JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT MAZET

Sur la stabilisation des liaisons d'asservissement

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 15 (1936), p. 133-150.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1936_9_15__133_0>

Sur la stabilisation des liaisons d'asservissement;

Par Robert MAZET,

Maître de conférences à l'Université de Lille.

Généralités.

La notion de *liaison d'asservissement* a été dégagée par M. Henri Béghin dans un Mémoire fondamental (¹). On appelle ainsi une liaison caractérisée par un ensemble de forces dont le travail élémentaire est nul pour un certain groupe (G) de déplacements virtuels connu *a priori*, mais qui n'est pas le groupe des déplacements compatibles avec la liaison (ce qui la distingue d'une liaison ordinaire à travail nul). Dans l'exposé qui va suivre, nous nous bornerons pour plus de clarté au cas d'un système (S) à deux paramètres p et q comportant une liaison d'asservissement de la forme

$$\theta(p, q, t) = 0. \tag{1}$$

On peut, sans restreindre la généralité, supposer que le groupe (G) des déplacements virtuels pour lesquels les forces d'asservissement $\Sigma F'$ ont un travail nul est le groupe

$$dp = 0. \tag{G}$$

Il en résulte que le travail virtuel de ces forces de liaison pour dp, dq

(¹) Voir par exemple P. Appell, *Mécanique*, 2, p. 395-410 (Gauthier-Villars, 1931).

arbitraires est de la forme

$$(2) \qquad d\mathfrak{T}(\Sigma F') = R(p, q, p', q', t)\, dp,$$

la fonction R étant *a priori* inconnue.

Nous supposerons que toutes les liaisons ordinaires du système (qui ont servi à réduire à deux le nombre des paramètres) sont des liaisons holonomes à travail nul. Enfin le système est soumis à certaines forces données [1] ΣF que nous supposerons définies par la somme de leurs travaux virtuels pour dp, dq arbitraires

$$(3) \qquad d\mathfrak{T}(\Sigma F) = P(p, q, p', q', t)\, dp + Q(p, q, p', q', t)\, dq.$$

Il est facile d'écrire un système de deux équations définissant le mouvement de (S). En effet, nous avons d'une part l'équation (1). D'autre part l'équation de Lagrange relative au paramètre q n'introduit pas l'inconnue auxiliaire R; elle est de la forme

$$(4) \qquad ap'' + bq'' + c = Q,$$

a, b, c, et Q étant des fonctions connues de p, q, p', q', t (à vrai dire, a et b ne renferment ni p', ni q', mais cette particularité ne joue aucun rôle dans la suite).

Asservissement par dosage exact.

En même temps que le mouvement se trouve défini par le système (1) — (4), l'équation de Lagrange relative au paramètre p

$$(5) \qquad \alpha p'' + \beta q'' + \gamma = P + R,$$

dans laquelle α, β, γ et P sont des fonctions connues de p, q, p', q', t, permet de calculer R.

Effectuons ce calcul : l'équation (1), dérivée deux fois, s'écrit

$$(6) \qquad Ap'' + Bq'' + C = 0,$$

A, B, C étant des fonctions connues de p, q, p', q', t; en éliminant p''

---

[1] Ce sont les forces directement appliquées.

et q'' entre (2), (3) et (4), il vient

$$\begin{vmatrix} a & b & c - Q \\ \alpha & \beta & \gamma - P - R \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0,$$

relation qui détermine R en fonction de p, q, p', q', t :

$$R = -\frac{1}{aB - bA}\begin{vmatrix} a & b & c - Q \\ \alpha & \beta & \gamma - P \\ A & B & C \end{vmatrix} \quad (7)$$ [1].

On voit que R *dépend des forces données* représentées par P et Q.

Réciproquement, si, faisant abstraction de la liaison (1), on applique au système (S), à deux paramètres *indépendants* p et q, d'une part le système des forces données ΣF définies par (3), d'autre part un système supplémentaire de forces $\Sigma F'$ définies par l'expression (2) de leur travail virtuel, expression dans laquelle R a la valeur (7), et si l'on abandonne le système (S) dans des conditions initiales compatibles avec (1), les paramètres p et q varieront, au cours du mouvement ainsi obtenu, *de telle sorte que la relation* (1) *soit constamment vérifiée.*

On dit alors que la liaison (1) est réalisée *par dosage exact des forces d'asservissement.* C'est toujours de cette manière que se présentent, en pratique, les problèmes d'asservissement : A la différence d'une liaison ordinaire (par exemple contact de deux solides) dans laquelle le dosage de la réaction est *automatiquement assuré* par la liaison elle-même, c'est l'inverse auquel on assiste ici : *le dosage conditionne la liaison et doit donc être réalisé en dehors d'elle* [2]. L'organe auxiliaire auquel on s'adresse pour doser les forces $\Sigma F'$ et les exercer sur (S) s'appelle un *moteur d'asservissement.*

Il n'est d'ailleurs nullement nécessaire que la liaison à établir soit holonome, c'est-à-dire de la forme (1). Le raisonnement qui précède

---

[1] On suppose essentiellement $aB - bA \not\equiv 0$; d'autre part il est clair qu'on ne change rien en ajoutant à R une fonction quelconque de p, q, p', q', t s'annulant pour $\theta \equiv 0$.

[2] Une telle liaison est dite *indirecte.*

ne sera pas modifié si elle fait intervenir, outre des paramètres eux-mêmes, leurs dérivées soit du premier ordre, telle

$$\varphi(p, q, p', q', t) = 0 \quad [1],$$

soit même du second ordre sous forme *linéaire*, telle

$$Ap'' + Bp'' + C = 0$$

(A, B, C fonctions connues de p, q, p', q', t).

Double instabilité du dosage exact minimum. Moyens d'y remédier.

L'utilisation pratique des liaisons d'asservissement commande qu'une telle liaison soit *stable*, vis-à-vis d'une part des conditions initiales, d'autre part de l'action du moteur. Précisons ce que l'on entend par là :

1° Les conditions initiales ne sont pas *ipso facto* compatibles avec la relation (1). Lorsqu'on essaie de réaliser cette compatibilité, on réussit simplement à s'en rapprocher le plus possible. Il faudra que, dans ces conditions, le mouvement obtenu à l'aide du dosage R [défini par (7)] respecte la liaison au même degré de précision que les conditions initiales, c'est-à-dire que $|\theta|$ soit borné, quel que soit t, par un nombre M qui tende vers zéro en même temps, que θ_0 et θ'_0.

2° En pratique, le moteur d'asservissement s'acquitte plus ou moins bien de sa tâche. Lorsqu'on le règle en vue de réaliser le dosage *exact* R, on réussit simplement à obtenir un dosage *voisin* $R + \psi$ dans lequel ψ est une fonction *a priori* inconnue de p, q, p', q', t que l'on s'efforce de rendre aussi petite que possible [2] (on peut seulement la supposer bornée, en valeur absolue, par un nombre L).

---

[1] Citons, comme exemples d'une liaison de cette espèce, les dispositifs d'*indicateurs de vitesse*, *tachymètres*, etc., qui réalisent des asservissements du type $p = f(q')$.

[2] C'est ce qui se produit notamment quand le réglage est effectué, à chaque instant, par un être humain qui cherche à corriger les écarts au fur et à mesure qu'ils apparaissent (en manœuvrant, par exemple, une barre de commande).

Il faudra que, dans ces conditions, le mouvement obtenu à partir de conditions initiales compatibles avec (1) respecte la liaison au même degré de précision que l'action du moteur, c'est-à-dire que $|\theta|$ soit borné, quel que soit t, par un nombre N qui tende vers zéro en même temps que L.

Partant de là, il est aisé de définir la stabilité simultanée vis-à-vis des deux effets qui, seule, confère à la liaison son caractère pratique.

Remarque. — Pour être tout à fait complet, il y aurait lieu de considérer séparément la stabilité de chacun des paramètres p et q. Une fois la stabilité de la liaison (1) assurée, en joignant à l'équation (4) la relation

$$\theta(p, q, t) = \varepsilon(t, p_0, q_0, p'_0, q'_0),$$

dans laquelle $|\varepsilon|$ est aussi petit qu'on le veut, on ramènerait cette dernière question à l'étude des intégrales infiniment voisines du système (1)-(4), problème connu pour lequel nous prions le lecteur de se reporter au magistral Traité de M. Goursat [1].

Nous allons montrer que l'asservissement par dosage exact, s'il est effectué au moyen de R *seul* (*dosage exact minimum*), présente le grave inconvénient d'être instable à la fois vis-à-vis des conditions initiales et de l'action du moteur.

En effet, le raisonnement qui a conduit à R ne faisant intervenir que θ'', tout se passe comme s'il s'agissait non de la liaison $\theta = 0$, mais de la liaison *moins restrictive* $\theta'' = 0$. Remplaçons alors, dans l'équation (5), R par $R + \psi$:

$$\alpha p'' + \beta q'' + \gamma = P + R + \psi. \tag{8}$$

θ'', dont nous avons représenté le développement par $Ap'' + Bq'' + C$ [formule (6)], n'est plus identiquement nul; cherchons sa nouvelle valeur; pour cela, tirons p'' et q'' des équations (4)-(8) :

$$p'' = \frac{-b(P + R + \psi - \gamma) + \beta(Q - c)}{a\beta - b\alpha},$$

$$q'' = \frac{a(P + R + \psi - \gamma) - \alpha(Q - c)}{a\beta - b\alpha};$$

---

[1] *Cours d'Analyse*, t. III, Chap. XXIII.

d'où

$$\theta'' = \frac{(aB - bA)(P + R + \psi - \gamma) + (A\beta - B\alpha)(Q - c)}{a\beta - b\alpha} + C.$$

Si l'on remarque que R, d'après son expression (7), a juste la valeur qu'il faut pour annuler θ'' lorsqu'on y fait $\psi = 0$, il vient simplement

$$(9) \qquad \theta'' = \frac{\psi}{\Delta},$$

en posant

$$\frac{a\beta - b\alpha}{aB - bA} = \Delta.$$

Lorsque ψ est nul (action exactement dosée), la relation $\theta'' = 0$ donne par intégration $\theta = \theta_0 + \theta'_0 (t - t_0)$, ce qui montre l'instabilité de la liaison vis-à-vis des conditions initiales. La conclusion est analogue lorsque, θ_0 et θ'_0 étant nuls, ψ n'est pas identiquement nul : en effet, le second membre de (9) est alors au cours du mouvement une certaine fonction $u(t)$ et la relation $\theta'' = u(t)$ donne par intégration

$$\theta = \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} u(t)\, dt.$$

Il ne suffit pas que $|u(t)|$ soit borné pour que $|\theta|$ le soit; on peut donc dire qu'en général, quelque petit que soit $|u(t)|$ (1), $|\theta|$ augmentera indéfiniment avec le temps, ce qui démontre l'instabilité de la liaison vis-à-vis de l'action du moteur (2).

Cette double instabilité peut être corrigée par l'adjonction à R d'un terme complémentaire convenablement choisi. En effet, remplaçons R par une expression de la forme

$$R + \rho_1 \theta' + \rho_2 \theta,$$

ρ_1 et ρ_2 étant deux fonctions arbitraires de p, q, p', q', t. L'équation (9)

(1) $|u(t)|$ est bornable à volonté si l'on suppose que $|\psi|$ le soit et si l'on admet, pour ne pas créer de difficulté accessoire, que le numérateur de Δ $a\beta - b\alpha$ ne s'annule pas.

(2) Par contre, en vertu de la relation (9), la liaison $\theta'' = 0$ est *doublement stable*.

devient

(10) $$\theta'' - \frac{\rho_1}{\Delta}\theta' - \frac{\rho_2}{\Delta}\theta = \frac{\psi}{\Delta}.$$

En choisissant convenablement ρ_1 et ρ_2 (par exemple en prenant $\rho_1 = -\lambda\Delta$, $\rho_2 = -\mu\Delta$, λ et μ étant deux constantes *positives*) et supposant $\left|\frac{\psi}{\Delta}\right|$ borné par un nombre L arbitrairement petit, on démontre, sous des conditions très générales [telles que possibilité du développement de $\frac{\psi}{\Delta} = u(t)$ en série de Fourier], la double stabilité de la liaison vis-à-vis des données initiales et de l'action du moteur [1].

Il n'en reste pas moins que *le dosage exact demande la connaissance préalable de toutes les forces agissant sur le système.*

Nous allons montrer que l'on peut obtenir l'asservissement d'une tout autre manière, *indépendamment des forces données*. Pour cela, nous nous inspirerons de la dernière remarque concernant l'adjonction à R d'une expression *stabilisante* de la forme $\rho_1\theta' + \rho_2\theta$.

Asservissement par couple de rappel.

Considérons un système de forces données $\Sigma F''$ définies par l'expression suivante de leur travail virtuel pour dp, dq arbitraires

(11) $$d\mathfrak{S}(\Sigma F'') = \rho(p, q, p', q', t)\,\theta(p, q, t)\,dp,$$

ρ étant une fonction donnée, *arbitraire* moyennant certaines réserves que nous préciserons, de p, q, p', q' et t.

Nous dirons que ce système constitue *un couple de rappel agissant sur le paramètre p en vue de la liaison* $\theta = 0$.

Si nous appliquons au système (S), à deux paramètres indépendants p et q, d'une part les forces anciennement données ΣF, définies par (3), d'autre part le couple de rappel $\Sigma F''$, défini par (11), et si nous

---

[1] Si l'on se reporte à la note [1] de la page 135, on voit maintenant que l'adjonction à R d'un terme complémentaire s'annulant pour $\theta \equiv 0$, s'il ne modifie pas la liaison, peut du moins influer sur sa stabilité.

l'abandonnons dans des conditions initiales compatibles avec (1), la relation (1) ne restera pas, en général, vérifiée au cours du mouvement. En effet, un calcul analogue à celui qui a conduit aux relations (9) ou (10) donne maintenant

$$\theta'' = \frac{\rho\theta - R}{\Delta}, \tag{12}$$

équation qui n'est pas, en général, vérifiée par $\theta \equiv 0$ [1].

Mais supposons que ρ *dépende d'une constante arbitraire* k et que, lorsque k tend vers une certaine valeur k_1, $\left|\frac{\Delta}{\rho}\right|$ *augmente indéfiniment* pour toutes les valeurs prises par p, q, p' q', t au cours du mouvement.

En posant $\frac{R}{\Delta} = -U$ et écrivant

$$\theta = \frac{\Delta}{\rho}(\theta'' - U), \tag{12'}$$

on voit que, si le mouvement (défini comme il est dit ci-dessus) tend, pour $k \to k_1$, vers un mouvement limite dans lequel $|\theta'' - U|$ reste borné, *ce mouvement limite est nécessairement le mouvement asservi.* En effet, on peut le regarder comme défini par l'équation (4), indépendante de ρ, et par ce que devient l'équation (12) ou (12') pour $k = k_1$, c'est-à-dire justement $\theta = 0$.

Le mouvement asservi est ainsi défini comme *limite d'un mouvement ordinaire* dans lequel le système (S) à deux paramètres p et q est soumis aux forces données ΣF et $\Sigma F''$ *entièrement indépendantes les unes des autres.* En pratique, un tel mouvement n'est pas compliqué à réaliser, tout au moins d'une manière approchée : il suffit de demander les forces $\Sigma F''$ à un organe auxiliaire qui porte encore le nom de *moteur d'asservissement.* La seule difficulté consiste à se rapprocher le plus possible du mouvement limite ; on y arrive en utilisant un moteur suffisamment puissant, c'est-à-dire correspondant à une valeur de k suffisamment voisine de k_1 pour que l'action de rappel corrige aussitôt les écarts naissants.

Cette façon d'obtenir l'asservissement ne nécessite pas les mêmes

(1) Elle ne l'est que si R est identiquement nul, c'est-à-dire si $\theta'' = 0$ est une conséquence des forces ΣF.

précautions que la précédente : Par sa nature même, elle est *stable* à la fois vis-à-vis des conditions initiales et de l'action du moteur. En effet, on pourra toujours (théoriquement du moins) prendre $|\theta_0|$, $|\theta'_0|$ et $|k - k_1|$ suffisamment petits pour que, en vertu de (12') et de l'hypothèse $|\theta'' - U|$ borné, $|\theta|$ soit borné, quel que soit t, par un nombre M arbitrairement petit. *On n'a donc pas à se préoccuper d'un dosage exact des forces d'asservissement.* En contrepartie, la liaison (1) *n'est jamais assurée exactement* [1], mais seulement d'une manière d'autant plus approchée que le moteur dont on dispose est plus puissant.

Tous les exemples concrets d'asservissement (à l'exception des *mécanismes humains*) appartiennent à cette espèce, c'est-à-dire que la liaison y est, d'une façon ou d'une autre, réalisée par couple de rappel. Mais il n'est pas nécessaire que celui-ci soit de la forme $\rho\theta$; on peut remplacer le coefficient de ρ dans (11) par une expression plus complexe pourvu que celle-ci, égalée à zéro en tenant compte des conditions initiales $\theta_0 = \theta'_0 = 0$, soit équivalente d'une manière stable à la liaison voulue $\theta = 0$.

C'est ainsi que l'on distingue, en pratique, deux catégories de couples de rappel :

Les *couples de rappel direct*, caractérisés par

$$d\mathfrak{T}(\Sigma F'') = \rho\theta\, dp;$$

Les *couples de rappel indirect*, caractérisés par

$$d\mathfrak{T}(\Sigma F'') = \rho(\theta + \lambda\theta')\, dp,$$

λ étant une constante *positive*.

Nous allons examiner rapidement comment se comportent ces deux catégories au point de vue de la variation principale de θ lorsque la puissance du moteur d'asservissement correspond à une valeur de k très voisine de k_1.

---

[1] Sauf si R est identiquement nul. *Voir* note [1], p. 140.

Asservissement par couple de rappel direct. Mouvement tremblé.

J'ai déjà signalé ailleurs le résultat (¹). L'équation à résoudre étant

$$\theta = \frac{\Delta}{\rho}(\theta'' - \mathrm{U}), \tag{12'}$$

on peut l'écrire

$$\theta'' - \frac{\rho}{\Delta}\theta = \mathrm{U}. \tag{12''}$$

La fonction $\rho(k; p, q, p', q', t)$ étant arbitraire sous réserve que $\left|\frac{\rho}{\Delta}\right|$ augmente indéfiniment lorsque k tend vers k_1, on peut prendre, pour fixer les idées et à titre d'exemple-type de moteur réalisant la liaison voulue,

$$\frac{\rho}{\Delta} = f(k),$$

$f(k)$ devenant infini pour $k = k_1$. L'équation (12″) montre que $f(k)$ doit être ***négatif*** pour que $|\theta|$ soit borné. Il s'ensuit que, faisant $k_1 = \infty$, on pourra prendre

$$\frac{\rho}{\Delta} = -k^2.$$

L'équation (12″) s'écrira alors

$$\theta'' + k^2\theta = \mathrm{U}(p, q, p', q', t), \tag{13}$$

k étant une constante. Nous devons supposer enfin que tout mouvement (M′) défini par (4)-(13) et des conditions initiales compatibles avec $\theta_0 = \theta'_0 = 0$ tend, lorsque k tend vers l'infini, vers un mouvement

(¹) *Sur une nouvelle définition des forces d'asservissement* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **198**, p. 1750). Les formules (4) et (5) de cette Note doivent être rétablies ainsi :

$$\varepsilon'' = \gamma_1(\rho_1\varepsilon + \psi_1), \qquad \alpha_1\eta'' + \beta_1\varepsilon'' + \mathrm{C}_1\eta' + \mathrm{D}_1\varepsilon' + \mathrm{E}_1\eta + \mathrm{F}_1\varepsilon = 0.$$

limite dans lequel $|\theta'' - U|$ reste borné; nous appellerons, pour abréger, cette dernière hypothèse l'*hypothèse de convergence*.

Cela étant, et sachant que le mouvement limite n'est autre que le mouvement asservi (M), la variation principale de θ pour k très grand $\left(\frac{1}{k^2}\text{ infiniment petit principal}\right)$ s'obtient en résolvant l'équation approchée

$$\theta'' + k^2\theta = U_1(t, p_0, q_0, p'_0, q'_0) \tag{14}$$

[U_1 : valeur de $U(p, q, p', q', t)$ pour le mouvement (M) considéré] et se bornant aux termes du premier ordre; on trouve ainsi

$$\theta \sim \frac{1}{k^2}(U_1 - U_0 \cos kt) \quad (^1). \tag{15}$$

Pour que cette solution soit d'accord avec l'hypothèse de convergence, il est nécessaire que $|U_1|$ et $|U''_1|$ soient bornés quel que soit t (2).

L'équation (15) montre que la variation principale de θ est formée de deux termes : une *variation forcée* $\frac{U_1 - U_0}{k^2}$ qui reproduit, à l'échelle infinitésimale $\frac{1}{k^2}$, la variation de $U_1(t)$, et une *vibration* $\frac{U_0}{k^2}(1 - \cos kt)$ dont l'amplitude est également très petite, *mais dont la fréquence est très grande*.

Cette vibration et le *mouvement tremblé caractéristique* qui en résulte (quelle que soit la puissance du moteur) présentent de graves inconvénients que tous les constructeurs connaissent et sur lesquels il ne me paraît pas utile d'insister : ronronnement, fatigue anormale des organes de liaison, possibilité de résonances élastiques, etc.

---

(1) U_0 : valeur initiale de U_1; l'équation (14) admet pour intégrale particulière la série (supposée convergente) $\frac{1}{k^2}\left(U_1 - \frac{U''_1}{k^2} + \frac{U^{\text{IV}}_1}{k^4} - \ldots\right)$ dont la partie principale est $\frac{U_1}{k^2}$.

(2) On sait par les raisonnements analogues sur la stabilité que, réciproquement, cette condition n'entraîne pas *ipso facto* la convergence.

Asservissement par couple de rappel indirect.

L'équation à résoudre est

$$\theta + \lambda\theta' = \frac{\Delta}{\rho}(\theta'' - \mathrm{U}).$$

On peut l'écrire

$$\theta'' - \frac{\rho}{\Delta}\lambda\theta' - \frac{\rho}{\Delta}\theta = \mathrm{U}. \tag{16}$$

Le même raisonnement que ci-dessus conduit à prendre, comme exemple-type de moteur réalisant la liaison voulue,

$$\frac{\rho}{\Delta} = -k^2.$$

L'équation (16) s'écrit alors

$$\theta'' + \lambda k^2\theta' + k^2\theta = \mathrm{U}(p, q, p'\, q', t),$$

λ et k étant deux constantes. On doit faire en outre l'*hypothèse de convergence* qui conserve le même énoncé que précédemment.

La variation principale de θ pour k très grand s'obtient ici encore en résolvant l'équation approchée

$$\theta'' + \lambda k^2\theta' + k^2\theta = \mathrm{U}_1(t;\, p_0,\, q_0,\, p'_0,\, q'_0) \tag{17}$$

[U_1 : valeur de U pour le mouvement (M) considéré].

L'équation caractéristique de l'équation sans second membre est

$$r^2 + \lambda k^2 r + k^2 = 0. \tag{18}$$

Pour qu'elle ait ses racines réelles (intégrale générale apériodique préférable à la solution amortie), il faut que

$$k^2 - \frac{4}{\lambda^2}$$

soit *positif*, ce qui sera toujours réalisé pour k suffisamment grand.

Les racines de l'équation (18) sont alors

$$r_1 \sim -\frac{1}{\lambda}, \qquad r_2 \sim -\lambda k^2,$$

et l'intégrale générale de l'équation (17) prend la forme

$$\theta = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + \frac{V_1}{k^2},$$

V_1 désignant une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{V''}{k^2} + \lambda V' + V = U_1.$$

Si $|V_1''|$ est borné, la partie principale de V_1 est solution de

$$\lambda V' + V = U_1.$$

On peut prendre par exemple

$$V_1 \sim U_1 - \lambda U_1' + \lambda^2 U_1'' - \lambda^3 U_1''' + \ldots$$

en supposant cette série convergente; d'où finalement

$$\theta \sim C_1 e^{-\frac{t}{\lambda}} + C_2 e^{-\lambda k^2 t} + \frac{1}{k^2}(U_1 - \lambda U_1' + \ldots).$$

Pour que cette solution soit d'accord avec l'hypothèse de convergence, il est *nécessaire* d'une part que les fonctions $|U_1|$ et $|V_1''|$ soient bornées quel que soit t, d'autre part que les constantes $|C_1|$ et $|C_2 \times k^4|$ restent bornées lorsque k tend vers l'infini. Cette dernière condition est bien réalisée, car les conditions initiales $\theta_0 = \theta_0' = 0$ donnent

$$C_1 \sim -\frac{1}{k^2}(U_0 - \lambda U_0' + \ldots), \qquad C_2 \sim \frac{U_0}{\lambda^2 k^4} \quad (^1).$$

On voit que le terme en C_2 peut être négligé et que, tous calculs faits, la variation principale de θ se réduit à

$$\Theta \sim \frac{1}{k^2}(U_1 - \lambda U_1' + \ldots) - \frac{1}{k^2}(U_0 - \lambda U_0' + \ldots) e^{-\frac{t}{\lambda}}.$$

Elle se compose de deux termes : une *variation forcée*

$$\frac{1}{k^2}[U_1 - U_0 - \lambda(U_1' - U_0') + \ldots]$$

---

(1) U_0, U_0', ... : valeurs initiales de U_1, U_1', ...

de l'ordre $\frac{1}{k^2}$, qui résulte de la variation de $U_1(t)$ (et la reproduit d'ailleurs à peu près si λ est suffisamment petit), et une *déviation apériodique*

$$\frac{U_0 - \lambda U'_0 + \ldots}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)$$

qui, partant de zéro, tend rapidement vers une valeur asymtotique de l'ordre de $\frac{1}{k^2}$.

Le montage avec couple de rappel indirect présente donc un avantage très net sur le montage avec couple de rappel direct. Grâce au terme en θ', *toute trace de vibration disparaît* : la stabilisation est assurée dans des conditions presque parfaites. C'est la raison qui justifie l'emploi de ce montage dans les asservissements destinés aux appareils de précision [1].

Asservissements non holonomes.

On pourrait traiter de la même façon le cas d'un asservissement non holonome du premier ordre

$$\varphi(p, q, p', q', t) = 0 \quad [2],$$

ou du second ordre (linéaire)

$$Ap'' + Bq'' + C = 0$$

(A, B, C : fonctions de p, q, p', q', t).

On constaterait qu'un couple de rappel direct permet d'obtenir la liaison voulue d'une manière stable et *sans vibration*.

Supposons par exemple que l'on veuille établir la liaison (*indicateurs de vitesse*)

$$p = f(q').$$

---

(1) Je signale, avec l'aimable autorisation de M. H. Béghin qui en est l'auteur, un dispositif simple et efficace de rappel indirect : il consiste à exciter le moteur d'asservissement au moyen d'un courant électrique proportionnel à θ auquel on superpose, par induction, un courant proportionnel à θ'.

(2) L'asservissement $\theta + \lambda\theta' = 0$ appartient en fait à cette catégorie.

En utilisant un couple de rappel direct du type

$$d\mathfrak{T}(\Sigma F'') = -k^2 \Delta[p - f(q')]\, dp,$$

la variation principale de la liaison sera de la forme

$$p - f(q') \sim \frac{1}{k^2}(U_1 - U_0 e^{-k^2 t}) \quad (^1). \tag{19}$$

Dans le cas d'un asservissement du second ordre, on constate immédiatement que la variation principale serait de la forme

$$A p'' + B q'' + C \sim \frac{U_1}{k^2}.$$

Application au gyroscope.

Considérons un solide de révolution homogène et pesant mobile autour d'un point fixe de son axe, distinct de son centre de gravité (*gyroscope lesté*). En désignant par ψ, θ, φ les angles d'Euler habituels (ψ : angle du plan vertical contenant l'axe Δ du gyro avec un plan vertical origine; θ : angle de Δ avec la verticale ascendante; φ : rotation propre), par A et C les moments d'inertie équatorial et axial, par Pa la constante de gravité du gyro, les équations de Lagrange relatives à chacun des trois paramètres s'écrivent, comme il est bien connu :

(paramètre φ)

$$\frac{d}{dt}(\psi' \cos\theta + \varphi') = 0, \qquad \psi' \cos\theta + \varphi' = \psi'_0 \cos\theta_0 + \varphi'_0 = r_0;$$

(paramètre ψ)

$$A \frac{d}{dt}(\psi' \sin^2\theta) - C r_0 \theta' \sin\theta = 0;$$

(1) De même, si l'on établit l'asservissement $\theta' = 0$ (θ fonction donnée de p, q, t) au moyen du couple de rappel $d\mathfrak{T}(\Sigma F'') = -k^2 \Delta\theta'\, dp$, la variation principale de θ' est de la forme (19); remarquer que, dans ce cas, si la liaison $\theta' = 0$ est bien stable, *la liaison* $\theta =$ const. *par contre, en général, ne l'est pas* $\left(\theta - \theta_0 \sim \frac{1}{k^2}\int_0^t U_1\, dt,\ \text{non borné}\right)$.

(paramètre θ)

$$A(\theta'' - \psi'^2 \sin\theta\cos\theta) - Cr_0\psi'\sin\theta = Pa\sin\theta.$$

r_0 étant donné, les deux dernières définissent le mouvement de l'axe Δ du gyro à partir de conditions initiales arbitraires ψ_0, θ_0, ψ'_0, θ'_0. Supposons que, sans changer les conditions initiales concernant Δ, on modifie φ'_0 de manière à remplacer r_0 par $r_0 + \rho$, ρ étant une nouvelle constante. Les deux dernières équations peuvent alors s'écrire

$$A\frac{d}{dt}(\psi'\sin^2\theta) - Cr_0\theta'\sin\theta = C\rho\theta'\sin\theta, \tag{20}$$

$$A(\theta'' - \psi'^2\sin\theta\cos\theta) + Cr_0\psi'\sin\theta = Pa\sin\theta - C\rho\psi'\sin\theta, \tag{21}$$

ce qui montre que cette modification équivaut à appliquer à l'axe Δ des forces supplémentaires $\Sigma F''$ définies par l'expression suivante de leur travail virtuel pour $d\psi$, $d\theta$ arbitraires :

$$d\mathcal{E}(\Sigma F'') = C\rho\sin\theta(\theta'\,d\psi - \psi'\,d\theta) \quad (^1).$$

Lorsque ρ augmente indéfiniment (en valeur absolue), *ces forces fictives constituent deux couples de rappel* :

l'un (Γ_1) agissant sur le paramètre ψ en vue de la liaison $\theta' = 0$;
l'autre (Γ_2) agissant sur le paramètre θ en vue de la liaison $\psi' = 0$.

Mais le couple (Γ_1) possède une autre fonction, plus générale, qu'il exerce *quel que soit* ρ et qui va rendre surabondant son rôle de couple de rappel : c'est de *maintenir l'équivalence entre les liaisons* $\psi' =$ const. *et* $\theta =$ const. En effet, grâce à sa forme particulière, l'équation (20) est intégrable et donne

$$A\psi'\sin^2\theta + C(r_0 + \rho)\cos\theta = \text{const.}, \tag{22}$$

ce qui démontre l'équivalence annoncée.

Il en résulte que le couple (Γ_2), en réalisant la liaison $\psi' = 0$, assure par contre-coup la liaison $\theta =$ const. plus restrictive, comme on l'a vu, que la liaison dérivée $\theta' = 0$ qui, sans cela, sera assumée directement par (Γ_1).

---

(1) Les forces $\Sigma F''$ ne sont autres que les *forces de Coriolis* correspondant à l'accroissement ρ de la rotation propre.

En résumé, *donner à r_0 une valeur très grande revient à réaliser, par couple de rappel direct, l'asservissement* $\theta =$ const. *de l'axe du gyro.*

Cherchons la variation principale de θ en resubstituant r_0 à $r_0 + \rho$:

La relation (22) donne, pour $\theta_0 = \alpha$, $\psi'_0 = 0$,

$$\psi' = \frac{Cr_0(\cos\alpha - \cos\theta)}{A\sin^2\theta} \sim \frac{Cr_0(\theta - \alpha)}{A\sin\alpha}, \tag{23}$$

d'où, en portant dans (21) et divisant par A,

$$\theta'' + \frac{C^2 r_0^2}{A^2}(\theta - \alpha) \sim \frac{Pa}{A}\sin\alpha,$$

équation de même type que l'équation (16) avec

$$k^2 = \frac{C^2 r_0^2}{A^2} \qquad \text{et} \qquad U_1 = \frac{Pa}{A}\sin\alpha.$$

On en déduit

$$\theta - \alpha \sim \frac{APa\sin\alpha}{C^2 r_0^2}\left(1 - \cos\frac{Cr_0}{A}t\right). \tag{24}$$

On voit que la variation forcée est nulle et que la variation de θ se réduit à une simple *vibration;* c'est elle qui donne au mouvement du gyroscope son aspect tremblé caractéristique et provoque le *ronronnement* qui l'accompagne.

Quant à la variation principale de ψ', elle résulte de la relation (23)

$$\psi' \sim \frac{Pa}{Cr_0}\left(1 - \cos\frac{Cr_0}{A}t\right) \quad (^1), \tag{25}$$

d'où par intégration

$$\psi - \psi_0 \sim \frac{Pa}{Cr_0}t. \tag{26}$$

On constate que, tandis que la liaison $\psi' = 0$ est stable, la liaison

(1) Ce résultat semble en désaccord avec la note (2) de la page 136, mais on est ici, *relativement à la liaison* $\psi' = 0$, dans le cas exceptionnel où $aB - bA = 0$, cas que nous avons laissé de côté dans cette étude.

$\psi = \text{const.}$ ne l'est pas : la variation lente et uniforme de ψ constitue la précession gyroscopique [1].

Remarque. — Si l'on cherche à réaliser le double asservissement $\theta = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ par *dosage exact* au moyen de forces $\Sigma F'$ définies par

$$d\mathcal{E}(\Sigma F') = R_1\, d\psi + R_2\, d\theta,$$

on trouve, en raisonnant comme nous l'avons fait au début de cet article pour la fonction R, c'est-à-dire en remplaçant les liaisons projetées par $\theta'' = 0$, $\psi'' = 0$ (*dosage exact minimum*),

$$R_1 = (2A\psi' \cos\theta - Cr_0)\theta' \sin\theta,$$
$$R_2 = -Pa \sin\theta + (Cr_0 - A\psi' \cos\theta)\psi' \sin\theta.$$

On sait que l'on ne change pas les liaisons en ajoutant ou retranchant à $\Sigma F'$ des forces qui cessent d'agir dès que les liaisons sont exactement assurées, mais que l'on peut ainsi améliorer la stabilité. C'est ainsi qu'en prenant simplement

$$R_1 = 0, \qquad R_2 = -Pa \sin\theta,$$

c'est-à-dire en appliquant à l'axe Δ du gyro un couple annulant le couple de gravité, on rend le double asservissement $\theta = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ stable vis-à-vis des condition initiales (si toutefois r_0 n'est pas nul), tandis qu'il reste instable vis-à-vis du dosage [2].

---

[1] Si ψ'_0 est différent de zéro, les formules (23) à (26) doivent être modifiées comme suit :

$$\psi' \sim \psi'_0 + \frac{Cr_0(\theta - \alpha)}{A \sin\alpha},$$
$$\theta - \alpha \sim -A \sin\alpha \left(\frac{\psi'_0}{Cr_0} - \frac{Pa + A\psi'^2_0 \cos\alpha}{C^2 r_0^2} \right) \left(1 - \cos \frac{Cr_0}{A} t \right),$$
$$\psi' \sim \frac{Pa + A\psi'^2_0 \cos\alpha}{Cr_0} + \psi'_0 \cos \frac{Cr_0}{A} t,$$
$$\psi - \psi_0 \sim \frac{Pa + A\psi'^2_0 \cos\alpha}{Cr_0} t + \frac{A\psi'_0}{Cr_0} \sin \frac{Cr_0}{A} t.$$

[2] On voit que l'*équilibrage* d'un système matériel peut être considéré comme un cas très particulier d'asservissement par dosage exact.