JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARCEL VASSEUR

Sur une interprétation géométrique de la transformation de Moutard

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 13 (1934), p. 175-196.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1934_9_13__175_0>

Sur une interprétation géométrique de la transformation de Moutard;

PAR MARCEL VASSEUR,

Professeur au Lycée de Lille.

1. INTRODUCTION. — Au tome 2 de sa « *Théorie des surfaces* » (p. 219) Darboux étudie les congruences rectilignes dont les développables découpent sur deux surfaces S et S' un réseau conjugué.

Dans un Mémoire publié aux (*Rendiconti del circolo di Palermo* (39, 1915, p. 153), M. Eisenhart a étudié un cas particulier du problème en prenant comme point de départ l'élégant résultat suivant : *Soit S une surface rapportée à un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux : si aux coordonnées tangentielles de cette surface on applique la transformation de Moutard, on obtient une surface S' également rapportée à un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux. Les surfaces S et S' se correspondent ponctuellement et la droite qui joint les points homologues M et M' engendre une congruence dont les développables découpent sur S et S' le réseau conjugué considéré.*

Dans un Mémoire paru en 1914 [1], pour le cas particulier ou S et S' sont des surfaces de Voss-Guichard, et par suite susceptibles d'une transformation continue avec conservation du réseau conjugué commun, M. Eisenhart avait mis en évidence la plupart des propriétés étudiées dans son Mémoire de 1915, où cependant il a négligé toute question relative à la déformation des surfaces S et S'.

[1] EISENHART, *Transformations of surfaces of Voss* (*Transactions of the American Mathematical Society*, t. 15, 1914, p. 245-265).

Dans ce dernier travail, M. Eisenhart part d'une équation de Laplace à invariants égaux mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial \log\sqrt{\lambda}}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{\lambda}}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + kz = 0;$$

dans le présent Mémoire, je supposerai toujours l'équation ramenée à la forme de Moutard

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} = Mz.$$

Ce choix de forme réduite simplifie beaucoup les formules; non seulement les résultats de M. Eisenhart s'obtiennent presque sans calcul, mais beaucoup d'autres encore se mettent en évidence très simplement.

Aux paragraphes **2** et **3**, je retrouve les résultats initiaux concernant la congruence des droites MM' et la congruence des droites Δ d'intersection des plans tangents à S et S' aux points homologues. Au paragraphe **4** j'étudie, avec M. Eisenhart, le cas où les droites Δ forment une *congruence de normales* et de plus je fais observer que ce cas correspond précisément à celui de la possibilité de déformer simultanément S et S' sur le réseau conjugué commun comme base; dans cette déformation, la congruence Δ ne cesse d'être normale. Au paragraphe **5**, je signale que les congruences des droites MM' et Δ forment un couple de congruences *stratifiables*. Au paragraphe **6**, je retrouve et complète des résultats de M. Eisenhart en étudiant les ∞^5 couples (S, S') dont les points homologues sont portés par une *même* droite. Au paragraphe **7**, l'étude du paragraphe **6** nous amène à une configuration remarquable pour le couple (S, S') : les droites MM' passent par un *point fixe*; ces couples, signalés également par M. Eisenhart appartiennent aux douze surfaces de Darboux. Je fais remarquer que d'un seul de ces couples on peut en déduire ∞^4 du même type pour lesquels les points homologues des surfaces sont sur une *même* droite; de plus, les équations ponctuelles de Laplace relatives au réseau conjugué commun à ces surfaces ont toutes les *mêmes invariants*. Au paragraphe **8**, j'examine une réciproque de la proposition qui précède en déterminant les couples de surfaces rapportées à un réseau conjugué commun dont les invariants ponctuels sont les mêmes et dont les tangentes aux courbes de même nom, menées aux points homologues, se coupent. Le paragraphe **9** est consacré à l'application des résultats des paragraphes **7** et **8** à l'étude de la *déformation continue* des couples SS' et du cas où les réseaux conjugués en jeu sont *perspectifs*: cette perspective persiste alors au cours de la déformation simultanée de S et S'. Le paragraphe **10** est consacré à la détermination des asymptotiques des surfaces S et S'. M. Eisenhart montre que la transformation de Moutard de S en S' peut coïncider avec une transformation de Ribaucour; au paragraphe **11**, je retrouve et complète ce résultat : je montre notamment que la circonstance ne dépend que des images sphériques de S et S' et indique comment se déterminent toutes les surfaces S et S' liées par une transformation de ce genre. En rapprochant les résultats des paragraphes **7** et **11** un couple de surfaces S et S' *inverses* se met en évidence: ce couple, déjà rencontré par M. Thybaut dans sa Thèse, est étudié au paragraphe **12** : il est complètement caractérisé par ce fait que, *d'une part*, S et S' sont inverses, et de *l'autre*, que les représentations sphériques de S et S' sont isothermes.

2. Soient θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 quatre intégrales linéairement indépendantes d'une équation de Moutard

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta$$

et la surface enveloppe du plan

$$(2) \qquad \theta_1 x + \theta_2 y + \theta_3 z + \theta_4 = 0,$$

sur laquelle le réseau (u, v) est conjugué.

A l'aide d'une cinquième solution de (1), R, effectuons la transformation de Moutard. Appelons θ'_1, θ'_2, θ'_3, θ'_4 les transformées de θ_1, θ_2, θ_3, θ_4 : on a les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta'_i \frac{\partial R}{\partial u} - R \frac{\partial \theta'_i}{\partial u} &= \theta_i \frac{\partial R}{\partial u} - R \frac{\partial \theta_i}{\partial u} \\ \theta'_i \frac{\partial R}{\partial v} - R \frac{\partial \theta'_i}{\partial v} &= -\theta_i \frac{\partial R}{\partial v} + R \frac{\partial \theta_i}{\partial v} \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

et

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta_4}{\partial u\, \partial v} = R\,\frac{\partial^2 \frac{1}{R}}{\partial u\, \partial v}\,\vartheta_4.$$

L'équation (1) exprime que la fonction $(R\vartheta_4)$ est calculable par une intégrale de différentielle totale. A la surface S associons la surface S' enveloppe du plan

$$(5)\qquad \vartheta'_1 x + \vartheta'_2 y + \vartheta'_3 z + \vartheta'_4 = 0.$$

Les surfaces S et S' se correspondent ponctuellement : la première équation (3) exprime qu'aux points homologues, les tangentes aux courbes $u =$ const. se coupent en un point F ; la seconde équation (3) exprime la propriété analogue pour les courbes $v =$ const. qui se coupent en un point F'. Les résultats que nous venons de mettre en évidence montrent que *la droite* D, *qui joint les points homologues de* S *et* S', *engendre une congruence dont les développables découpent sur* S *et* S' *le réseau conjugué* (u, v).

Le résultat de M. Eisenhart est ainsi établi avec la plus grande simplicité. Il est bon de remarquer que les équations de la droite D sont les équations (11) qui seront écrites au paragraphe 8.

5. Congruence des droites Δ : intersection des plans tangents a S et S'. — Introduisons la droite Δ définie par les équations

$$(2)\qquad \vartheta_1 x + \vartheta_2 y + \vartheta_3 z + \vartheta_4 = 0,$$

$$(5)\qquad \vartheta'_1 x + \vartheta'_2 y + \vartheta'_3 z + \vartheta'_4 = 0.$$

La première équation (3) exprime que les plans

$$(6)\qquad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial u} x + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial u} y + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial u} z + \frac{\partial \vartheta_4}{\partial u} = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{\partial \vartheta_1}{\partial v} x + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial v} y + \frac{\partial \vartheta_3}{\partial v} z + \frac{\partial \vartheta_4}{\partial v} = 0$$

et les plans (2) et (5) ont un point commun, c'est-à-dire que si v reste constant, la droite Δ engendre une développable : le point de contact de Δ avec son enveloppe est défini par (2), (5), (6) ou (2), (5), (7), ce qui montre que ce point est le point F défini au paragraphe précédent.

Résultat analogue si u demeure constant. On voit donc que *les développables des congruences* D *et* Δ *se correspondent*, ce qui est en accord avec le théorème général bien connu.

Les plans focaux d'une droite Δ sont

$$(8) \qquad (\theta_1 - \theta'_1)x + (\theta_2 - \theta'_2)y + (\theta_3 - \theta'_3)z + \theta_4 - \theta'_4 = 0,$$

$$(9) \qquad (\theta_1 + \theta'_1)x + (\theta_2 + \theta'_2)y + (\theta_3 + \theta'_3)z + \theta_4 + \theta'_4 = 0.$$

En effet, la dérivation en u de l'équation (8) donne l'équation (9), en tenant compte de la première équation (3); cela exprime bien que le point de contact du plan (8) avec son enveloppe est un point de Δ, foyer de cette droite. De même une dérivation de (9) par rapport à v, donne (8), ce qui prouve que (9) est le second plan focal de Δ.

Les équations (8) et (9) mettent en évidence le théorème suivant : *Les plans focaux de* Δ *et les plans tangents à* S *et* S' *forment un faisceau harmonique.*

4. Congruence Δ normale. — Pour que les droites Δ forment une congruence de *normales*, il faut et il suffit que les plans (8) et (9) soient rectangulaires, ce qui donne la condition

$$(10) \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \theta_1'^2 + \theta_2'^2 + \theta_3'^2.$$

Le problème auquel on est ramené est équivalent à la recherche des surfaces qui admettent une déformation continue avec conservation d'un réseau conjugué, car chacune des expressions $\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2$ et $\theta_1'^2 + \theta_2'^2 + \theta_3'^2$ est nécessairement de la forme $U(u) + V(v)$; les solutions transformatrices *spéciales* qui font passer du système θ_1, θ_2, θ_3 au système θ'_1, θ'_2, θ'_3 sont déterminées par un système linéaire complètement intégrable, suivi d'un second système équivalent à une équation de Riccati [1]. La détermination des équations de Moutard qui admettent trois intégrales dont la somme des carrés est de la forme $U(u) + V(v)$ dépend d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre [2]. Remarquons encore que si S et S' se déforment

---

[1] L. Bianchi, *Lezioni*, t. 2, p. 40-89; *Annali di Mat.*, 3e série, t. 18, 1890, p. 3.

[2] M. Vasseur, *Annales de l'École Normale supérieure* (Thèse), t. 68, 1930, p. 73.

simultanément avec conservation du réseau conjugué (u, v), la droite Δ ne cesse d'engendrer une congruence de normales : j'étudie au paragraphe 8 du présent travail, un cas particulièrement intéressant de cette déformation simultanée de deux surfaces S et S'.

5. Les congruences D et Δ sont stratifiables. — Posons $\mathrm{H} = \mathrm{R}\theta'$, les équations (3) donnent

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial u} &= \xi_i \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} + \mathrm{R}\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = \xi_i' \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} - \mathrm{R}\frac{\partial \xi_i'}{\partial u}, \\ \frac{\partial \mathrm{H}_i}{\partial v} &= \xi_i \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} + \mathrm{R}\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = -\xi_i' \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} + \mathrm{R}\frac{\partial \xi_i'}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Les équations de la droite D s'écrivent

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial u}x + \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial u}y + \frac{\partial \mathrm{H}_3}{\partial u}z + \frac{\partial \mathrm{H}_4}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial v}x + \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial v}y + \frac{\partial \mathrm{H}_3}{\partial v}z + \frac{\partial \mathrm{H}_4}{\partial v} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Considérons le plan

$$(12)\qquad (\xi_1 + \lambda \mathrm{H}_1)x + (\xi_2 + \lambda \mathrm{H}_2)y + (\xi_3 + \lambda \mathrm{H}_3)z + \xi_4 + \lambda \mathrm{H}_4 = 0,$$

où λ est une fonction de u et v. Les coordonnées du point de contact de ce plan avec son enveloppe sont données par les équations

$$(13)\qquad \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \lambda\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial u} + \mathrm{H}_1\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right)x + \ldots = 0,$$

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \lambda\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial v} + \mathrm{H}_1\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)x + \ldots = 0.$$

Les combinaisons schématiques $(12)\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} - (13)\mathrm{R}$, $(12)\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - (14)\mathrm{R}$ donnent

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \left[\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial u} + \lambda\left(\mathrm{H}_1\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} - \mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial u}\right) - \mathrm{R}\mathrm{H}_1\frac{\partial \lambda}{\partial u}\right]x + \ldots &= 0, \\ \left[-\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial v} + \lambda\left(\mathrm{H}_1\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - \mathrm{R}\frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial v}\right) - \mathrm{R}\mathrm{H}_1\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right]x + \ldots &= 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend $\lambda = \mathrm{CR}$, où C est une constante arbitraire, ces équations se réduisent à (11) : de sorte que le plan (12) touche son enveloppe en un point de D. Lorsque C varie, on obtient ∞^1 familles de plans, telles que tout plan d'une famille qui contient une droite Δ touche son enveloppe en un point de la droite D associée. C'est ce que l'on exprime en disant que les congruences D et Δ sont *stratifiables* (les surfaces S et S' correspondent à $C = 0$ et $C = \infty$).

6. Étude de la correspondance entre certains couples de surfaces S, S'. — Soit S une surface rapportée à un réseau conjugué à invariants tangentiels égaux ; il lui correspond une infinité de transformées S' puisque la transformation envisagée dépend de la solution transformatrice R ; si même R est choisie, la surface S' dépend encore de quatre constantes arbitraires : en effet si $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, \theta'_4$ est une solution particulière du système (3), la solution générale est donnée par $\theta'_1 + \frac{\alpha'_1}{R}, \theta'_2 + \frac{\alpha'_2}{R}, \theta'_3 + \frac{\alpha'_3}{R}, \theta'_4 + \frac{\alpha'_4}{R}$, ce qui fournit ∞^4 surfaces transformées de S. On remarque de suite que les expressions $\frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{M}_2}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{M}_3}{\partial v}, \frac{\partial \mathfrak{M}_4}{\partial v}$, correspondantes données par les équations (3'), ne dépendent pas des constantes $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$: *autrement dit les ∞^4 surfaces transformées de S ont leurs points homologues situés sur un même rayon* D *qui perce S au point correspondant*. Ce résultat avait été signalé par M. Eisenhart.

D'une manière plus générale considérons les surfaces S_1 et S'_1 enveloppes des plans

$$(\xi_1 - \alpha_1 R)x + (\xi_2 - \alpha_2 R)y + (\xi_3 - \alpha_3 R)z + \xi_4 - \alpha_4 R = 0,$$
$$\left(\xi'_1 + \frac{\alpha'_1}{R}\right)x + \left(\xi'_2 + \frac{\alpha'_2}{R}\right)y + \left(\xi'_3 + \frac{\alpha'_3}{R}\right)z + \xi'_4 + \frac{\alpha'_4}{R} = 0,$$

elles forment ∞^8 couples de surfaces dépendant des *huit* constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$. *La congruence de droites* D *est la même pour ces ∞^8 couples* comme le montrent les équations (3').

Considérons deux des couples que nous venons de signaler, par exemple le couple initial S, S' et un couple S_1, S'_1 correspondant à un choix déterminé des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4$: les plans tangents aux points homologues de S et S_1 se coupent suivant une droite du plan fixe (c'est-à-dire indépendant des coordonnées u, v)

$$(\mathrm{P}) \qquad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + \alpha_4 = 0.$$

De même les plans tangents à S′ et S'_1 se coupent suivant une droite du plan

$$(\mathrm{P}') \qquad \alpha'_1 x + \alpha'_2 y + \alpha'_3 z + \alpha'_4 = 0.$$

En particulier, si les constantes α_1, α_2, α_3, α_4, α'_1, α'_2, α'_3, α'_4 satisfont aux relations

$$\frac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha'_2} = \frac{\alpha_3}{\alpha'_3} = \frac{\alpha_4}{\alpha'_4},$$

les plans P et P′ sont confondus; il en résulte que les plans tangents aux points homologues de S, S′, S_1, S'_1 concourent en un point du plan P : *Les droites Δ et Δ_1, intersections des plans tangents à S et S′ d'une part, à S_1 et S'_1 d'autre part, engendrent des congruences dont les développables se correspondent et dont les rayons homologues se coupent en un point qui décrit le plan* P *quand u et v varient.*

7. Configuration exceptionnelle de surfaces S et S′. — Dans ce qui précède, nous avons admis implicitement que les intégrales θ_1, θ_2, θ_3, θ_4, R étaient linéairement indépendantes; s'il en est autrement, les énoncés des paragraphes **2** et **6** demandent à être quelque peu modifiés et de plus les couples de surfaces S, S′ offrent une configuration remarquable signalée par M. Eisenhart, mais déjà obtenue, au moins d'une manière implicite, par Darboux dans sa théorie des douze surfaces (¹).

En effet supposons que l'on ait la relation

$$\mathrm{R} = a\theta_1 + b\theta_2 + c\theta_3 + d\theta_4,$$

où a, b, c, d sont des constantes numériques; si $d \neq 0$, une translation des axes permet de supposer $a = b = c = 0$; la substitution de $\mathrm{R} = d\theta_4$ dans (3′) donne $\frac{\partial \mathrm{H}_4}{\partial u} = \frac{\partial \mathrm{H}_4}{\partial v} = 0$, les équations (11) montrent que dans ces conditions *la droite* D *passe par l'origine.*

Si $d = 0$, l'un au moins des coefficients a, b, c n'est pas nul et la

(¹) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. 4, p. 43.

droite D passe par un point fixe à l'infini; d'ailleurs, il n'y a pas lieu pour l'instant de distinguer ces deux circonstances puisque nous étudions des propriétés projectives.

Dans le cas actuellement envisagé, les réseaux conjugués (u, v) de S et S′ sont *perspectifs*. La congruence D est spéciale et toute famille de ∞^1 droites de cette congruence engendre une développable, à savoir un cône, de sorte que l'énoncé donné à la fin du paragraphe **2** doit être modifié de manière à comprendre le cas exceptionnel comme cas particulier. A cet effet, nous dirons que, *aux points homologues de* S *et* S′, *les tangentes aux courbes* $u = const.$ *ont un point commun, ainsi que les tangentes aux courbes* $v = const.$

Reprenons l'étude des couples envisagés au paragraphe précédent. D'une manière générale, si nous y remplaçons l'intégrale θ_1 par une autre intégrale arbitraire $\bar{\theta}_1$, nous obtenons ∞^8 couples nouveaux associés à une nouvelle congruence de droites $\bar{D}$; les équations (11) montrent que *les droites homologues* D *et* $\bar{D}$ *sont parallèles*. Si cependant $\bar{\theta}_1$ est proportionnelle à R et si, comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous négligeons une homothétie, on obtient ∞^6 et non plus ∞^8 couples nouveaux, car remplacer λR par $\lambda R + \alpha_1 R$ et $\frac{u}{R}$ par $\frac{u}{R} + \frac{\alpha_1'}{R}$ revient à faire une homothéthie sur S et une autre sur S′. D'autre part, tous les rayons de la congruence $\bar{D}$ ainsi obtenue passent par l'origine. On peut énoncer le résultat suivant : *Des* ∞^8 *couples signalés au paragraphe* **6**, *on déduit, par parallélisme de Peterson,* ∞^6 *couples nouveaux pour lesquels la congruence de droites* $\bar{D}$ *a tous ses rayons qui passent par un point fixe et sur l'ensemble des surfaces qui constituent ces* ∞^6 *couples, le réseau conjugué* (u, v) *est perspectif.*

La propriété que nous venons de mettre en évidence entraîne une remarque simple au sujet des équations de Laplace *ponctuelles* relatives aux surfaces des ∞^6 couples en jeu. En effet, soient S et S′ deux quelconques de ces surfaces rapportées à un système de coordonnées ponctuelles *non homogènes*; la droite D qui joint les points homologues M et M′ de S et S′ passant par l'origine, nous avons

$$x = \varphi x', \qquad y = \varphi y', \qquad z = \varphi z',$$

où φ désigne une fonction de u et v; ceci suffit à montrer que *les* *équations de Laplace ponctuelles de toutes les surfaces des ∞^6 couples envisagés ont les mêmes invariants.*

8. Examen d'une réciproque de la proposition qui précède. — Étant données deux surfaces S et S' rapportées à un réseau conjugué commun u, v dont les tangentes aux courbes de même nom qui passent aux points homologues de S et S' se coupent, je me propose de chercher à quelle condition les réseaux (u, v) de S et S' ont les mêmes invariants ponctuels [1].

Nous excluons de notre analyse le cas où S et S' seraient homothétiques ou telles que le plan tangent à l'une d'elles passe par le point correspondant de l'autre; en rapportant S et S' à un système de coordonnées *homogènes* convenable, on peut écrire [2]

$$(16)\qquad \frac{\partial x'}{\partial u} = P\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial u} = P\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial u} = P\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial t'}{\partial u} = P\frac{\partial t}{\partial u};$$

$$(17)\qquad \frac{\partial x'}{\partial v} = Q\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y'}{\partial v} = Q\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial v} = Q\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad \frac{\partial t'}{\partial v} = Q\frac{\partial t}{\partial v}.$$

Les équations de Laplace vérifiées par les coordonnées ponctuelles (x, y, z, t) d'une part, (x', y', z', t') d'autre part, sont de la forme

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial u\,\partial v} - A\frac{\partial \sigma}{\partial u} - B\frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0,$$

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial u\,\partial v} - A\frac{Q}{P}\frac{\partial \sigma'}{\partial u} - B\frac{P}{Q}\frac{\partial \sigma'}{\partial v} = 0,$$

avec les conditions d'intégrabilité des équations (16) et (17)

$$(20)\qquad \frac{\partial P}{\partial v} = A(Q - P), \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = B(P - Q).$$

Exprimons que les équations (18) et (19) ont les mêmes invariants : nous avons les conditions

$$(20')\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[A\frac{Q-P}{P}\right] = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left[B\frac{P-Q}{Q}\right] = 0.$$

---

[1] Dans ce paragraphe nous ne faisons aucune hypothèse sur les invariants tangentiels.

[2] E. Vessiot, *Géométrie supérieure*, p. 197.

d'où résultent trois types de solutions

$$
(21)\quad \left\{\begin{array}{l}
1^\circ\ P = Q = \text{const.},\quad A \text{ et } B \text{ arbitraires.}\\
2^\circ\ A = B = 0,\quad P = U,\quad Q = V,\\
\qquad U \text{ et } V \text{ étant des fonctions arbitraires de } u \text{ et } v \text{ respectivement.}\\
3^\circ\ P = U_1 V,\quad Q = U V_1,\quad A = \dfrac{U_1 V'}{U V_1 - U_1 V},\quad B = \dfrac{V_1 U'}{V U_1 - U V_1},\\
\qquad U \text{ et } U_1 \text{ sont des fonctions arbitraires de } u \text{ seul,}\\
\qquad V \text{ et } V_1 \text{ sont des fonctions arbitraires de } v \text{ seul.}
\end{array}\right.
$$

Seule la *première solution* conduit à des réseaux (u, v) perspectifs. En effet, aux points homologues de S et S', les tangentes aux courbes $v = \text{const.}$ se coupent au point de coordonnées $\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial t}{\partial u}\right)$ ou, en vertu de (16), $\left(\frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \frac{\partial z'}{\partial u}, \frac{\partial t'}{\partial u}\right)$; de même les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$ se coupent au point $\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial t}{\partial v}\right)$ ou $\left(\frac{\partial x'}{\partial v}, \frac{\partial y'}{\partial v}, \frac{\partial z'}{\partial v}, \frac{\partial t'}{\partial v}\right)$. La condition nécessaire et suffisante pour que les réseaux (u, v) soient perspectifs est que les tangentes à toutes courbes homologues de S et S' se coupent en un point nécessairement situé sur l'intersection Δ des plans tangents, c'est-à-dire que les points

$$(dx, dy, dz, dt),\quad (dx', dy', dz', dt'),$$

$$
(22)\quad \left\{\begin{array}{ll}
dx = \dfrac{\partial x}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x}{\partial v}\,dv, & dy = \dfrac{\partial y}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y}{\partial v}\,dv,\\
dz = \dfrac{\partial z}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial z}{\partial v}\,dv, & dt = \dfrac{\partial t}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial t}{\partial v}\,dv;\\
dx' = \dfrac{\partial x'}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial x'}{\partial v}\,dv, & dy' = \dfrac{\partial y'}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial y'}{\partial v}\,dv,\\
dz' = \dfrac{\partial z'}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial z'}{\partial v}\,dv, & dt' = \dfrac{\partial t'}{\partial u}\,du + \dfrac{\partial t'}{\partial t}\,dv
\end{array}\right.
$$

soient confondus, ce qui donne immédiatement la condition $P = Q$, donc la première solution *seule* conduit à des réseaux perspectifs ([1]).

([1]) J'indique rapidement ce que donnent les deux autres solutions : la *deuxième* solution conduit à deux surfaces

$$(S)\qquad x = \alpha_1 - \beta_1,\quad y = \alpha_2 - \beta_2,\quad z = \alpha_3 - \beta_3,\quad t = \alpha_4 - \beta_4,$$

9. Application a la déformation continue d'une surface avec conservation d'un réseau conjugué. — Nous avons rappelé plus haut que la recherche des surfaces (S) déformables avec conservation d'un réseau conjugué est équivalente à celle des équations de Moutard (M) qui admettent un groupe de solutions θ_1, θ_2, θ_3 satisfaisant à une identité de la forme

$$\theta_1^2+\theta_2^2+\theta_3^2=U(u)+V(v). \tag{23}$$

Si θ_4 est une quatrième solution de (M), on obtient une surface S cherchée en prenant l'enveloppe du plan

$$\theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+\theta_4=0.$$

Lorsque S subit la déformation en jeu, elle se déforme en une surface S_k (k paramètre de déformation), enveloppe du plan

$$\theta_{1,k}x+\theta_{2,k}y+\theta_{3,k}z+\theta_{4,k}=0.$$

$\theta_{1,k}$, $\theta_{2,k}$, $\theta_{3,k}$, $\theta_{4,k}$ sont quatre solutions de la *même* équation de Moutard (M); les trois premières sont déterminées, à une substitution

---

et

$$(S')\qquad \left\{\begin{array}{ll} x'=\int U\,d\alpha_1-\int V\,d\beta_1, & y'=\int U\,d\alpha_2-\int V\,d\beta_2, \\ z'=\int U\,d\alpha_3-\int V\,d\beta_3, & t'=\int U\,d\alpha_4-\int V\,d\beta_4, \end{array}\right.$$

où α_1, α_2, α_3, α_4, U sont des fonctions de u, β_1, β_2, β_3, β_4, V des fonctions de v. Le réseau u, v est doublement conique sur S et S', les lieux des sommets des cônes circonscrits à S et S' le long des courbes $v=$ const. et $u=$ const. sont les *mêmes* pour ces deux surfaces, ce sont les courbes d'équations

$$x=\frac{d\alpha_1}{du}, \quad y=\frac{d\alpha_2}{du}, \quad z=\frac{d\alpha_3}{du}, \quad t=\frac{d\alpha_4}{du},$$

$$x=\frac{d\beta_1}{dv}, \quad y=\frac{d\beta_2}{dv}, \quad z=\frac{d\beta_3}{dv}, \quad t=\frac{d\beta_4}{dv}.$$

La *troisième* solution est relative à un type particulier d'équations de Laplace: sur les surfaces S et S' que l'on en déduit le réseau (u, v) a les mêmes invariants ponctuels et est découpé par les développables de la congruence des droites qui joignent les points homologues.

orthogonale près par l'identité

$$(24)\qquad \theta_{1,k}^2+\theta_{2,k}^2+\theta_{3,k}^2=\frac{kU}{k+U}+\frac{kV}{k-V}.$$

La détermination de $\theta_{4,k}$ est plus difficile et nécessite en général le passage en coordonnées ponctuelles.

Nous avons rappelé aussi qu'il existe une infinité de solutions transformatrices spéciales R de (M) qui transforment le groupe θ_1, θ_2, θ_3 en le groupe θ'_1, θ'_2, θ'_3 qui vérifie la *même* identité (26). Si θ'_4 est la plus transformée de θ_4, la surface, enveloppe du plan

$$\theta'_1 x+\theta'_2 y+\theta'_3 z+\theta'_4=0,$$

est déformable sur le réseau conjugué (u, v) comme base. La correspondance entre S et S' est celle qui a été étudiée aux paragraphes précédents; à toute déformée S_k de S on peut associer une déformée S'_k de S' [celle dont les coordonnées $\theta'_{1,k}, \theta'_{2,k}, \theta'_{3,k}$ vérifient l'identité (24)] de manière que la correspondance ponctuelle qui fait passer de S_k à S'_k soit de même nature que celle qui fait passer de S à S'. La solution transformatrice spéciale qui tranforme S_k en S'_k est la *même* que la solution R qui transforme S en S' (¹).

Ces résultats rappelés, appliquons-les en prenant la surface S particulière qui correspond à $\theta_4=R$; S et S' sont les enveloppes des plans

$$(25)\qquad \begin{cases} \theta_1 x+\theta_2 y+\theta_3 z+R=0,\\ \theta'_1 x+\theta'_2 y+\theta'_3 z+\dfrac{1}{R}=0,\end{cases}$$

les réseaux (u, v) de ces surfaces sont perspectifs et les équations de Laplace ponctuelles qui leur sont relatives ont les mêmes invariants. Lorsque S et S' se déforment *simultanément*, comme il a été expliqué plus haut, les équations de Laplace ponctuelles et tangentielles et la solution R se conservent de sorte que *sur S_k et S'_k les réseaux u, v sont perspectifs* et ces surfaces sont les enveloppes des plans

$$(26)\qquad \begin{cases} \theta_{1,k}x+\theta_{2,k}y+\theta_{3,k}z+R\,\varphi(k)=0,\\ \theta'_{1,k}x+\theta'_{2,k}y+\theta'_{3,k}z+\dfrac{1}{R}\psi(k)=0.\end{cases}$$

(¹) MASLOFF, *Rec. math. de Moscou*, t. 33. — VASSEUR, *loc. cit.*

où φ et ψ sont des fonctions du paramètre de déformation. Les surfaces enveloppes des plans

$$(27)\qquad \begin{cases} \xi_{1,k}x + \xi_{2,k}y - \xi_{3,k}z - R = 0, \\ \xi_{1,k}x - \xi_{2,k}y + \xi_{3,k}z + \dfrac{1}{R} = 0 \end{cases}$$

sont respectivement homothétiques des surfaces S_k et S'_k.

10. Lignes asymptotiques des surfaces S et S'. — Avec les notations du paragraphe **3**, la surface S' s'obtient comme enveloppe du plan

$$H_1x + H_2y + H_3z + H_4 = 0;$$

de même si l'on pose $\theta_i = RK_i$, la surface S est l'enveloppe du plan

$$K_1x + K_2y + K_3z + K_4 = 0.$$

Avec ces notations, les équations (3') s'écrivent

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_i}{\partial u} = \quad R^2\dfrac{\partial K_i}{\partial v} \\ \dfrac{\partial H_i}{\partial v} = -R^2\dfrac{\partial K_i}{\partial u} \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les équations différentielles des lignes asymptotiques de S' et S sont

$$(29)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix} du^2 - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} & \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix} dv^2 = 0,$$

$$(30)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial K_1}{\partial u} & \dfrac{\partial K_1}{\partial v} & K_1 \end{vmatrix} du^2 - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_1}{\partial v^2} & \dfrac{\partial K_1}{\partial u} & \dfrac{\partial K_1}{\partial v} & K_1 \end{vmatrix} dv^2 = 0,$$

où l'on n'a écrit que la première ligne de chaque déterminant. Les équations (28) montrent que l'on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix} = \quad R^2\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial K_1}{\partial u} & \dfrac{\partial K_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_1}{\partial v^2} & \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix} = -R^2\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_1}{\partial v^2} & \dfrac{\partial K_1}{\partial u} & \dfrac{\partial K_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix},$$

de sorte que (29) peut s'écrire

$$(29')\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_1}{\partial u^2} & \dfrac{\partial K_1}{\partial u} & \dfrac{\partial K_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix} du^2 - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 K_1}{\partial v^2} & \dfrac{\partial K_1}{\partial u} & \dfrac{\partial K_1}{\partial v} & H_1 \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

Les équations (30) et (29') se simplifient lorsqu'on a affaire à la configuration exceptionnelle étudiée plus haut, en effet, on a alors

$$H_1 = \text{const.}, \quad K_1 = \text{const.}, \quad \frac{\partial K_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial K_1}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 K_1}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 K_1}{\partial v^2} = 0,$$

et les équations des asymptotiques de S' et S sont

$$(31) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u^2} & \frac{\partial K_1}{\partial u} & \frac{\partial K_1}{\partial v} \end{vmatrix} du^2 - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K_1}{\partial v^2} & \frac{\partial K_1}{\partial u} & \frac{\partial K_1}{\partial v} \end{vmatrix} dv^2 = 0,$$

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K_1}{\partial u^2} & \frac{\partial K_1}{\partial u} & \frac{\partial K_1}{\partial v} \end{vmatrix} du^2 - \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 K_1}{\partial^2 v} & \frac{\partial K_1}{\partial u} & \frac{\partial K_1}{\partial v} \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

On voit que, dans ce cas, *aux lignes asymptotiques de l'une des surfaces, correspond sur l'autre un réseau conjugué*. Ce résultat, dont nous aurons besoin plus loin, a été donné par Darboux dans la théorie des douze surfaces.

11. Transformation de Ribaucour. — Considérons deux surfaces S et S' déduites l'une de l'autre par une transformation de Moutard et examinons, avec M. Eisenhart, dans quelles circonstances il est possible d'avoir *une congruence de sphères dont* S *et* S' *sont les nappes focales, chaque sphère touchant* S *et* S' *aux points homologues* M *et* M' *qui se correspondent par la transformation de Moutard*.

Pour mettre le problème en équation, il suffit d'écrire que l'un des bissecteurs des plans tangents à S et S' est perpendiculaire à la droite MM'. La surface S' ne changeant pas si l'on change $\theta'_1, \theta'_2, \theta'_3, \theta'_4$ en $-\theta'_1, -\theta'_2, -\theta'_3, -\theta'_4$, nous prendrons le bissecteur

$$\left(\frac{\theta_1}{\rho} + \frac{\theta'_1}{\rho'}\right)x + \left(\frac{\theta_2}{\rho} + \frac{\theta'_2}{\rho'}\right)y + \left(\frac{\theta_3}{\rho} + \frac{\theta'_3}{\rho'}\right)z + \frac{\theta_4}{\rho} + \frac{\theta'_4}{\rho'} = 0,$$
$$\rho = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}, \qquad \rho' = \sqrt{\theta_1'^2 + \theta_2'^2 + \theta_3'^2}.$$

Avec les notations du paragraphe **5**, nos conditions s'écrivent

$$\sum_1^3 \left(\frac{\theta_i}{\rho} + \frac{\theta'_i}{\rho'}\right)\frac{\partial H_i}{\partial u} = 0, \qquad \sum_1^3 \left(\frac{\theta_i}{\rho} + \frac{\theta'_i}{\rho'}\right)\frac{\partial H^i}{\partial v} = 0.$$

ou en tenant compte des équations (3')

$$
(33) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\rho \frac{\partial R}{\partial u} - R \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial R}{\partial u} \rho' + R \frac{\partial \rho'}{\partial u} = 0, \\
&\rho \frac{\partial R}{\partial v} - R \frac{\partial \rho}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial v} \rho' - R \frac{\partial \rho'}{\partial v} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations expriment que ρ est solution de (1) et ρ' solution de (4), à savoir : une transformée de ρ par la solution R; il résulte que : *le réseau* (u, v) *est réseau de courbure des surfaces* S *et* S'. Ces réseaux de courbure ont leurs invariants tangentiels égaux, par suite *leurs images sphériques sont isothermes*. Le résultat donné par M. Eisenhart se trouve ainsi établi presque sans calcul.

Il convient d'approfondir cette circonstance particulière et d'indiquer comment se déterminent les surfaces S et S'.

Observons que la condition obtenue n'intéresse que les images sphériques, de sorte que, dès que ces dernières sont connues, on obtient une infinité de couples (S, S') *dépendant de deux fonctions arbitraires d'une variable.*

Par raison de symétrie, posons $\rho = i\theta_0$, $\rho' = i\theta'_0$. On voit que le problème se ramène à la recherche des équations de Moutard qui admettent un système de quatre intégrales liées par la relation

$$
(34) \qquad \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 + \theta_0^2 = 0,
$$

puis à chercher une solution transformatrice R qui transforme θ_1, θ_2, θ_3, θ_0 en quatre intégrales θ'_1, θ'_2, θ'_3, θ'_0, de l'équation transformée liées elles aussi par la relation

$$
(35) \qquad \theta_1'^2 + \theta_2'^2 + \theta_3'^2 + \theta_0'^2 = 0.
$$

La première partie de ce problème, à savoir la détermination de l'équation de Moutard initiale et des solutions θ_1, θ_2, θ_3, θ_0, n'est autre que celle des réseaux isothermes de la sphère; je rappelle rapidement comment peut se traiter cette question :

Nous savons que l'image sphérique est un réseau isotherme; nous écrirons donc l'élément linéaire sphérique

$$
(36) \qquad d\sigma^2 = \lambda(du^2 + dv^2).
$$

avec la condition

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial v^2} + \frac{\lambda}{2} = 0, \tag{37}$$

qui exprime que la courbure totale est égale à $+1$ [1].

Les coordonnées cartésiennes ξ, η, ζ d'un point de la sphère vérifient l'équation à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{\lambda}}{\partial v}\frac{\partial \Theta}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{\lambda}}{\partial u}\frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0. \tag{38}$$

Le changement de fonction $\Theta = \sqrt{\lambda}\,\theta$ ramène cette équation à la forme de Moutard [2]

$$\frac{1}{\theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \sqrt{\lambda}\,\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{\lambda}}}{\partial u\, \partial v}; \tag{39}$$

Les intégrales ξ, η, ζ, $i(=\sqrt{-1})$ de (38) donnent les quatre intégrales cherchées de (39)

$$\theta_1 = \frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \theta_2 = \frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \theta_3 = \frac{\zeta}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \theta_0 = \frac{i}{\sqrt{\lambda}},$$

Les fonctions θ_1, θ_2, θ_3, θ_0 étant connues, il reste à montrer comment nous pouvons déterminer la solution transformatrice R et les transformées θ'_1, θ'_2, θ'_3, θ'_0, de θ_1, θ_2, θ_3, θ_0 de manière à satisfaire à l'identité (35).

Reprenant les notations du paragraphe 5, nous posons

$$\left\{\begin{aligned} & H_i = R\theta'_i, \\ & \frac{\partial H_i}{\partial u} = \theta'_i \frac{\partial R}{\partial u} + R \frac{\partial \theta'_i}{\partial u} = \theta_i \frac{\partial R}{\partial u} - R\frac{\partial \theta_i}{\partial u} \\ & \frac{\partial H_i}{\partial v} = \theta'_i \frac{\partial R}{\partial v} + R \frac{\partial \theta'_i}{\partial v} = -\theta_i \frac{\partial R}{\partial v} + R\frac{\partial \theta_i}{\partial v} \end{aligned}\right. \qquad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{40}$$

---

(1) Avec les variables $\alpha = u + iv$, $\beta = u - iv$, l'équation (37) prend la forme de Liouville, de sorte que l'équation (37) revient à déterminer la fonction analytique *générale* de la variable complexe $u + iv$ ou $u - iv$.

(2) L'équation (39) est, en vertu de la forme de λ, l'équation *harmonique* générale; c'est cette équation que l'on rencontre dans la théorie de la déformation infinitésimale de la surface minima générale.

L'identité (34) nous fait écrire

$$(41)\qquad \Sigma\theta_i^2 = \Sigma\theta_i\frac{\partial\theta_i}{\partial u} = \Sigma\theta_i\frac{\partial\theta_i}{\partial v} = 0,$$

et la condition (35)

$$(42)\qquad \Sigma\theta_i'^2 = \Sigma\theta_i'\frac{\partial\theta_i'}{\partial u} = \Sigma\theta_i'\frac{\partial\theta_i'}{\partial v} = 0,$$

où les sommations se font de $i = 0$ à $i = 3$.

Multiplions les deux dernières équations (40) par θ_i et sommons de $i = 0$ à $i = 3$, de même après multiplication par θ_i', on obtient

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial u}\Sigma\theta_i\theta_i' - R\Sigma\theta_i'\dfrac{\partial\theta_i}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial R}{\partial v}\Sigma\theta_i\theta_i' - R\Sigma\theta_i'\dfrac{\partial\theta_i}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial R}{\partial u}\Sigma\theta_i\theta_i' + R\Sigma\theta_i\dfrac{\partial\theta_i'}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial R}{\partial v}\Sigma\theta_i\theta_i' - R\Sigma\theta_i\dfrac{\partial\theta_i'}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$(44)\qquad \Sigma\theta_i\theta_i' = \text{const.};$$

on peut, sans inconvénient pour l'objet qui nous occupe, supposer cette constante réduite à l'unité. La première équation (40) donne

$$(45)\qquad R = \Sigma\theta_i H_i;$$

portons cette expression dans les deux dernières équations (40), on obtient le système linéaire

$$(46)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_k}{\partial u} = \quad \theta_k\Sigma H_i\dfrac{\partial\theta_i}{\partial u} - \dfrac{\partial\theta_k}{\partial u}\Sigma H_i\theta_i \\ \dfrac{\partial H_k}{\partial v} = -\theta_k\Sigma H_i\dfrac{\partial\theta_i}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta_k}{\partial v}\Sigma H_i\theta_i \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Ce système est complètement intégrable; pour s'en assurer, il suffit de dériver la première équation (46) par rapport à v, la seconde par rapport à u; on obtient, en se servant de l'équation (1), des équations (46) elles-mêmes et des identités (41), la même expression pour $\dfrac{\partial^2 H_k}{\partial u\,\partial v}$, à savoir

$$\frac{\partial^2 H_k}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\theta_k}{\partial v}\Sigma H_i\frac{\partial\theta_i}{\partial u} - \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\Sigma H_i\frac{\partial\theta_i}{\partial v}.$$

Ainsi les équations (46) ont pour solution générale un système de quatre fonctions H_0, H_1, H_2, H_3 dépendant de *quatre* constantes arbitraires ; l'équation (45) détermine R *a posteriori*.

Il reste à s'assurer que l'on peut disposer des constantes arbitraires de manière à obtenir effectivement une solution de notre problème.

Dérivons (45), par rapport à u puis par rapport à v, il vient, en tenant compte de (41) et (46)

$$\frac{\partial R}{\partial u} = \Sigma H_i \frac{\partial \theta_i}{\partial u}, \qquad \frac{\partial R}{\partial v} = \Sigma H_i \frac{\partial \theta_i}{\partial v};$$

ceci fait écrire (46) sous la forme

$$(46') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_k}{\partial u} &= \quad \theta_k \frac{\partial R}{\partial u} - R \frac{\partial \theta_k}{\partial u}, \\ \frac{\partial H_k}{\partial v} &= -\theta_k \frac{\partial R}{\partial v} + R \frac{\partial \theta_k}{\partial v}; \end{aligned} \right.$$

égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 H_k}{\partial u\, \partial v}$ tirées de ces équations, on obtient

$$\frac{1}{\theta_k} \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial v};$$

ce qui montre que la fonction R, livrée par (45), est bien solution de (1) et que les fonctions

$$\theta'_1 = \frac{H_1}{R}, \qquad \theta'_2 = \frac{H_2}{R}, \qquad \theta'_3 = \frac{H_3}{R}, \qquad \theta'_3 = \frac{H_0}{R},$$

sont les transformées de Moutard de θ_1, θ_2, θ_3, θ_0 par la transformatrice R.

Montrons maintenant que l'on peut choisir H_1, H_2, H_3, H_0 de manière à satisfaire à la condition (35), c'est-à-dire telles que

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_0^2 = 0.$$

Les équations (40), (45) et (46') donnent

$$\Sigma H_k \frac{\partial H_k}{\partial u} = \Sigma H_k \frac{\partial H_k}{\partial v} = 0,$$

d'où l'*intégrale première* de (46)

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_0^2 = \lambda = \text{const.}$$

on peut toujours choisir les constantes d'intégration de manière à avoir $\lambda = 0$.

Notre problème est complètement résolu : la détermination de S dépend de *deux fonctions arbitraires* d'une variable ; S étant choisie, S' dépend encore de *trois constantes arbitraires*.

12. Cas ou la transformation de Ribaucour dégénère en une inversion. — En réunissant les résultats du paragraphe **7** (couple S, S' perspectif) avec ceux du paragraphe **11** (couple S, S' enveloppe d'une famille de sphères à deux paramètres), nous obtenons un couple de surfaces S, S' inverses l'une de l'autre ; en effet si nous écrivons que la droite qui joint les points de contact d'une sphère dépendant de deux paramètres u, v

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax - 2by - 2cz + 2p = 0,$$

avec son enveloppe, passe par un point fixe, par exemple l'origine, nous obtenons

$$\frac{\partial p}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire $p =$ const. Notre sphère est donc orthogonale à la sphère fixe ayant pour centre l'origine et pour rayon $\sqrt{2p}$, ce qui démontre la propriété énoncée.

Le couple (S, S') que nous venons de mettre en évidence avait déjà été rencontré par M. Thybaut dans sa Thèse : *Sur la déformation du paraboloïde* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. 14, 1897, p. 45-98) ; ce dernier a montré que les surfaces A et A' polaires réciproques de S et S' par rapport à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 - p = 0$ sont applicables sur le paraboloïde de révolution de paramètre p. Les plans tangents des surfaces A et A' sont parallèles comme perpendiculaires au rayon qui joint l'origine aux points correspondants de S et S'.

Les images sphériques des lignes de courbure de S et S' sont deux réseaux isothermes de la sphère, de sorte que, *a priori*, nous pouvons mettre le ds^2 de S et celui $d\sigma^2$ de sa représentation sphérique sous la forme

$$ds^2 = A^2\, du^2 + C^2\, dv^2, \qquad d\sigma^2 = \rho(u, v)\,[du^2 + dv^2],$$

et de même pour S′ avec deux fonctions $U(u)$ et $V(v)$

$$ds'^2 = k(u, v)[A^2 du^2 + C^2 dv^2], \qquad d\sigma'^2 = \rho'(u, v)[U du^2 + V dv^2].$$

Or en achevant les calculs amorcés par M. Thybaut, on constate que U et V se réduisent à l'unité, de sorte que *les surfaces* S *et* S′ *sont en représentation conforme en même temps que leurs représentations sphériques.*

Nous avons montré qu'aux asymptotiques de S correspond sur S′ un réseau conjugué; or M. Gambier a étudié aux *Annales de l'École Normale supérieure* (3ᵉ série, t. XXXIX, 1922, p. 217-271) les couples de surfaces qui peuvent, *en même temps que leurs représentations sphériques être mis en correspondance conforme :* un premier cas est celui où le rapport $\frac{R}{R_1}$ de rayons de courbure principaux se conserve quand on passe de S à S′ : alors, les asymptotiques se conservent, c'est le cas P_1 de M. Gambier; un second et dernier cas est celui où $\frac{R}{R_1}$ est remplacé par son opposé en passant de S à S′, c'est le cas P_2 de M. Gambier. Ici nous sommes donc dans le cas P_2.

M. Thybaut a montré que cette propriété du couple spécial S, S′ trouvé ici est *caractéristique :* tous les couples de *surfaces inverses* S *et* S′ *dont la représentation sphérique est isotherme* s'obtiennent par le procédé indiqué ici; et au fond, on est ramené à trouver une surface applicable sur le paraboloïde de révolution.

M. Thybaut a même fait constater que : *si deux surfaces inverses sont telles qu'aux asymptotiques de l'une corresponde sur l'autre un réseau conjugué, les deux réseaux conjugués ainsi définis sont à invariants ponctuels égaux et les deux surfaces ont une représentation sphérique isotherme.*

La théorie des douze surfaces de Darboux joue actuellement ici : si l'on introduit les deux surfaces B, B′ qui correspondent à A et A′ par orthogonalité des éléments linéaires, on peut placer B et B′, *qui sont des surfaces minima de façon qu'elles soient focales d'une même congruence rectiligne et que les asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces* B *et* B′. Cette configuration B, B′ avec la congruence W correspondante a reçu le nom de congruence de Thybaut.

Si maintenant on introduit les surfaces minima *adjointes* B_1 à B,

B'_1 à B', les deux surfaces minima B_1 et B'_1 ont même représentation sphérique que S et S′, comme l'a montré M. Thybaut, de sorte que B_1 et B'_1 sont deux surfaces minima que nous obtenons en partant des fonctions θ_1, θ_2, θ_3 mises en jeu ici et choisissant convenablement θ_4.

Naturellement sur B_1 et B'_1 les asymptotiques se correspondent (car sur B et B′ les lignes de courbure se correspondent) de sorte que la transformation de Moutard étudiée ici et appliquée à B_1 donne une surface non minima, et non pas B'_1, en vertu de la remarque que nous avons faite sur les asymptotiques dans la transformation étudiée ici. Je termine en rappelant que M. Gambier à propos de ses recherches sur les courbes de Bertrand (*Travaux scientifiques de l'Université de Lille*, nouvelle série, vol. 4, 1926, p. 65) a précisé les résultats de M. Thybaut; dans la solution de M. Thybaut, il y avait à donner à la surface B′ une translation convenable; en partant d'une courbe à torsion constante réelle, on obtient en grandeur et position le couple B, B′. Il y a aussi de nombreuses questions de réalité qui se posent ici (surfaces applicables physiquement ou non sur le paraboloïde). Nous devons aussi ajouter, en hommage à la Mémoire de Bianchi : que c'est Bianchi qui a signalé à M. Gambier comment le couple spécial S, S′ découvert par M. Thybaut, donne une solution nouvelle du problème P_2. Ces surfaces S et S′ sont encore caractérisées par la relation

$$\rho + \rho' = -\frac{q}{p}, \tag{47}$$

où ρ et ρ' sont les rayons de courbure principaux de S,

$$2q = x^2 + y^2 + z^2, \qquad p = cx + c'y + c''z$$

(c, c', c'' cosinus directeurs de la normale). On vérifie que si S satisfait à l'équation (47), il en est de même de son inverse S′, ceci met encore en évidence la réciprocité des surfaces S et S′ et le fait que les images sphériques des lignes de courbure de ces dernières sont isothermes.