JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. VRANCEANU

Étude des espaces non holonomes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 113-174.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__113_0>

Étude des espaces non holonomes;

PAR G. VRANCEANU.

INTRODUCTION.

Le présent Mémoire peut être considéré comme la seconde partie de mon récent Mémoire *Studio geometrico dei sistemi anolonomi, prima parte* (¹), car je traiterai ici dans les paragraphes **2** à **7** les sujets qui ont été annoncés dans l'Introduction du travail cité, et précisément : la seconde forme fondamentale, le parallélisme extérieur, l'interprétation géométrique des tenseurs principaux et le problème d'équivalence de deux variétés non holonomes.

En ce qui concerne les autres propriétés des variétés non holonomes, étudiées ici, on donne dans le premier paragraphe une nouvelle démonstration des formules fondamentales, ce qui permet à la rigueur de lire ce Mémoire indépendamment du premier.

Dans les paragraphes **8**, **9** et **10**, on étudie le problème d'applicabilité d'une variété non holonome sur elle-même, et l'on donne un théorème relatif aux variétés non holonomes à coefficients de rotation constants, en entendant ainsi un théorème que j'ai déjà démontré pour les variétés riemanniennes (²).

Dans les paragraphes **11** à **15**, on fait une classification complète

(¹) Voir *Annali di Matematica*, 4ᵉ série, t. **6**, 1928-1929, p. 9-43. Dans la suite, les formules de ce Mémoire, qui sera appelé aussi premier Mémoire, seront indiquées par leurs nombres d'ordre suivis du nombre I.

(²) *Voir* ma Note, *Sur les espaces de Riemann ayant leurs coefficients de rotation constants* (*Comptes rendus*, t. **189**, 1929, p. 386).

des variétés non holonomes les plus simples, les V_3^2, d'après leur groupe d'applicabilité, en insistant particulièrement sur les V_3^2 à courbure constante positive, négative ou nulle, qui ont un groupe à quatre paramètres, comme groupe d'applicabilité.

Avant d'entrer dans le sujet de notre travail, nous allons parler des importants Mémoires qui ont paru [1] après l'apparition de nos premières Notes sur les espaces non holonomes [2] dus à MM. Schouten [3], Synge [4] et Horak [5], et aussi d'un Mémoire de M. Hadamard [6] paru en 1898, pour préciser les différences qui existent entre les points de vue de ces Mémoires et le point de vue que j'ai adopté dans l'étude des espaces non holonomes.

J'ai déjà mis en évidence ces différences dans le cas où les relations de non-holonomie sont complètement intégrables [7], et pour saisir ces différences dans le cas général, supposons que nous ayons un système de n formes de Pfaff, indépendantes de n variables x^1, x^2, ..., x^n, données par les formules

$$ds_a = \sum_{1}^{n} {}_i \lambda_{a\,i}\, dx^i \qquad (a = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

---

(1) Je tiens à avertir que la rédaction du présent Mémoire a été terminée en août 1929.

(2) Voir *Sur les espaces non holonomes* et *Sur le calcul différentiel absolu pour les variétés non holonomes* (*Comptes rendus*, t. **183**, 1926, p. 852 et 1083). La première de ces Notes a été omise d'être citée dans le premier Mémoire.

(3) *On non holonomic connexions* (*Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, vol. **31**, 1928, p. 291-299, et *Ueber nicht holonome Uebertragungen in einer L_n* (*Mathematische Zeitschrift*, vol. **30**, 1929, p. 149-172).

(4) *Geodesics in non holonomic geometry* (*Matematische Annalen*, vol. **99**, 1928, p. 738-758).

(5) *Sur les systèmes non holonomes* (*Bulletin international de l'Académie de Bohême*, 13 janvier 1928, p. 1-18).

(6) *Sur les mouvements de roulement* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4e série, t. 5, 1895).

(7) *Voir* ma Note *Les trois points de vue dans l'étude des espaces non holonomes* (*Comptes rendus*, t. **188**, 1929, p. 973).

où les quantités $\lambda_{a|i}$ peuvent être considérées comme les moments de n congruences indépendantes (λ), et, en ce cas, les formes ds_a sont les arcs sur ces congruences, calculés dans la variété de Riemann, dans laquelle les congruences (λ) sont orthogonales.

Cela dit, tout autre système de n formes indépendantes

$$d\bar{s}_a = \sum_1^n \bar{\lambda}_{a|i}\, dx^i \qquad (a = 1, 2, \ldots, n)$$

peut, comme on sait, s'exprimer en fonction du premier système, par des formules de la forme

$$\text{(II)} \qquad d\bar{s}_a = \sum_1^n{}_b\, c_a^b\, ds_b,$$

où les c_a^b sont des fonctions convenables des variables x, à déterminant différent de zéro. Les formules (II) peuvent être encore interprétées comme une transformation linéaire et homogène, qui permet de passer de n formes ds_a aux n formes $d\bar{s}_a$. Ces formules déterminent en même temps une transformation de congruences, car elles sont équivalentes aux formules

$$\bar{\lambda}_{a|i} = \sum_1^n{}_b\, c_a^b\, \lambda_{b|i}.$$

Les transformations (II) forment évidemment un groupe, le groupe linéaire le plus général et qui dépend de n^2 fonctions arbitraires c_a^b. Considérons maintenant les transformations (II) pour lesquelles les c_a^b satisfont aux conditions d'orthogonalité

$$\sum_1^n{}_a\, c_a^b\, c_a^d = \delta_b^d \begin{cases} = 0, & b \neq d \\ = 1, & b = d \end{cases}.$$

Toutes ces transformations forment un sous-groupe du groupe linéaire : le groupe orthogonal, qui dépend de $\frac{n(n-1)}{2}$ fonctions arbitraires. Ce groupe admet évidemment l'invariant

$$\text{(III)} \qquad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \ldots + ds_n^2.$$

qui est, en vertu des formules (I), une forme quadratique définie et positive, des différentielles $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$, et par conséquent l'étude des invariants de ce groupe orthogonal est équivalent à l'étude des propriétés de la variété de Riemann ayant comme métrique la (III); ce fait est bien connu par les travaux de Ricci et de Levi-Civita, car, en ce cas, les formes ds_a sont les arcs sur n congruences orthogonales dans la variété de Riemann (III).

Cela dit, considérons le système formé par les $n-m$ équations de Pfaff (¹) :

$$(\text{IV}) \qquad ds_{h'} = 0 \qquad (h' = m+1, \ldots, n).$$

En vertu de ces équations, la forme quadratique (III) s'écrit :

$$(\text{III}') \qquad ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \ldots + ds_m^2,$$

et l'on peut se demander quelle est la forme générale d'une transformation (II) qui laisse invariants en même temps la forme (III') et le système (IV). On s'assure facilement que ces transformations sont de la forme

$$(\text{V}) \qquad \left\{ \begin{aligned} ds_h &= \sum_1^m {}_k\, c_h^k\, ds_k + \sum_{m+1}^n {}_{k'}\, c_h^{k'}\, ds_{k'}, \\ ds_{h'} &= \quad 0 \quad + \sum_{m+1}^m {}_{k'}\, c_{h'}^{k'}\, ds_{k'}, \end{aligned} \right.$$

où les c_h^k forment un déterminant orthogonal d'ordre m, les $c_h^{k'}$ sont quelconques, et les $c_{h'}^{k'}$ sont soumises à la seule condition d'avoir leur déterminant différent de zéro. Il est intéressant maintenant de voir comment se change la forme (III) après une transformation (V), et

(¹) Comme dans le premier Mémoire, les indices variant de $m+1$ à n seront indiqués par les lettres accentuées $h', k', l', r', \alpha', \beta', \gamma', \delta'$, en indiquant par les mêmes lettres non accentuées les indices variant de 1 à m. Quant aux indices variant de 1 à n, ils seront indiqués en général par les lettres $a, b, c, d, e, i, j, u, v$. C'est à cause de ces trois séries d'indices que nous avons maintenu les signes de sommation au lieu d'introduire la règle des indices répétés.

l'on trouve sans difficulté la formule

$$(\mathrm{IV}) \quad \overline{ds}_1^2+\ldots+\overline{ds}_n^2=ds_1^2+\ldots+ds_n^2$$
$$-2\sum_{\alpha=m+1}^{n} ds_\alpha \sum_{\lambda,k}^{m} c_\lambda^\alpha c_\lambda^k\, ds_k-\sum_{\alpha,\beta=m+1}^{n} ds_\alpha\, ds_\beta \sum_{k=1}^{m}(c_k^\alpha c_k^\beta-\delta_\alpha^\beta).$$

On voit tout de suite que ces transformations ont pour effet de changer la forme quadratique (III) par l'addition d'un terme qui s'annule en même temps que les équations (IV) et qui se décompose en une forme quadratique des premiers membres des équations (IV) et en une forme linéaire à coefficients dépendant linéairement des premières formes $ds_1, \ldots, ds_m$.

Ce changement de la métrique (III) se traduit dans le cas mécanique d'un système non holonome à liaisons indépendantes du temps par le changement le plus général de la force vive du système à l'aide des liaisons non holonomes, ce qui est précisément le problème considéré par M. Hadamard. Cet auteur a fait voir que, par ce changement de force vive, les équations du mouvement du système ne restent plus les mêmes, sauf le cas où les liaisons sont complètement intégrables, et, par conséquent, le système n'est pas un système non holonome proprement dit.

Ce résultat de M. Hadamard est très important, même dans le cas géométrique, parce qu'il nous fait voir la différence essentielle qui existe, relativement aux propriétés du groupe (V), entre le cas où le système (IV) est complètement intégrable et le cas où il ne l'est pas.

En effet, dans le cas intégrable, le système (IV) est équivalent à une famille de variétés à m dimensions, dépendant de $n-m$ constantes arbitraires, et si l'on considère ces variétés comme des variétés métriques, ayant comme métrique la forme quadratique (III'), les propriétés invariantives du groupe (V) sont précisément les propriétés intrinsèques de ces variétés, c'est-à-dire les propriétés qui dépendent seulement de la métrique de ces variétés, comme sont le parallélisme, les géodésiques, la courbure, etc., et l'on sait combien sont importantes et nombreuses ces propriétés.

Si le système (IV) n'est pas complètement intégrable, et si l'on considère aussi les propriétés invariantives du groupe (V), presque toutes les propriétés qui existaient dans le cas intégrable sont maintenant perdues, et l'on ne peut plus définir le parallélisme, les géodésiques, la courbure.

Par conséquent, pour avoir encore, dans le cas non intégrable, des propriétés intéressantes à étudier, il faut restreindre le groupe (V), et la manière la plus naturelle est de supposer que les $c_h^{k'}$ sont nuls : c'est-à-dire d'étudier les propriétés invariantes et leurs interprétations géométriques du groupe

$$
\text{(VI)} \qquad \begin{cases} \overline{ds}_h = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_h^i \, ds_i \\ \overline{ds}_{h'} = \displaystyle\sum_{r=m+1}^{n} c_{h'}^{r} \, ds_r \end{cases} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m;\ h' = m+1, \ldots, n),
$$

où les c_h^i sont les éléments d'un déterminant orthogonal, et les $c_{h'}^{r}$ ont leur déterminant différent de zéro. On voit tout de suite que, pour une telle transformation, la métrique (III), et par conséquent la force vive du système mécanique correspondant, se modifie, comme nous dit la formule (IV'), par une forme quadratique des premiers membres des équations de non-holonomie, de façon que nous avons

$$
\text{(VI')} \quad \overline{ds}_1^2 + \ldots + \overline{ds}_n^2 = ds_1^2 + \ldots + ds_n^2 + \sum_{\alpha, \beta, \gamma = m+1}^{n} (c_\alpha^\beta c_\alpha^\gamma - \delta_\beta^\gamma) \, ds_\beta \, ds_\gamma .
$$

En ce cas, M. Hadamard lui-même a remarqué que les équations du mouvement du système mécanique ne changent pas. Mais si, au point de vue mécanique, se restreindre aux modifications de la force vive par des formes quadratiques par rapport aux liaisons et non à des formes linéaires quelconques, n'apparaît pas assez naturel, au point de vue groupal, la question est tout à fait naturelle, parce qu'elle se réduit à l'étude des invariants du groupe (VI), lequel est beaucoup plus symétrique que le groupe (V), car il opère séparément, d'une part, sur les formes $ds_1, \ldots, ds_m$ par une transformation orthogonale, et, d'autre part, sur les formes $ds_{m+1}, \ldots, ds_n$ par une transformation linéaire quelconque. Le groupe (VI) dépend ainsi de $\frac{m(m-1)}{2} + (n-m)^2$ fonctions arbitraires des variables x.

Comme on l'a vu dans la première partie de ce Mémoire, le point de vue adopté par nous et qui nous a été imposé par le mode dont nous avons attaqué le problème, est d'étudier les propriétés des variétés non holonomes V_n^m, qui sont en même temps invariantives par rapport aux transformations du groupe (VI), ou, ce qui est la même chose, les invariants du groupe (VI). Ce problème conduit dans le cas intégrable à une classe de propriétés qui sont intermédiaires entre les propriétés intrinsèques et celles rigides de la famille correspondante de variétés riemanniennes (¹), mais, dans ce cas, le problème perd de son importance parce que la plupart de ces propriétés passent parmi les propriétés intrinsèques, tandis que dans le cas non intégrable c'est le problème intrinsèque qui perd toute son importance en faveur de notre problème.

Nous avons la possibilité de restreindre le groupe (VI) aussi, en supposant que les c_i^ξ sont, comme les c_α^λ, les éléments d'un déterminant orthogonal, et, par conséquent, ce groupe est un sous-groupe du groupe orthogonal (V), et en ce cas la métrique (III) est un invariant du problème. Si nous sommes dans le cas intégrable, les propriétés de la famille, qui sont invariantes par rapport à ce groupe, sont les propriétés rigides de la famille. M. Schouten, qui a généralisé la notion de variété non holonome en introduisant les variétés non holonomes à connexion affine, s'occupe surtout des propriétés rigides, c'est-à-dire liées à la variété environnante, et, par conséquent, dans le cas des variétés non holonomes à connexion métrique, il s'occupe des propriétés qui sont invariantes par rapport à ce groupe, tout en remarquant que certaines de ces propriétés sont des invariants par rapport aux changements de la métrique de la variété environnante par une forme quadratique dans les premiers membres des équations de non-holonomie, c'est-à-dire, comme nous l'avons vu plus haut, par rapport aux transformations du groupe (VI). Au point de vue rigide, dans

(¹) *Voir* mon travail, *Familles des variétés riemanniennes* [*Bulletin de la Soc. des Sciences de Cluj* (Roumanie), t. X, 1re partie, 1939, p. 434-443].

l'étude des variétés non holonomes à connexion métrique se sont placés aussi MM. Synge et Horak [1], mais, à un certain point de vue, M. Synge arrive à une généralisation, car dans la recherche des équations du mouvement dans leur première forme, il suppose, sans le dire explicitement, que le système de Pfaff (IV), qui représente les liaisons non holonomes, est de la forme

$$ds_i = c_i\, dt,$$

où les c_i sont des constantes quelconques et où t est le temps.

Étant donné le fait que les propriétés rigides sont des invariants par rapport à un groupe, lui-même sous-groupe du groupe (VI), on peut conclure que les propriétés de notre problème sont encore des propriétés rigides, mais non pas inversement. Ces deux problèmes, le problème rigide et le nôtre, qu'on peut appeler aussi semi-rigide ou semi-intrinsèque, ou même problème intrinsèque non holonome, parce que c'est le seul problème non rigide qu'on puisse poser avec succès dans le cas non intégrable [2], ont évidemment des résultats communs, comme sont le parallélisme intérieur, les géodésiques, etc. En ce qui concerne les résultats non communs, comme sont le parallélisme extérieur, le tenseur de courbure, les équations aux variations des géodésiques, il se présente un fait sur lequel je veux insister parce qu'il peut produire des confusions. En effet, on sait que le tenseur de courbure est, dans le cas intégrable, une propriété intrinsèque. Dans le cas non intégrable, ce tenseur n'existe plus comme propriété intrinsèque, mais on peut le retrouver convenablement modifié dans notre tenseur λ_{abcd}, et pour le problème rigide dans le tenseur de M. Schouten $K_{\dots}^{\dots}$. Ces deux tenseurs se réduisent au tenseur de courbure proprement dit si le système (IV) est complètement intégrable, mais ils sont différents dans le cas non intégrable. D'ailleurs,

---

(1) A ce point de vue, se rattache aussi les travaux de l'abbé ISSALY, *Étude géométrique sur la courbure des pseudo-surfaces* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. 17, 1888-1889, p. 85) et *Étude sur le pseudo-surfaces en général...* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. I, 1901, p. 53).

(2) Voir aussi mon travail, *Sur quelques points de la théorie des espaces non holonomes* (*Bul. Fac. des Sciences de Cernauti*, vol. V, 1932, p. 177).

tous les deux méritent, par certaines de leurs propriétés, d'être appelés tenseurs de courbure de la variété non holonome, et seulement si l'on veut que la courbure soit une propriété le plus intrinsèque possible, on peut préférer notre tenseur $\lambda_{hk,lr}$.

Un fait analogue se présente si l'on veut définir un parallélisme autre que le parallélisme intérieur qui transporte des vecteurs intérieurs au long des chemins intérieurs. Pour le problème rigide, on se sert du parallélisme de la variété riemannienne environnante, tandis que, dans notre cas, ce parallélisme est envisagé comme propriété du groupe, et nous avons seulement la possibilité de transporter un vecteur intérieur le long d'un chemin extérieur et inversement, et de plus, ce parallélisme est un parallélisme de Weyl, car il ne conserve pas la longueur. Cela explique pourquoi, si l'on transporte un vecteur intérieur le long du pentagone infinitésimal de V_n^m, les variations du vecteur transporté s'expriment à l'aide de notre tenseur de courbure [1], si en transportant le vecteur le long du cinquième côté du pentagone, on se sert de notre parallélisme, et ces variations s'expriment, au contraire, à l'aide du tenseur de courbure de M. Schouten si l'on se sert pour le même but du parallélisme lié à la variété environnante, comme l'a fait voir M. Horak [2].

En ce qui concerne les équations aux variations des géodésiques d'une variété non holonome, données dans la première partie, la question a été traitée aussi par M. Synge, mais étant donnée la généralisation dont nous avons parlé plus haut, les résultats sont très différents.

Nous avons mis en évidence les différences entre les divers points de vue adoptés dans l'étude des variétés non holonomes, en considérant certains groupes de transformations de formes de Pfaff; mais il est à remarquer que les auteurs cités entrent dans leurs études par des voies différentes et par des méthodes aussi différentes, ce qui rend très difficile la comparaison détaillée des résultats [3].

---

(1) *Voir* ma Communication au Congrès de Bologne (1928), *Parallélisme et courbure dans une variété non holonome*, vol. V, p. 61.

(2) *Sur la courbure des variétés non holonomes* (*Comptes rendus*, t. 187).

(3) En ce qui concerne le calcul différentiel absolu des congruences dont nous

Avant de terminer cette Introduction je crois devoir dire ici quelle est, d'après moi, l'importance géométrique de l'étude de notre problème. En premier lieu, c'est l'étude systématique d'un groupe linéaire infini de transformations de formes de Pfaff, ou, ce qui est la même chose, de transformations de congruences, méthode qui peut être appliquée aussi à l'étude d'autres variétés, comme sont les variétés de Riemann, les variétés d'Einstein, qui admettent un parallélisme absolu, etc. En second lieu, c'est l'introduction d'une variété qui n'est pas isotrope par rapport au parallélisme, c'est-à-dire qu'elle ne se comporte pas de la même manière dans toutes ses directions. Par le fait qu'elle est partiellement à connexion affine, elle ne rentre pas parmi les variétés à connexion affine de M. Weyl, mais se rattache plutôt aux variétés à connexion affine plus générales introduites par M. Cartan [1].

CHAPITRE I.

PARALLÉLISME ET COURBURE.

1. Nouvelle démonstration des formules fondamentales. — Nous allons donner ici une nouvelle démonstration des formules fondamentales d'une V_n^m, beaucoup plus simple que celle donnée dans le premier Mémoire et provenant d'une manière plus directe de la définition du groupe non holonome. Cette démonstration a aussi l'avantage de mettre en même temps en évidence le caractère tensoriel des conditions d'intégrabilité des congruences de non-holonomie et des congruences fondamentales.

Soit donné un système de n congruences indépendantes (λ_a) $(a=1, 2, \ldots, n)$ des n variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$, ayant comme paramètre les λ_a^i $(i=1, 2, \ldots, n)$ et comme moments (réciproques du

---

nous servons dans notre étude, il faut citer, en dehors des travaux cités dans l'Introduction du premier Mémoire, les Notes suivantes de M. Cisotti : *Derivazione intrinseca nel calcolo diferenziale assoluto*. Nota I-II (*Rend. dei Lincei*, vol. 27, 1er et 2e semestres 1918, p. 387 et 22).

(1) *Voir* E. Cartan, *Sur la représentation géométrique des systèmes matériels non holonomes*. *Atti del Congresso di Bologna*, 1928, vol. VI, p. 253.

déterminant formé avec les λ_a^i) les quantités $\lambda_{a|i}$, et considérons une transformation qui fait passer des congruences (λ) aux autres congruences $(\bar\lambda)$:

$$(1)\qquad \bar\lambda_{a|i} = \sum_{1}^{n} c_a^h \lambda_{h|i},$$

où les coefficients c_a^h sont des fonctions des x à déterminant différent de zéro, pour le moment quelconques. Ces formules peuvent être résolues par rapport aux c_a^h :

$$c_a^h = \sum_{1}^{n}{}_i\, \bar\lambda_{a|i}\lambda_h^i,$$

et si on le dérive intrinsèquement dans le système des congruences (λ), on obtient les formules

$$(1')\qquad \frac{dc_a^b}{ds_c} = \sum_{1}^{n}{}_j \frac{\partial c_a^b}{\partial x^j}\lambda_c^j = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\left(\frac{\partial\bar\lambda_{a|i}}{\partial x^j}\lambda_b^i\lambda_c^j + \bar\lambda_{a|i}\frac{\partial\lambda_b^i}{\partial x^j}\lambda_c^j\right).$$

Le dernier terme de ces formules peut s'écrire, en vertu de (1) et des dérivées premières des relations qui existent entre les paramètres et les moments,

$$\sum_{1}^{n}{}_{ijd}\, c_a^d\lambda_{d|i}\frac{\partial\lambda_b^i}{\partial x^j}\lambda_c^j = -\sum_{1}^{n}{}_{ijd}\, c_a^d\frac{\partial\lambda_{d|i}}{\partial x^j}\lambda_b^i\lambda_c^j.$$

Si l'on change maintenant dans les formules (1') b avec c, et si l'on fait la différence des résultats en tenant compte de la définition des quantités ω_{bc}^a :

$$(1'')\qquad \omega_{bc}^a = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\left(\frac{\partial\lambda_{a|i}}{\partial x^j} - \frac{\partial\lambda_{a|j}}{\partial x^i}\right)\lambda_b^i\lambda_c^j,$$

nous arrivons aux formules suivantes :

$$(2)\qquad \frac{dc_a^b}{ds_c} - \frac{dc_a^c}{ds_b} = \sum_{1}^{n}{}_{df}\, \bar\omega_{df}^a c_d^b c_f^c - \sum_{1}^{n}{}_d\, \omega_{bc}^d c_a^d,$$

qui sont valables quelle que soit la transformation des congruences (1) et constituent la loi de transformation des quantités ω^a_{bc} et $\overline{\omega}^a_{bc}$, qui jouent un rôle très important dans le calcul différentiel absolu des congruences.

Supposons maintenant que la transformation (1) appartienne au groupe non holonome

$$
(2') \qquad \left\{
\begin{aligned}
\overline{\lambda}_{h\,i} &= \sum_{1}^{m} c_h^k \lambda_{k\,i},\\
\overline{\lambda}_{h'\,i} &= \sum_{m+1}^{n} c_{h'}^{k'} \lambda_{k'\,i},
\end{aligned}
\right.
$$

c'est-à-dire que les c_a^b satisfassent aux équations

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_{1}^{m}{}_{h} c_h^k c_h^l = \delta_k^l \left\{ \begin{matrix} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{matrix} \right\} \\
&c_{h'}^{k} = c_h^{k'} = 0
\end{aligned}
\right.
\qquad (h, k, l \leq m,\ h', k' > m).
$$

En ce cas, les formules (2) se décomposent en six groupes différents, d'après les valeurs des indices a, b, c qui peuvent être égaux ou inférieurs à m, ou supérieurs à m.

1° Tous les indices a, b, c sont inférieurs ou égaux à m. Les formules (2) s'écrivent sous la forme

$$
(2'') \qquad \frac{dc_h^k}{ds_l} - \frac{dc_h^l}{ds_k} = \sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta} \overline{\omega}^h_{\alpha\beta} c_\alpha^k c_\beta^l - \sum_{1}^{m}{}_{\alpha} \omega^\alpha_{kl} c_h^\alpha,
$$

où toutes les sommations sont étendues seulement de 1 à m. Si l'on dérive les premières formules (3) par rapport aux $s_l (l \leq m)$, on peut résoudre les équations ainsi obtenues et les équations (2''), par rapport aux dérivées $\frac{dc_h^k}{ds_l}$, et l'on obtient les formules

$$
(4) \qquad \frac{dc_h^k}{ds_l} = \sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta} \overline{\gamma}_{h\alpha\beta} c_\alpha^k c_\beta^l - \sum_{1}^{m}{}_{\alpha} \gamma_{\alpha k l} c_h^\alpha,
$$

qui sont précisément les premières formules fondamentales (30, I), les γ_{hkl} étant les coefficients de rotation de Ricci des congruences (λ).

Ils sont liés à ω^h_{kl} par les formules connues

$$(3')\qquad \omega^h_{kl} = \gamma_{hkl} - \gamma_{hlk}, \qquad \gamma_{hkl} = \frac{1}{2}(\omega^h_{kl} + \omega^k_{lh} - \omega^l_{hk}).$$

2° Les indices a, b sont $\leqq m$, et l'indice c est supérieur à m. Les formules (2) s'écrivent en ce cas, à cause des dernières équations (3),

$$(5)\qquad \frac{dc^{\dot{k}}_h}{ds_{l}} = \sum_{m+1}^{n}{}_{\beta'} \sum_{1}^{m}{}_{\alpha} \bar{\omega}^h_{\alpha\beta'} c^k_\alpha c^{l}_{\beta'} - \sum_{1}^{m} \omega^\alpha_{kl'} c^\alpha_h.$$

et constituent les formules fondamentales (31, I).

3° Les indices a, $b > m$ et $c \leqq m$, on obtient les formules fondamentales (32, I)

$$(6)\qquad \frac{dc^{k'}_h}{ds_l} = \sum_{1}^{m}{}_{\beta} \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} \bar{\omega}^h_{\alpha'\beta} c^{k'}_{\alpha'} c^{l}_{\beta} - \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} \omega^{\alpha'}_{k'l} c^{\alpha'}_h.$$

4° Tous les indices sont supérieurs à m, et l'on a les formules (33', I) :

$$(7)\qquad \frac{dc^{k'}_h}{ds_{l'}} - \frac{dc^{l'}_k}{ds_{k'}} = \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'\beta'} \bar{\omega}^h_{\alpha'\beta'} c^{k'}_{\alpha'} c^{l'}_{\beta'} - \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} \omega^{\alpha'}_{k'l'} c^{\alpha'}_h.$$

qui ne sont résolues que par rapport aux différences des dérivées intrinsèques, et nous avons vu dans le premier Mémoire que ce fait se traduit par l'impossibilité d'obtenir d'un tenseur extérieur un tenseur dérivé par dérivation tensorielle extérieure.

5° L'indice a est supérieur à m et b, $c \leqq m$. Dans ce cas, les formules (2) nous donnent les formules (27, I) :

$$(5')\qquad \sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta} \bar{\omega}^{h'}_{\alpha\beta} c^k_\alpha c^l_\beta - \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} \omega^{\alpha'}_{kl} c^{\alpha'}_{h'} = 0.$$

qui nous disent que les $\omega^{h'}_{kl}$ sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre, deux fois intérieur et une fois extérieur direct.

6° L'indice $a \leqq m$ et b, $c > m$, on trouve les formules

$$(6')\qquad \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'\beta'} \bar{\omega}^h_{\alpha'\beta'} c^{k'}_{\alpha'} c^{l'}_{\beta'} - \sum_{1}^{m}{}_{\alpha} \omega^\alpha_{k'l'} c^\alpha_h = 0.$$

qui expriment que les ω_{kk}^{h} sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre une fois intérieur et deux fois extérieur indirect.

On rappelle que nous avons appelé tenseurs extérieurs directs ceux qui se changent pendant une transformation (2'), comme les moments λ_{kl}, ou bien comme les différentielles des arcs des congruences de non-holonomie

$$ds_k = \sum_1^n \lambda_{k|i}\,dx^i,$$

et tenseurs extérieurs indirects, ou inverses, ceux qui se changent comme les paramètres λ_k^i, ou bien comme les dérivées intrinsèques $\frac{du}{ds_h}$, u étant une fonction quelconque des variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ qui se changent, par la (2'), d'après la loi

$$\frac{du}{d\overline{s}_k} = \sum_{m=1}^{n} \overline{c}_k^{\,r} \frac{du}{ds_r},$$

où les $\overline{c}_k^{\,r}$ sont les réciproques du déterminant formé avec les c_k^r.

Par conséquent, les notions de direct et inverse dans le calcul différentiel absolu des congruences correspondent respectivement aux notions de contrevariance et covariance de calcul différentiel absolu des coordonnées. C'est seulement pour ne pas créer des confusions que nous avons cru devoir introduire ces dénominations nouvelles.

2. La seconde forme fondamentale d'une V_n^m (1). — On a vu dans le premier Mémoire que si l'on fait une transformation de congruences (1), les différentielles des arcs des congruences (λ), qui sont données par les expressions

$$(7)\qquad ds_a = \sum_1^n \lambda_{a|i}\,dx^i.$$

(1) *Voir* aussi ma Note *Seconda forma quadratica fondamentale di una varietà anolonoma ed applicazioni* (*Rend. dei Lincei*, 6e série, vol. 8, 1928, p. 669).

subissent la même transformation

$$d\bar{s}_a = \sum_{b=1}^{n} c_a^b \, ds_b,$$

d'où il en résulte que la quantité

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \ldots + ds_m^2 \tag{8}$$

est un invariant du groupe non holonome (3), invariant appelé la métrique de la variété non holonome, ou la première forme fondamentale, parce que si l'on se donne un point $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ et un vecteur infinitésimal intérieur, partant de ce point, individualisé par les valeurs de $ds_1, ds_2, \ldots, ds_m$, la longueur ds de ce vecteur est donnée par la formule (8). Considérons maintenant un point P', infiniment voisin à P et obtenu de P, par un déplacement extérieur à la variété; par conséquent ses coordonnées peuvent s'écrire sous la forme

$$x'^i = x^i + \sum_{h'=m+1}^{n} \varepsilon_{h'} \lambda_{h'}^i, \tag{9}$$

où les $\varepsilon_{h'}$ sont à traiter comme des constantes infiniment petites.

On peut se demander quelle est la variation de la métrique (8) dans le passage du point P au point P'. Pour trouver cette variation, on remarque que dans P' nous avons

$$ds'_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_{a\,i} \, dx'^i, \tag{7'}$$

et si l'on tient compte des formules (9), les moments $\lambda'_{a\,i}$ s'écrivent, abstraction faite des termes du second ordre dans les $\varepsilon_{h'}$,

$$\lambda'_{a\,i} = \lambda_{a\,i} + \sum_{h'=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{h'} \frac{\partial \lambda_{a\,i}}{\partial x^j} \lambda_{h'}^j.$$

De même en différentiant les formules (9) et en tenant compte du fait que les $\varepsilon_{h'}$ sont à traiter comme des constantes, nous avons

$$dx'^i = dx^i + \sum_{h'=m+1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{h'} \frac{\partial \lambda_{h'}^i}{\partial x^j} dx^j.$$

et par conséquent en négligeant des termes du second ordre dans les $\varepsilon_{k'}$ les formules (7′) s'écrivent

$$ds'_\alpha = ds_\alpha + \sum_{k'=m+1}^{n} \sum_{ij=1}^{n} \varepsilon_{k'} \left(\frac{\partial \lambda_{\alpha i}}{\partial x^j} \lambda^i_{k'} dx^j + \lambda_{\alpha i} \frac{\partial \lambda^i_{k'}}{\partial x^j} dx^j \right).$$

Il suffit de tenir compte maintenant des équations qui relient les paramètres avec les moments et du fait que le déplacement (ds) est intérieur, pour donner à ces formules la forme

$$(8) \qquad \begin{cases} d' s_h = ds_h + \displaystyle\sum_{\alpha'=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{\alpha'} w^h_{k\alpha'} ds_k, \\ d' s_{h'} = 0 + \displaystyle\sum_{\alpha'=m+1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{\alpha'} w^{h'}_{k\alpha'} ds_k. \end{cases}$$

En vertu de ces formules, nous avons

$$(9) \qquad ds'^2_1 + \ldots + ds'^2_m = ds_1^2 + \ldots + ds_m^2 + 2 \sum_{\alpha'=m+1}^{n} \sum_{hk=1}^{m} \varepsilon_{\alpha'} w^h_{k\alpha'} ds_h ds_k,$$

et si l'on tient compte que

$$w^h_{k\alpha'} + w^k_{h\alpha'} = \gamma_{\alpha' hk} + \gamma_{\alpha' kh} = c_{\alpha', hk},$$

la variation de la première forme de la V^m_n, est donnée par l'expression suivante :

$$(10) \qquad \psi = \sum_{m+1}^{n} \varepsilon_{\alpha'} \varphi_{\alpha'}, \qquad \varphi_{\alpha'} = \sum_{h,k=1}^{m} c_{\alpha', hk} ds_h ds_k.$$

La forme ψ peut évidemment s'appeler, par analogie avec les variétés de Riemann, la seconde forme fondamentale de la variété non holonome V^m_n et l'on voit qu'elle se compose d'une forme linéaire des $n - m$ formes quadratiques $\varphi_{\alpha'}$, chacune de ces formes correspondant à une des congruences de non-holonomie de la variété [1]. Que la forme ψ soit une invariante du groupe non holonome, cela résulte du

---

[1] En ce qui concerne la forme $\varphi_{\alpha'}$ d'une V_m, *voir* Élie CARTAN, *La Géométrie des espaces de Riemann* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fasc. 9, 1925, p. 45).

fait que les quantités $v_{\alpha,hk}$ sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre (40', I).

Ce tenseur, qui sera appelé tenseur de la seconde forme fondamentale, peut être retrouvé aussi comme conséquence des formules fondamentales de la variété non holonome. En effet, pour trouver les formules fondamentales (4), nous nous sommes servi des premières dérivées intrinsèques des équations d'orthogonalité des c_h^k. Considérons maintenant les dernières dérivées intrinsèques de ces équations :

$$\sum_{h}^{m}{}_{1}\left(\frac{dc_h^k}{ds_r}c_h^l + \frac{dc_h^l}{ds_r}c_h^k\right) = 0.$$

Or, si l'on élimine les dérivées intrinsèques des c_h^k à l'aide des formules fondamentales (5), nous arrivons sans difficulté aux formules

$$\overline{v}_{\alpha,hk}\, c_h^\alpha c_k^\beta c_\alpha^r = v_{r,\alpha\beta},$$

qui nous disent précisément que les quantités $v_{\alpha,hk}$ sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre, deux fois intérieur et une fois extérieur inverse.

Si le tenseur $v_{\alpha,hk}$ est zéro, la seconde forme est identiquement nulle et la V_n^m est totalement géodésique [1], c'est-à-dire que ses géodésiques sont aussi des géodésiques de toutes les variétés de Riemann V_n, ayant les métriques (1'), dans lesquelles la V_n^m peut être plongée.

Il est évident que l'existence de la seconde forme entraine pour le V_n^m la possibilité de définir des lignes conjuguées, comme les lignes d et δ qui satisfont aux équations de non-holonomie (IV) et aux $n - m$ équations suivantes :

$$\sum_{h,k}^{m}{}_{1} v_{\alpha,hk}\, ds_h\, \delta s_k = 0,$$

mais ces équations n'ont de solutions pour $n > 3m - 2$ que si les

[1] *Voir* J. A. Schouten, *On non holonomic connexions*, déjà cité, p. 298.

secondes formes φ_α ne sont pas indépendantes (¹). Quant aux variétés asymptotiques de la V_n^m, elles seront évidemment formées par les lignes conjuguées avec elles-mêmes.

On peut appeler lignes de courbure de la V_n^m les congruences fondamentales qui réduisent la seconde forme à une somme de carrés, et évidemment ces congruences n'existent pas en général, si $m < n - 1$.

3. Quelques formules relatives aux variétés a connexion affine. — Pour introduire et pour étudier les diverses propriétés d'une variété non holonome, nous nous sommes servi, dans le premier Mémoire, de l'analogie avec les variétés riemanniennes; mais cette analogie n'est pas suffisante pour étudier toutes les propriétés des V_n^m, car ces variétés sont plus complexes que les variétés riemanniennes, et il faut nous servir aussi de l'étude des variétés à connexion affine, et, dans ce but, je donnerai ici quelques formules relatives à une variété à connexion affine rapportée à un système de congruences, formules qui nous seront utiles dans la suite (²).

On sait qu'un espace à n dimensions $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ est à connexion affine, si nous avons dans cet espace n^3 quantités Γ_{ij}^{ν} fonctions continues et dérivables des x, lesquelles, après un changement de variables, se changent selon la loi de la connexion affine. Cette connexion affine est symétrique si les coefficients de la connexion affine Γ_{ij}^{ν} sont symétriques par rapport aux indices inférieurs et en ce cas l'espace est dit encore sans torsion. Dans le cas général, l'espace est avec torsion et les quantités

$$T_{ij}^{\nu} = \Gamma_{ij}^{\nu} - \Gamma_{ji}^{\nu}$$

sont les composantes de la torsion de l'espace, et en même temps elles sont les composantes d'un tenseur du troisième ordre deux fois covariant et une fois contrevariant.

Supposons maintenant que dans cet espace nous introduisions un

(¹) *Voir*, pour le cas intégrable, ma Note *Sur l'indépendance des secondes formes fondamentales d'une* V_n (*Bulletin de la Faculté des Sciences de Cernauti*, vol. III, fasc. 2, 1929, p. 316).

(²) *Cf.* L. P. Eisenhart, *Non riemannian Geometry*, New-York, 1927, p. 44-54.

système de n congruences indépendantes (λ). Avec ce système nous pouvons construire les coefficients de Ricci généralisés

$$(3') \qquad \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \sum_{ij}^{n} \left(\frac{\partial \lambda_{\alpha|i}}{\partial x^{j}} - \sum_{m}^{n} \Gamma^{m}_{ij} \lambda_{\alpha|m} \right) \lambda^{i}_{\beta} \lambda^{j}_{\gamma}$$

qui sont des invariants par rapport aux changements de variables x; mais si l'on fait une transformation de congruences (λ), ces coefficients se changent d'après les formules

$$(4') \qquad \frac{dc^{\beta}_{\alpha}}{ds_{\gamma}} = \sum_{\mu\nu}^{n} \gamma'^{\mu}_{\alpha\nu} c^{\beta}_{\mu} c'^{\nu}_{\gamma} - \sum_{\mu}^{n} \gamma^{\beta}_{\mu\gamma} c^{\mu}_{\alpha}.$$

Ces formules constituent la loi de transformation de connexion affine, pendant une transformation de congruence et les $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ s'appellent les coefficients de la connexion affine dans le système de congruence (λ). Ces coefficients $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont complètement déterminés, dès qu'on se donne les coefficients Γ^{m}_{ij} et les congruences (λ). Inversement, si dans une certaine variété on peut associer à un certain système de congruences (λ) un système de n^{3} quantités $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, invariantes par rapport aux changements de variables et se transformant pendant une transformation de congruences d'après les formules (4'), la variété est à connexion affine, et toutes les propriétés de la variété se peuvent exprimer à l'aide des coefficients $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. La torsion de la variété a comme composantes dans le système de congruences (λ) les quantités

$$(5') \qquad \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \sum_{ijm}^{n} T^{m}_{ij} \lambda_{\alpha|m} \lambda^{i}_{\beta} \lambda^{j}_{\gamma} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

et par conséquent l'espace est sans torsion si les différences des γ satisfont aux conditions

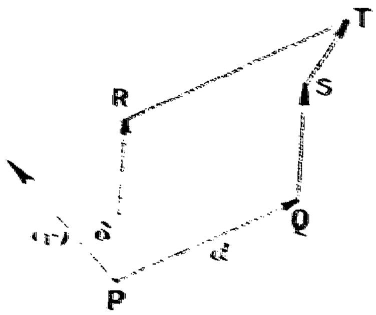
$$\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} = \omega^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

où les quantités $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sont données par les formules (1').

Pentagone infinitésimal. — Si l'on considère deux déplacements PQ et PR partant d'un même point P, ayant comme composantes ds_{1}, ds_{2}, ..., ds_{n} et δs_{1}, δs_{2}, ..., δs_{n}, et si l'on transporte par parallélisme le vecteur infinitésimal PQ le long du vecteur PR et inversement, et si l'on indique par RT et QS les vecteurs ainsi obtenus, les composantes du vecteur ST, que nous indiquons par Δs_a $(a = 1, 2, \ldots, n)$, sont données en fonction de la torsion de la variété par les formules

$$(6') \qquad \Delta s_a = -\sum_{b,c}^{n} r^a_{bc}\, ds_b\, \delta s_c .$$

On voit que le vecteur ST est nul si la variété est sans torsion et en



ce cas la figure PQSR s'appelle, comme il est bien connu, parallélogramme infinitésimal de la variété.

Si la variété est avec torsion, la figure PQSTR est un *pentagone infinitésimal*, où le cinquième côté ST est un infiniment petit du second ordre par rapport aux autres côtés.

4. Parallélisme extérieur ou parallélisme de Weyl d'une V_n^m. — On a vu dans le premier Mémoire l'importance des formules fondamentales (4), (5) et (6) pour la dérivation tensorielle dans la V_n^m. Si l'on compare ces formules avec les formules (4'), il en résulte tout de suite que les quantités γ_{hkl}, w^h_{kr}, $w^h_{k'r}$ sont les coefficients d'une connexion affine dans le système de congruences (λ), et ces formules nous expriment précisément la loi de transformation de cette connexion, quand on fait une transformation de congruences appartenant au groupe non holonome (3). De ce fait, il ne résulte pas que la variété V_n^m soit une variété à connexion affine proprement dite, *car notre connexion affine n'est pas complète*, précisément à cause de l'impossibilité de résoudre les équations (4') par rapport aux dérivées intrinsèques elles-mêmes.

Nous savons comment l'existence d'une connexion affine entraîne non seulement la possibilité de dérivation tensorielle, mais aussi la possibilité du transport par parallélisme et l'on a vu dans le premier Mémoire comment, à l'aide des coefficients γ_{hkl}, on peut transporter par parallélisme un vecteur intérieur le long d'un chemin intérieur aussi. Ce parallélisme est un parallélisme dans le sens de Levi-Civita, car il conserve la longueur du vecteur transporté, et il a été obtenu par une méthode analogue à celle utilisée par M. Levi-Civita dans le cas des variétés riemanniennes. On peut l'obtenir maintenant à l'aide de la formule (4), car en vertu de cette formule les quantités

$$(11) \qquad (dv_h) = dv_h - \sum_{kl}^{m} \gamma_{hkl} v_k ds_l \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

[où les v_h sont les composantes invariantes d'un vecteur intérieur et les ds^l ($l \leq m$) sont les composantes d'un déplacement infinitésimal intérieur] sont les composantes d'un vecteur intérieur et, si ce vecteur est nul, on dit que le vecteur (v_h) a été transporté par parallélisme le long du chemin (ds_l).

Il s'agit maintenant de faire voir les transports par parallélisme, qu'on peut faire à l'aide des autres coefficients de la connexion affine $a^h_{kl'}$ et $a^{h'}_{k'l'}$. Pour cela, on remarque, en premier lieu, que les quantités

$$(12) \qquad (dv_h) = dv_h - \sum_{k=1}^{m} \sum_{l'=m+1}^{n} a^h_{kl'} v_k ds_{l'}$$

[où les v_h sont comme toujours, les composantes d'un vecteur intérieur et les $ds_{l'}$ ($l' > m$) sont les composantes d'un déplacement extérieur à la V^m_n] sont les composantes d'un vecteur intérieur et, si ce vecteur est nul, nous dirons que le vecteur intérieur (v_h) se transporte par parallélisme le long du chemin extérieur ($ds_{l'}$). Ce parallélisme ne conserve pas la longueur du vecteur transporté. En effet, si l'on différentie la formule qui donne le carré de la longueur du vecteur (v_h),

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_m^2,$$

et si l'on tient compte des valeurs des dv_h, tirées des formules (12) égalées à zéro, on trouve

$$(11') \qquad v\,d'v = \frac{1}{2}\sum_{1}^{m}{}_{h,k}\sum_{m+1}^{n}{}_{r} v_{r,hk}\, v_h v_k\, ds_r,$$

où $v_{r,hk}$ est le tenseur de la seconde forme fondamentale de la V_n^m.

Il en résulte ainsi que la longueur du vecteur (v_h) ne peut être conservée pendant le transport, quel que soit le vecteur transporté et quel que soit le chemin (ds_r), que si la variété V_n^m est totalement géodésique.

Cherchons maintenant la variation de l'angle θ de deux vecteurs intérieurs (v) et (u) pendant un transport extérieur. Si nous indiquons par $\theta + d'\theta$ l'angle de ces deux vecteurs dans la position finale, nous avons la formule

$$\cos(\theta + d'\theta) = \frac{\sum_{1}^{m}{}_{h}(u_h + d'u_h)(v_h + d'v_h)}{(u + d'u)(v + d'v)},$$

u et v étant les longueurs de vecteurs, et si nous négligeons les termes du second ordre dans l'opérateur d', on obtient

$$-\sin\theta\, d'\theta = \frac{1}{uv}\sum_{1}^{m}{}_{hk}\sum_{m+1}^{n}{}_{r} v_{r,hk} v_h u_k\, ds_r - \left(\frac{d'u}{u} + \frac{d'v}{v}\right)\cos\theta.$$

Cette formule, qui est symétrique par rapport aux vecteurs (u) et (v), se réduit à une identité seulement dans le cas où les vecteurs ont la même direction ou des directions opposées; dans tous les autres cas elle nous permet de tirer $d'\theta$, valeur de la variation de l'angle θ, et cette variation est toujours nulle si la V_n^m est totalement géodésique. Par conséquent les angles sont conservés si les longueurs sont elles-mêmes conservées. Si les secondes formes φ_x de la V_n^m sont proportionnelles à la première, l'angle de deux vecteurs orthogonaux est conservé.

Pour trouver le transport par parallélisme, qu'on peut obtenir avec les coefficients $\omega^{h'}_{k'l}$, considérons les expressions

$$(12') \qquad (dv^{h'}) = dv^{h'} - \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{m+1}^{n}{}_{k'} \omega^{h'}_{k'l} v^{k'} ds_l,$$

où les $v^{h'}$ $(h' > m)$ sont les composantes d'un vecteur extérieur direct et (ds_l) est un déplacement intérieur. On trouve sans difficulté qu'en vertu des formules fondamentales (6), ces expressions sont les composantes d'un vecteur extérieur direct et, si ce vecteur est nul, nous dirons naturellement que le vecteur extérieur $(v^{h'})$ est transporté par parallélisme le long du chemin intérieur (ds_l) et ce transport est évidemment aussi un transport dans le sens de Weyl, car pour le vecteur $(v^{h'})$ il n'existe pas dans la V_n^m la notion de longueur (1).

En résumé, nous avons dans une variété V_n^m un parallélisme intérieur dans le sens Levi-Civita et deux parallélismes extérieurs dans le sens de Weyl et qui permettent de transporter un vecteur intérieur le long d'un chemin extérieur et inversement. *Ce que nous n'avons pas dans une V_n^m, c'est un parallélisme permettant de transporter un vecteur extérieur au long d'un chemin également extérieur.*

5. Circuits infinitésimaux dans une V_n^m. — *Pentagone infinitésimal de la V_n^m.* — Il s'agit de faire voir ici que la connexion intérieure, déterminée dans une variété non holonome par les coefficients γ_{hkl}, n'est pas symétrique, c'est-à-dire que la V_n^m est, au point de vue de la connexion intérieure, une variété avec torsion. En effet, considérons deux déplacements PQ et PR, tous les deux intérieurs à la V_n^m. Si l'on transporte par parallélisme intérieur chacun de ces vecteurs PQ et PR le long de l'autre, et si l'on indique, comme dans la figure 1, par RT et QS, les vecteurs tous deux intérieurs ainsi trouvés, le vecteur ST, qui ferme le parallélogramme construit de cette manière, et qui a comme composantes les quantités (6″), est en général différent de zéro; car si l'on calcule les composantes de la torsion de la variété

(1) Dans ma Communication au Congrès de Bologne, déjà cité, le parallélisme extérieur s'obtient par la condition que le parallélogramme infinitésimal déterminé par un côté intérieur et un côté extérieur soit fermé.

à l'aide des formules (5") et si l'on tient compte que pour le parallélisme intérieur nous avons les positions

$$(8'') \qquad \gamma^{*}_{hkl} = \gamma_{hkl}, \qquad \gamma^{*}_{h'kl} = 0,$$

on trouve pour les composantes du vecteur ST, dans ce cas, les valeurs

$$(9'') \qquad \Delta s_h = 0, \qquad \Delta s_{h'} = \sum_{1\ kl}^{n} \omega^{h'}_{kl}\, ds_k\, \delta s_l,$$

et par conséquent ce vecteur est extérieur à la variété non holonome V_n^m, et ne peut être toujours nul que si les équations de nonholonomie de la variété sont complètement intégrables.

Parallélogramme infinitésimal de la V_n^m. — En ce qui concerne la connexion affine extérieure de la V_n^m, due aux coefficients $\omega^h_{kl'}$ et $\omega^{h'}_{kl'}$, c'est une connexion symétrique, comme on peut s'en rendre compte en construisant un parallélogramme infinitésimal sur deux vecteurs PQ et PR, le premier intérieur et le second extérieur, et ayant comme composantes $ds_1, ds_2, \ldots, ds_m$ et $\delta s_{m+1}, \ldots, \delta s_n$. Si l'on tient compte des relations

$$(10'') \qquad \gamma^{*}_{hkl'} = \omega^h_{kl'}, \qquad \gamma^{*}_{hl'k} = 0, \qquad \gamma^{*}_{h'kl'} = \omega^{h'}_{kl'}, \qquad \gamma^{*}_{h'l'k} = 0,$$

on voit facilement que toutes les composantes (5") de la torsion sont nulles, et par conséquent le vecteur ST est nul aussi. En résumé, nous avons dans une V_n^m deux figures élémentaires construites à l'aide du parallélisme, un pentagone infinitésimal ayant un seul côté extérieur et un parallélogramme ayant deux côtés intérieurs et deux côtés extérieurs.

6. Interprétation géométrique des tenseurs principaux. — Nous allons faire voir maintenant que si l'on transporte par parallélisme un vecteur intérieur quelconque le long du pentagone infinitésimal de la V_n^m, les variations de ses composantes s'expriment à l'aide du tenseur principal $\lambda_{\alpha h, kl}$, et si l'on transporte le même tenseur le long du parallélogramme infinitésimal de la V_n^m, les variations des composantes s'expriment à l'aide du tenseur principal $\nu_{k\alpha k', l'}$. Ce fait nous donne une interprétation géométrique remarquable de ces deux tenseurs et nous permet en même temps de les appeler, par analogie avec ce qui se passe dans le cas des variétés riemanniennes, tenseurs de courbure de la variété non holonome V_n^m; plus précisément, le premier sera appelé tenseur de la courbure intérieure et le second, tenseur de la courbure extérieure [1].

Supposons en premier lieu qu'au point P de la figure 1, nous ayons un pentagone infinitésimal PQSTR de la V_n^m et un vecteur intérieur (v), avec les composantes $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Ce vecteur transporté par parallélisme intérieur le long de la ligne PQS arrive en S avec les composantes $v_h + dv_h + \delta v_h + \delta d v_h$.

Le même vecteur (v) transporté le long de la ligne PRT arrive en T avec les composantes $v_h + \delta v_h + dv_h + d\delta v_h$. Si le point T coïncidait avec S, les différences des composantes de ces deux vecteurs, dans lesquels est transporté le vecteur (v) par les deux chemins différents PQS et PRT, seraient données par les formules

$$(13)\qquad \omega v_h = \delta d v_h - d \delta v_h = -\sum_{1}^{m} \gamma_{hk,lr}\, v_k\, ds_l\, \delta s_r,$$

qui ne sont que la traduction, dans le système de congruences (λ), des formules bien connues de la géométrie riemannienne et les $\gamma_{hk,lr}$ sont les coefficients à quatre indices de Ricci relatifs aux congruences fondamentales

$$\gamma_{hk,lr} = \frac{d\gamma_{hkl}}{ds_r} - \frac{d\gamma_{hkr}}{ds_l} - \sum_{1}^{m}{}_{\varkappa} (\gamma_{hk\varkappa}\, \omega^{\varkappa}_{rl} + \gamma_{\varkappa hr}\gamma_{\varkappa kl} - \gamma_{\varkappa hl}\gamma_{\varkappa kr});$$

mais, dans notre cas, le vecteur ST n'est pas nul et a comme composantes les quantités données par les formules (9) et, par conséquent, pour faire les différences des composantes des vecteurs d'arrivée en T, il faut transporter le vecteur qui est en S le long du chemin extérieur ST et l'on arrive en T avec le vecteur

$$v_k + dv_k + \delta v_k + \delta d v_k + \Delta(v_k + dv_k + \delta v_k + \delta d v_k).$$

Étant donné le fait que nous négligeons les infiniment petits du

---

[1] *Voir* aussi mon travail *Familles de variétés riemanniennes*, déjà cité.

troisième ordre, le seul terme qui s'ajoute ainsi est le suivant :

$$\Delta v_h = \sum_{1}^{m}{}_{k} \sum_{m+1}^{n}{}_{r} \omega^h_{kr} v_k \Delta s_r = \sum_{1}^{m}{}_{klr} \sum_{m+1}^{n}{}_{\rho} \omega^h_{k\rho} \omega^\rho_{lr} v_k ds_l \delta s_r.$$

et il en résulte que les différences des composantes en T, des deux vecteurs transportés de (v) au long des chemins PRT et PQST, du pentagone infinitésimal de la V^m_n, s'expriment par les formules

$$\Omega v_h = \delta d v_h - d \delta v_h + \Delta v_h = -\sum_{1}^{m}{}_{klr} \lambda_{kh,lr} v_k ds_l \delta s_r, \tag{14}$$

où l'on a posé, comme dans les formules (40, I),

$$\lambda_{kh,lr} = \gamma_{kh,lr} - \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha} \omega^h_{k\alpha} \omega^\alpha_{lr}. \tag{13'}$$

Supposons maintenant que la figure 1 soit le parallélogramme infinitésimal de la V^m_n et par conséquent le vecteur PQ soit intérieur et le vecteur PR extérieur à la variété. En ce cas, les différences des composantes des vecteurs obtenus en $T = S$, en transportant le même vecteur (v) au long des chemins PQT et PRT, s'expriment par les formules

$$\Omega' v_h = \delta d v_h - d \delta v_h,$$

où il faut tenir compte que d signifie un transport intérieur et δ un transport extérieur, et nous avons

$$\delta d v_h = \sum_{1}^{m}{}_{kl} \sum_{m+1}^{n}{}_{r} \left[\frac{d\gamma_{hkl}}{ds_r} - \sum_{1}^{m}{}_{\alpha} (\gamma_{h\alpha l} \omega^\alpha_{kr} - \gamma_{k\alpha l} \omega^\alpha_{lr}) v_k ds_l \delta s_r \right],$$

$$d \delta v_h = \sum_{1}^{m}{}_{kl} \sum_{m+1}^{n}{}_{r} \left[\frac{d\omega^h_{kr}}{ds_l} - \sum_{1}^{m}{}_{\alpha} \gamma_{\alpha kl} \omega^h_{\alpha r} + \sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha} \omega^h_{k\alpha} \omega^\alpha_{rl} \right],$$

et si l'on fait les différences, on trouve les formules cherchées

$$\Omega' v_h = \sum_{1}^{m}{}_{kl} \sum_{m+1}^{n}{}_{r} \nu_{hkl,r} v_k ds_l \delta s_r. \tag{14'}$$

où les $v_{hkl,r}$ sont les composantes du second tenseur principal données par les formules (40', I).

Les formules (14) et (14') nous donnent aussi les variations des composantes du vecteur (v), si on le transporte par parallélisme le long du pentagone infinitésimal PQSTRP et le long du parallélogramme infinitésimal de la V_n^m, pourvu qu'on suppose comme d'habitude que les opérateurs dd et $\delta\delta$ sont zéro (¹).

Il est clair qu'en général la longueur du vecteur (v) n'est pas conservée le long des circuits infinitésimaux de la V_n^m, car chacun de ces circuits a des parties extérieures à la variété et, par des calculs assez faciles, on trouve les formules suivantes :

$$
(13')\qquad
\left\{
\begin{aligned}
v\mathcal{D}v &= \sum_{h}^{1\ldots m} v_h\mathcal{D}v_h = \sum_{\chi}^{m+1\ldots n}\sum_{hklr}^{1\ldots m} v_{\chi,hk}\, w^{\chi}_{lr}\, v_h v_k\, ds_l\, \delta s_r,\\
v\mathcal{D}'v &= \sum_{h}^{1\ldots m} v_h\mathcal{D}'v_h = -\sum_{\chi}^{m+1\ldots n}\sum_{hkr}^{1\ldots m} v_{\chi,hk,r}\, v_h v_k\, ds_r\, \delta s_\chi,
\end{aligned}
\right.
$$

où les $v_{\chi,hk,r}$ sont les composantes du tenseur dérivé du tenseur de la seconde forme.

Nous allons chercher maintenant la variation de l'angle de deux vecteurs intérieurs (u) et (v), partant d'un même point P, quand le vecteur (v) est transporté par parallélisme le long du pentagone infinitésimal. En indiquant par ϑ l'angle des vecteurs (u) et (v) et $\vartheta + \mathcal{D}\vartheta$ l'angle des vecteurs (u) et $(v + \mathcal{D}v)$, nous avons la formule

$$
\cos(\vartheta + \mathcal{D}\vartheta) = \frac{\sum_{h}^{1\ldots m} u_h (v_h + \mathcal{D}v_h)}{u\,(v + \mathcal{D}v)},
$$

et en négligeant les termes du second ordre dans l'opérateur $\mathcal{D}$, on trouve

$$
(14')\qquad -\sin\vartheta\,\mathcal{D}\vartheta = \frac{1}{uv}\sum_{h}^{1\ldots m} u_h\mathcal{D}v_h - \cos\vartheta\,\frac{\mathcal{D}v}{v}.
$$

(¹) *Voir* T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, *rac. dal Dott. E. Persico*, Roma, Stock, 1925, p. 135.

Cette formule, dans laquelle on doit mettre au lieu des ωv_h et ωv leurs valeurs données par les (14) et (13''), nous donne la valeur de $\omega \theta$ (sauf le cas où les directions des vecteurs coïncident et la formule est une identité) et constitue une formule analogue à celle de Pérès pour les variétés riemanniennes (¹). Si les vecteurs (u) et (v) sont orthogonaux et ont comme longueur l'unité, et si les directions d et δ coïncident respectivement avec les directions de (v) et (u), la formule (14'') peut s'écrire

$$\frac{\omega\theta}{ds\,\delta s} = \sum_{hklr}^{m} \lambda_{kh,lr} v_k u_h v_l u_r,$$

et l'on peut dire que le second membre de cette formule représente la courbure en P de la facette plane, formée par (v) et (u); mais il est à remarquer qu'en général cette formule n'est pas symétrique en (u) et (v). D'une manière analogue on peut trouver la variation de l'angle de deux vecteurs dans le cas du parallélogramme et l'on trouve la même formule (14'') avec ω changé en ω'.

CHAPITRE II.

ÉQUIVALENCE ET APPLICABILITÉ.

7. Les conditions d'équivalence de deux V_n^m. — Nous avons introduit jusqu'ici, dans l'étude d'une variété non holonome, cinq tenseurs et précisément deux tenseurs du quatrième ordre : le tenseur de la courbure intérieure et le tenseur de la courbure extérieure et trois tenseurs du troisième ordre : le tenseur de la seconde forme fondamentales, le tenseur d'intégrabilité des congruences fondamentales et le tenseur d'intégrabilité des congruences de non-holonomie. Parmi ces cinq tenseurs, le dernier tenseur seulement est lié à la non-intégrabilité des équations de non-holonomie de la variété, données par les équations (IV) : c'est-à-dire que si ces équations sont complètement intégrables ce tenseur est identiquement nul, les autres quatre tenseurs peuvent être différents de zéro. Il est à remarquer aussi que si nous

---

(¹) *Voir* T. Levi-Civita, déjà cité, p. 219-223.

sommes dans le cas intégrable, et si par conséquent la V_n^m se réduit à une famille de variétés riemanniennes dépendant de $n-m$ constantes arbitraires, le tenseur de courbure intérieure est, pour chaque système de valeurs données aux constantes, le tenseur de courbure de la variété de Riemann V_m correspondante, et c'est le seul tenseur qui nous fournisse une propriété intrinsèque de la famille, les trois autres tenseurs, de la courbure extérieure, de la seconde forme fondamentale et d'intégrabilité des congruences fondamentales nous fournissant des propriétés semi-intrinsèques.

Supposons qu'on ait deux variétés non holonomes $V_n^m(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ et $V_n'^m(x'^1, x'^2, \ldots, x'^n)$, la première rapportée aux congruences (λ), fonctions de variables x, et la seconde rapportée aux congruences (λ'), fonctions de variables x', et considérons une transformation réversible [1]

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \tag{15}$$

qui fait passer des variables x de la V_n^m aux variables x' de la $V_n'^m$. Si l'on indique par μ_a^i les paramètres des congruences (λ'), après l'application de la transformation (15), nous avons, en vertu de la contrevariance des paramètres, les formules

$$\lambda'^i_a = \sum_1^n{}_j \frac{dx'^i}{dx^j}\mu_a^j,$$

et ces formules, résolues par rapport aux dérivées de la transformation (15), nous donnent

$$\frac{dx'^i}{dx^j} = \sum_1^n{}_a \mu_{a|j}\lambda'^i_a, \tag{16}$$

où $\mu_{a|j}$ sont les moments des congruences (λ') dans le système de variables x. Étant donné le fait que les $\lambda_{a|i}$ et $\mu_{a|i}$ sont les moments de deux systèmes de congruences indépendantes dans les mêmes variables x, ils peuvent s'exprimer linéairement les uns en fonction

---

[1] Voir aussi ma Note *Sopra certi problemi di equivalenza* (*Rend. dei Lincei*, 6e série, vol. 9, 1er sem. 1929, p. 840).

des autres et par conséquent nous avons des formules de la forme

$$(15') \qquad \mu_{a i} = \sum_{1}^{n}{}_b\, c_a^b \lambda_{b i} \qquad ds_a = \sum_{1}^{n}{}_b\, c_a^b\, ds_b,$$

où les c_a^b sont des fonctions convenables des x. S'il arrive que les c_a^b satisfont au groupe non holonome (3), les congruences (λ) et $(\mu) = (\lambda')$ déterminent la même variété non holonome, parce qu'elles sont équivalentes sous le groupe non holonome, et par conséquent on peut dire aussi que les variétés V_n^m et $V_n'^m$ sont équivalentes, et l'équivalence s'obtient à l'aide de la transformation (15).

Il en résulte d'ici que le problème d'équivalence des variétés V_n^m et $V_n'^m$ se réduit à voir s'il existe des transformations (15), de façon que, dans les formules (15'), les c_a^b appartiennent au groupe non holonome. Pour trouver les conditions pour que cela arrive, on remarque tout d'abord qu'en vertu des formules (15'), les (16) s'écrivent

$$(17) \qquad \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \sum_{1}^{n}{}_{ab}\, c_a^b \lambda_{b j} \lambda'^i_a,$$

où les c_a^b et $\lambda_{b j}$ sont à considérer comme fonctions des x, et λ'^i_a comme fonctions des x'. Ces formules constituent un système à différentielles totales, auxquelles doivent satisfaire les inconnues x' comme fonctions des x, pour que les (15) soient capables de réaliser l'équivalence.

Les conditions d'intégrabilité d'un tel système s'obtiennent, comme il est bien connu, en écrivant que les dérivées secondes des x' sont symétriques ; on trouve ainsi les conditions

$$(17') \quad \sum_{1}^{n}{}_{ab} \left[\left(\frac{\partial c_a^b}{\partial x^r} \lambda_{b j} - \frac{\partial c_a^b}{\partial x^j} \lambda_{b r} \right) \lambda'^i_a - c_a^b \lambda'^i_a \left(\frac{\partial \lambda_{b j}}{\partial x^r} - \frac{\partial \lambda_{b r}}{\partial x^j} \right) - \sum_{1}^{n}{}_s\, c_a^b \frac{\partial \lambda'^i_a}{\partial x'^s} \left(\lambda_{b j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^r} - \lambda_{b r} \frac{\partial x'^s}{\partial x^j} \right) \right] = 0.$$

Comme les seconds membres de ces équations sont les composantes d'un tenseur deux fois covariant et une fois contrévariant, on peut exprimer aussi que ce tenseur est nul, en écrivant que ses composantes invariantes — qui s'obtiennent des (17') en multipliant par $\lambda_{p i}$, λ_r^i,

λ'_r et en sommant par rapport aux indices i, j, r — sont nulles, et l'on obtient de cette manière les formules suivantes :

$$(18)\qquad \frac{dc^{\alpha}_{\rho}}{ds_{\sigma}}-\frac{dc^{\alpha}_{\sigma}}{ds_{\rho}}=\sum_{1}^{n}{}_{\mu\nu}\,\omega'^{\alpha}_{\mu\nu}c^{\mu}_{\rho}c^{\nu}_{\sigma}-\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\,\omega^{\mu}_{\rho\sigma}c^{\alpha}_{\mu},$$

où les ω' sont les quantités ω relatives aux congruences (λ') de la V'^{m}_{n}, et sont à considérer comme des fonctions de x'.

Si dans ces formules (18) on tient compte du fait que les c appartiennent au groupe non holonome (3), elles se décomposent dans les six groupes suivants, analoguement à ce qu'il est arrivé dans le paragraphe **I** :

$$(19)\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dc^{h}_{k}}{ds_{l}}=\sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta}\,\gamma'_{h\alpha\beta}c^{\alpha}_{k}c^{\beta}_{l}-\sum_{1}^{m}{}_{\alpha}\,\gamma_{\alpha kl}c^{h}_{\alpha},\\
&\frac{dc^{h}_{k}}{ds_{\bar l}}=\sum_{1}^{m}{}_{\alpha}\sum_{m+1}^{n}{}_{\bar\beta}\,\omega'^{h}_{\alpha\bar\beta}c^{\alpha}_{k}c^{\bar\beta}_{\bar l}-\sum_{1}^{m}{}_{\alpha}\,\omega^{\alpha}_{k\bar l}c^{h}_{\alpha},\\
&\frac{dc^{\bar h}_{\bar k}}{ds_{l}}=\sum_{1}^{m}{}_{\beta}\sum_{m+1}^{n}{}_{\bar\alpha}\,\omega'^{\bar h}_{\bar\alpha\beta}c^{\bar\alpha}_{\bar k}c^{\beta}_{l}-\sum_{m+1}^{n}{}_{\bar\alpha}\,\omega^{\bar\alpha}_{\bar k l}c^{\bar h}_{\bar\alpha},\\
&\frac{dc^{\bar h}_{\bar k}}{ds_{\bar l}}-\frac{dc^{\bar h}_{\bar l}}{ds_{\bar k}}=\sum_{m+1}^{n}{}_{\bar\alpha\bar\beta}\,\omega'^{\bar h}_{\bar\alpha\bar\beta}c^{\bar\alpha}_{\bar k}c^{\bar\beta}_{\bar l}-\sum_{m+1}^{n}{}_{\bar\alpha}\,\omega^{\bar\alpha}_{\bar k\bar l}c^{\bar h}_{\bar\alpha};
\end{aligned}\right.$$

$$(19')\qquad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{m+1}^{n}{}_{\bar\alpha\bar\beta}\,\omega'^{h}_{\bar\alpha\bar\beta}c^{\bar\alpha}_{\bar k}c^{\bar\beta}_{\bar l}-\sum_{1}^{m}{}_{\alpha}\,\omega^{\alpha}_{\bar k\bar l}c^{h}_{\alpha}=0,\\
&\sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta}\,\omega'^{\bar h}_{\alpha\beta}c^{\alpha}_{k}c^{\beta}_{l}-\sum_{m+1}^{n}{}_{\bar\alpha}\,\omega^{\bar\alpha}_{kl}c^{\bar h}_{\bar\alpha}=0.
\end{aligned}\right.$$

Par ce fait le problème d'équivalence de deux variétés non holonomes est réduit à l'étude d'un système aux dérivées partielles (17) et (19), pour les n inconnues x', les $\frac{m(m-1)}{2}$ inconnues c^{h}_{k}, car elles satisfont aux premières (3) et les $(n-m)^2$ inconnues $c^{\bar h}_{\bar k}$, avec les relations en termes finis (19'); et comme conséquence immédiate des premières (3) et des secondes (19), il faut associer à ces conditions, en termes finis, les suivantes :

$$(19') \qquad \sum_{u=1}^{n}\sum_{\alpha\beta}^{m} c_{\alpha\beta u}\, c^{\alpha}_{\lambda} c^{\beta}_{\mu} c^{u}_{\nu} = c_{\lambda\mu\nu},$$

qui expriment que les tenseurs des secondes formes des deux variétés sont équivalents.

Nous sommes arrivés aux équations (19) et (19'), en écrivant les conditions d'intégrabilité des équations (17). On peut maintenant chercher les conditions d'intégrabilité des équations (19) et, pour cela, on doit tenir compte de la formule qui lie les dérivées secondes intrinsèques

$$(20) \qquad \frac{d}{ds_\alpha}\frac{dc^{\beta}_{\lambda}}{ds_\gamma} - \frac{d}{ds_\gamma}\frac{dc^{\beta}_{\lambda}}{ds_\alpha} = \sum_{1}^{n} \omega^{\rho}_{\alpha\gamma}\frac{dc^{\beta}_{\lambda}}{ds_\rho}.$$

Si dans cette formule on peut éliminer les dérivées secondes intrinsèques à l'aide des trois premières formules (19), dérivées intrinsèquement, on obtient une formule qui contient les c et leurs dérivées premières et si l'on peut ultérieurement éliminer les dérivées premières à l'aide des (19) elles-mêmes, nous arrivons à des relations en termes finis.

Cette possibilité existe seulement pour les deux cas $a, b, p, q \leqq m$ et $a, b, p, \leqq m, q > m$, et nous arrivons aux relations en termes finis suivantes :

$$(20') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta\gamma} k_{\alpha\beta\gamma\delta}\, c^{\alpha}_{\lambda} c^{\beta}_{\mu} c^{\gamma}_{\nu} - \sum_{1}^{m}{}_{\delta} k_{\lambda\mu\nu\varepsilon}\, c^{\varepsilon}_{\delta} = 0, \\ &\sum_{1}^{m}{}_{\alpha\beta}\sum_{u=1}^{n} c_{\alpha\beta u}\, c^{\alpha}_{\lambda} c^{\beta}_{\mu} c^{u}_{\nu} - \sum_{1}^{m}{}_{\varepsilon} c_{\lambda\mu\varepsilon}\, c^{\varepsilon}_{\nu} = 0, \end{aligned} \right.$$

qui expriment précisément l'équivalence des deux tenseurs de courbure.

Que cette possibilité d'élimination des dérivées premières n'existe pas en d'autres cas, par exemple dans le cas $a, b > m$, $p, q \leqq m$, on le voit aisément en remarquant qu'en ce cas, dans la formule (20), nous avons aussi les dérivées intrinsèques $\frac{dc^{\alpha}_{\lambda}}{ds_r}$, qui ne peuvent pas être éliminées à l'aide des formules (19).

Pour trouver d'autres relations en termes finis, nous n'avons qu'à appliquer aux relations (19'), (19''), (20') le procédé de dérivation tensorielle, donné dans le premier Mémoire, par lequel de tout tenseur intérieur on obtient un tenseur dérivé intérieur et un autre extérieur et de tout tenseur extérieur on obtient un tenseur dérivé intérieurement.

Si toutes ces relations en termes finis, dans les inconnues x' et c, comme fonctions des x, ne sont pas compatibles, les variétés V_n^m et $V_n'^m$ ne sont pas équivalentes, mais si elles sont compatibles, il n'est pas encore démontré que les variétés sont équivalentes. Il est à remarquer que dans le cas d'équivalence, les transformations (15) peuvent dépendre non seulement des constantes arbitraires, mais aussi des fonctions arbitraires, comme nous le verrons dans la suite, notre système n'étant pas en général à différentielles totales, car il ne nous donne pas toutes les dérivées partielles des fonctions c_i^k. Il en résulte d'ici qu'on sera certain que la solution dépendra seulement de constantes arbitraires, toutes les fois que les relations en termes finis nous permettront de les résoudre par rapport aux inconnues c_i^k. On peut observer d'ailleurs que les conditions en termes finis sont toutes du premier degré par rapport aux c_i^k, sauf celles données par le tenseur d'intégrabilité des congruences fondamentales et de ses tenseurs dérivés, qui sont du second degré.

En ce qui concerne les autres inconnues, les conditions en termes finis sont algébriques dans les inconnues c_i^k et en général analytiques dans les x'. Un cas particulier remarquable est celui où toutes les quantités a_{jk}^{i} et par conséquent les γ_{ihk} de la V_n^m sont des constantes. En ce cas l'intégration du système aux dérivées partielles (17), (19) se divise en deux parties, car les équations (19), de même que les relations en termes finis (19'), (19''), (20'), ne contiennent plus les inconnues x' et par conséquent elles forment un système aux dérivées partielles pour les seules inconnues c, et si ce système a des solutions, il en résulte immédiatement que si l'on porte ces solutions dans le système (17), il sera complètement intégrable par rapport aux inconnues x' et la solution dépendra au moins de n constantes arbitraires, et nous avons le théorème suivant :

Si deux variétés non holonomes ou riemanniennes sont équivalentes, et *si l'une d'elles a un système de congruences avec les coefficients de rotation constants, ces variétés sont équivalentes au moins sous les transformations d'un groupe simplement transitif.*

Il s'agit maintenant d'étudier de plus près les conditions en termes finis linéaires dans les $c_k^{k'}$, et, en particulier, les dernières conditions (19'). Pour cela, on rappelle qu'étant donné un système de Pfaff

$$ds^k = 0, \tag{20'}$$

il peut arriver que parmi ses covariants bilinéaires (¹),

$$\Delta s^{k} = \delta\, ds^{k} - d\, \delta s^{k} = \sum_{i,l}^{m} a^{k}_{il}\, ds^i\, \delta s^l,$$

seulement $n - p$ soient indépendantes. En ce cas, par une combinaison convenable des ds^{k}, on peut supposer que les covariants $\Delta s^{p'}$ $(p' = m+1, \ldots, p)$ sont nuls, de façon que les équations $ds^{p'} = 0\,(p' \leqq p)$ forment le premier système dérivé du système (20''), caractérisé par les conditions $a^{p'}_{kl} = 0\,(p' \leqq p)$ et par le fait que les équations

$$\sum_{p'=1}^{p} a^{p'}_{kl}\lambda_{p'} = 0 \tag{20''}$$

n'ont que la solution $\lambda_{p'} = 0$. Quant au second système dérivé $ds^{q'} = 0\,(q' = m+1, \ldots, q)$ de (20''), qui est en même temps le premier système dérivé de $ds^{p'} = 0$, il est caractérisé par les conditions

$$a^{q'}_{kl} = a^{q'}_{k'l} = a^{q'}_{k'l'} = 0 \qquad (k', l' = p+1, \ldots, n). \tag{20'''}$$

D'une manière analogue on peut trouver les conditions qui caractérisent les systèmes dérivés suivants, et l'on sait que si un de ces systèmes coïncide avec son propre système dérivé, il représente les combinaisons intégrables du système (20''). On peut faire la même division en systèmes dérivés du système $ds'^k = 0$ de l'espace V_n^m et

---

(¹) *Voir* E. GOURSAT, *Leçons sur le problème de Pfaff* (Hermann, Paris, 1922, p. 294).

soit $p_1 - m$ le nombre des équations de son premier système dérivé. On peut supposer que $p_1 \geqq p$, car autrement on peut changer le rôle des espaces V_n^m et $V_n'^m$.

Cela dit, si dans les dernières (19'), on tient compte des $a_{kl}^{h'} = 0$ et de (20'''), il en résulte qu'elles nous déterminent toutes les $c_k^{h'}$ ($k' = p+1, \ldots, n$) avec $c_k^{h'} = 0$ ($h' = m+1, \ldots, p_1$). Or, on ne peut pas avoir $p_1 > p$, car en ce cas le déterminant de toutes les $c_k^{h'}$ serait nul. Par conséquent, *les premiers systèmes dérivés doivent avoir le même nombre d'équations, et dans les équations* (15') *elles doivent se changer entre elles*. Si l'on tient compte maintenant dans les formules (19) des $c_k^{h'} = 0$ ($h' = m+1, \ldots, p$) et des conditions (20''), on trouve que *les seconds systèmes dérivés doivent avoir aussi le même nombre d'équations, qui doivent se changer entre elles*

$$(c_{\lambda}^{\mu'} = 0, \lambda = q+1, \ldots, p, \mu' = m+1, \ldots, q).$$

Cette propriété est générale (et elle est aussi valable si l'on cherche l'équivalence des systèmes de Pfaff $ds^{\lambda} = 0$ et $d's^{\lambda} = 0$). Nous avons en particulier le théorème :

« Si le système dérivé du système (20'') est identiquement nul, les formules d'équivalence de V_n^m et $V_n'^m$ contiennent au maximum $n + \frac{m(m-1)}{2}$ constantes arbitraires et aucune fonction arbitraire. »

En passant aux formules (19''), on peut affirmer que V_n^m et $V_n'^m$ ne sont pas équivalentes, s'ils n'ont pas le même nombre de secondes formes indépendantes.

8. L'applicabilité d'une V_n^m sur elle-même (¹). — Supposons maintenant que les paramètres et les moments des congruences (λ'), qui définissent la variété $V_n'^m$, soient respectivement les mêmes fonctions des x', que les λ_n^i, $\lambda_{n|}$, soient des x, et par conséquent si l'on fait la transformation identique

$$x'^i = x^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

(¹) *Voir* ma Note *Sur les groupes d'applicabilité des variétés non holonomes* (*Comptes rendus*, t. **190**, 1930, p. 1100).

les variétés V_n^m et $V_n'^m$ coïncident. On peut dire, évidemment, que les congruences (λ) et (λ') définissent la même variété V_n^m, parce que pour passer des congruences (λ') aux congruences (λ), il faut seulement changer les variables x' en les variables x.

Le problème d'applicabilité d'une V_n^m sur elle-même consiste précisément à chercher s'il n'existe pas d'autres transformations, des variables x' aux variables x, autres que la transformation identique (21), pour passer de la variété $V_n'^m$, rapportée aux variables x', à la même variété rapportée aux variables x: et il est évident que par un raisonnement analogue à celui fait dans le problème d'équivalence de deux variétés non holonomes quelconques, on arrive au système aux dérivées partielles (17), (19), avec la seule différence que les quantités accentuées $\lambda_a'^i$, $\lambda'_{a,i}$, $\omega_{bc}'^a$ sont les mêmes fonctions des x', que les quantités non accentuées λ_a^i, $\lambda_{a,i}$, ω_{bc}^a le sont des x.

Il en résulte encore ici que la totalité des transformations qui réalisent l'applicabilité d'une V_n^m sur elle-même peuvent dépendre de constantes et de fonctions arbitraires, et par conséquent le groupe continu contenu dans ces transformations *peut être un groupe infini*. Pour trouver les équations de définition des transformations infinitésimales du groupe d'applicabilité de la V_n^m, il faut introduire dans les équations (17), (19) et leurs conditions en termes finis les transformations infinitésimales

$$(21') \qquad \begin{cases} x'^i = x^i + \xi^i \,\delta t, \\ c_a^b = \delta_a^b + \varepsilon_a^b \,\delta t, \end{cases}$$

où ξ^i, ε_a^b sont des nouvelles inconnues et δt est à considérer comme une quantité du premier ordre. En particulier, si l'on introduit ces valeurs des c dans les équations de définition du groupe non holonome (3), on trouve pour les ε_a^b les conditions

$$(22) \qquad \varepsilon_h^k + \varepsilon_k^h = 0, \qquad \varepsilon_{h'}^h = \varepsilon_h^{k'} = 0 \qquad (h, k < m;\ h', k' > m),$$

les $\varepsilon_{h'}^{k'}$ restant tout à fait arbitraires. Comme les c et par conséquent les ε_a^b sont des inconnues auxiliaires de notre problème (les inconnues principales étant les ξ^i), on peut se proposer de les éliminer des équations (17) et (22). Pour cela on remarque qu'en vertu des formules (17), résolues par rapport aux c,

$$c_a^b = \sum_1^n \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\lambda_b^j \lambda'_{a\,i},$$

et du fait que nous avons, à cause des premières formules (21'),

$$\lambda'_{a\,i} = \lambda_{a\,i} + \sum_{1}^{n}{}_r \frac{\partial \lambda_{a\,i}}{\partial x^r}\xi^r \delta t,$$

on trouve pour les ε_a^b les expressions

$$\varepsilon_a^b = \sum_1^n{}_{ij} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\lambda_b^j \lambda_{a\,i} + \frac{\partial \lambda_{a\,i}}{\partial x^j}\lambda_b^j \xi^i\right). \tag{22'}$$

Pour donner à ces formules une forme plus simple, il faut introduire, au lieu des ξ (composantes de la transformation infinitésimale sur les axes coordonnés x), les quantités ε [composantes de la transformation sur les congruences (λ)]

$$\varepsilon_a = \sum_1^n{}_i \lambda_{a/i}\xi^i$$

et l'on trouve facilement les formules

$$\varepsilon_b^a = \frac{d\varepsilon_a}{ds^b} + \sum_1^n{}_d \omega^a_{bd}\varepsilon_d. \tag{22''}$$

Il suffit maintenant de tenir compte de ces formules pour donner aux conditions (22) la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\varepsilon_h}{ds_k} + \frac{d\varepsilon_k}{ds_h} + \sum_1^n{}_a \gamma_{a,hk}\varepsilon_a = 0,\\
&\frac{d\varepsilon_h}{ds_{k'}} + \sum_1^n{}_a \omega^h_{k'a}\varepsilon_a = 0,\\
&\frac{d\varepsilon_{h'}}{ds_k} + \sum_1^n{}_a \omega^{h'}_{ka}\varepsilon_a = 0,
\end{aligned}\right. \tag{23}$$

Comme on le voit, ces équations (23), qui sont des équations aux dérivées partielles pour les n inconnues ε_a, considérées comme des fonctions des x, représentent les équations auxquelles doit satisfaire une transformation infinitésimale, plus précisément ses composantes sur les congruences (λ), pour qu'elle soit capable de transformer la V_n^m en elle-même. Par analogie avec les variétés riemanniennes, ces équations peuvent être appelées équations de Killing de la variété non holonome V_n^m.

Des équations (23) il résulte certaines conséquences intéressantes. En premier lieu, pour que les trajectoires de la transformation infinitésimale (ε) soient des courbes intérieures à la V_n^m $(\varepsilon'_h = 0)$, il faut, en accord avec les dernières formules (23), que les ε_h satisfassent aux conditions en termes finis

$$(23') \qquad \sum_1^m \omega^{h}_{kh}\varepsilon_h = 0,$$

et ces conditions ne peuvent être identiquement nulles que si les équations de non-holonomie sont complètement intégrables; et par conséquent, dans le cas intégrable, on peut se limiter à chercher seulement les transformations intérieures à la V_n^m. En second lieu, si l'on veut que les trajectoires de la transformation infinitésimale soient extérieures à la variété $(\varepsilon_h = 0)$, les premières et secondes équations (23) se transforment dans les relations en termes finis

$$\sum_{\alpha'=m+1}^{n} c_{\alpha',hk}\,\varepsilon_{\alpha'} = 0, \qquad \sum_{\alpha'=m+1}^{n} \omega^{h}_{i\alpha'}\,\varepsilon_{\alpha'} = 0.$$

Les premières de ces équations ne peuvent être identiquement nulles que si la variété est totalement géodésique et les secondes que si le tenseur d'intégrabilité des congruences fondamentales est nul.

On peut se demander maintenant quelles sont les V_n^m, qui admettent un groupe d'applicabilité maximum. En premier lieu on remarque que ce groupe maximum ne peut pas contenir plus de $(n-m)^2$ fonctions arbitraires, le nombre des inconnues $c_{h'}^{k'}$, et $n + \frac{m(m-1)}{2}$ paramètres, le nombre des inconnues x' et c_h^k indépendantes. Pour que le groupe de la V_n^m ait le nombre maximum de fonctions arbitraires, il faut évidemment que les relations en termes finis ne constituent pas des liaisons entre les $c_{k'}^{k'}$ et par conséquent que les tenseurs $w_{kl}^{h'}$ et $v_{h',k}$ soient nuls, ce qui revient à dire que la V_n^m est composée d'une famille de variétés riemanniennes à m dimensions, totalement géodésiques. Il s'agit de faire voir que ces conditions sont encore suffisantes. En effet, en ce cas, la métrique d'une V_n, qui contient la famille, supposée définie par des valeurs constantes des $x^{\alpha'}$ ($\alpha' = m+1, \ldots, n$), s'écrit

$$(24) \qquad ds^2 = \sum_1^m a_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta + \sum_{m+1}^n a_{\alpha'\beta'}\, dx^{\alpha'}\, dx^{\beta'},$$

où les $a_{\alpha\beta}$ sont indépendantes des variables $x^{\alpha'}$, et il est évident que la famille se change en elle-même par la transformation

$$(24') \qquad x'^{\alpha'} = \varphi^{\alpha'}(x^{m+1}, x^{m+2}, \ldots, x^n),$$

où les $\varphi^{\alpha'}$ sont $n-m$ fonctions arbitraires de $n-m$ arguments, $x^{m+1}, \ldots, x^n$, qui sont équivalentes à $(n-m)^2$ fonctions arbitraires d'une variable.

Pour que la V_n^m ait encore le nombre maximum de paramètres, il faut que la métrique à m variables donnée par la première sommation (24) soit à courbure constante. En ce cas le groupe d'applicabilité de la V_n^m est composé du groupe d'applicabilité de cette métrique, qui a $\frac{m(m+1)}{2}$ paramètres, plus $n-m$ paramètres contenus dans les fonctions (24') et les $n-m$ fonctions arbitraires (24') des $n-m$ variables.

9. Variétés V_n^m ayant leurs coefficients de rotation constants. — Si les congruences (λ) de la V_n^m ont leurs coefficients de rotation constants, la même chose arrive pour les congruences (λ') et, d'après la remarque faite à la fin du paragraphe **7**, l'intégration du système (17)-(19) se décompose en deux parties, car il faut intégrer en premier lieu le système formé par les équations (19) et les relations en termes finis pour les inconnues c, et puis en connaissant les c en fonction des x, les équations (17) par rapport aux inconnues x'.

Comme le premier système a toujours au moins la solution

$$c_a^b = \delta_a^b (= 0 \text{ ou } 1),$$

si l'on introduit cette solution dans les équations (17), l'intégration de ces équations nous conduit au théorème suivant :

« Une variété non holonome, qui admet un système de congruences ayant pour coefficients de rotation des constantes, admet toujours comme groupe d'applicabilité (total ou partiel) un groupe simplement transitif. »

Il s'agit de faire voir maintenant en quelle relation sont les congruences (λ), qui définissent la V_n^m, avec ce groupe simplement transitif d'applicabilité G_n. En premier lieu, il faut remarquer que les congruences (λ) ayant leurs coefficients de rotation constants, sont les trajectoires d'un groupe simplement transitif à n paramètres [1], les constantes de structure de ce groupe G_λ étant précisément les quantités ω_{bc}^a et si dans les équations (17) de définition du groupe G_n

$$\frac{dx'^i}{dx^j} = \sum_1^n {}_a \lambda_{a|j} \lambda'^i_a$$

on fait la première transformation (21') pour arriver aux équations de définition des transformations infinitésimales de G_n, on trouve sans difficulté les formules

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = \sum_1^n {}_a \frac{\partial \lambda_a^i}{\partial x^r} \lambda_{a|j} \xi^r,$$

qui nous disent que les groupes G_λ et G_n sont réciproques. Si au lieu des ξ, on introduit les composantes Ξ, ces équations peuvent s'écrire sous la forme intrinsèque suivante :

$$\frac{d\Xi_a}{ds_b} = \sum_1^n {}_d \omega_{db}^a \Xi_d, \tag{25}$$

qui nous sera utile dans la suite.

---

[1] *Voir* Élie Cartan, *La Géométrie des groupes de transformations* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 6, 1927, p. 49-54).

Je vais maintenant démontrer la réciproque du théorème donné plus haut et précisément :

Si une variété non holonome admet comme groupe d'applicabilité un groupe simplement transitif G_n, la variété peut être rapportée à un système de congruences $(\overline{\lambda})$, ayant comme coefficients de rotation des constantes, les groupes $G_{\overline{\lambda}}$ et G_n étant réciproques. En effet, supposons que la V_n^m admette comme groupe d'applicabilité le groupe simplement transitif G_n, et soit $G_{\overline{\lambda}}$ le groupe réciproque de G_n. En indiquant par $\overline{\lambda}_a^i$ et $\overline{\lambda}_{a\,i}$ les paramètres et les moments d'un système de congruences, qui définissent le groupe $G_{\overline{\lambda}}$ entre les congruences (λ) qui définissent la V_n^m et ses congruences $(\overline{\lambda})$, il existe évidemment des relations de la forme

$$(25') \qquad \overline{\lambda}_{a\,i} = \sum_1^n {}_b\, c_a^b \lambda_{b\,i}, \qquad \overline{\lambda}_a^i = \sum_1^n {}_b\, \overline{c}_a^b \lambda_b^i,$$

où les c_b^a sont des fonctions convenables des x à déterminant différent de zéro et les $\overline{c}_a^b$ sont les réciproques de ce déterminant. Il s'agit de faire voir qu'on peut se servir du fait que les congruences $(\overline{\lambda})$, qui définissent le groupe $G_{\overline{\lambda}}$, sont déterminées, abstraction faite d'une transformation linéaire de congruences à coefficients constants, de façon que les coefficients c_a^b de la transformation (25') appartiennent au groupe non holonome (3), et par conséquent que les $(\overline{\lambda})$ ainsi choisies déterminent les mêmes variétés non holonomes que les (λ). Pour cela, soient $\overline{\xi}_a$ les composantes d'une transformation infinitésimale de G_n sur les congruences $(\overline{\lambda})$. Elles seront liées à ξ_a, en vertu des (25'), par les formules suivantes :

$$(25'') \qquad \overline{\xi}_a = \sum_1^n {}_b\, c_a^b \xi_b.$$

Comme par hypothèse $G_{\overline{\lambda}}$ et G_n sont réciproques, nous avons, en accord avec les formules (25), les équations

$$\frac{d\overline{\xi}_a}{d\overline{s}_b} = \sum_1^n {}_d\, \overline{\omega}_{db}^a \overline{\xi}_d.$$

Or, ces équations peuvent être exprimées à l'aide des éléments relatifs aux congruences (λ) de la V_n^m, car, en dérivant les formules $(25'')$, on obtient

$$\frac{d\bar{\xi}_a}{d\bar{s}_b}=\sum_{d,e}^{n}\left(\frac{dc_a^d}{ds_e}\xi_d+c_a^d\frac{d\xi_d}{ds_e}\right)\bar{c}_b^e,$$

et si l'on tient compte des formules (2), qui lient les ω et les $\bar{\omega}$, nous arrivons sans difficulté aux équations

$$\frac{d\bar{\xi}_a}{d\bar{s}_b}=\sum_{d}^{n}\left[\omega_{d,ab}-\sum_{e}^{n}\frac{dc_e^h}{ds_d}\bar{c}_e^a\right]\xi_d.$$

Si l'on introduit maintenant ces valeurs des dérivées intrinsèques $\frac{d\xi_a}{ds_b}$ dans les équations de Killing (23) et si l'on tient compte du fait que le groupe simplement transitif G_n étant le groupe de la V_n^m, les résultats de la substitution doivent être identiquement zéro quels que soient les ξ, on trouve que les coefficients c_a^b des $(25')$ satisfont aux conditions

$$\sum_{a}^{n}\left(\frac{dc_a^h}{ds_k}\bar{c}_a^k-\frac{dc_a^k}{ds_h}\bar{c}_a^h\right)=0, \tag{27}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{\alpha}^{m}\frac{dc_\alpha^h}{ds_a}\bar{c}_\alpha^k+\sum_{\alpha'}^{n}{}_{m+1}\frac{dc_{\alpha'}^h}{ds_a}\bar{c}_{\alpha'}^k=0,\\&\sum_{\alpha}^{m}\frac{dc_\alpha^k}{ds_a}\bar{c}_\alpha^h+\sum_{m+1}^{n}\frac{dc_{\alpha'}^k}{ds_a}\bar{c}_{\alpha'}^h=0.\end{aligned}\right. \tag{27'}$$

Il s'agit de faire voir maintenant qu'il est possible de choisir les coefficients c_a^b de façon à satisfaire aux équations (27), (27') et à appartenir en même temps au groupe non holonome, en sachant qu'en vertu du fait que les congruences $(\bar{\lambda})$ définissent un groupe continu fini de transformations, les valeurs initiales de ces coefficients c peuvent être choisies arbitrairement. Or, si l'on choisit comme valeurs initiales des c_a^b les valeurs un ou zéro, selon que les indices sont ou non égaux; c'est-à-dire si l'on choisit en un point quelconque les congruences $(\bar{\lambda})$ égales aux (λ), des équations (27'), qui sont linéaires dans les dérivées des coefficients c_α^h, c_k^α, il résulte que pour les valeurs initiales choisies plus haut, toutes ces dérivées sont nulles. Si l'on dérive ces équations, on trouve que les valeurs des dérivées secondes des c_α^h, c_i^α sont zéro avec nos conditions initiales, etc., et par conséquent, pour ces valeurs initiales, les c_α^i, c_i^α sont tous nuls, en accord avec la seconde partie des équations de définition du groupe non holonome. Si l'on tient compte de ce résultat dans les équations (27), la sommation doit être étendue seulement de 1 à m, et si l'on multiplie ces équations par c_α^k, c_β^k et qu'en somme, par rapport à h et k, on trouve sans difficulté les formules

$$d\sum_1^m{}_h (c_\alpha^h c_\beta^h) = 0,$$

qui nous disent que si initialement les m^2 c_α^i appartiennent au groupe orthogonal, ce qui est le cas avec nos conditions initiales, elles continuent à appartenir au groupe orthogonal : et par conséquent sont satisfaites aussi les premières conditions du groupe non holonome.

10. Variétés V_n^m possédant un groupe à un paramètre. — Supposons qu'une variété non holonome donnée V_n^m admet comme groupe d'applicabilité (de transformations en elle-même) un groupe à un paramètre G_1 ; comme il est bien connu, on peut toujours supposer celui-ci engendré par la transformation infinitésimale

$$(28) \qquad X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^n}.$$

Pour trouver les conditions dans lesquelles la V_n^m admet le groupe G_1, il est préférable de partir des formules (22'), lesquelles, en tenant compte des composantes de la transformation (28), s'écrivent

$$\xi_i^h = \sum_1^n{}_k \frac{\partial \lambda_{h|k}}{\partial x^n} \lambda_i^k$$

et par conséquent les équations de Killing (23) reçoivent la forme

$$\sum_1^n{}_i \left(\frac{\partial \lambda_{h|i}}{\partial x^n} \lambda_k^i - \frac{\partial \lambda_{k|i}}{\partial x^n} \lambda_h^i \right) = 0.$$

et

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_{\alpha|i}}{\partial x^{n}} \lambda^{i}_{\beta'} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda_{\alpha'|i}}{\partial x^{n}} \lambda^{i}_{\beta} = 0.$$

Ces équations peuvent être résolues paramétriquement sous la forme suivante :

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{\alpha|i}}{\partial x^{n}} &= \sum_{\gamma=1}^{m} \rho^{\gamma}_{\alpha} \lambda_{\gamma|i}, \\ \frac{\partial \lambda_{\alpha'|i}}{\partial x^{n}} &= \sum_{\gamma'=m+1}^{n} \rho^{\gamma'}_{\alpha'} \lambda_{\gamma'|i}. \end{aligned}\right.$$

où les m^2 fonctions ρ^{β}_{α} sont les éléments d'un déterminant symétrique gauche et les $\rho^{\beta'}_{\alpha'}$ sont quelconques.

Il s'agit maintenant de faire voir que par une transformation de congruences appartenant au groupe non holonome, on peut rapporter la V^{m}_{n} à un système de congruences qui soient indépendantes de la variable x^{n}. En effet, si nous faisons une transformation de congruences (2') et qu'on la dérive par rapport à x^{n}, en tenant compte en même temps des formules (28), on obtient les formules

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_{\alpha|i}}{\partial x^{n}} = \sum_{\beta=1}^{m} \left(\frac{\partial c^{\beta}_{\alpha}}{\partial x^{n}} - \sum_{\gamma=1}^{m} \rho^{\beta}_{\gamma} c^{\gamma}_{\alpha} \right) \lambda_{\beta|i},$$

$$\frac{\partial \bar{\lambda}_{\alpha'|i}}{\partial x^{n}} = \sum_{\beta'=m+1}^{n} \left(\frac{\partial c^{\beta'}_{\alpha'}}{\partial x^{n}} - \sum_{\gamma'=m+1}^{n} \rho^{\beta'}_{\gamma'} c^{\gamma'}_{\alpha'} \right) \lambda_{\beta'|i},$$

et il est clair que si l'on veut que les moments de congruences $(\bar{\lambda})$ soient indépendants de la variable x^{n}, il suffit que les coefficients c^{β}_{α} et $c^{\beta'}_{\alpha'}$ de la transformation du groupe non holonome soient solutions du système différentiel

$$(28')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial c^{\beta}_{\alpha}}{\partial x^{n}} - \sum_{\gamma=1}^{m} \rho^{\beta}_{\gamma} c^{\gamma}_{\alpha} &= 0, \\ \frac{\partial c^{\beta'}_{\alpha'}}{\partial x^{n}} - \sum_{\gamma'=m+1}^{n} \rho^{\beta'}_{\gamma'} c^{\gamma'}_{\alpha'} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Or, les dernières équations de ce système, qui constituent un système différentiel pour les inconnues c_h^λ, comme fonctions de la variable indépendante x^n (les autres variables $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ jouant le rôle de paramètres), admettent toujours des solutions, quelles que soient les quantités ρ_k^λ.

Quant aux premières équations (28''), qui constituent un système différentiel par rapport aux inconnues c_h^λ, pour qu'on soit certain qu'il admette des solutions, il suffit de faire voir que cela n'est pas en contradiction avec le fait que les c_h^λ sont les éléments d'un déterminant orthogonal : or cela n'est pas le cas, car si l'on dérive les conditions d'orthogonalité des c_h^λ par rapport à la variable x^n et si l'on substitue les valeurs de ces dérivées, données par les premières formules (28''), on trouve que les résultats de la substitution sont identiquement zéro, précisément à cause de la symétrie gauche des fonctions ρ_k^λ.

Il est évident que notre démonstration s'applique aussi au cas où la V_n^m admet un groupe abélien à un nombre quelconque de paramètres

$$G_r\left(\frac{\partial f}{\partial x^{n-r+1}}, \frac{\partial f}{\partial x^{n-r+2}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$$

et par conséquent, dans ce cas aussi, on peut s'arranger de façon que les congruences de la V_n^m soient indépendantes des variables $x^{n-r+1}, \ldots, x^n$. De ce fait on tire la conséquence suivante : Une V_n^m proprement dite, c'est-à-dire pour laquelle les équations de non-holonomie ne sont pas complètement intégrables, ne peut pas avoir un groupe abélien à n paramètres, car s'il en était ainsi, on pourrait faire en sorte que les congruences $(\overline{\lambda})$ soient indépendantes de toutes les variables x, et les équations de non-holonomie seraient complètement intégrables, contrairement à l'hypothèse.

CHAPITRE III.

LES GROUPES D'APPLICABILITÉ DES V_3^2.

11. V_3^2 ayant un G_1. — Les V_3^2 sont les variétés non holonomes les plus simples et elles jouent dans l'étude des variétés non holonomes un rôle analogue à celui joué par les surfaces dans l'étude des variétés riemanniennes. Nous aurons l'occasion de remarquer dans la suite, où nous ferons une étude détaillée des divers groupes d'applicabilité d'une V_3^2, une certaine analogie entre les V_3^2 proprement dites ($a_{12}^3 \neq 0$) et les surfaces, en particulier entre les V_3^2 à courbure constante et les surfaces à courbure constante.

Une V_3^2 ne peut avoir, d'après la théorie générale, qu'un groupe maximum d'applicabilité à quatre paramètres et une fonction arbitraire, et la fonction arbitraire ne peut intervenir que si l'équation de non-holonomie

$$(30) \qquad \lambda_{31}\, dx^1 + \lambda_{32}\, dx^2 + \lambda_{33}\, dx^3 = 0$$

est complètement intégrable. En laissant de côté ce cas, le groupe de la V_3^2 peut contenir au maximum quatre paramètres et nous étudierons les divers cas où le groupe possède un, deux, trois ou quatre paramètres.

Le premier cas a été déjà étudié pour le cas général d'une V_n^m, et nous avons vu que si l'on prend comme groupe

$$(31) \qquad G_1 = \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

on peut s'arranger de façon que les congruences (λ) soient indépendantes de la variable x^3. Il s'agit de faire voir maintenant que, par des transformations convenables des variables et des congruences, on peut particulariser encore les moments des congruences (λ), de façon à arriver à une forme canonique. En premier lieu on remarque que les coefficients de l'équation (30) étant indépendants de x^3 et l'équation n'étant pas complètement intégrable, λ_{33} est différent de zéro, et la la (30) peut encore s'écrire

$$\varphi\, d\psi + dx^3 = 0,$$

où φ et ψ sont des fonctions convenables des variables x^1, x^2, et il suffit de prendre comme nouvelles variables x^1, x^2, les fonctions φ, ψ pour donner à cette équation la forme canonique

$$(30') \qquad x^1\, dx^2 + dx^3 = 0.$$

En tenant compte aussi du fait que les congruences (λ_1), (λ_2) sont définies, abstraction faite d'une transformation orthogonale, on peut annuler le λ_{21} de façon que le tableau des moments $\lambda_{\alpha\beta}$, où α est l'indice des lignes, ait la forme

$$\|\lambda_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & x^1 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{31}$$

α, β, γ, λ, μ peuvent être des fonctions quelconques des variables x^1, x^2 soumises à la seule condition de rendre le déterminant du tableau (31) $\alpha(\lambda - \mu x^1)$ différent de zéro.

Si l'on revient maintenant à des variables x^1, x^2 quelconques, le tableau des moments s'écrit

$$\begin{Vmatrix} \alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 & \alpha\varphi_2 + \beta\psi_2 & \gamma \\ \lambda\psi_1 & \lambda\psi_2 & \mu \\ \varphi\psi_1 & \varphi\psi_2 & 1 \end{Vmatrix}, \tag{32}$$

où φ et ψ sont des fonctions quelconques des variables x^1, x^2 et φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 sont leurs dérivées partielles.

12. Variétés V_3^2 possédant un G_2. — On peut toujours supposer qu'un groupe à deux paramètres G_2 est engendré par les transformations infinitésimales suivantes :

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x^3}, \\ X_2 = e^{x^3}\dfrac{\partial f}{\partial x^2}, \end{cases} \tag{33}$$

en laisant de côté le cas où le groupe est abélien, où nous pouvons avoir les transformations $\dfrac{\partial f}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}$ et l'on peut faire en sorte que les congruences (λ) soient indépendantes des variables x^2, x^3.

En effet, on peut toujours supposer que le G_2 est défini par la X_1 et par une autre transformation

$$X = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

où α_1, α_2, α_3 sont des fonctions des variables x qui doivent satisfaire à la condition

$$(X_1 X) = \alpha X_1 + \beta X.$$

où α, β sont des constantes qui sont toutes les deux nulles. Nous avons deux cas à considérer : $\beta \neq 0$ et $\beta = 0$. Dans le premier cas, si α est différent de zéro, il suffit de prendre comme transformation infinitésimale, au lieu de Y, la transformation

$$Y_1 = Y - \frac{\alpha}{\beta} X_1$$

pour la réduire à zéro, et puis de changer x^3 en $\frac{x^3}{\beta}$ pour avoir la composition

$$(X_1 Y_1) = Y_1$$

et par conséquent les $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ auront la forme $e^{x^3} \beta_i$ où β_i sont des fonctions des variables x^1, x^2 seulement. Si l'on change maintenant la variable x^3 d'après la formule

$$x'^3 = x^3 + \psi(x^1, x^2), \tag{32'}$$

ce qui ne change pas la forme de la transformation X_1, et si l'on détermine la fonction ψ comme solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \beta_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \beta_3 = 0,$$

on peut réduire β_3 à zéro et il suffit de faire ultérieurement une transformation de variables, opérant sur les variables x^1, x^2 seulement, pour donner à Y_1 la forme X_2.

Si β est égale à zéro, on peut réduire α à l'unité, en divisant la Y par le facteur α et la transformation Y aura la forme

$$Y = \gamma_1 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \gamma_2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + (x^3 + \gamma_3) \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

où γ_1, γ_2, γ_3 sont des fonctions des variables x^1, x^2 seulement. Si l'on fait encore dans ce cas une transformation (32') et si l'on prend comme fonction ψ une solution de l'équation

$$\gamma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \gamma_2 \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \gamma_3 - \psi = 0,$$

on peut réduire γ_3 à zéro et par une transformation ultérieure des variables x^1, x^2, on peut donner à la transformation Y la forme

$$Y_1 = \frac{\partial f}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial f}{\partial x^3}$$

et il suffit de faire maintenant la transformation

$$\bar{x}^1 = x^1, \qquad \bar{x}^2 = x^3 e^{x^2}, \qquad \bar{x}^3 = x^2,$$

pour que notre G_2 soit engendré par les transformations (32). Il est à remarquer que notre raisonnement est évidemment valable pour un G_2 relatif à un nombre quelconque de variables.

Cela dit, supposons que notre V_3^2 ait comme moments les éléments du tableau (31′) et par conséquent les équations de Killing relatives à la transformation X_1 sont identiquement satisfaites. Quant aux équations de Killing (23) relatives à la X_2, elles s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial \lambda_{hi}}{\partial x^2}\lambda_k^i + \frac{\partial \lambda_{ki}}{\partial x^2}\lambda_h^i\right) + \lambda_{h2}\lambda_k^3 + \lambda_{k2}\lambda_h^3 = 0,\\
&\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \lambda_{hi}}{\partial x^2}\lambda_3^i + \lambda_{h2}\lambda_3^3 = 0 \qquad\qquad (h, k = 1, 2)\\
&\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \lambda_{3i}}{\partial x^2}\lambda_h^i + \lambda_{32}\lambda_h^3 = 0
\end{aligned}$$

et peuvent être résolues sous la forme

$$(32'') \qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \lambda_{1i}}{\partial x^2} &= \omega\lambda_{2i} - \delta_3^i\lambda_{12},\\
\frac{\partial \lambda_{2i}}{\partial x^2} &= -\omega\lambda_{1i} - \delta_3^i\lambda_{22}\\
\frac{\partial \lambda_{3i}}{\partial x^2} &= \rho\lambda_{3i} - \delta_3^i\lambda_{32},
\end{aligned}\right. \qquad \left(\delta_3^i = \begin{cases} 1, & i = 3\\ 0, & i \neq 3\end{cases}\right),$$

ω et ρ étant deux indéterminées. La dernière de ces formules nous donne pour $i = 3$, $\rho = \lambda_{32}$, car λ_{33} est égal à l'unité et les autres dernières formules, obtenues en faisant $i = 1$ et $i = 2$, s'écrivent

$$(31'') \qquad \frac{\partial \lambda_{31}}{\partial x^2} = \lambda_{32}\lambda_{31}; \qquad \frac{\partial \lambda_{32}}{\partial x^2} = (\lambda_{32})^2.$$

De ces formules, nous avons comme conséquence immédiate que le logarithme du rapport des moments $\lambda_{3\,1}$ et $\lambda_{3\,2}$ est indépendante de la x^2, ou bien que nous avons, en accord avec le tableau (31'), la formule

$$\psi_1 = \psi_2 \frac{dp}{dx^1},$$

où p est une fonction quelconque de la variable x^1 et si l'on prend comme nouvelle variable x^2 la quantité $x^2 + p$, ce qui ne change pas les transformations du groupe (32), il en résulte que la fonction ψ ne dépendra que de la variable x^2, c'est-à-dire que ψ_1 sera nul. Dans ces conditions, de la dernière équation (31'') qui s'intègre par quadratures, il résulte

$$\frac{1}{\lambda_{3\,2}} = -x^2 + q,$$

où q est une fonction de la seule variable x^1. Si l'on tient compte maintenant du fait que $\lambda_{2\,1} = \lambda\psi_1$ est nul, des secondes formules (32''), pour $i = 1$, il résulte que w doit être nul, car $\lambda_{1\,1} = \alpha$ n'est pas nul. Par ce fait, les premières et secondes équations (32'') nous disent que les $\lambda_{1\,1} = \alpha$, $\lambda_{1\,2} = \beta$, $\lambda_{2\,2} = \lambda$ sont indépendantes de la variable x^2 et que les $\lambda_{1\,3}$, $\lambda_{2\,3}$ satisfont aux équations

$$\frac{\partial\lambda_{1\,3}}{\partial x^2} = -\beta, \qquad \frac{\partial\lambda_{2\,3}}{\partial x^2} = -\lambda,$$

et par conséquent ils sont de la forme $r - \beta x^2$, $s - \lambda x^2$, où r, s sont des fonctions de la seule variable x^1.

Si l'on tient compte aussi du fait que les moments de la congruence de non-holonomie $\lambda_{3\,1}$, $\lambda_{3\,2}$, $\lambda_{3\,3}$ peuvent être multipliés par un même facteur, le tableau des moments d'une V_3^2, qui admet le groupe G_2 à deux paramètres (32), peut s'écrire sous la forme

$$\|\lambda_{a\,i}\| = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & r - \beta x^2 \\ 0 & \lambda & s - \lambda x^2 \\ 0 & 1 & q - x^2 \end{Vmatrix}, \tag{33}$$

où α, β, λ, r, s, q sont des fonctions quelconques de la seule variable x^1, satisfaisant à la condition $\alpha(\lambda q - s) \neq 0$, et pour la non-intégrabilité de l'équation (30) il faut aussi que la fonction q soit une véritable fonction de x^1 ; c'est-à-dire qu'en changeant la variable x^1 on peut faire $q = x^1$.

15. Une V_3^2 ne peut pas avoir un G_3 intransitif. — Il s'agit de faire voir qu'une V_3^2 ($a_{12}^3 \neq 0$) ne peut pas avoir un G_3 intransitif. En effet, si la V_3^2 avait un tel groupe, on pourrait s'arranger en premier lieu, de façon que les moments de ces congruences soient ceux donnés par le tableau (34). D'autre part, si nous désignons par ε_1^a et ε_2^a les composantes sur les congruences (λ), de deux transformations indépendantes (ε_1), (ε_2) du groupe G, la troisième transformation aura les composantes

$$\varepsilon^a = \rho\varepsilon_1^a + \sigma\varepsilon_2^a \qquad (a = 1, 2, 3),$$

où ρ et σ sont certaines fonctions des x, qui ne peuvent être des constantes, parce que, en ce cas, cette transformation (ε) ne serait pas indépendante des deux premières transformations. Si l'on introduit ces valeurs de ε^a dans les équations (23), en tenant compte de ce que ε_1^a et ε_2^a satisfont aussi à ces équations, on obtient pour les fonctions ρ et σ les équations suivantes :

$$(34) \qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\rho}{ds_h}\varepsilon_1^k + \dfrac{d\sigma}{ds_h}\varepsilon_2^k - \dfrac{d\rho}{ds_k}\varepsilon_1^h - \dfrac{d\sigma}{ds_k}\varepsilon_2^h = 0 \\ \dfrac{d\rho}{ds_h}\varepsilon_1^3 + \dfrac{d\sigma}{ds_h}\varepsilon_2^3 = 0 \\ \dfrac{d\rho}{ds_3}\varepsilon_1^h + \dfrac{d\sigma}{ds_3}\varepsilon_2^h = 0 \end{array}\right. \qquad (h, k = 1, 2),$$

qui sont linéaires et homogènes dans les dérivées intrinsèques des ρ et σ, et l'on voit que ces équations ne peuvent avoir de solutions différentes de zéro que si l'un au moins des déterminants du tableau

$$(34') \qquad \left\| \begin{array}{ccc} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \end{array} \right\|$$

est nul. D'ailleurs ces déterminants ne peuvent être tous nuls, car en ce cas les transformations (ε_1) et (ε_2) ne seraient plus indépendantes et l'on ne peut pas avoir deux de ces déterminants nuls, car il en serait de même du troisième. Par conséquent, un au moins des déterminants

$$\left| \begin{array}{cc} \varepsilon_1^1 & \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_2^1 & \varepsilon_2^3 \end{array} \right|, \qquad \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_1^2 & \varepsilon_1^3 \\ \varepsilon_2^2 & \varepsilon_2^3 \end{array} \right|$$

est différent de zéro et les premières et secondes équations (34) nous disent que les dérivées $\frac{d\rho}{ds_1}$, $\frac{d\rho}{ds_2}$, $\frac{d\sigma}{ds_1}$, $\frac{d\sigma}{ds_2}$ doivent être nulles. Comme par hypothèse les fonctions ρ et σ ne sont pas constantes, il faut que les $\frac{d\rho}{ds_3}$, $\frac{d\sigma}{ds_3}$ soient différentes de zéro, ce qui entraîne la nullité du premier déterminant du tableau (34'), et les dérivées ordinaires des ρ et σ seront données par les formules

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^i} = \frac{d\rho}{ds_3}\lambda_{3|i}, \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial x^i} = \frac{d\sigma}{ds_3}\lambda_{3|i}.$$

Comme, en accord avec le tableau (31), $\lambda_{3|1}$ est nul, il en résulte que ρ et σ sont indépendantes de x^1 et les autres dérivées sont données par les formules

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial x^2} = \dfrac{d\rho}{ds_3}x^1, & \dfrac{\partial\rho}{\partial x^3} = \dfrac{d\rho}{ds_3}; \\[2mm] \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^2} = \dfrac{d\sigma}{ds_3}x^1, & \dfrac{\partial\sigma}{\partial x^3} = \dfrac{\partial\sigma}{\partial s_3}. \end{cases}$$

Or les seconds membres de ces formules ne peuvent être tous indépendants de x^1 que si $\frac{d\rho}{ds_3}$, $\frac{d\sigma}{ds_3}$ sont nuls et par conséquent les ρ et σ sont des constantes. Il est à remarquer que cette contradiction ne se présente plus si l'équation (30) est complètement intégrable, car alors $\lambda_{3|2}$ peut être réduit à zéro au lieu de x^1.

14. Variétés V_3^2 possédant un groupe a quatre paramètres. — Nous allons chercher les V_3^2 qui admettent un groupe à quatre paramètres, en observant d'abord que si les V_3^2 cherchées sont des variétés non holonomes proprement dites ($\omega^3_{12} \neq 0$), comme nous le supposons, elles ont nécessairement un G_3 simplement transitif, car on sait qu'un G_4 a toujours un sous-groupe à trois paramètres (¹) et, en vertu du paragraphe **13**, ce sous-groupe ne peut pas être intransitif. Par conséquent notre problème revient à chercher parmi les V_3^2 qui possèdent un système de congruences à coefficients de rotation constants, celles qui admettent comme groupe total d'applicabilité un G_4. Pour cela il

(¹) *Voir* L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, p. 550-578. Zanichelli, Bologna, 1928.

n'est pas nécesaire de connaître d'avance les congruences à coefficients de rotation constants de la V_3^2, il suffit de connaître les quantités ω_{bc}^{a}, car on sait (fin du paragraphe 7) que dans le cas des ω_{bc}^{a} constantes, les équations d'applicabilité se divisent en deux parties et il suffit de faire voir, dans notre cas, à quelles conditions les équations en c ont une solution, autre que l'identité.

D'ailleurs dans le cas de la V_3^2, parmi les fonctions c du groupe non holonome, deux seulement sont indépendantes, car on peut poser

$$(35'') \qquad c_1^1 = c_2^2 = \cos\theta, \qquad c_2^1 = -c_1^2 = \sin\theta,$$

et par conséquent on peut prendre comme fonctions indépendantes θ et c_3^3 : mais comme elles doivent satisfaire à la seconde condition (19'), imposée par le tenseur d'intégrabilité des congruences de non-holonomie, la fonction c_3^3 doit être égale à l'unité et il reste seulement la fonction θ. Cette fonction θ doit, à son tour, satisfaire aux conditions en termes finis (19'') imposées par le tenseur de la seconde forme, et comme on peut s'arranger toujours de façon que $v_{3,12}$ soit zéro, on s'aperçoit aisément que ces conditions sont satisfaites, quel que soit θ, seulement dans le cas où

$$(36) \qquad v_{3,11} = v_{3,22}.$$

Si dans les formules (19), on tient compte que $c_3^3 = 1$, on trouve

$$\sum_{1}^{2}{}_{\alpha}\, \omega_{3\alpha}^{3}\, c_{\alpha}^{k} = \omega_{3k}^{3}$$

qui ne peuvent avoir lieu, quel que soit θ, que si la congruence de non-holonomie est géodésique ($\omega_{3k}^{3} = 0$).

Il reste à considérer les autres conditions en termes finis.

Nous n'irons pas plus loin sur cette voie pour déterminer toutes les conditions moyennant lesquelles une V_3^2 admet un G_λ ; mais nous allons imposer les conditions déjà trouvées au groupe G_λ, formé avec les congruences (λ) de la V_3^2 et ayant par conséquent les transformations infinitésimales

$$X_a = \sum_{1}^{3}{}_{i}\, \lambda_a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Comme on peut s'en rendre compte facilement, le groupe G_λ a la composition

$$(X_\beta X_\gamma) = \sum_{\alpha=1}^{3} \omega^{\alpha}_{\beta\gamma} X_\alpha,$$

et l'on peut se servir du fait que les congruences (λ) sont déterminées, abstraction faite d'une transformation à coefficients constants du groupe non holonome pour avoir

$$\omega^3_{12} = 1, \qquad \omega^1_{23} - \omega^2_{13} = r_{3,12} = 0.$$

(La première de ces relations s'obtient en changeant X_3 en ρX_3 et la seconde en changeant orthogonalement les X_1, X_2.)

Si l'on tient compte aussi des conditions données plus haut

$$(3') \qquad \omega^1_{13} = \omega^2_{23}, \qquad \omega^3_{13} = \omega^3_{23} = 0,$$

qui expriment que la seconde forme est proportionnelle à la première et que la congruence (3) est géodésique, les formules de structure de notre G_λ peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
(X_1 X_2) &= \alpha X_1 - \beta X_2 - X_3,\\
(X_2 X_3) &= \lambda X_1 - \mu X_2,\\
(X_3 X_1) &= \mu X_1 - \lambda X_2,
\end{aligned}$$

où α, β, λ, μ sont quatre constantes. Ces constantes ne peuvent être quelconques, car si l'on considère l'identité de Jacobi, à laquelle doivent satisfaire les trois tranformations infinitésimales X_1, X_2, X_3,

$$[(X_1 X_2) X_3] - [(X_2 X_3) X_1] - [(X_3 X_1) X_2] = 0:$$

on trouve pour ces constantes les conditions

$$\mu = 0, \qquad \alpha\lambda = \beta\lambda = 0.$$

La première de ces conditions nous dit que la seconde forme doit être identiquement nulle, et par conséquent la V_3^2 doit être totalement géodésique. Quant à la seconde condition elle nous conduit aux deux cas suivants :

Premier cas. — La constante λ est égale à zéro. Alors le groupe G_λ

a la composition

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{l}(X_1X_2) = \alpha X_1 + \beta X_2 + X_3,\\ (X_2X_3) = (X_3X_1) = 0,\end{array}\right.$$

et les équations d'applicabilité pour la fonction θ ont la forme

$$\frac{d\theta}{ds_1} = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta - \alpha,$$
$$\frac{d\theta}{ds_2} = -\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta - \beta,$$
$$\frac{d\theta}{ds_3} = 0.$$

Ces équations forment un système à différentielles totales complètement intégrable, car les conditions d'intégrabilité sont identiquement satisfaites, comme on peut le vérifier facilement. Par conséquent la V_3^2, dont le groupe G_λ de ses congruences a la composition (38), admet un G_1 quelles que soient les constantes α et β.

Deuxième cas. — Les constantes α et β sont toutes les deux nulles. En ce cas les équations d'applicabilité nous disent que la fonction θ est une constante quelconque, quelle que soit la valeur de la constante λ et par conséquent, dans ce cas aussi, la V_3^2, dont le groupe G_λ de ses congruences a la composition

$$(39)\qquad (X_1X_2) = X_3,\qquad (X_2X_3) = \lambda X_1,\qquad (X_3X_1) = \lambda X_2,$$

a comme groupe total d'applicabilité un G_1.

En résumé, nous avons le théorème suivant :

Toutes les $V_3^2\ (a_{12}^3 \neq 0)$, qui ont comme groupe total d'applicabilité un G_1, possèdent un système de congruences à coefficients de rotation constants, sont totalement géodésiques et ont aussi la congruence (3) géodésique ; puis, ou bien les congruences (1) et (2) sont elles-mêmes géodésiques ($\alpha = \beta = 0$), ou bien elles sont normales ($\lambda = 0$).

En ce qui concerne la courbure de ces variétés, le tenseur de la courbure extérieure est nul et le tenseur de la courbure intérieure a une seule composante $\lambda_{12,12}$ distincte. Dans le premier cas, cette composante est donnée par la formule

$$\lambda_{12,12} = -(\alpha^2 + \beta^2)$$

et elle est toujours négative ou nulle; et dans le deuxième cas elle est égale à la constante λ, et peut être positive, négative ou nulle selon la valeur de cette constante.

On voit ainsi que se présente tout naturellement la nécessité de faire la distinction des V_3^2 ayant un G_4 (qui, par analogie avec les surfaces, seront appelées à courbure constante) en V_3^2 à courbure positive, négative ou zéro, selon la valeur de la courbure $\lambda_{12,12}$.

15. La détermination des congruences et des groupes des V_3^2 à courbure constante. — Pour déterminer les congruences (λ) d'une V_3^2 à courbure nulle, c'est-à-dire des congruences qui ont la composition

$$(38')\qquad (X_1X_2)=X_2,\qquad (X_2X_3)=(X_3X_1)=0,\qquad X_a=\sum_1^3 \lambda_a^i\frac{\partial f}{\partial x^i},$$

on remarque qu'en vertu du fait que le groupe G_4 admet le sous-groupe abélien X_2, X_3, on peut prendre

$$X_1=\frac{\partial f}{\partial x^1}-x^2\frac{\partial f}{\partial x^2},\qquad X_2=\frac{\partial f}{\partial x^2},\qquad X_3=\frac{\partial f}{\partial x^3},$$

de façon que les tableaux des paramètres et des moments de la nôtre V_3^2 s'écrivent

$$\|\lambda_a^i\|=\begin{Vmatrix}1 & 0 & -x^2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},\qquad \|\lambda_{a|i}\|=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x^2 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

a étant l'indice des lignes. On voit ainsi que la métrique de la V_3^2

$$(39')\qquad ds^2=ds_1^2-ds_2^2=(dx^1)^2-(dx^2)^2,$$

et une forme quadratique dans deux variables seulement, cette forme étant elle-même à courbure nulle. Quant à l'équation de Pfaff de la variété, elle a la forme

$$(39'')\qquad dx^3-x^2\,dx^1=0.$$

Pour trouver le groupe G_4 d'applicabilité de la V_3^2, il faut intégrer les équations de Killing de la V_3^2, qui ont la forme

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} = 0, \qquad \frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} + \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial \xi^1}{\partial x^3}\right) x^2 - \frac{\partial \xi^3}{\partial x^1} - x^2 \frac{\partial \xi^3}{\partial x^3} - \xi^2 = 0, \qquad \frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial \xi^3}{\partial x^2} = 0,$$
$$\frac{\partial \xi^1}{\partial x^3} = \frac{\partial \xi^2}{\partial x^3} = 0,$$

et l'on trouve, comme solution générale, la suivante :

$$\xi^1 = -c x^2 + \xi^1_0, \qquad \xi^2 = c x^1 + \xi^2_0, \qquad \xi^3 = \frac{c}{2}\left[(x^2)^2 - (x^1)^2\right] - \xi^2_0 x^1 + \xi^3_0,$$

où c, ξ^1_0, ξ^2_0, ξ^3_0 sont des constantes arbitraires.

Par conséquent, on peut prendre comme transformations génératrices du G_4 les quatre transformations

$$Y_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \qquad Y_2 = -\frac{\partial f}{\partial x^2} + x^1 \frac{\partial f}{\partial x^3}, \qquad Y_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3},$$
$$Y_4 = x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + \frac{(x^2)^2 - (x^1)^2}{2} \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

de façon que le G_4 aura la composition

$$(40) \qquad \begin{cases} (Y_1 Y_2) = Y_3, & (Y_2 Y_3) = 0, & (Y_3 Y_1) = 0, \\ (Y_1 Y_4) = -Y_2, & (Y_2 Y_4) = Y_1, & (Y_3 Y_4) = 0. \end{cases}$$

Comme ce G_4 laisse invariant en même temps la forme (39″) et la métrique (39′), qui peut être interprétée comme la métrique d'un plan euclidien, où x^1, x^2 sont des coordonnées cartésiennes orthogonales, il en résulte que les transformations de G_4 ne peuvent pas représenter dans les variables x^1, x^2 que deux translations et une rotation. En effet, on trouve que les groupes à un paramètre, générés par les transformations Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, sont les suivants :

$$Y_1 \; (y^1 = x^1 + a, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3),$$
$$Y_2 \; (y^1 = x^1, \quad y^2 = x^2 + a, \quad y^3 = x^3 - a x^1),$$
$$Y_3 \; (y^1 = x^1, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3 + a),$$
$$Y_4 \left[y^1 = x^1 \cos a - x^2 \sin a, \quad y^2 = x^1 \sin a + x^2 \cos a, \right.$$
$$\left. y^3 = x^3 - x^1 x^2 \sin^2 a - \frac{(x^1)^2 - (x^2)^2}{4} \sin 2a \right].$$

et l'on voit que Y_1, Y_2 représentent dans le plan x^1x^2 des translations au long des axes x^1, x^2 respectivement, Y_3 représente une identité dans ce plan et Y_4 une rotation.

Il est à remarquer qu'on pourrait réduire la détermination du G_4 à un problème déjà résolu par Bianchi [1], relatif à une V_3 de Riemann, car en vertu du fait que $c_3^3 = 1$, le groupe non holonome est un sous-groupe du groupe orthogonal et par conséquent le groupe d'applicabilité de la V_3^2 est un sous-groupe de la V_3 ayant les (λ) comme congruences orthogonales, dont la métrique s'écrit

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3 - x^2 dx^1)^2,$$

et comme ce V_3 a comme groupe complet d'applicabilité un G_4, il en résulte que le G_4 de la nôtre V_3^2 coïncide avec le G_4 de la V_3.

Passons maintenant à la détermination des congruences (λ) d'une V_3^2 à courbure constante différente de zéro et précisément des congruences (λ), ayant la composition (39), avec $\lambda \neq 0$. Si nous prenons, comme il est toujours possible,

$$X_3 = \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

les parenthèses (X_1X_3), (X_2X_3) nous disent que les transformations X_1, X_2 doivent avoir la forme

$$(40)\qquad \begin{cases} X_1 = \quad A\cos\lambda x^3 + B\sin\lambda x^3, & A = \sum_1^3 A_i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}, \\ X_2 = -A\sin\lambda x^3 + B\cos\lambda x^3, & B = \sum_1^3 B_i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}, \end{cases}$$

où les coefficients A_i, B_i sont indépendants de la variable x^3. Comme par la transformation de x^3 en $x^3 + \varphi(x^1x^2)$, on peut déterminer φ pour avoir $B_3 = 0$ et puis, par une transformation des variables x^1, x^2, on peut faire

$$B = \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

---

(1) *Voir* BIANCHI déjà cité, p. 563-564.

il reste à déterminer la transformation A par la condition $(X_1 X_2) = X_3$, ce qui nous conduit aux conditions suivantes :

$$(40'') \qquad \frac{\partial A_i}{\partial x^2} + \lambda A_i A_2 = 0 \quad (i = 1, 2), \qquad \frac{\partial A_2}{\partial x^2} + \lambda A_2^2 + 1 = 0.$$

Les premières de ces conditions nous donnent

$$A_i = p_i e^{-\lambda \int A_2 dx^2} \qquad (i = 1, 2),$$

où les p_1, p_2 sont des fonctions de la seule variable x^1 avec $p_1 \neq 0$ et par la transformation de x^1, x^2 en $r(x^1)$, $x^2 + q(x^1)$, on peut faire $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, de façon que la transformation A reçoive la forme

$$A = e^{-\lambda \int A_2 dx^2} \frac{\partial f}{\partial x^1} + A_2 \frac{\partial f}{\partial x^2},$$

où A_2 satisfait à la dernière équation $(40'')$, et il est à remarquer qu'il suffit de connaître une solution particulière de cette équation, car les V_3^2 correspondant aux solutions différentes sont applicables les unes sur les autres, à cause du fait qu'elles ont les mêmes coefficients constants a_{bc}^a et précisément ceux de la composition (39).

Pour trouver une solution de la dernière équation $(40'')$, il faut considérer les deux cas suivants :

1° La V_3^2 est à courbure constante négative $\lambda = -k^2 < 0$. Nous avons la solution particulière $A_2 = \frac{1}{k}$ et la transformation A correspondante s'écrit

$$A = e^{kx^2} \frac{\partial f}{\partial x^1} - \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial x^2}.$$

Comme les transformations A, B, X_3 ont la composition

$$(AB) = -kA - X_3, \qquad (AX_3) = (BX_3) = 0,$$

elles forment aussi un groupe dont la composition coïncide avec la (38) pour $\alpha = k$ et $\beta = 0$. [D'ailleurs on peut toujours faire dans la (38) $\beta = 0$, par une transformation convenable des deux premières transformations.]

Par le fait que X_1, X_2 s'expriment orthogonalement en fonction de A et B, il en résulte en premier lieu que deux variétés non holonomes V_3^2 ayant comme composition de leurs congruences, les compositions (38) et (39) sont applicables, pourvu que $\lambda = -(\alpha^2 + \beta^2)$, c'est-à-dire pourvu qu'elles aient les courbures négatives et égales.

En second lieu, il en résulte une propriété importante des V_3^2 à courbure constante négative, celle d'avoir, comme les V_3 à courbure constante positive, deux systèmes de congruences à coefficients de rotation constants, le passage d'un système à l'autre se faisant par les formules (40').

Quant à la métrique et à l'équation de Pfaff de la nôtre V_3^2, elles ont les expressions

$$ds^2 = e^{2kx^2}(dx^1)^2 + (dx^2)^2, \qquad dx^3 + \frac{1}{k}e^{kx^2}dx^1 = 0,$$

et l'on voit que, dans ce cas aussi, la métrique de la V_3^2 est une forme en deux variables seulement, ayant la même courbure que la V_3^2.

2° La V_3^2 est à courbure constante positive $\lambda = k^2 > 0$. On peut prendre pour A_3 la valeur $-\frac{1}{k}\operatorname{tang} kx^2$, de façon que la transformation A s'écrive

$$A = \frac{1}{\cos kx^2}\frac{\partial f}{\partial x^1} - \frac{1}{k}\operatorname{tang} kx^2\frac{\partial f}{\partial x^3},$$

et la métrique et l'équation de non-holonomie de la V_3^2 ont les expressions

$$ds^2 = \cos^2 kx^2(dx^1)^2 + (dx^2)^2, \qquad dx^3 + \frac{1}{k}\sin kx^2\, dx^1 = 0,$$

la métrique de la V_3^2 étant encore dans ce cas une forme à deux variables et ayant la même courbure que la V_3^2.

Pour déterminer la structure du G_4 d'applicabilité d'une V_3^2 à courbure différente de zéro, on tient compte que ce G_4 contient un G_3 simplement transitif, le réciproque du groupe G_3 ayant la composition (39), et comme on peut s'arranger de façon que ce G_3 ait lui-même la structure (39), il en résulte que ce G_3 est non intégrable pour $\lambda \neq 0$ et par conséquent on peut appliquer le théorème suivant de Lie :

« Si un $G_4(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ contient un $G_3(Y_1, Y_2, Y_3)$ non intégrable, on peut choisir la quatrième transformation Y_4 permutable avec G_3. »

Par des transformations convenables des Y_1, Y_2, Y_3, on peut encore réduire la structure du G_4 de la V_3^2 à courbure négative à la forme

$$(42)\quad \begin{cases} (Y_1Y_2) = Y_1, \quad (Y_1Y_3) = 2Y_2, \quad (Y_2Y_3) = Y_3, \\ (Y_1Y_4) = (Y_2Y_4) = (Y_3Y_4) = 0, \end{cases}$$

et la structure du G_4 de la V_3^2 à courbure positive à la forme suivante :

$$(42')\quad \begin{cases} (Y_1Y_2) = Y_3, \quad (Y_2Y_3) = Y_1, \quad (Y_3Y_1) = Y_2, \\ (Y_1Y_4) = (Y_2Y_4) = (Y_3Y_4) = 0. \end{cases}$$

Nous n'allons pas faire ici la détermination des transformations infinitésimales de ces groupes, détermination qui est d'ailleurs assez facile et nous conduirait à des résultats analogues à ceux trouvés dans le cas de la courbure nulle.

Nous avons supposé jusqu'ici que la V_3^2 est une variété non holonome proprement dite, c'est-à-dire que l'équation de Pfaff de la variété n'est pas complètement intégrable. Si cette équation est complètement intégrable, elle peut être réduite à la forme $dx^3 = 0$, et la V_3^2 est composée de la famille de surfaces $x^3 =$ const. Le groupe d'applicabilité de cette V_3^2 sera fini, si elle n'est pas totalement géodésique, infini dans le cas contraire. Dans ce dernier cas, en choisissant les variables x^1, x^2 orthogonales à x^3, la métrique de la V_3^2 est une forme quadratique dans les seules variables x^1, x^2 et nous avons toujours le groupe à un paramètre et une fonction arbitraire

$$x'^3 = f(x^3) + a,$$

les variables x^1, x^2 restant les mêmes. Nous aurons aussi dans les variables x^1, x^2 un groupe à un ou à trois paramètres, suivant que la métrique de la V_3^2 est la métrique d'une surface de révolution ou d'une surface à courbure constante.

Si la famille de surfaces composant la V_3^2 n'est pas totalement géodésique, nous considérons seulement le cas où la V_3^2 admet un groupe à quatre paramètres. En ce cas, la métrique de la V_3^2 peut être réduite à

$$ds^2 = e^{2x^3}[(dx^1)^2 + (dx^2)^2],$$

et par conséquent les surfaces de la famille qui constituent la V_3^2 sont des plans (ou surfaces développables), avec des unités de mesures différentes.

Quant au G_4 de la V_3^2, il est donné par les transformations

$$X_1 = \frac{\partial f}{\partial x^1}, \qquad X_2 = \frac{\partial f}{\partial x^2}, \qquad X_3 = x^2\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial f}{\partial x^2},$$
$$X_4 = -x^1\frac{\partial f}{\partial x^1} - x^2\frac{\partial f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3},$$

et l'on voit tout de suite que les trois premières transformations changent chaque plan x^1, x^2 en lui-même, tandis que la quatrième transformation, qui génère le groupe à un paramètre

$$y^1 = x^1 e^{-a}, \qquad y^2 = x^2 e^{-a}, \qquad y^3 = x^3 + a,$$

change les plans entre eux.