}$ par points extérieurs, car elle est partout continue. La borne supérieure de u hors de $\mathcal{D}$ ne peut être positive, car une telle borne serait atteinte en un point où Δu serait négatif ou nul, de sorte qu'on ne pourrait avoir $\Delta u=u$; de même la borne inférieure n'est pas négative; donc u est identiquement nul hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, donc dans tout l'espace. Sur $\mathcal{S}$, Θu est donc nul aussi bien pour la fonction définie dans $\mathcal{D}$ que pour la fonction définie hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$; donc $\sigma=0$. En comparant les équations (3) et (4), on voit alors que $\rho=-\chi u=0$. Notre proposition est établie.

4. Théorème. — *Si le problème homogène* (c'est-à-dire le problème relatif aux données $f=0$, $\varphi=0$) *n'a que la solution zéro, les problèmes non homogènes correspondants* (c'est-à-dire relatifs à la même fonction ψ et à des fonctions f et φ quelconques) *ont tous une solution et une seule.*

Il est évident *a priori* qu'il ne peut y avoir plus d'une solution. D'autre part, à toute solution (ρ, σ) du système [(4), (6)] correspond, par la formule (3), une solution du problème : en effet les intégrales

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A, \qquad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\sigma(B)\,dS_B$$

ont des dérivées continues en tout point de $\mathcal{D}$, et puisque, par hypothèse, χ et f sont hölderiens, l'équation (4) montre que ρ est hölderien dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$; l'équation (4) entraîne donc l'équation (1) et l'équation (6) entraîne l'équation (2). Mais alors (§ 3) les équations (4) et (6) ont toujours une et une seule solution; il en est donc de même du problème proposé.

5. L'hypothèse précédente (§ 4) se présente notamment si l'on a $c<0$ en tout point de $\mathcal{D}$ et $\psi>0$ en tout point de $\mathcal{S}$. En effet la solution du problème homogène ne peut, on le sait, atteindre dans $\mathcal{D}$ ni maximum positif ni minimum négatif (§ 3); mais elle ne peut non plus en atteindre sur $\mathcal{S}$, car, pour un maximum positif par exemple, on devrait avoir

$$\frac{du}{dn} \geqq 0, \qquad \psi u > 0,$$

ce qui contredit la relation $\Theta u = 0$; ce raisonnement est dû à M. Gevrey [1].

On peut démontrer que, si les dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ remplissent une condition de Lipschitz (c'est-à-dire une condition de Hölder avec l'exposant un), on a la même conclusion en supposant $c \leqq 0$ et $\psi \geqq 0$, pourvu que c et ψ ne soit pas tous deux identiquement nuls [2].

6. Lemme. — *Les solutions du problème homogène sont donnces chacune une fois et une seule par le système* [(4), (6)] *ou* [(4), (6 *bis*)].

D'après ce qui précéde, cela revient à démontrer que le nombre des solutions linéairement indépendantes du problème homogène est égal au nombre des solutions linéairement indépendantes du système [(4), (6)] ou [(4), (6 *bis*)]. Nous savons déjà que le premier nombre n'est pas inférieur au second (§ 3). Il nous reste donc seulement à prouver que ce premier nombre n'est pas supérieur au second. Nous nous appuyons pour cela sur la formule de Green

$$\int_{\varpi}^{(m)} [v(\Delta u + cu) - u(\Delta v + cv)]\, dV = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} (v\Theta u - u\Theta v)\, dS,$$

dont la vérification est immédiate; si $m = 1$, le second membre est la somme des valeurs de $v\Theta u - u\Theta v$ aux points a et b.

Nous appliquons cette formule à une solution quelconque $u(\mathrm{A})$ du problème homogène, et à la fonction $\mathrm{G}(\mathrm{A}, \mathrm{X})$ considérée comme fonction de A; dans le cas où X appartient à ϖ, il faut l'isoler en ôtant du domaine d'intégration une hypersphère infiniment petite ayant son

(1) Maurice Gevrey, *Journal de Mathématiques*, t. IX, 1930, p. 1 à 80, spécialement p. 74.

(2) *Voir* un Mémoire *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*, sous presse dans *Bull. des Sc. math.* On peut aussi se reporter à ce Mémoire pour le cas où c et f sont supposés continus, sans plus.

centre en X. Un calcul classique donne alors

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} u(\mathrm{A})\chi(\mathrm{A})\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{X})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} u(\mathrm{A})\,\Theta\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{X})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$= u(\mathrm{X}) \quad (\mathrm{X} \text{ dans } \mathcal{D}), \qquad = 0 \quad (\mathrm{X} \text{ hors de } \mathcal{D}+\mathcal{S}).$$

En faisant venir X en un point Y de $\mathcal{S}$, on voit que

$$u(\mathrm{Y}) = 2\int_{\mathcal{D}}^{(m)} u(\mathrm{A})\chi(\mathrm{A})\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{Y})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} u(\mathrm{A})\,\Theta\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{Y})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A}.$$

Les équations

$$(8)\qquad \begin{cases} \rho_1(\mathrm{X}) - \displaystyle\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \rho_1(\mathrm{A})\chi(\mathrm{A})\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{X})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} \\ \qquad - \displaystyle\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(\mathrm{A})\,\Theta\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{X})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} = 0, \\ \sigma_1(\mathrm{Y}) + 2\displaystyle\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \rho_1(\mathrm{A})\chi(\mathrm{A})\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{Y})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} \\ \qquad + 2\displaystyle\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(\mathrm{A})\,\Theta\mathrm{G}(\mathrm{A},\mathrm{Y})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} = 0 \end{cases}$$

admettent donc la solution

$$\rho_1(\mathrm{X}) = u(\mathrm{X}), \qquad \sigma_1(\mathrm{Y}) = -u(\mathrm{Y}).$$

Ce système (8) a donc au moins autant de solutions linéairement indépendantes que le problème homogène; mais c'est le système associé au système [(4), (6)] : le lemme est donc établi (on a supposé $m > 1$, mais le cas où $m = 1$ se traite de même).

7. Théorème. — *Le système d'équations* [(3), (4), (6)] *donne toujours toutes les solutions du problème posé et chacune une seule fois*, [si $m = 1$, (6 *bis*) remplace (6)].

D'après ce qui précède, nous avons seulement à prouver que, si le problème posé est soluble, l'équation (6), ou les équations (6 *bis*), le sont aussi.

Or si le problème est soluble, en appliquant la formule de Green, déjà écrite, à une solution u de ce problème et à une solution v du problème homogène correspondant, on trouve

$$
(9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{D}}^{(m)} v f \, dV - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} v \varphi \, dS = 0 & (m > 1), \\[2ex] \displaystyle\int_a^b v f \, dx - v(a)\varphi(a) - v(b)\varphi(b) = 0 & (m = 1). \end{cases}
$$

Mais (§ **6**) les fonctions $\rho_1 = v$, $\sigma_1 = -v$ constituent la solution générale du système associé à [(4), (6)] ou à [(4), 6 *bis*)]. Si les conditions (9) sont remplies, le système [(4), (6)] est donc soluble. Les conditions (9) sont donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème soit soluble, et les solutions s'obtiennent toutes, et une seule fois chacune, à l'aide des équations (3), (4) et (6).

CHAPITRE IV.

PROBLÈME DE DIRICHLET POUR L'OPÉRATION $\Delta u + cu$.

1. Nous nous donnons un domaine $\mathcal{D}$ borné et ouvert dont la frontière $\mathcal{S}$ remplit exactement les mêmes hypothèses qu'au chapitre précédent (III, **1**); en particulier $\mathcal{S}$ peut ne pas être d'un seul tenant.

Soient en outre $c(X)$ et $f(X)$ deux fonctions hölderiennes dans $\mathcal{D}$ et $\varphi(Y)$ une fonction continue d'un point Y de $\mathcal{S}$. Nous nous proposons de trouver une fonction u continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et qui satisfasse aux conditions

$$
(1) \qquad \Delta u + cu = f \text{ dans } \mathcal{D},
$$

$$
(2) \qquad u = \varphi \text{ sur } \mathcal{S}.
$$

C'est ce que nous appelons le *problème de Dirichlet* pour l'opération $\Delta u + cu$. Nous allons ramener ce problème à un système d'équations de Fredholm qui le résout complètement. Pour abréger, nous laissons de côté le cas où $m = 1$.

2. Nous choisissons une fonction $\psi(Y)$ d'un point de $\mathcal{S}$, cette fonction étant assujettie aux seules conditions d'être continue et négative sur tout $\mathcal{S}$. Cette fonction nous sert à définir les opérations Θ et Z

(III, **2**). En introduisant de nouveau la solution élémentaire principale G(X, A) de l'équation $\Delta u = u$ (II, **3**), nous cherchons u parmi les fonctions du type

$$(3)\qquad u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, B)\sigma(B)\,dS_B.$$

Si ρ est hölderien, l'équation (1) devient alors, en posant $\chi = c + 1$,

$$(4)\qquad \begin{aligned} \rho(X) - \lambda\chi(X)\int_{\mathcal{D}}^{(m)} & G(X, A)\rho(A)\,dV_A \\ & - 2\lambda\chi(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, B)\sigma(B)\,dS_B = f(X), \end{aligned}$$

pourvu que X appartienne à $\mathcal{D}$; quant à la condition (2), elle se traduit par

$$(5)\qquad \begin{aligned} \sigma(Y) - \lambda\int_{\mathcal{D}}^{(m)} & G(Y, A)\rho(A)\,dV_A \\ & - 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(Y, B)\sigma(B)\,dS_B = \varphi(Y); \end{aligned}$$

comme précédemment, le paramètre λ doit être pris égal à un.

Pour prouver que la théorie de Fredholm s'applique, nous définissons comme au chapitre précédent (III, **2**) les fonctions $G^{(p)}$ et G_p. En supposant p au moins égal à 2, nous posons

$$\rho(X) = \rho^*(X) + 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_{p-1}(X, B)\sigma^*(B)\,dS_B, \qquad \sigma(Y) = \sigma^*(Y);$$

on voit que ρ^* et σ^* s'expriment immédiatement en fonctions de ρ et de σ, de sorte que le nouveau système équivaudra à celui des équations (4) et (5). Ce nouveau système est

$$\begin{aligned} \rho^*(X) - \lambda\chi(X)\int_{\mathcal{D}}^{(m)} & G\ (X, A)\rho^*(A)\,dV_A \\ & - 2\lambda^p\chi(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG^{(p)}(X, B)\sigma^*(B)\,dS_B = f(X), \end{aligned}$$

$$\sigma^*(Y) - \lambda\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(Y, A)\rho^*(A)\,dV_A - 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_p(Y, B)\sigma^*(B)\,dS_B = \varphi(Y).$$

On peut remarquer que les sous-noyaux ont encore les limitations déjà indiquées (III, **2**). Les raisonnements du chapitre précédent peuvent être repris, et l'on voit ainsi que la théorie de Fredholm s'applique aux équations (4) et (5) [1].

3. Lemme. — *Si* ρ *et* σ *sont solutions du système* [(4), (5)] *homogène* ($f = 0$, $\psi = 0$), *et si* u *est identiquement nul dans* $\mathcal{D}$, ρ *et* σ *sont identiquement nuls* (on suppose que $\lambda = 1$).

En comparant (3) et (4), nous trouvons

$$\rho = -\chi u = 0.$$

L'équation (5) se réduit alors à

$$\sigma(Y) - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(Y, A)\,\sigma(A)\,dS_A = 0.$$

Pour prouver que zéro est sa seule solution, considérons l'équation associée

$$\tau(Y) - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, A)\,\tau(A)\,dS_A = 0.$$

La fonction

$$v(X) = -2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\,\tau(A)\,dS_A$$

satisfait, sauf peut-être sur $\mathcal{S}$, à l'équation $\Delta v = v$; elle s'annule à l'infini et, quand X vient sur $\mathcal{S}$ par points extérieurs à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, on a $\Theta v = 0$. Dans l'ensemble complémentaire de $\mathcal{D}$, la borne supérieure de v n'est pas positive, car une telle borne devrait être atteinte, et elle ne peut l'être ni hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ à cause de l'équation $\Delta v = v$, ni sur $\mathcal{S}$ à cause de l'équation $\Theta v = 0$, car on a pris pour ψ une fonction négative (même raisonnement qu'au Chapitre III, **3**). De même la borne inférieure n'est pas négative. Donc v est identiquement nul hors de $\mathcal{D}$. Mais la fonction est continue même sur $\mathcal{S}$ et comme elle ne peut non plus atteindre dans $\mathcal{D}$ ni maximum positif ni minimum négatif,

---

[1] Les travaux antérieurs utilisaient seulement les équations en ρ^* et σ^*, avec $p \geq 2$.

elle est nulle dans tout l'espace. Par suite Θv a la même valeur zéro des deux côtés de $\mathcal{S}$, ce qui entraîne la nullité de τ, donc de σ. Le lemme est établi (¹).

4. Théorème. — *Si le problème homogène* (c'est-à-dire relatif aux données $f = 0$ et $\varphi = 0$) *n'a que la solution zéro, les problèmes non homogènes correspondants ont tous une solution et une seule.*

Comme au chapitre précédent (III, 4), tout se ramène à prouver que toute solution du système [(4), (5)] fournit, par la formule (3), une solution de notre problème. Il suffit pour cela de prouver que φ est hölderien dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$, et ce dernier point se prouve encore comme au chapitre précédent.

5. L'hypothèse du théorème est satisfaite notamment, d'après un raisonnement maintes fois employé, si l'on a $c < 0$ dans $\mathcal{D}$. Plus généralement elle est satisfaite si l'on a $c \leqq 0$ dans $\mathcal{D}$ (²).

6. Lemme. — *Les solutions du problème homogène sont données chacune une fois et une seule par le système* [(4), (5)].

Nous admettrons ici que les dérivées des solutions du problème homogène sont continues même sur $\mathcal{S}$ (³). Soit u une quelconque de ces solutions. La formule de Green nous donne

$$\int_{\mathcal{D}}^{m} G(X, A)\chi(A)\,u(A)\,dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{m-1} G(X, B)\,\Theta u(B)\,dS_B$$
$$= u(X) \quad (X \text{ dans } \mathcal{D}), \qquad = 0 \quad (X \text{ hors de } \mathcal{D} + \mathcal{S}).$$

(¹) Une autre démonstration, fondée sur ce que Θu existe et a la même valeur des deux côtés de la double couche, est possible : *voir* le Mémoire *Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes*, X, 6 (*Ann. sc. Éc. Norm.* **49**, 1932, spécialement p. 252).

(²) *Voir* E. Hopf, *Sitzungsberichte der preussischen Akademie*, XIX, 1927, p. 147 à 152, ou le Mémoire cité au Chap. III, § 5 du présent travail.

(³) *Voir* le Mémoire cité dans l'avant-dernière Note, VIII, 6 et 7, p. 94 et suiv.

Appliquons l'opération Θ et faisons venir X sur $\mathcal{S}$; nous trouvons

$$\Theta u(Y) - 2\int_{\varpi}^{(m)} \Theta G(Y, A)\,\chi(A)\,u(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, B)\,\Theta u(B)\,dS_B = 0.$$

Donc les équations

$$\rho_1(X) - \int_{\varpi}^{(m)} G(X, A)\,\chi(A)\,\rho_1(A)\,dV_A - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\,\sigma_1(B)\,dS_B = 0,$$

$$\sigma_1(Y) - 2\int_{\varpi}^{(m)} \Theta G(Y, A)\,\chi(A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G(Y, B)\,\sigma_1(B)\,dS_B = 0$$

admettent les solutions

$$\rho_1(X) = u(X), \qquad \sigma_1(Y) = \Theta u(Y);$$

ce système admet donc au moins autant de solutions linéairement indépendantes que le problème homogène. Il en est donc de même du système associé, c'est-à-dire du système [(4), (5)] homogène. Mais (§ 3) ce dernier a au plus autant de solutions que le problème homogène; il en a donc juste autant. Le lemme est donc établi.

7. Théorème. — *Le système d'équations* [(3) *à* (5)] *donne toujours toutes les solutions du problème posé et chacune une seule fois.*

Soit v une solution quelconque du problème homogène. Le problème donné n'est possible que si, d'après la formule de Green (¹)

$$\int_{\varpi}^{(m)} vf\,dV + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \varphi\,\Theta v\,dS = 0.$$

Mais puisque $\rho_1 = v(X)$ et $\sigma_1 = \Theta v(Y)$ constituent la solution générale du système associé (§ 6), nous avons là les conditions nécssaires et suffisantes pour la solubilité du système [(4), (5)]; leur nombre est égal à celui des fonctions v linéairement indépendantes. Le théorème en résulte aussitôt.

(¹) La rigueur exigerait ici un passage à la limite, à cause des dérivées de u, peut-être inexistantes sur $\mathcal{S}$; voir *Ann. sc. Éc. Norm.*, 46, 1929, V, th. 4, p. 229.

Remarque finale. — Si $m \geqq 3$, des raisonnements semblables à ceux des deux derniers chapitres peuvent être faits en prenant

$$G(X, A) = 2^{-2}\pi^{-m/2}\Gamma(m/2 - 1)r^{2-m},$$

d'où $\Delta G = 0$ (¹). Mais si $m = 2$, la fonction analogue $-\frac{\log r}{2\pi}$ ne s'annule pas à l'infini, ce qui rendrait inapplicables certains raisonnements de ce travail, et en fait les résultats ne subsisteraient pas tous : un potentiel logarithmique de simple couche peut être nul dans un domaine borné sans que la densité soit nulle, comme on le voit par l'exemple d'une densité constante sur la circonférence de rayon un.

La généralisation de la notion de solution élémentaire principale permet de traiter d'une façon toute semblable des questions plus générales (²).

(¹) Pour le problème de Dirichlet. avec la solution élémentaire principale de $\Delta u = u$, on peut prendre ψ identiquement nul, pourvu que les dérivées des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ soient lipschitziennes; avec la fonction G actuelle, on doit prendre ψ négatif (on pourrait prendre $\psi \leqq 0$, à condition qu'il y ait, sur chaque contour intérieur, une région où ψ ne soit pas nul; mais il faut une démonstration spéciale, qui pourra être donnée ultérieurement).

(²) *Voir* les travaux cités.